ЛЕКЦИЯ 3

1 Геометрия пространства модулей Калаби-Яу

Возникающие в теории струн при компактификации Калуцы-Клейна безмассовые поля, как было показано ранее, соответствуют когомологиям компактифицирующего пространства Калаби-Яу $H^{2,1}(X)$, $H^{1,1}(X)$.

Более того, мы показали, что элементы этих когомологий соответствуют бесконечно малым Риччи-плоским деформациям Комплексной и Кэлеровой структур на X, образующим пространству модулей многообразия Калаби-Яу.

На пространстве модулей есть естественная метрика, которая в терминах бесконечно малых Риччи-плоским деформаций комплексной структуры $h_a = (h_a)_{ij\bar{k}} \in H^{2,1}(X)$ может быть записана как

$$G_{a\bar{b}} = \int_X h_a \wedge \bar{h}_{\bar{b}} \tag{1}$$

Именно эта метрика, появляется в кинетическом члене Лагранжиана эффективной теории поля, описывающей безмассовые супермультиплеты. Выражение (1) возникает следующим образом.

Элементы из $H^{2,1}(X)$ отождествляются с инфинитезимальными деформациями комплексной структуры, а элементы из $H^{1,1}(X)$ с деформациями Кэлеровой структуры на X по формулам:

$$\begin{aligned} &\partial_a g_{\bar{i}\bar{j}} \to \partial_a g_{\bar{i}\bar{j}}\, g^{\bar{j}l}\, \Omega_{lkm} = h_{\bar{i}km} \in H^{2,1}(X), \\ &\partial_a g_{i\bar{j}} \to i g_{i\bar{j}} = \omega_{i\bar{j}} \in H^{1,1}(X), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\partial_a g_{\bar{i}\bar{j}} := \partial g_{\bar{i}\bar{j}}/\partial z^a$. Здесь a - индекс, нумерующий элементы когомологий $H^{2,1}(X)$. На этих пространствах модулей есть естественные метрики, которые являются функциями комплексных координат z^a - параметров деформации комплексной структуры.

Их можно записать с помощью выражения де-Вита для метрики на пространстве метрик (в математике это метрика Вейля-Петерсона). На пространстве модулей комплексной структуры эта метрика может быть записана таким образом:

$$\begin{aligned} &G_{a\bar{b}}\, \mathrm{d}z^a \mathrm{d}\bar{z}^{\bar{b}} := \mathrm{d}z^a \mathrm{d}\bar{z}^{\bar{b}} \int_X g^{i\bar{i}} g^{j\bar{j}}\, \partial_a g_{\bar{i}\bar{j}} \partial_{\bar{b}} g_{ij} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^6 y = \\ &\frac{\mathrm{d}z^a \mathrm{d}\bar{z}^{\bar{b}}}{||\Omega||^2} \int_X h_a \wedge \bar{h}_{\bar{b}} = \mathrm{d}z^a \mathrm{d}\bar{z}^{\bar{b}}\, \partial_a \partial_{\bar{b}} \log \int_X \Omega \wedge \bar{\Omega} \end{aligned} \tag{3}$$

Первое равенство - это определение.

Второе равенство следует из того, что h_a это соответствующая деформации метрики $\partial_a g_{\bar{k}\bar{l}}$ $(2,1)$-форма, то есть

$$(h_a)_{ij\bar{k}} = 1/2(\partial_a g_{\bar{k}\bar{l}})\, g^{\bar{l}m}\, \Omega_{mij}$$

.

Чтобы доказать третье равенство, надо использовать лемму Кодаиры

$$\partial_a \Omega = k_a \Omega + h_a \tag{4}$$

и применить правило Лейбница

$$\partial_a \Omega = (\partial_a \Omega_{123}(y)) \mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2 \wedge \mathrm{d}y^3 + 3\Omega_{123}(y)(\partial_a \mathrm{d}y^1) \wedge \mathrm{d}y^2 \wedge \mathrm{d}y^3. \tag{5}$$

Компонента $(3,0)$ формы $\partial_a\Omega$ в формуле (4) замкнута, а потому пропорциональна самой Ω с некоторой константой пропорциональности k_a, поскольку когомологии $H^{3,0}$ одномерны.

