

ЛЕКЦИЯ 2

1 Ковариантно постоянный спинор

Как было объяснено в 1-й лекции при компактификации 6-ти из 10-ти измерений в Теории струн, исходя из феноменологических требований необходимо получить теорию с пространственно-временной Суперсимметрией. Причем это должна быть суперсимметрия с минимальным числом суперзарядов. Наличие суперсимметрии накладывает серьёзные ограничения на геометрию компактифицирующего многообразия. В частности, вакуум теории $|0\rangle \in \mathcal{H}$ должен быть инвариантен относительно преобразований суперсимметрии

$$\delta_\epsilon |0\rangle = \epsilon^\alpha Q_\alpha |0\rangle = 0. \quad (1)$$

Поэтому из соотношения $\delta_\epsilon \Phi = [\epsilon Q, \Phi]$ следует, что $\langle \delta_\epsilon \Phi \rangle = 0$

В случае бозонных полей Φ это условие выполняется автоматически, поскольку их вариация $[\epsilon Q, \Phi]$ является фермионом и не может иметь ненулевого среднего. Поэтому реальное условие появляется, когда Φ фермионный оператор. Среди фермионных полей в теории с суперсимметрией есть гравитино χ , чья вариация

$$\delta_\epsilon \chi = \nabla \epsilon + \dots \quad (2)$$

здесь ϵ означает 10-мерный Майорано-Вейлевский спинор, а многоточие означает члены, зависящие от других полей теории (чьи вакуумные средние исчезают). Таким образом мы приходим к условию

$$\langle \nabla \epsilon \rangle = \tilde{\nabla} \epsilon = 0, \quad (3)$$

где тильда означает, что для метрики в связности используется её вакуумное среднее.

Оказывается (и мы это покажем), что такие многообразия являются так называемыми многообразиями Калаби-Яу.

Чтобы получить одно из следствий существования ковариантно постоянного спинора запишем:

$$[\nabla_m, \nabla_n] \zeta = 1/4 R_{mnkl} \gamma^{kl} \zeta = 0, \quad (4)$$

где $\gamma^{i_1, \dots, i_n}$ - антисимметризованное произведение гамма-матриц. Помножая уравнение (4) слева на γ^n и используя свойство гамма-матриц

$$\gamma^n \gamma^{kl} = \gamma^{nkl} + g^{nk} \gamma^l - g^{nl} \gamma^k$$

и тождество Бьянки $R_{mnkl} + R_{mkln} + R_{mlnk} = 0$, получим

$$1/2 g^{nk} \gamma^l R_{mnkl} \zeta = \hat{R}_{ml} \gamma^l \zeta = 0.$$

Уравнение

$$\hat{R}_{mn}\gamma^n\zeta = 0$$

имеет решение только, если $\hat{R}_{mn}\gamma^n$ вырождена.

Обозначая для краткости тензор Риччи $\hat{R}_{mn} = A_n$, получим

$$(A_n\gamma^n)^2 = (A_n\gamma^n A_m\gamma^m)^2 = \frac{1}{2}A_n A_m \{\gamma^n, \gamma^m\} + \frac{1}{2}A_n A_m [\gamma^n, \gamma^m] = g^{mn} A_n A_m I.$$

Отсюда видно, что матрица $A_n\gamma^n$ вырождена, если и только если $g_{mn}A^n A^m = 0$. В метрике с евклидовой сигнатурой это значит, что $A_n = 0$. Таким образом $\hat{R}_{mn} = 0$, то есть многообразие должно быть Риччи-плоским.

Оказывается, что чтобы существовал ковариантно постоянный спинор, многообразие должно быть не просто Риччи-плоским, но также ещё и Комплексным, и даже Кэлеровым.

Такие многообразия называются многообразиями Калаби-Яу.

2 Кэлеровы многообразия.

