ЛЕКЦИЯ 2

1 Ковариантно постоянный спинор

Как было объяснено в 1-й лекции при компактификации 6-ти из 10-ти измерений в Теории струн , исходя из феноменологических требований необходимо получить теорию с пространственно-временной Суперсимметрией. Причем это должна быть суперсимметрия с минимальным числом суперзарядов. Наличие суперсимметрии накладывает серьёзные ограничения на геометрию компактифицирующего многообразия. В частности, вакуум теории $|0\rangle \in \mathscr{H}$ должен быть инвариантен относительно преобразований суперсимметрии

$$\delta_\epsilon|0\rangle = \epsilon^\alpha Q_\alpha|0\rangle = 0. \tag{1}$$

Поэтому из соотношения $\delta_\epsilon\Phi = [\epsilon Q, \Phi]$ следует, что $\langle\delta_\epsilon\Phi\rangle = 0$

В случае бозонных полей Φ это условие выполняется автоматически, поскольку их вариация является спинором и нетривиально преобразуется под действием $\mathrm{SO}(1,3)$. Наличие такого вакуумного среднего несовместимо с симметрией пространства Минковского. Среди фермионных полей в теории с суперсимметрией есть гравитино χ, чья вариация

$$\delta_\epsilon\chi = \nabla\epsilon + \cdots \tag{2}$$

здесь ϵ означает 10-мерный Майорано-Вейлевский спинор, а многоточие означает члены, зависящие от других полей теории (чьи вакумные средние исчезают). Таким образом мы приходим к условию

$$\langle\nabla\epsilon\rangle = \tilde{\nabla}\epsilon = 0, \tag{3}$$

где тильда означает, что для метрики в связности используется её вакуумное среднее. Оказывается (и мы это покажем) , что такие многообразия являются так называемыми многообразиями Калаби-Яу.

Чтобы получить одно из следствий существования ковариантно постоянного спинора запишем:

$$[\nabla_m, \nabla_n]\zeta = 1/4 R_{mnkl}\gamma^{kl}\zeta = 0, \tag{4}$$

где $\gamma^{i_1,\cdots,i_n}$- антисимметризованное произведение гамма-матриц. Помножая уравнение (4) слева на γ^n и используя свойство гамма-матриц

$$\gamma^n\gamma^{kl} = \gamma^{nkl} + g^{nk}\gamma^l - g^{nl}\gamma^k$$

и тождество Бьянки $R_{mnkl} + R_{mkln} + R_{mlnk} = 0$, получим

$$1/2 g^{nk}\gamma^l R_{mnkl}\zeta = R_{ml}\gamma^l\zeta = 0.$$

Уравнение

$$R_{mn}\gamma^n\zeta = 0$$

имеет решение только,если $R_{mn}\gamma^n$ вырождена.

Обозначая для краткости тензор Риччи $R_{mn} = A_n$, получим

$$(A_n\gamma^n)^2 = (A_n\gamma^n A_m\gamma^m)^2 = \frac{1}{2}A_n A_m\{\gamma^n,\gamma^m\} + \frac{1}{2}A_n A_m[\gamma^n,\gamma^m] = g^{mn}A_n A_m \mathrm{I}.$$

Отсюда видно, что матица $A_n\gamma^n$ вырождена, если и только если $g_{mn}A^n A^m = 0$. В метрике с евклидовой сигнатурой это значит, что $A_n = 0$. Таким образом $R_{mn} = 0$, то есть многообразие является Риччи-плоским.

Оказывается, что чтобы существовал ковариантно постоянный спинор, многообразие должно быть не просто Риччи-плоским, но также ещё и комплексным Кэлеровым, такие многообразия называются многообразиями Калаби-Яу.

2 Многообразия Калаби-Яу

Кэлерова структура. Мы только что вывели свойство Риччи-плоскоси метрики, допускающей ковариантно постоянный спинор. Напомним, что на шестимерном многообразии спинор обладает восемью компонентами: $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_8)$. Обозначим 6 гамма-матриц γ_a. Их можно построить из 4-мерных гамма-матриц по следующему правилу. Пусть Γ_α означает пятёрку 4-мерных гамма-матриц $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_5$, где $\Gamma_5 = \prod_{\alpha=1}^{4}\Gamma_\alpha$ в евклидовой сигнатуре, то есть $\{\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$ и $\Gamma_\alpha^\dagger = (\Gamma_\alpha^t)^*$. Можно проверить, что шесть 8x8 матриц

$$\gamma_m = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_a \\ \Gamma_a & 0 \end{pmatrix},\ a \in 1, \ldots, 5, \quad \gamma_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

удовлетворяют соотношениям на гамма-матрицы в евклидовой сигнатуре для шестимерного пространства $\{\gamma_a, \gamma_b\} = \delta_{ab}$.

Их произведение $\gamma_7 = i^{-1}\prod_a \gamma_a$ антикоммутирует с каждой из матриц γ_a и имеет четырёхмерные собственные подпространства с собственными значениями ± 1. Если выбирать четырёхмерные матрицы Γ_a в Вейлевском представлении, то по построению $\gamma_7 = \{1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1\}$. Четырёхмерные спиноры из этих подпространств называются Вейлевскими и являются неприводимыми представлениями алгебры вращений $so(6)$:

$$\zeta \to \frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b]\zeta. \tag{6}$$

Будем обозначать разложение Дираковского спинора на Вейлевские через

$$\zeta = \zeta_+ + \zeta_-. \tag{7}$$

При комплексном сопряжении Вейлевские спиноры переходят друг в друга.

Чтобы построить гамма-матрицы и спинорные поля на многообразии, необходимо ввести набор тетрад $\{e_a^m\}$ (напомним, что они являются векторными полями на многообразии и характеризуются тем, что $e_a^m e_b^n \delta^{ab} =$

g^{mn}, то есть переводят плоскую метрику δ^{ab} в касательном пространстве в метрику g^{mn} многообразия X). Тогда гамма-матрицы на многообразии строятся как

$$\gamma^m := \gamma^a e_a^m, \quad \{\gamma^m, \gamma^n\} = g^{mn}. \tag{8}$$

Ковариантно-постоянный спинор ζ распадается на пару ковариантно постоянных Вейлевских спиноров $\zeta_\pm$.
Изучим остальные свойства многообразия с ковариантно постоянным спинором. Для начала нормируем спинор условием $\zeta_+^\dagger \zeta_+ = \zeta_-^\dagger \zeta_- = 1$. Определим теперь оператор

$$J_n^m = -i\zeta_+^\dagger \gamma^m{}_n \zeta_+, \; \gamma^m{}_n = g^{ml}\gamma_{ln} \tag{9}$$

Перечислим его свойства:

1. J_n^m вещественный (его коэффициенты вещественные).
2. $J_k^m J_n^k = -\delta_n^m$.
3. $J_{mn} = -J_{nm}$, кососимметрический тензор.
4. $g_{pq} J_m^p J_n^q = g_{mn}$
5. $\nabla J_n^m = 0$, то есть J_n^m ковариантно постоянный тензор.