Равенство в (3) следует из явного вычисления с применением этой леммы.

Итак, метрика на пространстве модулей комплексных структур является Кэлеровой и её Кэлеров потенциал равен $\log \int_X \Omega \wedge \bar{\Omega}$.

Теперь покажем, что на самом деле у метрики есть также препотенциал, то есть пространтво модулей комплексных структур является *специальным Кэлеровым* многообразием.

Для этого выберем симплектический базис в $A^a, \ B_a \in H_3(X,\mathbb{Z})$,. Это означает что эти циклы пересекаются по симплектической единице: $[A]^a \cap [B]_b = \delta^a_b$ и $[A]^a \cap [A]^b = [B]_a \cap [B]_b = 0$. Выберем дуальный базис в когомологиях $\alpha_a, \beta^a \in H^3(X,\mathbb{Z})$, $a = 1,2$, то есть такие, что

$$\int_{A^b} \alpha_a = \int_X \alpha_a \wedge \beta^b = \delta^b_a \tag{6}$$

Также определим периоды голоморфной 3-формы Ω как её интегралы по циклам введённого выше базиса.

$$z^a = \int_{A^a} \Omega, \ F_b = -\int_{B_b} \Omega \tag{7}$$

Мы можем разложить форму Ω по введённому выше базису когомологий, имеем $\Omega = z^a\alpha_a - F_b\beta^b$. Более того, z^a можно использовать как (однородные) координаты на пространстве деформаций комплексных структур.

Чтобы изучить свойства метрики $G_{a\bar{b}}$ пространства модулей, используем лемму Кодаиры:

$$0 = \int_X \Omega \wedge \partial_c \Omega = \int_X (z^a\alpha_a - F_b\beta^b) \wedge (\alpha_c - \partial_c F_d \beta^d) = -z^a \partial_c F_a + F_c = 0 \tag{8}$$

Из последнего равенства получаем, что

$$F_a = \partial_a F(z), \ F(z) = \frac{1}{2} z^a F_a \tag{9}$$

Функция $F(z)$ из формулы выше называется препотенциалом, все интересующие нас геометрические величины на пространстве модулей могут быть вычислены через неё.

Например, Кэлеров потенциал метрики K вычисляется следующим образом:

$$e^K = \int_X \Omega \wedge \bar{\Omega} = \bar{z^a} \partial_a F(z) - z^a \partial_{\bar{a}} \bar{F}(z) \tag{10}$$

Ещё одна интересующая нас величина, константы Юкавы, даются выражением

$$\kappa_{abc} = \int_X \Omega \wedge (h_a \wedge h_b \wedge h_c \Omega) = \int_X \Omega \wedge \partial_a \partial_b \partial_c \Omega = \partial_a \partial_b \partial_c F(z), \tag{11}$$

где $h_a \wedge h_b \wedge h_c \Omega$ означает $(0,3)$ форму $(h_a)^i_{\bar{l}}\ (h_a)^j_{\bar{m}}\ (h_a)^k_{\bar{n}}\ \Omega_{ijk}$. Последнее равенство также использует лемму Кодаиры, а точнее формулу (5), которая используется в её доказательстве.

Таким образом, для вычисления интересующих струнных констант связи необходимо найти препотенциал для пространства модулей деформаций комплексных структур многообразия Калаби-Яу. Суперсимметрия обеспечивает то, что эти константы в эффективной теории оказываются точными и не содержат высших поправок.

2 Вычисление Юкавских констант для квинтики Дворка

Рассмотрим важный пример многообразия Калаби-Яу и вычисление юкавской константы для него. Пусть M гиперповерхность, заданная уравнением в $\mathbb{P}^4$:

$$M = \{x \in \mathbb{P}^4 \mid P(x) = (X_1^5 + X_2^5 + X_3^5 + X_4^5 + X_5^5) - 5\psi X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 = 0\} \tag{12}$$

Эта поверхность задаёт многообразие Калаби-Яу с числами Ходжа
$h^{1,1} = 1,\ h^{2,1} = 101$. При этом когомологии $H^{3-q,q}$ можно отождествить с полиномами степени $5q$ по модулю замен координат в $\mathbb{P}^4$.