Мы только что вывели свойство Риччи-плоскости метрики, допускающей ковариантно постоянный спинор. Напомним, что на шестимерном многообразии спинор обладает восемью компонентами: $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_8)$. Обозначим 6 гамма-матриц γ_a . Их можно построить из 4-мерных гамма-матриц по следующему правилу. Пусть Γ_α означает пятёрку 4-мерных гамма-матриц $\Gamma_1, \dots, \Gamma_5$, где $\Gamma_5 = \prod_{\alpha=1}^4 \Gamma_\alpha$ в евклидовой сигнатуре, то есть $\{\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$ и $\Gamma_\alpha^+ = (\Gamma_\alpha)$. Можно проверить, что шесть 8x8 матриц

$$\gamma_a = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_a \\ \Gamma_a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in 1, \dots, 5, \quad \gamma_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

удовлетворяют соотношениям на гамма-матрицы в евклидовой сигнатуре для шестимерного пространства $\{\gamma_a, \gamma_b\} = \delta_{ab}$.

Их произведение $\gamma_7 = \prod_a \gamma_a$ антикоммутирует с каждой из матриц γ_a и имеет четырёхмерные собственные подпространства с собственными значениями ± 1 . По построению $\gamma_7 = \{1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1\}$. Четырёхмерные спиноры из этих подпространств называются Вейлевскими и являются неприводимыми представлениями алгебры вращений $so(6)$:

$$\zeta \rightarrow \frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b]\zeta. \quad (6)$$

Будем обозначать разложение Дираковского спинора на Вейлевские через

$$\zeta = \zeta_+ + \zeta_-. \quad (7)$$

Чтобы построить гамма-матрицы и спинорные поля на многообразии, необходимо ввести набор тетрад $\{e_a^m\}$ (напомним, что они являются

векторными полями на многообразии и характеризуются тем, что $e_a^m e_b^n \delta^{ab} = g^{mn}$, то есть переводят плоскую метрику δ^{ab} в касательном пространстве в метрику g^{mn} многообразия X).

Тогда гамма-матрицы на многообразии строятся как

$$\gamma^m := \gamma^a e_a^m, \quad \{\gamma^m, \gamma^n\} = g^{mn}. \quad (8)$$

Ковариантно-постоянный спинор ζ распадается на пару ковариантно постоянных Вейлевских спиноров $\zeta_{\pm}$.

Изучим остальные свойства многообразия с ковариантно постоянным спинором. Для начала нормируем спинор условием $\zeta_+^\dagger \zeta_+ = \zeta_-^\dagger \zeta_- = 1$. Определим теперь оператор

$$J_n^m = -i\zeta_+^\dagger \gamma_n^m \zeta_+, \quad \gamma_n^m = g^{ml} \gamma_{ln} \quad (9)$$

Перечислим его свойства:

1. J_n^m вещественный (его коэффициенты вещественные).
2. $J_k^m J_n^k = -\delta_n^m$.
3. $J_{mn} = -J_{nm}$, кососимметрический тензор.
4. $g_{pq} J_m^p J_n^q = g_{mn}$
5. $\nabla J_n^m = 0$, то есть J_n^m ковариантно постоянный тензор.

Доказательство:

1. $\overline{J_n^m} = (-i\zeta_+^\dagger \gamma_n^m \zeta_+)^{\dagger} = i\zeta_+^\dagger (-\gamma_n^m) \zeta_+ = J_n^m$,
2. Свойство $J^2 = -1$ проверяется несколько сложнее. Один из способов - это подействовать на спинор $\zeta \rightarrow \Lambda_{mn} \gamma^{mn} \zeta$, чтобы привести к каноническому виду $\zeta \sim (1, 0, 0, 0)^t$, а затем вычислить явно, например в базисе гамма-матриц, описанном выше.
3. следует из $\gamma_{mn} = 1/2[\gamma_m \gamma_n] = -1/2[\gamma_n, \gamma_m]$.
4. Используем 2) и 3)

$$g_{pq} J_m^p J_n^q = g_{mn}, \quad \omega_{mn} = g_{mp} J_n^p = -\omega_{nm} \quad (10)$$

5. следует из правила Лейбница и $\nabla \gamma_m = \nabla \zeta = 0$.