Доказательство:

1. $\overline{J_n^m} = (-i\zeta_+^\dagger \gamma^m{}_n \zeta_+)^\dagger = i\zeta_+^\dagger(-\gamma^m{}_n)\zeta_+ = J_n^m$,
2. Свойство $J^2 = -1$ проверяется несколько сложнее. Один из способов - это подействовать на спинор $\zeta \to \Lambda_{mn}\gamma^{mn}\zeta$, чтобы привести к каноническому виду $\zeta \sim (1,0,0,0)^t$, а затем вычислить явно, например в базисе гамма-матриц, описанном выше.
3. следует из $\gamma_{mn} = 1/2[\gamma_m \gamma_n] = -1/2[\gamma_n, \gamma_m]$.
4. Используем 2) и 3)

$$g_{pq} J^p{}_m J^q{}_n = g_{mn}, \; \omega_{mn} = g_{mp} J^p{}_n = -\omega_{nm} \tag{10}$$

5. следует из тождества Лейбница и $\nabla\gamma_m = \nabla\zeta = 0$.

Определение.
Оператор J_n^m на многообразии X, удовлетворяющий свойствам 1), 2) называется *почти комплексной структурой* на многообразии X.

Выберем 3 линейно независимых вектора $\partial/\partial x^m$ и введём следующие обозначения:

$$\partial_m := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^m} - iJ\frac{\partial}{\partial x^m}\right), \quad \overline{\partial_m} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^m} + iJ\frac{\partial}{\partial x^m}\right), \tag{11}$$

где коэффициент 1/2 введён для удобства.
По свойству 2) имеем $J \cdot \partial_m = i\partial_m,\ J \cdot \overline{\partial_m} = -i\overline{\partial_m}$.
Таким образом, касательное пространство с комплексными коэффициентам (комплексифицированное касательное пространство $T_{\mathbb{C}}X$) разбивается в прямую сумму трёхмерных голоморфных (собственных для J с собственным значением i) и антиголоморфных (аналогично с собственным значением $-i$) касательных пространств $TX \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X$, где последние порождены векторами ∂_m и $\overline{\partial_m}$ соответственно. Идея состоит в том, чтобы интерпретировать векторные поля $\partial_m := \partial/\partial y^m$ как дифференцирования вдоль комплексных координат $\partial_m = \partial/\partial y^m$. Проинтегрировать эти поля (то есть найти комплексные координаты, функции y^m) можно не всегда.

Как минимум, для производных вдоль координат выполняется условие интегрируемости, которое можно записать следующим образом: на комплексном многообразии определён коммутатор векторных полей $[\partial_i, \partial_j] = c^k_{ik}\partial_k$. Тогда это должно выполняться для определённых нами полей $J\partial_i = i\partial_i$. Заметим, что если v - какое-то поле, то $v \to v \mp iJv$ является голоморфным/антиголоморфным. Тогда условие интегрируемости можно записать так:

$$[v - iJv, w - iJw] + iJ[v - iJv, w - iJw] = 0$$

. Словами это можно сказать так: антиголоморфная составляющая коммутатора голоморфных полей равна нулю. Раскрывая скобки в последнем равенстве, получаем

$$[v, w] - [Jv, w] - [v, Jw] + [Jv, Jw] = 0.$$

В координатах, подставляя вместо v, w производные по координатам $\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j$ мы получаем условие интегрируемости в виде

$$N^i_{jk} = J^m_i(\partial/\partial x^m J^k_j - \partial/\partial x^j J^k_m) - J^m_j(\partial/\partial x^m J^k_i - \partial/\partial x^i J^k_m) = 0. \tag{12}$$

Больше того не трудно проверить, что это уравнение остается справеливым при замене $\partial/\partial x^i$ на ковариантные производные ∇_i.

$$N^i_{jk} = J^m_i(\nabla_m J^k_j - \nabla_j J^k_m) - J^m_j(\nabla_m J^k_i - \nabla_i J^k_m) = 0. \tag{13}$$

Таким образом N^i_{jk} явлляется тензором. Тензор N^i_{jk} называется тензором Нэйнхауса (Nijenhuis). Сложная теорема Ньюландера-Ниренберга утверждает, что это условие интегрируемости является также достаточным. То есть при выполнении условия интегрируемости на многообразии можно ввести голоморфные координаты y^m такие, что $\partial_m = \partial/\partial y^m$ и $\overline{\partial_m} = \overline{\partial/\partial y^m}$. Эта ситуация похожа на связь зануления тензора кривизны Римана R_{ijkl} и возможности введения плоских координат.

Определение. Почти комплексное многообразие (X, J) называется комплексным, если тензор Нэйнхауса N^i_{jk} равен нулю. На комплексном многообразии можно ввести комплексные кординаты так, что все функции переклейки будут голоморфны.

В нашем случае J задаётся формулой (9) и, в частности, удовлетворяет свойству 5), то есть $\nabla_m J = 0$, а значит $N^i_{jk} = 0$. То есть многообразие с ковариантно постоянным спинором является *комплексным многообразием.*

Изучим теперь следствия свойства 4). В бескоординатном виде оно пишется как $g(Jv, Jw) = g(v, w)$. Тогда в голоморфных координатах $g_{ij} = g_{\overline{i}\overline{j}} = 0$. В голоморфных координатах y^i матрица J имеет вид $J^i_j = i\delta^i_j$, $j^i_{\bar{j}} = 0$ и $J^{\bar{i}}_{\bar{j}} = -i\delta^i_j$. Тогда

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = g(J\partial_i, J\partial_j) = g(i\partial_i, i\partial_j) = -g_{ij} = 0. \tag{14}$$

Определение. Метрика g на комплексном многообразии (X, J) называется *Эрмитовой.*
Таким образом в рассматриваемом случае метрика g , в силу свойства 4) является эрмитовой.

Кривизна Римана и Риччи, Кэлеровы многообразия. На самом деле условие $\nabla J = 0$ гораздо сильнее следующего из него условия Нэйнхауса $N^i_{jk} = 0$. Это накладывает дополнительные ограничения на многообразие X.
Обозначим

$$\omega_{mn} := g_{mk} J^k_n. \tag{15}$$

В силу того, что метрика g эрмитова, в голоморфных координатах $\omega_{ij} = \omega_{\overline{i}\overline{j}} = 0$ и $\omega_{i\bar{j}} = J^l_i g_{l\bar{j}} = i g_{i\bar{j}}$. Также заметим, что

$$\nabla_k \omega_{i\bar{j}} = 0.$$

Отсюда легко следует, что

$$(\mathrm{d}\omega)_{ij\bar{k}} = \partial_i \omega_{j\bar{k}} + \partial_j \omega_{\bar{k}i} + \partial_{\bar{k}} \omega_{ij} = \nabla_i \omega_{j\bar{k}} + \nabla_j \omega_{\bar{k}i} + \nabla_{\bar{k}} \omega_{ij} = 0. \tag{16}$$

Определение. Комплексное многообразие (X, J) с эрмитовой метрикой g называются *Кэлеровым*, если $\mathrm{d}\omega = 0$, $\omega = J \cdot g$. В частности Кэлеровы многообразия являются симплектическими. Кэлеровы многообразия это специальный класс комплексных многообразий. В голоморфных координатах для Кэлеровых многообразий имеем

$$\omega_{i\bar{j}} = i g_{i\bar{j}},\ \partial_i g_{j\bar{k}} - \partial_j g_{i\bar{k}} = 0,\ \bar{\partial}_{\bar{i}} g_{j\bar{k}} - \bar{\partial}_{\bar{k}} g_{j\bar{i}} = 0.$$

Последние два условия следуют из замкнутости формы и являются условиями интегрируемости метрики

$$g_{i\bar{j}} = \partial_i \bar{\partial}_{\bar{j}} K,\ \omega = i\partial\bar{\partial} K.$$

Здесь K некоторая определённая локально функция, которая называется Кэлеровым потенциалом.