Более того, стартуя с многообразия M, можно явно построить его зеркальный образ W.

На M естественно действует группа $\mathbb{Z}_5^5 \rtimes S^5$, где каждый из $\mathbb{Z}_5$ действут умножением X_i на $\alpha = \sqrt[5]{1}$. W получается факторизацией M по подгруппе $\mathbb{Z}_5^3$, где группа $\mathbb{Z}_5^3$ это подгруппа $\mathbb{Z}_5^5 \rtimes S^5$, оставляющая инвариантным произведение $X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$. Эквивалентно мы можем работать с самим многообразием M, рассматривая $\mathbb{Z}_5^3$-инвариантные объекты.

Так как числа Ходжа W переставлены местами, то есть только одна деформация комплексной структуры W. Эта деформация соответствует полиному $X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$. В качестве координаты на этом одномерном пространстве модулей можно выбрать ψ.

Также, в следствие того, что $h^{2,1}(W)=1$, имеем $\dim H_3(W)=4$.

Явно задавая симплектический базис циклов можно вычислить периоды и препотенциал.

3 Вычисление периодов.

В силу когомологических причин периоды на семействах алгебраических многообразий удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям (обобщённым уравнениям Пикара-Фукса). Используя это можно с относительной лёгкостью вычислить периоды в некотором специальном базисе.

Для начала вычислим один период явно, а остальные получим аналитическим продолжением. Зададим цикл B_2 в виде трёхмерного тора

$$B_2 = \{(X_1) \in \mathbb{P}^4 \cap M \mid |X_1| = |X_2| = |X_3| = \delta,\ X_4 \to 0,\ \psi \to \infty\}, \tag{13}$$

где $X_4 \to 0$ означает определённый выбор решения уравнения (12) и δ также ограничено, чтобы можно было выбрать такую ветвь X_4. Обсудим этот выбор более детально вместе с циклом A^2 несколько позже. Также выберем следующую калибровку для формы Ω (которая определена с точностью до умножения на произвольную функцию ψ):

$$\Omega = \frac{5\psi X_5 \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \mathrm{d}X_3}{\partial p/\partial X_4} \tag{14}$$

Вычислить интеграл $\int_{B_2}\Omega$ можно переписав его через интеграл в $\mathbb{C}^5$

$$\int_{B_2} \frac{5\psi \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \mathrm{d}X_3}{\partial p/\partial X_4} = \frac{1}{2\pi i}\int_{B_2\times(|X_4|=\delta)} \frac{5\psi \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \mathrm{d}X_3 \mathrm{d}X_4}{p} = \\ = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{|X_i|=\delta} \frac{5\psi \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \mathrm{d}X_3 \mathrm{d}X_4 \mathrm{d}X_5}{p} \tag{15}$$

Этот интеграл можно разложить в ряд по большим ψ и вычислить через вычеты:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{|X_i|=\delta} \frac{5\psi \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \mathrm{d}X_3 \mathrm{d}X_4 \mathrm{d}X_5}{-\sum x_i^5 + 5\psi\prod X_i} = \\ \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{|X_i|=\delta} \frac{5\psi \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \mathrm{d}X_3 \mathrm{d}X_4 \mathrm{d}X_5}{X_1X_2X_3X_4X_5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(X_1^5+X_2^5+X_3^5+X_4^5+X_5^5)^n}{(X_1X_2X_3X_4X_5)^n} \tag{16}$$

В конечном итоге получаем

$$F_2(\psi) = \left(\frac{2\pi i}{5}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(5n!)}{(n!)^5(5\psi)^{5n}}. \tag{17}$$

Множитель 5^{-3} возник из-за финальной факторизации по $\mathbb{Z}_5^3$. Этот ряд является обобщённой гипергеометрической функцией.

$$\omega_0(\psi) = \left(\frac{5}{2\pi i}\right)^3 F_2(\psi) =_4 F_3(1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1, 1, 1; 1/\psi^5) \tag{18}$$

