1 Лекция 1

1.1 Введение, струна в 10 измерениях.

Мы рассмотрим компактификацию суперструн $N = (1,1)$, то есть типа IIA и $N = (2,0)$, то есть типа IIB. Напомним, что эти струны делаются из голоморфного (правого) и антиголоморфного (левого) секторов типа Невье-Шварца NS и Рамона R. Мы будем интересоваться безмассовыми струнными состояниями, поскольку масса считается очень большой и недостижимой в современных экспериментах. В секторах NS и R есть векторные и спинорные состояния соответственно

$$\begin{aligned} &NS:\ V_\xi(k) = \xi_M \psi^M e^{ikX} e^{-\phi},\ k^2 = 0,\ k \cdot \xi = 0 \\ &R:\ V_u(k) = u_A S^A e^{ikX} e^{-1/2\phi},\ k^2 = 0,\ k_M \gamma^M u = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где A означает 16-компонентный Майорана-Вейлевский индекс в $d = 10$, а M - лоренцевский векторный индекс. Комбинируя голоморфный и антиголоморфный сектора согласно естественным условиям (взаимолокальность, замкнутость алгебры вертексов относительно OPE) получаем две теории со следующими наборами полей, соответствующих безмассовым частицам (вначале выписаны NS-NS поля, затем R-R, и наконец фермионы из NS-R и R-NS):

$$\begin{aligned} &IIA,\ N = (1,1):\ G_{MN}, B_{MN}, \Phi, (C_1)_M, (C_3)_{MNK}, \psi^{(+)}_{M,A}, \psi^{(-)}_{M,A}, \lambda^{(-)}_{\dot{A}}, \lambda^{(+)}_{A} \\ &IIB,\ N = (2,0):\ G_{MN}, B_{MN}, \Phi, C_0, (C_2)_{MN}, (C_4^+)_{MNKL}, \psi_{M,A}, \tilde{\psi}_{M,A}, \lambda_{\dot{A}}, \tilde{\lambda}_{\dot{A}} \end{aligned} \tag{2}$$

Эти поля преобразуются в соответствующих представлениях десятимерной группы Лоренца SO$(1,9)$. Их можно сопоставить частицам со спинами $2, 3/2, 1, 1/2, 0$. Для описания реального мира мы хотим иметь частицы в четырёх измерениях, которые соответствуют представлениям четырёхмерной группы Лоренца.

Естественная идея состоит в том, чтобы компактифицировать шесть пространственных измерений, то есть считать, что шесть измерений очень малы, и поэтому с четырёхмерной точки зрения невидимы. Необходимо, чтобы теория при этом не имела конформной аномалии, что накладывает ограничения на геометрию компактного шестимерного многообразия. Дополнительное физическое требование пространственно - временной Суперсимметрии компактифицированной теории накладывает дополнительные ограничения на эту геометрию.

Есть как минимум два способа реализации этой идеи. Первый, более геометрический, заключается в том, чтобы рассмотреть эффективную теорию поля, описывающую низкоэнергетичный предел безмассовой теории струн. Второй, скорее алгебраический, и описывающий всю теорию струн, состоит в том, чтобы материальный сектор теории струн составить из четырёхмерной свободной теории с центральным зарядом 6 и некоторой $N = 2$ суперконформной теории с центральным зарядом 9.

У каждого из подходов есть свои плюсы и минусы.Замечательно, что эти подходы можно сравнить, и в некоторых случаях они дают одинаковые ответы, являясь совершенно различными теориями.

1.2 Компактификация с точки зрения эффективной теории поля.

Как уже говорилось, безмассовые вертексы (2) преобразуются как поля десятимерной теории. Точнее они преобразуются как поля гравитационного супермультиплета.

Точнее корреляторы безмассовых полей в супергравитации совпадают в низших порядках с корреляторами соответствующих вертексов в теории струн. Мы также можем проделать это построение не в плоском пространстве, а на произведении $\mathbb{R}^{1,3} \times K^6$. При этом действие Полякова для теории струн записывается в виде действия σ-модели

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \mathrm{d}^2 z \sqrt{h} G_{MN}(X) \partial_a X^M \partial_b X^N h^{ab}(z) + \cdots , \tag{3}$$

где $G_{MN}(X)$ означает метрику на многообразии $\mathbb{R}^{1,3} \times K$ в координатах X^M.

Соответствующая эффективная теория будет теорией супергравитации на $\mathbb{R}^{1,3} \times K$. В эффективной теории действие имеет вид:

$$S_{eff} = \int \mathrm{d}^{10} w L(\Phi(w)) = \int \mathrm{d}^4 x \int \mathrm{d}^6 y \left[K(\Phi(x,y)) + V(\Phi(x,y)) \right], \tag{4}$$

где w^M - координаты на $\mathbb{R}^{1,3} \times K$, а x^μ и y^m - координаты на $\mathbb{R}^{1,3}$ и K соответственно, $\Phi(w)$ - совокупность десятимерных полей теории, и $K(\Phi)$ - кинетические члены в действии.