Из существования потенциала следуют значительные упрощения. Например, из символов Кристоффеля

$$\Gamma^k_{mn} = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_m g_{nl} + \partial_n g_{ml} - \partial_l g_{mn})$$

выживают только Γ^i_{jk}, $\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}}$

$$\Gamma^i_{jk} = g^{i\bar{l}} \partial_j g_{k\bar{l}},\ \Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}} = \overline{\Gamma^i_{jk}}.$$

Это означает, что ковариантные производные голоморфных полей голоморфны, то есть при параллельном переносе голоморфные и антиголоморфные поля полностью разделяются.
Для тензора Римана имеем

$$R_{mn}{}^k{}_l \mathrm{d}x^m \wedge \mathrm{d}x^n = \mathrm{d}(\Gamma_m{}^k{}_l \mathrm{d}x^m) + \Gamma_m{}^k{}_p \mathrm{d}x^m \wedge \Gamma_n{}^p{}_l \mathrm{d}x^n.$$

Из структуры индексов ненулевых Γ^m_{nk} то следует, что для тензора Римана отличны от нуля только компоненты с k и l одновременно голоморфными или анти-голоморфными. Опуская индекс $R_{mn\bar{k}l}$ и используя симметрию при перестановке пар индексов $R_{mn\bar{k}l} = R_{\bar{k}lmn}$ получаем, что только компоненты вида $R_{i\bar{j}k\bar{l}}$ (и получающиеся из них симметриями) не равны нулю. Отсюда следует формула

$$R_{i\bar{j}}{}^k{}_l = -\overline{\partial_j} \Gamma^k_{il}.$$

Чтобы найти тензор Риччи, используем первое тождество Бьянки:

$$R_{mnkl} + R_{mkln} + R_{mlnk} = 0 \implies R_{i\bar{j}k\bar{l}} + R_{i\bar{l}\bar{j}k} = 0.$$

Тогда тензор Риччи $\mathrm{R}_{k\bar{j}}$ равен следу оператора кривизны со знаком минус

$$\mathrm{R}_{k\bar{j}} = -R_{i\bar{j}}{}^i{}_k = -g^{i\bar{l}} R_{i\bar{j}k\bar{l}} = -g^{i\bar{l}} R_{k\bar{j}i\bar{l}} = -R_{k\bar{j}}{}^i{}_i.$$

то есть получаем

$$\mathrm{R}_{k\bar{j}} = -\partial_k \Gamma^{\bar{l}}_{\bar{l}\bar{j}} = -\partial_k \bar{\partial}_{\bar{j}} \ln \det g.$$

Так же как и из метрики, из тензора Риччи можно сделать 2-форму (то есть антисимметричный тензор) с помощью оператора J.

$$\mathrm{R} = i \mathrm{R}_{j\bar{k}} \mathrm{d}y^j \wedge \mathrm{d}\bar{y}^{\bar{k}} = -i \partial \bar{\partial} \ln \det g.$$

С параллельным переносом и кривизной непосредственно связано такое понятие как *голономия*.
А именно из определения $R_{i\bar{j}}{}^k{}_l = [\nabla_i, \bar{\nabla}_{\bar{j}}]^k_l$ следует, что при параллельном переносе вектора v^k вдоль маленького контура C он изменяется на

$$\delta v^k = a^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}}{}^k{}_l v^l,$$

где $a^{i\bar{j}} = \oint_C y^i \mathrm{d}\bar{y}^{\bar{j}}$. Для случая Кэлеровых многообразий оба индекса l, k голоморфные или антиголоморфные. Поэтому матрица преобразования $a^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}l}^{\;\;\;k}$, которая априори лежит в $\mathfrak{so}(6)$, в действительности принадлежит $\mathfrak{u}(3) \subset \mathfrak{so}(6)$, так как коммутирует с комплексной структурой. При фиксированных значениях индексов $i\bar{j}$ $R_{i\bar{j}k\bar{l}}$ является антиэрмитовой 3x3 матрицей.
Ещё большее ограничение получаем в случае многообразий Калаби-Яу.
Определение. N-мерное Кэлерово многообразие называется многообразием Калаби-Яу, если Кэлерову метрику g можно выбрать таким образом, что она имеет голономию $su(N)$. Покажем, что могообразие X с ковариантно-постоянным спинором является многообразием Калаби-Яу. Для того, чтобы это увидеть, возьмём след матрицы голономии. Получаем

$$Hol(a)_l^l = a^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}l}^{\;\;\;l} = -a^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}} = 0, \tag{17}$$

поскольку тензор Риччи, как мы ранее показали, равен нулю. Поэтому матрица преобразования голономии является бесследовой и лежит в $\mathfrak{su}(3) \subset \mathfrak{u}(3)$.
Оказывается все свойства, которые мы обсуждали, можно вывести из существования метрики с голономией $\mathfrak{su}(3)$.

Голоморфная 3-форма и первый класс Черна. В примерах многообразий Калаби-Яу (кроме тривиальных) явный вид метрик $g_{i\bar{j}}$ с голономией $\mathfrak{su}(3)$ не известен. Однако мы существует один объект, который уже можно построить явно и который будет играть важную роль в наших вычислениях. А именно мы можем определить 3- форму Ω

$$\Omega_{ijk} = i\zeta_-^\dagger \gamma_{ijk} \zeta_+, \; \Omega = \frac{1}{6} \Omega_{ijk} \mathrm{d}y^i \wedge \mathrm{d}y^j \wedge \mathrm{d}y^k \tag{18}$$

J и Ω - это единственные объекты, которые можно получить, используя только киральные спиноры $\zeta_\pm$.
Из того факта, что $\nabla\zeta = 0$,следует,что $\nabla\Omega = 0$. Поэтому и также из того, что в комплексных координатах $\bar{\nabla}_{\bar{j}} = \bar{\partial}_{\bar{j}}$, следует, что форма Ω голоморфна. Кроме того отсюда получаем $\mathrm{d}\Omega = 0$, поскольку она уже имеет максимальное число голоморфных индексов. Важно, что форма Ω нигде не обращается в ноль, в следствие того, что спиноры $\zeta_\pm$ являются ковариатно постоянными на многообразиях Калаби-Яу.