Чтобы продолжить её в область $|\psi| < 1$, где она имеет особенность, можно использовать представление Барнса-Меллина

$$\omega_0(\psi) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \mathrm{d}s \frac{\Gamma(-s)\Gamma(5s+1)}{\Gamma^4(s+1)} (-5\psi)^{-5s}. \tag{19}$$

Если $|\psi| > 1$, то оборачивая контур вокруг полюсов $\Gamma(-s)$, мы получаем выражение (17). Если же $|\psi| < 1$, то контур замыкается на полюсах $\Gamma(5s+1)$, приводя к ряду

$$\omega_0(\psi) = -\frac{1}{5} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2m}\Gamma(m/5)(5\psi)^m}{\Gamma(m)\Gamma^4(1-m/5)},\ |\psi| < 1. \tag{20}$$

После чего остальные периоды получаются из этого аналитическим продолжением

$$\omega_j(\psi) = F_2(\alpha^j \psi), \tag{21}$$

где $\alpha = \sqrt[5]{1}$. Периоды в симплектическом базисе выражаются через периоды ω_j посредством матричного соотношения

$$\Pi = m\omega,\ \omega = (\omega_2, \omega_1, \omega_0, \omega_4)^t,\ \Pi = (F_1, F_2, z^1, z^2)^t \tag{22}$$

Матрицу m можно вычислить зная преобразование монодромии периодов вокруг конифолдной особой точки $\psi = 1$ а также используя то, что при всех изоморфизмах квинтики M периоды в базисе Π преобразуются с помощью целочисленной симплектической матрицы.

Обсудим значения ψ, при которых $P_\psi(x) = 0$ имеет особенности. При $\psi = \infty$ квинтика вырождается в пересечение прямых. При конечных ψ можно записать условие вырождения в виде

$$\sum X_i^5 = 5\psi \prod X_i,\ 5X_1^4 = 5\psi X_2 X_3 X_4 X_5,\ \cdots, \tag{23}$$

где многоточие означает аналогичные уравнения с перестановками индексов. Домножая на $X_1/5$ получаем

$$X_1^5 = \psi X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 \tag{24}$$

и ещё четыре уравнения. В частности $X_i^5 = X_j^5$. Полагая для нормировки $X_5 = 1$ мы получаем, что все $X_i^5 = 1$. Отсюда следует, что решение есть только при $\psi^5 = 1$.

Используя отождествления по группе симметрий $\mathbb{Z}_5^3$ получаем, что единственная особая точка это $\psi = 1,\ X_i = 1$, матрица вторых производных в ней невырождена, то есть это невырожденная особая (конифолдная) точка.

Для вычисления монодромии периодов нам потребуется информация о 3-циклах квинтики, которым соответствуют остальные периоды ω_j:

1. Циклом A^2, сопряжённым к B_2, является 3-сфера

$$A^2 = \{x \in \mathbb{P}^4 \cap M \mid X_5 = 1,\ X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{R}\}, \tag{25}$$

и ветвь X_4 выбрана так, что A^2 - сфера. Эта сфера является исчезающим циклом в конической особой точке $\psi = 1$, $X_i = 1$, то есть при $\psi = 0$ она стягивается в точку $X_i - 1$. Соответствующий период начинается

$$z^2(\psi) = \frac{4\pi^2}{5^{3/2}}(\psi - 1) + \cdots \tag{26}$$

2. Циклы A^1, B_1 отделены от особой точки конифолда $\psi = 1$.

Для того, чтобы это показать, рассмотрим окрестность конческой особенности $\psi = 1$, $X_i = 1$. Поскольку особенность невырождена, в окрестности можно диагонализовать квадратичную часть полинома в координатах Y_i (первое приближение к координатам Морса):

$$X_i = 1 + A_{i,j}Y_j,\ A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 1/5 & 0 & 1/\sqrt{50} \\ 1/\sqrt{10} & -1/5 & 0 & 1/\sqrt{50} \\ 1/\sqrt{10} & 0 & 1/5 & -1/\sqrt{50} \\ 1/\sqrt{10} & 0 & -1/5 & -1/\sqrt{50} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

В этих координатах уравнение, задающее квинтику имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{4} Y_k^2 = 5(\psi - 1) \tag{28}$$