Почти комплексная структура.

Оператор J_n^m на многообразии X , удовлетворяющий свойствам 1), 2) называется *почти комплексной структурой* на многообразии X .

Выберем 3 линейно независимых вектора $\partial/\partial x^m$ и введём следующие обозначения:

$$\partial_m := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^m} - iJ \frac{\partial}{\partial x^m} \right), \quad \overline{\partial}_m := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^m} + iJ \frac{\partial}{\partial x^m} \right), \quad (11)$$

где коэффициент $1/2$ введён для удобства.

По свойству 2) имеем $J \cdot \partial_m = i\partial_m$, $J \cdot \bar{\partial}_m = -i\bar{\partial}_m$.

Таким образом, касательное пространство с комплексными коэффициентам (комплексифицированное касательное пространство $T_{\mathbb{C}}X$) разбивается в прямую сумму трёхмерных голоморфных (собственных для J с собственным значением i) и антиголоморфных (аналогично с собственным значением $-i$) касательных пространств $TX \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X$, где последние порождены векторами ∂_m и $\bar{\partial}_m$ соответственно. Идея состоит в том, чтобы интерпретировать векторные поля $\partial_m := \partial/\partial y^m$ как дифференцирования вдоль комплексных координат $\partial_m = \partial/\partial y^m$. Проинтегрировать эти поля (то есть найти комплексные координаты y^m как функции исходных вещественных координат x^i) можно не всегда.

Как минимум, для производных вдоль координат должно выполняться условие интегрируемости, которое можно записать следующим образом: на комплексном многообразии определён коммутатор векторных полей $[\partial_i, \partial_j] = c_{ik}^j \partial_k$. Тогда это должно выполняться для определённых нами полей $J\partial_i = i\partial_i$. Заметим, что если v - какое-то поле, то $v \rightarrow v \mp iJv$ является голоморфным/антиголоморфным. Тогда условие интегрируемости можно записать так:

$$[v - iJv, w - iJw] + iJ[v - iJv, w - iJw] = 0$$

. Словами это можно сказать так: антиголоморфная составляющая коммутатора голоморфных полей равна нулю. Раскрывая скобки в последнем равенстве, получаем

$$[v, w] - [Jv, w] - [v, Jw] + [Jv, Jw] = 0.$$

В координатах, подставляя вместо v, w производные по координатам $\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j$ мы получаем условие интегрируемости в виде

$$N_{jk}^i = J_i^m (\partial/\partial x^m J_j^k - \partial/\partial x^j J_m^k) - J_j^m (\partial/\partial x^m J_i^k - \partial/\partial x^i J_m^k) = 0. \quad (12)$$

Больше того не трудно проверить, что это уравнение остается справедливым при замене $\partial/\partial x^i$ на ковариантные производные ∇_i .

$$N_{jk}^i = J_i^m (\nabla_m J_j^k - \nabla_j J_m^k) - J_j^m (\nabla_m J_i^k - \nabla_i J_m^k) = 0. \quad (13)$$

Таким образом N_{jk}^i является тензором. Тензор N_{jk}^i называется тензором Нэйнхауса (Nijenhuis). Теорема Ньюландера-Ниренберга утверждает, что это условие интегрируемости является также достаточным. То есть при выполнении условия интегрируемости на многообразии можно ввести голоморфные координаты y^m такие, что $\partial_m = \partial/\partial y^m$ и $\bar{\partial}_m = \partial/\partial \bar{y}^m$. Эта ситуация аналогична связи зануления тензора кривизны Римана R_{ijkl} и возможности введения плоских координат.

Комплексная структура. Почти комплексное многообразие (X, J) называется комплексным, если тензор Нэйнхауса N_{jk}^i равен нулю. На

комплексном многообразии можно ввести комплексные координаты так, что все функции переклейки будут голоморфны.

В нашем случае J задаётся формулой (9) и, в частности, удовлетворяет свойству 5), то есть $\nabla_m J = 0$, а значит $N_{jk}^i = 0$. То есть многообразие с ковариантно постоянным спинором является *комплексным многообразием*.