Аналогично, тому как мы действуем в подходе Калуцы-Клейна можно разложить поля $\Phi(x,y)$ по собственным функциям оператора кинетического члена компактной части пространства K.

$$\Phi(x,y) = \sum_i \phi^i(x) \otimes f^i(y),\ \Delta_K f^i(y) = \lambda^i f^i(y), \tag{5}$$

а затем проинтегрировать по координатам y на K. При этом получится четырёхмерная теория с Лагранжианом, который зависит от полей $\phi^i(x)$ с массами λ^i порядка $1/R$, где R масштаб многообразия K. При маленьком R массивные частицы можно игнорировать, в результате останутся лишь частицы, соответствующие нулевым модам. Такая теория будет четырёхмерной теорией гравитации с некоторой материей.

Из феноменологических соображений мы хотим, чтобы четырёхмерная теория была суперсимметричной. Изучим следствия этого требования для пространства компактификации K.

Вакуум теории $|0\rangle \in \mathscr{H}$ с ненарушенной суперсимметрией должен быть инвариантен относительно 4-х преобразований суперсимметрии

$$\delta_\epsilon|0\rangle = \epsilon^A Q_A|0\rangle = 0. \tag{6}$$

Из условия $\delta_\epsilon\Phi = [\epsilon Q, \Phi]$ следует, что $\langle\delta_\epsilon\Phi\rangle = 0$

В случае бозонных полей Φ это условие выполняется автоматически, поскольку их вариация является спинором и нетривиально преобразуется под действием $\mathrm{SO}(1,3)$, нарушая симметрию пространства Минковского. Среди фермионных полей в теории с суперсимметрией есть гравитино χ с вариацией

$$\delta_\epsilon\chi = \nabla\epsilon + \cdots \tag{7}$$

здесь ϵ означает 10-мерный Майорано-Вейлевский спинор, а многоточие означает члены, зависящие от других полей теории (чьи вакумные средние исчезают). Таким образом мы приходим к условию

$$\langle\nabla\epsilon\rangle = \tilde{\nabla}\epsilon = 0 \tag{8}$$

где тильда означает, что для метрики в связности используется её вакуумное среднее. Чтобы теория обладала N=1 d=4 суперсимметрией надо, чтобы уравнение $\nabla\epsilon = 0$ имело ровно одно решение. Оказывается, что многообразия, допускающие один ковариантно постоянный спинор, являются многообразиями Калаби-Яу, и про них будет рассказано в дальнейшем.

Нулевые моды операторов кинетических членов можно отождествить с когомологиями многообразия K, соответсвующим деформациям Кэлеровой и комплексной структур на нём. В полученной таким образом теории будут универсальные $N = 2$ мультиплеты: гравитационный и гипермультиплет

$$(2, 2 \times 3/2, 1)_\pm,\ (1/2, 2 \times 0, -1/2) + h.c. \tag{9}$$

а также переменное количество вектормультиплетов $(1, 2 \times 1/2, 0)$ и гипермультиплетов, зависящее от когомологий $h^{1,1}$ и $h^{2,1}$ компактифицирующего многообразия.

Метрика и константы взаимодействия в эффективной четырёхмерной теории таким образом определяются в низшем порядке геометрией пространства модулей K, интегралами определённых элементов когомологий. Из знания этих констант можно вычислять корреляционные функции различных четырёхмерных полей. Эти корреляционные функции можно сравнивать с аналогичными результатами теории струн, вычисляемых во втором подходе. Особый интерес будут представлять юкавские константы в векторном мультиплете. Оказывается, что вследствие теорем о неперенормируемости некоторые из этих констант не получают старших поправок.

1.3 Компактификация с точки зрения конформной теории.

В алгебраическом подходе к компактификации материальный сектор состоит из двух часткей. Одна часть аналогична $10d$ - теории в плоском пространстве является теорией 4-х фермионов и 4-х бозонов X^μ, ψ^μ, где индекс μ принимает значения $0, 1, 2, 3$. Вторая часть является некоторой $N = 2$ суперконформной теорией поля с центральным зарядом $c = 9$. Вертексы полной теории получаются из произведения вертексых операторов частей. Например, вертекс четырёхмерного гравитона имеет вид

$$V_G(k) = G_{\mu\nu}\bar{\psi}^\mu(\bar{z})\psi^\nu(z)e^{ikX}e^{-(\phi+\bar{\phi})}\cdot\Phi_0, \tag{10}$$

где Φ_0 - единичный оператор внутренней теории. Вертексы также должны принадлежать BRST когомологиям, чтобы быть физическими полями.

Внутренняя теориядолжна быть $N = 2$ суперсимметричной конформной теорией поля с $c = 9$, чтобы в полной теории можно было построить операторы четырёхмерной Суперсимметрии в Пространстве–Времени.

В таком случае можно построить аналогично универсальные четырёхмерные $N = 2$ мультиплеты из вертексных операторов. Как и в предыдущем подходе ими оказываются гравитационный и гипермультиплет.

Остальные гипер- и вектормультиплеты строятся из так называемых киральных и антикиральных полей конформной теории поля. Для них, в частности, выполняется формула $\Delta = \pm 1/2q$, где Δ - конформная размерность, а q - $U(1)$ заряд генератора $N = (2, 2)$ алгебры.

Корреляторы так построенных вертексов можно вычислять, зная корреляторы внутренней теории, и сравнивать их с выражениями для корреляторов четырёхмерных полей в эффективной теории.

Например оказывается, что для модель, в которой внутренняя теория произведение пяти $N = 2$ минимальных моделей 3^5 (каждая имеет индекс $k = 3$ и центральный заряд $9/5$) получается теория похожая на эффективную теорию при компактификации на квинтику в проективном пространстве , рассматриваемую ниже.