Покажем, что при $\psi = 1$ в окрестности $Y_i = 0$ уравнение задаёт конус с основанием $S^2 \times S^3$. Определённо это конус, поскольку $Y_i \to \lambda Y_i$ переводит решение в решение. Чтобы найти основание, рассмотрим пересечение конуса со сферой $\sum_{k=1}^{4} |Y_k|^2 = 2r^2$ и $Y_i = \xi_i + i\eta_i$, тогда уравнения выше записываются как

$$\xi^2 - \eta^2 = 0,\ \xi \cdot \eta = 0,\ \xi^2 + \eta^2 = 2r^2, \tag{29}$$

или $\xi^2 = \eta^2 = r^2$, $\xi \cdot \eta = 0$. Первое уравнение на ξ задаёт сферу S^3, второе и третье при каждом ξ задают сферу S^2. Все такие расслоения тривиальны, то есть основание оказывается равным $S^3 \times S^2$. Тогда цикл A^2 при вещественных $\psi > 1$ задаётся условием $Y_i \in \mathbb{R}$. При $\psi = 1$ это цикл становится точкой. Такой цикл называется исчезающим.

Тогда можно использовать формулу Пикара-Лефшеца для монодромии ψ вокруг единицы. А именно, если есть голоморфное слоение X_ψ такое, что при $\psi = 1$ слой становится особым, то формула Пикара-Лефшеца позволяет записать монодромию циклов в неособом X_ψ при обходе ψ вокруг особой точки. Если особая точка невырождена, а (единственный) исчезающий цикл обозначается A_2, то для любого цикла C монодромия при обходе вокруг $\psi = 1$ задаётся следующей формулой:

$$C \to C \pm \langle C, A^2 \rangle A^2, \tag{30}$$

В силу определения симплектического базиса, отсюда следует формула (33) со значением $n = \pm 1$. Чтобы показать, что $A^2 \cap B_2 = 1$, надо уточнить определения этих циклов. Чтобы построить циклы и определить поведение решения X_4 от остальных координат, сделаем следующую замену:

$$\Delta = 1 + X_1^5 + X_2^5 + X_3^5,\ \eta = \frac{X_4}{\Delta^{1/5}},\ u = \frac{X_1 X_2 X_3}{\Delta^{4/5}}. \tag{31}$$

Заметим, что u ограничено сверху (в точке $X_1 = X_2 = X_3 = 1$ числом $4^{-4/5}$). После замены уравнение квинтики превращается в

$$\eta^5 - 5\psi u \eta + 1 = 0. \tag{32}$$

При $\psi \to 0$ её пять решений при фиксированном $u\psi$ (которые отвечают пяти решениям X_4 при X_1, X_2, X_3 определяемых значением u) приближённо равны $\sqrt[5]{-1}$. Два из них комплексно сопряжены с положительной вещественной частью и три имеют отрицательную вещественную часть. Изучим, когда уравнение (32) имеет совпадающие корни. Для этого надо приравнять к нулю одновременно уравнение и его производную:

$$\eta^4 - u\psi = 0.$$

Отсюда следует, что единственный двойной корень возникает при $u\psi = 4^{-4/5}$, $\eta = 1/4^{1/5}$. При этом два корня в правой полуплоскости сливаются на вещественной оси и при дальнейшем увеличении $u\psi$ один идёт в сторону $+\infty$, а другой в сторону нуля, как видно из предельной формы

$$\eta = \frac{\eta^5 + 1}{5u\psi}$$

Теперь мы можем детально описать циклы A^2, B_2 и их пересечения. Ограничимся рассмотрением $\psi > 1$ и выберем $X_1, X_2, X_3 > 0$. Цикл A^2 описывается следующим образом:

$$\{(X_1, X_2, X_3)\ \text{ такие что }\ u(X_1, X_2, X_3) \geq \frac{4^{-4/5}}{\psi},\ X_4 \in \{X_4^-, X_4^+\}\},$$

где $X_4^\pm$ обозначают пару положительных вещественных решений (32). При $u = 4^{-4/5}/\psi$ эти два решения сливаются в одно. Таким образом одно решение соответствует северной полусфере, а второе южной, двойная точка соответствует экватору, по которому эти полусферы склеиваются.