Мы не знаем явные $\mathfrak{su}(3)-$метрики на Калаби-Яу, но есть неявный критерий, который следует из **теоремы Яу.** Она гласит, что если *первый класс Черна* Кэлерова многообразия X равен нулю, то на нём существует метрика $\mathfrak{su}(3)$ голономии, то есть X является многообразием Калаби-Яу.

Классы Черна комплексного многообразия являются элементами когомологий. То есть это формы c_n степени $2n$ такие, что $\mathrm{d}c_n = 0$, и которые рассматриваются с точностью до прибавления точных форм $c_n \sim c_n + \mathrm{d}\alpha$. Обозначая $R^k_{\;l} = 1/2 R_{i\bar{j}l}^{\;\;\;k} \mathrm{d}y^i \wedge \mathrm{d}\bar{y}^{\bar{j}}$ для них можно записать явную формулу:

$$\sum_n c_n t^n = \det\left(\mathrm{Id} + \frac{itR}{2\pi}\right) \tag{19}$$

и в частности
$$c_1 = \frac{i\mathrm{Tr}R}{2\pi} = -\frac{\mathrm{iR}}{2\pi}.$$
Поэтому на Калаби-Яу первый класс Черна определённо равен нулю. Более того, если на Кэлеровом мноообразии существует незануляющаяся нигде форма максимальной степени, то $c_1 = 0$. Действительно, для голоморфной 3-формы Ω имеем

$$\Omega_{ijk} = f(z)\epsilon_{ijk},\ ||\Omega||^2 = \Omega_{ijk}\bar{\Omega}^{ijk} = |f(z)|^2 g^{i\bar{i}} g^{j\bar{j}} g^{k\bar{k}} \epsilon_{ijk}\epsilon_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} = |f(z)|^2 \det g.$$

Тогда для класса Черна имеем

$$c_1\mathrm{R} = -i\partial\bar{\partial}\ln\det g = -i\partial\bar{\partial}\ln(||\Omega||^2).$$

Функция под логарифмом везде определена однозначно, а поэтому $c_1 = d\alpha$, то есть равен нулю в когомологиях.

Все вышесказанное можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть X - 6-мерное вещественное многообразие.* [1] *Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. На X существует ковариантно постоянный спинор $\nabla\zeta = 0$ для некоторой метрики.
2. На X существует метрика SU(3) голономии.
3. X является Кэлеровым многообразием с Риччи-плоской метрикой $R_{ij} = 0$.
4. X является Кэлеровым и его первый класс Черна равен нулю $c_1 = 0$.
5. X является Кэлеровым многообразием и на нём есть нигде не нулевая голоморфная форма старшей степени Ω.

3 Когомологические свойства многообразий Калаби-Яу и следствия для теории струн

В теории струн, изучая компактификации можно применить приём аналогичный тому, что применяется в теории Калуцы-Клейна. А именно физические поля эффективной десятимерной теории (SUGRA) можно разложить по собственным векторам операторов, которые входят в Лагранжиан и проинтегрировать по свёрнутым компактным измерениям. В получившейся четырёхмерной теории будут наборы частиц, чьи массы пропорциональны собственным значениям операторов, по одной на каждый собственный вектор. В пределе, когда мы считаем массы очень большими и

[1] если выбросить условие существования ковариантного спинора, то теорема будет верна для любой чётной размерности многообразия

не интересуемся массивными частицами, количество частиц определяется нуль-модами операторов. Эти операторы сводятся к различным операторам Дирака и Лапласа на компактном многообразии, их нуль моды - гармонические объекты представляют некоторые классы когомологий многообразия. В итоге число безмассовых частиц четырёхмерной теории определяется когомологиям шестимерного многообразия.

Разложение Ходжа

Рассмотрим математический аспект подробнее (более развёрнуто о физическом аспекте можно найти в добавлениях к следующей лекции). Обозначим за $\Omega^n(X)$ пространство дифференциальных форм степени n на многообразии X. Внешний дифференциал $d : \Omega^{n-1}(X) \to \Omega^n(X)$

$$\begin{aligned}&\mathrm{d} := \sum \mathrm{d}x^i \frac{\partial}{\partial x^i},\\&\mathrm{d}(\omega_{i_1,\dots,i_{n-1}}\, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_{n-1}}) = \partial_{i_{m+1}}\omega_{i_1,\dots,i_n}\, \mathrm{d}x^{i_n} \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_{n-1}}\end{aligned} \tag{20}$$

в квадрате даёт ноль, что проверяется из определения. Отсюда следует, что $\mathrm{Im}(\mathrm{d}) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{d})$. Формы из первого пространства называются замкнутыми, а из второго точными. Последнее включение позволяет определить важный геометрический инвариант многообразия - когомологии де-Рама.

Definition 1. *Просранством $n-$мерных когомологий де-Рама $H^n(X)$ называется факторпространство* $\mathrm{Ker}(\mathrm{d})/\mathrm{Im}(\mathrm{d})$.

Элементы когомологий представимы замкнутыми дифференциальными формами по модулю точных.

$$\alpha \in H^n(X) \implies d\alpha = 0,\ \alpha \sim \alpha + d\gamma.$$

В этом смысле для одного элемента когомологий нельзя выбрать одного канонического представителя, поскольку все элементы одного класса эквивалентны.

Теория Ходжа позволяет выбрать естественного представителя из класса эквивалентности, если на многообразии есть метрика. На компактных многообразиях X с метрикой g есть естественная метрика на пространстве дифференциальных форм. В координатах, если $\alpha = \alpha_{i_1 \cdots i_n} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \mathrm{d}x^n$ и $\beta = \beta i_1 \cdots i_n \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \mathrm{d}x^n$:

$$(\alpha, \beta) = \int_X g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_n j_n} \alpha_{i_1 \cdots i_n} \beta_{j_1 \cdots j_n} \sqrt{g} \mathrm{d}^N x. \tag{21}$$

В бескоординатной форме формула выше записывается следующим образом:

$$(\alpha, \beta) = \int_X (\alpha, \beta) \sqrt{g} \mathrm{d}^6 y = \int_X \alpha \wedge \star\beta \mathrm{d}^6 y.$$

Оператор $\star$ определён уравнением выше и называется звездой или дуальностью Ходжа, в координатах его можно несколько громоздко записать как:

$$\star\beta = \varepsilon_{i_{n+1}\cdots i_N i_1\cdots i_n}\, g^{i_1 j_1}\cdots g^{i_n j_n}\,\beta_{j_1\cdots j_n}\,\sqrt{g}\,\mathrm{d}x^{i_{n+1}}\cdots\mathrm{d}x^N$$

. Используя скалярной роизведение выше, аналогично процедуре из линейной алгебры, можно определить сопряжённый дифференциал d^*

$$(\mathrm{d}^*\alpha,\beta) := (\alpha,\mathrm{d}\beta),$$

этот оператор понижает степень формы на 1

$$\mathrm{d}^* = \pm\star\mathrm{d}\star,$$

В геодезических координатах (то есть в которых в одной точке все первые производные метрики равны нулю) он имеет вид

$$\mathrm{d}^* = \pm\sum i_{\partial/\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{22}$$

где $i_{\partial/\partial x^i}$ подставляет векторное поле $\partial/\partial x^i$ в дифференциальную форму, на которую действует, понижая её степень на 1.

С помошью этих операторов можно определить оператор Лапласа (Лапласа-Бельтрами), который не меняет степень формы и совпадает с обычным оператором Лапласа на функциях с точностью до знака:

Definition 2. *Оператор Лапласа-Бельтрами на компактном римановом многообразии (X, g) задаётся следующей формулой:*

$$\Delta_d = \mathrm{d}^*\mathrm{d} + \mathrm{d}\mathrm{d}^*. \tag{23}$$

Нас будет интересовать его ядро $\mathrm{Ker}\Delta_d$. На компактных многообразиях это конечномерное векторное пространство, более того:

$$(\Delta_d\alpha,\alpha) = (\mathrm{d}^*\mathrm{d} + \mathrm{d}\mathrm{d}^*\alpha,\alpha) = (\mathrm{d}^*\alpha,\mathrm{d}^*\alpha) + (\mathrm{d}\alpha,\mathrm{d}\alpha). \tag{24}$$

Из последнего равенства следует, что $\Delta_d\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{d}\alpha = 0$ и $\mathrm{d}^*\alpha = 0$.

В функциональном анализе есть следующая теорема, сложность которой щаключается в рассмотрении бесконечномерных пространств диффререниальных форм.

Теорема 2 (Разложение Ходжа)**.** *Произвольная форма на компактном римановом многообразии раскладывается в сумму*

$$\omega = \tilde{\omega} + \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}^*\beta,$$

где $\Delta_d\tilde{\omega} = 0$, это разложение единственно.

Эквивалентно, есть ортогональное (в смысле введённой выше метрики) разложение

$$\Omega^p(K) = \mathrm{Im}\,\mathrm{d}\oplus\mathrm{Im}\,\mathrm{d}^*\oplus\mathrm{Ker}\,\Delta_d$$

Заметим, что это разложение зависит от метрики.

Таким образом при выборе оператора Δ_d возникает естественное отождествление пространства когомологий и пространства *гармонических форм*, то есть нулевых мод оператора Лапласа $H^*(X) \simeq \mathrm{Ker}\,\Delta_d$. Мы будем активно использовать это соответствие.

Разложение Ходжа для Кэлеровых пространств

Для комплексных многообразий есть естественное ковариантное разложение дифференциала де-Рама

$$\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial} = \mathrm{d}y^i \partial_i + \mathrm{d}\bar{y}^{\bar{i}} \bar{\partial}_{\bar{i}}, \tag{25}$$

каждый их которых в квадрате даёт ноль. Дифференциал $\bar{\partial}$ называется дифференциалом Дольбо.

Пространства дифференциальных форм разбиваются в $\Omega^n(X) = \sum_{p+q=n} \Omega^{p,q}(X)$. соответственно количеству (анти-)голоморфных индексов:

$$\omega_{i^1,\cdots,i^p,\bar{j}^1,\cdots,\bar{j}^q}\,\mathrm{d}y^1 \cdots \mathrm{d}y^p\; \mathrm{d}\bar{y}^{\bar{j}^1} \cdots \mathrm{d}\bar{y}^{\bar{j}^q} \in \Omega^{p,q}(X)$$

Для Кэлеровых многообразий используя так называемые Кэлеровы тождества можно проверить, что операторы Лапласа, построенные по всем трём операторам $\mathrm{d}, \partial, \bar{\partial}$ равны:

$$\Delta_\partial = \Delta_{\bar{\partial}} = 1/2\Delta_d,\ \Delta_\partial = \partial\partial^* + \partial^*\partial,,\ \Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}.$$

Это означает, что оператор Лапласа не меняет также количество голоморфных и антиголоморфных индексов. То есть если форма α является гармонической, то и её однородные (с точки зрения (p,q)-разбиения) компоненты тоже являются гармоническими. $\mathrm{Ker}\,\Delta_d \simeq H^*(X)$, а значит разбиение дифференциальных форм продолжается до разбиения когомологий $H^n(X) = \sum_{p+q=n} H^{p,q}(X)$. На компактном Кэлеровом многообразии когомологии де-Рама совпадают с когомологиями оператора $\bar{\partial}$, то есть $\bar{\partial}$ замкнутыми формами по модулю $\bar{\partial}$ точных.

Среди всех групп $H^{p,q}(X)$ есть много изоморфных. На пространстве всех когомологий действует оператор комплексного сопряжения $H^{p,q}(X) \to H^{q,p}(X)$, который в квадрате даёт 1, а значит $H^{p,q}(X) = H^{q,p}(X)$. Также на и оператор Ходжа $H^{p,q}(X) \to H^{n-q,n-p}(X)$, равный в квадрате ± 1, откуда следует, что $H^{p,q}(X) = H^{n-q,n-p}(X)$. Обозначим $h^{p,q} = \mathrm{dim} H^{p,q}(X)$. Для трёхмерного Кэлерова многообразия независимыми остаются $h^{p,0}, h^{1,1}, h^{2,1}$. Ограничимся рассмотрением связных компактных многообразий с голономией строго $\mathrm{SU}(3)$.

Условие гармоничности $\Delta_{\bar{\partial}}\omega$ для $\omega^{p,0}$ совпадает с условием голоморфности потому, что

$$\Delta_{\bar{\partial}}\omega^{p,0} = 0 <=> \bar{\partial}\omega = 0,\ \bar{\partial}^*\omega = 0,$$

и последнее равенство выполнено автоматически, поскольку $\bar{\partial}$ делает из (p,q) формы $(p,q-1)$ форму. Таким образом необходимо узнать число голоморфных $(p,0)$ форм. Сначала заметим, что голоморфное касательное пространство трёхмерно, и под действием группы голономии преобразуется, как 3-х компонентный вектор-столбец под действием унитарной матрицы. $(1,0)$-формы, то есть векторы кокасательного пространства преобразуется как вектор-строка, а общие $(p,0)$ формы преобразуются как внешняя степень $\Lambda^p \mathbf{3}_{\mathfrak{su}(3)}$ под действием группы голономии. Это означает, что единственными ковариантно постоянными формами могут быть только константы и формы старшей степени, поскольку третья внешняя степень одномерна, и под действием матрицы умножается на её определитель, который равен единицы. Чтобы связать ковариантно постоянные и голоморфные формы, мы используем формулу Вайценбоха о связи оператора Лапласа и ∇^2