Найдём пересечение циклов $A^2 \cap B_2$. Решение $X_4 \to 0$ в определении B_2 соответствует выбору южной полусфере цикла A^2. Также для B_2 по определению $|X_1| = |X_2| = |X_3| = \delta$. Из того, что на A^2 все X_i вещественны и положительны следует, что на пересечении $X_1 = X_2 = X_3 = \delta$. Получается, что у A^2 и B_2 есть единственная общая точка $A^2 \cap B_2$ - это точка на южной полусфере с $X_1 = X_2 = X_3 = \delta,\ X_4 = X_4^-$.

Заметим, что отсюда получаем ограничение на δ:

$$u_\delta > 4^{-4/5}/\psi,\ u_\delta = \frac{\delta^3}{(1+3\delta^5)^{4/5}}$$

Оставшиеся два цикла симплектического базиса не пересекаются с этими, то есть не изменяются при обходе (их явное описание нам не понадобится). Из вышесказанного получаем, что матрица монодромии для периодов Π имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

Такой вид матрицы перехода означает, что ряд для периода B_2 содержит $\log(\psi - 1)$. Отсюда следует, что монодромия периодов в базисе ω равна

$$\begin{aligned} &\omega_j(\psi) \to \omega_j(\psi) + c_j z^2(\psi) \\ &\omega_j(\psi) = \frac{c_j}{2\pi i} z^2(\psi) \log(\psi - 1) + f_j(\psi) \end{aligned} \tag{34}$$

Коэффициенты c_j теперь находятся дифференцированием формул (34), (20) и сравнением главных асимптотик. В итоге получаем $\tilde{c}_j = (5/2\pi i)^3 c_j = (1, 1, -4, 6, -4)$.

Следующий шаг - нахождение $z^2(\psi)$. Для этого можно использовать отсутствие монодоромии $z^2(\psi)$ при обходе вокруг единицы. Используя $\tilde{c}_1 = 1$ и вычитая значения периода прямо под разрезом из значения прямо над разрезом, для вещественных $\psi > 1$ имеем

$$\omega_1(x + i\epsilon) - \omega_1(x - i\epsilon) = -\left(\frac{5}{2\pi i}\right)^3 z^2(\psi) + O(\epsilon) \tag{35}$$

в том же линейном по ϵ приближении

$$\omega_1(x - i\epsilon) = \omega_0(\alpha(x - i\epsilon)) = \omega_0(\alpha + i\epsilon) + O(\epsilon) \tag{36}$$

Устремляя ϵ к нулю из двух предыдущих равенств получаем выражение для периода без монодромии

$$z^2(\psi) = -\left(\frac{2\pi i}{5}\right)^3 (\omega_1(\psi) - \omega_0(\psi)) \tag{37}$$

Таким образом мы знаем следующее о матрице переходов m от базиса ω к базису Π (известные строчки соответствуют $z^2(\psi)$ и $F_2(\psi)$):

$$m = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & a_4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & b_4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{38}$$

а также, что $\sum_i a_i c_i = \sum_i b_i c_i = 0$ из-за отсутствия монодромии циклов A^1, B_1 вокруг $\psi = 1$. Для того, чтобы вычислить оставшиеся коэффициенты, воспользуемся калибровочной инвариантностью, занулив b_2 и вычисляя монодромию при преобразовании $\psi \to \alpha\psi$. При этом преобразовании

$$\omega(\alpha\psi) = a\omega(\psi),\ a = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{39}$$
$$\Pi(\alpha\psi) = A\Pi(\psi),\ A = mam^{-1}$$

При этом поскольку Π вычислены в симплектическом базисе, A должна быть симплектической целочисленной матрицей. Из этого условия находятся уравнения и явный вид матрицы перехода

$$Am = ma,\ A^T\Sigma A = \Sigma,\ A \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{Z}),$$
$$m = \begin{pmatrix} -3/5 & -1/5 & 21/5 & 8/5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{40}$$

Последнее выражение определено с точностью до действия группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, действующей на циклы A^1, B_1.