$$\Delta_{\mathrm{d}}\omega = -\nabla^2\omega + \mathrm{U}[\omega],$$

где $U[\omega]$ некоторый оператор степени 0, зависящий от кривизны. В случае $(p,0)$-форм этот оператор $U[\omega]$ равен нулю, и мы находим, что гармонические $(p,0)$ формы на компактном многообразии ковариантно постоянны. А это значит, что для $1 < p < n$ все $h^{p,0} = 0$. Форма же старшей степени (голоморфная форма объёма) преобразуется как синглет под действием $\mathfrak{su}(3)$ и поэтому гармоническую форму $\Omega \in \mathscr{H}^{n,0}$ мы строим аналогично построению ковариантно постоянного спинора и комплексной структуры. Более того, две такие формы отличаются на голоморфную функцию, а значит на константу, то есть $h^{n,0} = 1$. Заметим, что её существование можно было получить из условия того, что $c_1 = 0$. Таким образом из всех $h^{p,q}$ на трёхмерном Калаби-Яу могут быть различными только $h^{1,1}$ и $h^{2,1}$. Эти же числа переставляются так называемой зеркальной симметрией, которая утверждает, что для Калаби-Яу X найдётся зеркальный образ - другое многообразие КЯ $\hat{X}$ с переставленными числами Ходжа.

Когомологии и деформации комплексной/Кэлеровой структур

Рассмотрим деформации метрики на Калаби-Яу $g_{mn} \to g_{mn} + h_{mn}$, оставляющие многообразие в классе Калаби-Яу, то есть Риччи-плоские вариации. Условие $R_{ij}(g_{mn} + h_{mn}) = 0$ выражается через оператор Лихнеровича:

$$\Delta_L h_{mn} = \nabla^2 h_{mn} + 2R_{m\ n}^{\ p\ q} h_{pq} \tag{26}$$

На Калаби-Яу уравнения для смешанных $h_{i\bar{j}}$ и однородных $h_{\bar{i}\bar{j}}$ деформаций метрики разделяются. Используя ту же формулу Лихнеровича, можно показать, что решения этих уравнений находятся в соответствии с когомологиями

$$h_{\bar{i}}^{j} := h_{\bar{i}\bar{k}} g^{\bar{k}j} \in H^{0,1}(TX),\ h_{i\bar{j}} \in H^{1,1}(X) \tag{27}$$

Деформации $h_{i\bar{j}}$ не меняют комплексную структуру на многообразии, но меняют Кэлерову структуру (в координатах она совпадает с метрикой). Напротив, деформации $h_{\bar{j}}^{i}$ меняют комплексную структуру, поскольку у метрики появляются ненулевые однородные коэффициенты. Из такого $h^i_{\bar{j}}$ можно построить *дифференциал Бельтрами*

$$h^i = h^i_{\bar{j}} \mathrm{d}\bar{y}^{\bar{j}} \tag{28}$$

Этот дифференциал характеризует изменение комплексной структуры по правилу

$$\mathrm{d}y^i \to \mathrm{d}y^i + \epsilon h^i_{\bar{j}} \mathrm{d}\bar{y}^{\bar{j}}.$$

Однородные деформации метрики $h_{\bar{i}\bar{j}}$ устраняются бесконечномалой неголоморфной заменой координат $y^i \to y^i + 1/2\epsilon m^i(y, \bar{y})$, где $\epsilon << 1$. Используя голоморфную форму Ω, можно отождествить $H^1(T, X) = H^{2,1}(X)$ следующим образом:

$$h_{ij\bar{k}} = \Omega_{ijl} h^l_{\bar{k}}, \tag{29}$$

где гармоничность левой части эквивалентна гармоничности правой части.

Таким образом элементы из $H^{2,1}(X)$ отождествляются с деформациями комплексной структуры, а элементы из $H^{1,1}(X)$ с деформациями Кэлеровой структуры на X. Например, для деформаций комплексной структуры $h^a_{\bar{i}\bar{j}} \sim \partial g_{\bar{i}\bar{j}} / \partial z^a$, где a - индекс, нумерующий элементы когомологий $H^{2,1}(X)$. Важно, что на пространствах этих деформаций есть естественные метрики.

4 Appendix

Свойства Калаби-Яу через голономию Проделаем вывод свойств Калаби-Яу, используя понятие голономии.

1) <=> 2)

Рассмотрим шестимерное риманово многообразие. У него есть естественное главное расслоение реперов касательного пространства со структурной группой $SO(6)$. Спиноры лежат в ассоциированном с ним расслоении, которое является спинорным представлением $SO(6)$ [2]

Связность Леви-Чивиты порождает связность на каждом из этих расслоений. Параллельный перенос элементов расслоения вдоль петель из некоторой точки в себя действует на них элементом из подгруппы SO(6), которая называется группой голономии многообразия. В частности сечение ковариантно постоянно, если и только если это действие тривиально. Действительно, в таком случае мы можем параллельно продолжить сечение из одной точки в другую, а тривиальность действия голономии означает, что это продолжение не зависит от пути, и обратно.

Таким образом для пространства компактификации группа голономии должна тривиально действовать на какой-то спинор. Спиноры на M^6 преобразуются в представлении $\mathbf{4} + \bar{\mathbf{4}}$ алгебры $\mathfrak{su}(4) \simeq \mathfrak{so}(6)$. Наибольшая

[2] правильнее было бы говорить о двулистном накрытии Spin(6) группы SO(6). Также мы не обсуждаем некоторые аспекты глобального поведения, связанные с неодносвязностью.

подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{su}(4)$, имеющая инвариантное подпространство в $\mathbf{4}$ и $\bar{\mathbf{4}}$ это $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(3)$, при этом $\mathbf{4}_{\mathfrak{su}(4)} = \mathbf{3}_{\mathfrak{su}(3)} + \mathbf{1}_{\mathfrak{su}(3)}$. На более простом языке матрицы 3×3 имеют в четырёхмерном пространстве неподвижный вектор. Таким образом, мы получили, что для существования ковариантно постоянного спинора группа голономии многообразия должна быть не больше, чем SU(3). Многообразия, допускающие метрику с такой голономией, называются многообразиями Калаби-Яу. [3].

2) => 3), 4), 5)

Изучим геометрические следствия SU(3) голономии. Во-первых многообразие с голономией даже U(3) является комплексным и более того, кэлеровым.

Итак, если на многообразии есть метрика с голономией U(3), построим ковариантно постоянную комплексную структуру J, $\nabla J = 0$. Для этого будем действовать также, как и для спинора. Касательные вектора принадлежат $6_{\mathfrak{so}(6)} \simeq 3_{\mathfrak{u}(3)} \oplus \bar{3}_{\mathfrak{u}(3)}$. В комплексификации касательного пространства в некоторой точке зададим J в виде матрицы

$$J = \begin{pmatrix} i\,E & 0 \\ 0 & -i\,E \end{pmatrix} \tag{30}$$

где E - это единичная 3×3 матрица, а базис выбран так, чтобы матрицы преобразования голономии имели вид

$$g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} \tag{31}$$

По построению оператор J коммутирует с группой голономии, и таким образом мы можем его параллельно продолжить на всё многообразие. След оператора кривизны является $\mathfrak{u}(1)$ генератором группы голономии в разложении $\mathfrak{u}(3) = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{su}(3)$, то есть если голономия лежит в $\mathfrak{su}(3)$ то метрика является Риччи-плоской и наоборот. Более того, след тензора кривизны также является представителем первого класса Черна, поэтому голономия SU(3) означает, что многообразие является Кэлеровым и с нулевым классом Черна c_1.

Теперь покажем наличие ненулевой голоморфной три-формы. Голоморфные три-формы лежат в представлении $\Lambda^3 3_{\mathfrak{su}(3)} \sim 1_{\mathfrak{su}(3)}$, то есть форма не преобразуется под действием голономии, а значит её можно построить в одной точке

$$\Omega_{ijk} = \epsilon_{ijk}$$

и разнести связностью на всё многообразие K.

4) <=> 5)

[3] заодно мы получили, что условие существования спинорного расслоения равносильно тому, что структурная группа многообразия редуцируется до $\mathfrak{su}(N)$

По определению

$$c_1 = \frac{i}{2\pi} \mathrm{Tr} R_{i\bar{j}},$$

где R_{ij} - кривизна любой связности на касательном расслоении. Связность в касательном пространстве порождает связность и на формах максимальной степени 3, легко видеть, что её кривизна совпадает со следом кривизны с точностью до знака

$$[\nabla_i, \nabla_j]\omega_{klm} = -R^p_{ijp}\omega_{klm},$$

а значит классы Черна $c_1 = i/2\pi \mathrm{Tr} R$ у касательного расслоения и расслоения форм совпадают со знаком минус. Ненулевая голоморфная 3-форма Ω_{ijk} задаёт всюду определённый базис в одномерном расслоении $\Lambda^3 T^* K$, таким образом получаем $\mathbb{C} \times X = \Lambda^3 T^* X$. На тривиальном расслоении можно выбрать нулевую связность, потому первый класс Черна равен нулю. Если же одномерное расслоение нетривиально, то его первый класс Черна всегда отличен от нуля.

4), 5) => 1), 2), 3) Из сложной теоремы Яу, использующей геометрические потоки следует, что на Кэлеровом компактном многообразии с нулевым первым классом Черна существует Риччи плоская метрика (то есть метрика голономии $\subset$ SU(3)). Явный вид этой метрики не известен для нетривиальных примеров и на практике используют метрики многообразия удовлетворяющие условиям 4), 5).

Изоморфизм пространств спиноров и форм.

На многообразиях Калаби-Яу можно построить изоморфизм между пространством спиноров Дирака и форм типа $\Omega^{0,*}$ смешанных по второму индексу. А именно рассмотрим гамма-матрицы в голоморфном базисе γ^i, $\gamma^{\bar{j}}$. Для их коммутаторов имеем

$$\{\gamma^i, \gamma^{\bar{j}}\} = 2g^{i\bar{j}},\ \{\gamma^i, \gamma^j\} = \{\gamma^{\bar{i}}, \gamma^{\bar{j}}\} = 0. \tag{32}$$

Значит можно интерпретировать гамма-матрицы как операторы рождения и уничтожения с вакуумным состоянием $|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle \sim \zeta_+$. Такие же коммутационные соотношения как и у гамма-матриц, имеются для дифференциалов $g^{i\bar{j}}\ i^*_{\partial_{\bar{j}}}$, $\mathrm{d}\bar{z}^{\bar{j}}$. Получается, что разложение

$$\psi = \eta\zeta_+ + \eta_{\bar{i}}\gamma^{\bar{i}}\zeta_+ + \eta_{\bar{i}\bar{j}}\gamma^{\bar{i}\bar{j}}\zeta_+ + \eta_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}\gamma^{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}\zeta_+ \tag{33}$$

соответствует разложению дифференциальных форм типа $(0,*)$ и $\gamma^{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}\zeta_+ \sim \zeta_-$, где $\zeta_\pm$ - ковариантно постоянные спиноры левой правой киральностей.

Оператор Дирака при этом изоморфизме переходит в дифференциал Дольбо $\bar{\partial}$ и его сопряжённый:

$$\gamma^{\bar{j}} D_{\bar{j}} \sim \bar{\partial},\ \gamma^i D_i \sim \bar{\partial}^*, \tag{34}$$

Используя интерпретацию гамма-матриц как операторов рождения-уничтожения, легко понять, что единственные объекты, которые можно построить из $\zeta_\pm$ и гамма-матриц оказываются комплексной структурой и голоморфной формой объёма

$$J_i^j = \mp i g^{\bar{k}j} \zeta_\pm^\dagger \gamma_{i\bar{k}} \zeta_\pm, \; \Omega_{ijk} = -\zeta_-^\dagger \gamma_{ijk} \zeta_+ \tag{35}$$

Когомологии и полиномы.

Рассмотрим многообразие Калаби-Яу M заданное в пространстве $\mathbb{P}^n$ уравнением $P(X_i) = 0$. Также рассмотрим деформацию полинома

$$P(X_i) \to P(X_i) + \epsilon q(X_i).$$

Найдём соответствующее изменение комплексной структуры. Для этого рассмотрим координаты y^i как функции от точки пространства и деформаций, которые изменяются линейно по деформации полинома

$$y^i = y^i(y_0, z^A).$$

Модельный пример - часть координат проективного пространства, $P(X + \epsilon q(X) n_0) + \epsilon q(X) = 0$, n_0 - нормаль к поверхности. При этом определим сдвиг m^i как

$$y^i(y_0, \epsilon z^{(q)}) = y_0^i - \epsilon q(y_0) m^i(y_0).$$

Тогда, в частности, $y^i(y_0 + \epsilon q(y_0) m^i(y_0), \epsilon z^{(q)}) = 0$. Из этого закона преобразования следует явный вид дифференциала Бельтрами:

$$\frac{\partial y^i(y_0, z^A)}{\partial z^{(q)}}|_{(0,1)} = h^i \sim \bar{\partial}(q(y_0) m^i(y_0)).$$

В частности они $\bar{\partial}$ - замкнуты. (Они не точны, поскольку m^i может иметь особенности на многоюразии). Определим вектор $\partial/\partial p = n_0 + q m^i$ так, что $\partial y^i / \partial p = 0$ и будем работать в ортогональном репере

$$\begin{aligned} e_i &= \frac{\partial}{\partial y^i}, \; e^i = \mathrm{d}y^i + m^i n^0 \\ n_0 &= \frac{\partial}{\partial p}, \; n^0 = \mathrm{d}p \end{aligned} \tag{36}$$

Со вложением $M \subset \mathbb{P}^n$ ассоциирован тензор внешней кривизны ${\chi_{ij}}^0$:

$$\tilde{\nabla}_i e_j = \nabla_i e_j + {\chi_{ij}}^0 n_0, \; \tilde{\nabla}_i n_0 = -\chi_{i0}^{\,j} e_j + \Gamma_{i0}^0 n_0 \tag{37}$$