Зная выражение для периодов в симплектическом базисе можно вычислить метрику $G_{\psi\bar{\psi}}$ и константу Юкавы $\kappa_{\psi\psi\psi}$ по формулам (10) и (11) соответственно.

4 Appendix

4.1 Компактификация Калуцы-Клейна.

При построении эффективного Лагранжиана четырёхмерной теории, которая возникает после компактификации, сначала следует взять интеграл по внутреннему пространству X. Для этого удобно разложить поля по собственным функциям шестимерных частей кинетического члена каждого их полей.

Проиллюстрируем это на простейшем примере теориии Калуцы-Клейна в $\mathbb{R}^{1,3} \times S^1$. Действие имеет вид

$$S[\phi] = \int_{\mathbb{R}^{1,3}\times S^1} \mathrm{d}^5 w\, \partial_M \phi \partial^M \phi = -\int_{\mathbb{R}^{1,3}\times S^1} \mathrm{d}^5 w\, \phi \Delta \phi.$$

Теперь поле $\phi(w)$ можно разложить о собственным функциям оператора Лапласа на окружности

$$\phi(w) = \phi(x, y) = \sum_n \phi^n(x) \frac{e^{iny/R}}{\sqrt{2\pi R}},$$

при этом действие становится

$$S[\phi] = -\sum_n \int_{\mathbb{R}^{1,3}} \mathrm{d}^4 x \, \left[\phi^n(x) \Delta \phi^n(x) + \frac{n^2}{R^2} (\phi^n(x))^2 \right].$$

В итоге мы получаем четырёхмерное действие для бесконечной башни частиц $\phi^n(x)$ с массами n^2/R^2 Если радиус R достаточно велик, то все частицы кроме ϕ^0 становятся тяжёлыми, и ими можно пренебречь. Заметим, что ϕ^0, отвечающее частице с массой 0,соотвествует собственной функции оператора Лапласа с нулевым собственным значением.

Это рассуждение обобщается и на компактификацию на Калаби-Яу. При этом каждое из полей десятимерной теории нужно разложить по нулевым модам дифференциального оператора, возникающего из кинетического члена в компактной части (оператора Лапласа, Дирака или Лихнеровича). Каждое из безмассовых полей четырехмерной теории будет отвечать нулевой моде соответствующего оператора.

Мы уже установили, что нулевые моды операторов отвечают гармоническим формам, таким образом каждой гармонической форме отвечает некоторое поле четырёхмерной теории.

Более того, полученные четырёхмерные поля естественным образом группируются в супермультиплеты $d = 4$ $N = 2$ супергравитации.

4.2 Когомологии и полиномы.

Рассмотрим многообразие Калаби-Яу M заданное в пространстве $\mathbb{P}^n$ уравнением $P(X_i) = 0$. Также рассмотрим деформацию полинома

$$P(X_i) \to P(X_i) + \epsilon q(X_i).$$

Найдём соответствующее изменение комплексной структуры. Для этого рассмотрим координаты y^i как функции от точки пространства и деформаций, которые изменяются линейно по деформации полинома

$$y^i = y^i(y_0, z^A).$$

Модельный пример - часть координат проективного пространства, $P(X + \epsilon q(X) n_0) + \epsilon q(X) = 0$, n_0 - нормаль к поверхности. При этом определим сдвиг m^i как

$$y^i(y_0, \epsilon z^{(q)}) = y_0^i - \epsilon q(y_0) m^i(y_0).$$

Тогда, в частности, $y^i(y_0 + \epsilon q(y_0) m^i(y_0), \epsilon z^{(q)}) = 0$. Из этого закона преобразования следует явный вид дифференциала Бельтрами:

$$\frac{\partial y^i(y_0, z^A)}{\partial z^{(q)}}|_{(0,1)} = h^i \sim \bar{\partial}(q(y_0) m^i(y_0)).$$

В частности они $\bar{\partial}$ - замкнуты. (Они не точны, поскольку m^i может иметь особенности на многооюразии). Определим вектор $\partial/\partial p = n_0 + q m^i$ так, что