где 0 означает индекс координаты нормальной к поверхности, В этом случае из второго уравнения следует, что $\bar{\partial}_{\bar{j}}(q\, m^i) = \chi_{\bar{j}0}^{\,i}$ и гармонические формы из $H_{\bar{\partial}}^{0,1}(TM)$ представляются в виде

$$(h_a)^i = (q_a)^p \chi_{\bar{j}\;p}^{\;i} \mathrm{d}\bar{y}^{\bar{j}}, \tag{38}$$

Стандартным отождествлением $H^{0,1}_{\partial}(TM_t) \sim H^{2,1}(M_t)$, а именно $(h_a)^i_{\bar{k}} \to (h_a)^l_{\bar{k}} \Omega_{lij} = b_{ij\bar{k}}$ получаем, что когомологии $H^{2,1}(M_t)$ отождествляются с $(q_a)^p$. Схожим образом отождествляем $q_a q_b$ с $H^{1,2}$ и $q_a q_b q_c$ с $H^{0,3}$, а именно

$$(h_a)^m_{\bar{k}}\ (h_b)^n_{\bar{s}} \to (h_a)^n_{\bar{k}}\ (h_b)^n_{\bar{s}}\ \Omega_{mnl} = b_{l,\bar{k}\bar{s}}$$

и

$$(h_a)^m_{\bar{k}}\ (h_b)^n_{\bar{s}}\ (h_c)^l_{\bar{t}} \to (h_a)^m_{\bar{k}}\ (h_b)^n_{\bar{s}}\ (h_c)^l_{\bar{t}}\ \Omega_{mnl} = b_{\bar{k}\bar{s}\bar{t}}.$$

В случае квинтики Дворка, описанной выше, описанная выше конструкция реализуется следующим образом. Вместо пространства расслоения $\mathscr{K}$ является четырхмерным проективным пространством $\mathbb{P}^4$ с координатами $(X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5)$, в котором квинтика задана одним однородным полиномом пятой степени. Индекс p в этом случае будет принимать единственное дополнительное до квинтики значение и его можно опустить. В этом случае q_a являются деформациями уравнения, задающего квинтику, то есть однородными полиномами пятой степени. Форма h_a, построенная по полиному q_a является точной, если она возникает из изоморфизмов $\mathbb{P}^4$ - линейных замен координат. Таким образом Когомологии $H^{3,0}$, $H^{2,1}$, $H^{1,2}$, $H^{0,3}$ отождествляются с полиномами степеней : $1, 5, 10, 15$ соответственно с помощью описанной выше конструкции (с точностью до замен координат).

Квинтика Дворка Построим пример многообразия Калаби-Яу, чтобы показать, как работает только что развитая машинерия. Более того, этот пример окажется важным в дальнейшем. Зададим его как гиперповерхность в четырёхмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^4$ Напомним, что проективное пространство - это пространство с однородными координатами $(X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5)$, где не все $X_i = 0$ и точки X_i и λX_i отождествляются. Примеры карт на этом многообразии получаются, если поделить на какую-то одну ненулевую координату $(X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : 1)$. Это многообразие является Кэлеровым с Кэлеровой метрикой Фубини-Штуди

$$g_{j\bar{k}} = \frac{1}{\sigma}\left(\delta_{j\bar{k}} - \frac{X_k \bar{X}_{\bar{j}}}{\sigma}\right),\ \sigma = \sum |X_i|^2 \tag{39}$$

Это можно проверить, вычисляя дифференциал Кэлеровой формы или получая её из Кэлерова потенциала

$$K = \ln(\sum_i X_i \bar{X}_{\bar{i}}).$$

Эта формв ограничивается на любое подмногообразие $\mathbb{P}^4$ и остаётся замкнутой, поэтому любое подмногообразие проективного пространства Кэлерово.

Для наших целей рассмотрим гиперповерхность $\mathbb{P}^4(5)$, заданную одним неособым однородным полиномом пятой степени

$$M = \{(X_i) \in \mathbb{P}^4 \mid P_5(X_i) = 0\}.$$

Почему пятой станет понятно чуть позже. M - это трёхмерное комплексное или шестимерное вещественное многообразие. Близкие полиномы задают одно и то же вещественное пространство, поскольку топология не может менятся при маленьких деформациях. Особые полиномы имеют комплексную коразмерность не меньше 1, то есть вещественную не меньше 2, значит две любые квинтики можно соединить неособым путём γ в пространстве полиномов, значит все неособые квинтики задают одно и то же вещественное многообразие. При этом комплексные структуры могут быть (и являются) разными. Покажем, что так построенное многообразие является многооразием Калаби-Яу. Для этого мы явно предъявим голоморфную 3-форму. Пусть $X_5 = \xi$, тогда

$$\Omega = \frac{\xi \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \mathrm{d}X_3}{\partial P_5(X_i)/\partial X_4}. \tag{40}$$

где мы считаем X_1, X_2, X_3 голоморфными координатами y^1, y^2, y^3 на M. Если P - полином пятой степени, то Ω хорошо определена (степени числителя и знаменателя одинаковы) а также нигде не зануляется. Может показаться, что эта форма зависит от выбора координат X_1, X_2, X_3, но это не так, $\partial P_5(X_i)/\partial X_4$ - это якобиан замены кординат $(X_1, X_2, X_3, X_4) \to (X_1, X_2, X_3, X_4, P_5(X_i))$. Явная конструкция Ω, в которой видно, что она не имеет сингулярностей:

$$\Omega = \frac{1}{2\pi i} \oint_{P=0} \frac{\mathrm{d}P}{P} \Omega = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{X_5 \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \mathrm{d}X_3 \mathrm{d}X_4}{P_5(X_i)}.$$

Особенно нас будет интересовать случай конкретного семейства многообразий, определяемого полиномами вида

$$P_5(X_i) = P_\psi(X_i) = X_1^5 + X_2^5 + X_3^5 + X_4^5 + X_5^5 - 5\psi X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$$

в $\mathbb{P}^4$. Его зеркальным образом является разрешение особенностей его фактора по максимальной подгруппе симметрий $\mathbb{Z}_5^3$. Единственная $(1,1)$ гармоническая форма приходит из формы Фубини-Штуди на $\mathbb{P}^4$, а $h^{2,1}$ можно посчитать следующим образом. Различные полиномы пятой степени задают различные комплексные многообразия, если они не являются глобальными заменами координат в $\mathbb{P}^4$. Все однородные полиномы пятой степени раскладываются по базису

$$X_1 X_2 X_3 X_4 X_5,\ X_i^2 X_j X_k X_l,\ X_i^3 X_j X_k,\ X_i^4 X_j,\ X_i^5,\ X_i^3 X_j^2,\ X_i^2 X_j^2 X_k.$$

Его размерность равна $1+20+30+20+5+20+30 = 126$. Замены координат в проективном пространстве записываются общей матрицей 5×5, то есть количество полиномов с точностью до изоморфизма равно $126 - 25 = 101$. В данном случае так описываются все деформации комплексной структуры, то есть $h^{2,1} = 101$.