$\partial y^i/\partial p=0$ и будем работать в ортогональном репере

$$\begin{aligned} e_i &= \frac{\partial}{\partial y^i},\ e^i = \mathrm{d}y^i + m^i n^0 \\ n_0 &= \frac{\partial}{\partial p},\ n^0 = \mathrm{d}p \end{aligned} \tag{41}$$

Со вложением $M \subset \mathbb{P}^n$ ассоциирован тензор внешней кривизны ${\chi_{ij}}^0$:

$$\tilde{\nabla}_i e_j = \nabla_i e_j + {\chi_{ij}}^0 n_0,\ \tilde{\nabla}_i n_0 = -\chi_{i0}^{j} e_j + \Gamma_{i0}^0 n_0 \tag{42}$$

где 0 означает индекс координаты нормальной к поверхности, В этом случае из второго уравнения следует, что $\bar{\partial}_{\bar{j}}(q\, m^i) = \chi_{\bar{j}0}^{i}$ и гармонические формы из $H^{0,1}_{\bar{\partial}}(TM)$ представляются в виде

$$(h_a)^i = (q_a)^p {\chi_{\bar{j}}}^i{}_p \mathrm{d}\bar{y}^{\bar{j}}, \tag{43}$$

Стандартным отождествлением $H^{0,1}_{\partial}(TM_t) \sim H^{2,1}(M_t)$, а именно $(h_a)^i_{\bar{k}} \to (h_a)^l_{\bar{k}}\Omega_{lij} = b_{ij\bar{k}}$ получаем, что когомологии $H^{2,1}(M_t)$ отождествляются с $(q_a)^p$. Схожим образом отождествляем $q_a q_b$ с $H^{1,2}$ и $q_a q_b q_c$ с $H^{0,3}$, а именно

$$(h_a)^m_{\bar{k}}\ (h_b)^n_{\bar{s}} \to (h_a)^n_{\bar{k}}\ (h_b)^n_{\bar{s}}\ \Omega_{mnl} = b_{l,\bar{k}\bar{s}}$$

и

$$(h_a)^m_{\bar{k}}\ (h_b)^n_{\bar{s}}\ (h_c)^l_{\bar{t}} \to (h_a)^m_{\bar{k}}\ (h_b)^n_{\bar{s}}\ (h_c)^l_{\bar{t}}\,\Omega_{mnl} = b_{\bar{k}\bar{s}\bar{t}}.$$

В случае квинтики Дворка, описанная выше конструкция реализуется следующим образом. Вместо пространства расслоения $\mathscr{K}$ является четырхмерным проективным пространством $\mathbb{P}^4$ с координатами $(X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5)$, в котором квинтика задана одним однородным полиномом пятой степени. Индекс p в этом случае будет принимать единственное дополнительное до квинтики значение и его можно опустить. В этом случае q_a являются деформациями уравнения, задающего квинтику, то есть однородными полиномами пятой степени. Форма h_a, построенная по полиному q_a является точной, если она возникает из изоморфизмов $\mathbb{P}^4$ - линейных замен координат. Таким образом Когомологии $H^{3,0},\ H^{2,1},\ H^{1,2},\ H^{0,3}$ отождествляются с полиномами степеней : $1, 5, 10, 15$ соответственно с помощью описанной выше конструкции (с точностью до замен координат).

4.3 Генераторы d=4 суперсимметрии.

На 10-мерной супергравитации в бэкграунде $\mathbb{R}^{1,3}\times K$ действует d=4 N=2 алгебра Суперпуанкаре. Чётная часть состоит из сдвигов, поворотов и бустов 4-мерной компоненты.

Нечетные генераторы суперсимметрии, относительно которых инвариантен вакуум, строятся из нечетных генераторов суперсимметрии полной 10-мерной теории Q^A

$$\hat{Q}^{\alpha} = Q^{\alpha,a}\eta^{+}_{a}(y),\ \hat{Q}^{\dot{\alpha}} = Q^{\dot{\alpha},\dot{a}}\eta^{-}_{\dot{a}(y)}, \tag{44}$$

где $\eta^{\pm}$ - ковариантно постоянный спинор правой/левой киральности на Калаби-Яу. А генератор $Q^{\alpha,a} = Q^{A}$, где мы разбили индекс 10-мерного спинора по индексам четырёх- и шестимерного.