Изучим теперь следствия свойства 4). В бескоординатном виде оно пишется как $g(Jv, Jw) = g(v, w)$. Тогда в голоморфных координатах $g_{ij} = g_{\bar{i}\bar{j}} = 0$.

Действительно, в голоморфных координатах y^i матрица J имеет вид $J_j^i = i\delta_j^i$, $J_{\bar{j}}^{\bar{i}} = 0$ и $J_{\bar{j}}^i = -i\delta_j^i$. Тогда

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = g(J\partial_i, J\partial_j) = g(i\partial_i, i\partial_j) = -g_{ij}. \quad (14)$$

То есть

$$g_{ij} = 0$$

Эрмитова метрика. Метрика g на комплексном многообразии (X, J) , которая удовлетворяет условию $g(Jv, Jw) = g(v, w)$ называется *Эрмитовой*. В рассматриваемом нами случае метрика g , в силу свойства 4) является эрмитовой.

На самом деле условие $\nabla J = 0$ гораздо сильнее следующего из него условия Нейнхауса $N_{jk}^i = 0$. Это накладывает дополнительные ограничения на многообразие X .

Обозначим

$$\omega_{mn} := g_{mk} J_n^k. \quad (15)$$

В силу того, что метрика g эрмитова, в голоморфных координатах $\omega_{ij} = \omega_{\bar{i}\bar{j}} = 0$ и $\omega_{i\bar{j}} = J_i^l g_{l\bar{j}} = i g_{i\bar{j}}$. Также учтем, что

$$\nabla_k \omega_{i\bar{j}} = 0.$$

Отсюда легко следует, что

$$(d\omega)_{ij\bar{k}} = \partial_i \omega_{j\bar{k}} + \partial_j \omega_{\bar{k}i} + \partial_{\bar{k}} \omega_{ij} = \nabla_i \omega_{j\bar{k}} + \nabla_j \omega_{\bar{k}i} + \nabla_{\bar{k}} \omega_{ij} = 0. \quad (16)$$

То есть 2-форма ω является замкнутой, а многообразие X симплектическим.

Кэлериово многообразие. Комплексное многообразие (X, J) с эрмитовой метрикой g называются *Кэлериовым*, если $d\omega = 0$, где $\omega = J \cdot g$. В частности Кэлериовы многообразия являются симплектическими. Кэлериовы многообразия это специальный класс комплексных многообразий.

В голоморфных координатах для Кэлериовых многообразий имеем

$$\omega_{i\bar{j}} = i g_{i\bar{j}}, \quad \partial_i g_{j\bar{k}} - \partial_j g_{i\bar{k}} = 0, \quad \bar{\partial}_{\bar{i}} g_{j\bar{k}} - \bar{\partial}_{\bar{k}} g_{j\bar{i}} = 0.$$

Последние два условия следуют из замкнутости формы ω и являются условиями интегрируемости метрики

$$g_{i\bar{j}} = \partial_i \bar{\partial}_{\bar{j}} K,$$

Здесь K некоторая определённая локально функция, называемая Кэлеровым потенциалом, которая определяется уравнением

$$\omega = i\partial\bar{\partial}K.$$

Свойства тензоров Римана и Риччи в Кэлеровом случае.

Из существования потенциала следуют значительные упрощения. Из символов Кристоффеля

$$\Gamma_{mn}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_m g_{nl} + \partial_n g_{ml} - \partial_l g_{mn})$$

выживают только Γ_{jk}^i , $\Gamma_{\bar{j}\bar{k}}^{\bar{i}}$

$$\Gamma_{jk}^i = g^{i\bar{l}}\partial_j g_{k\bar{l}}, \quad \Gamma_{\bar{j}\bar{k}}^{\bar{i}} = \overline{\Gamma_{jk}^i}.$$

Это означает, что ковариантные производные голоморфных полей голоморфны, то есть при параллельном переносе голоморфные и антиголоморфные поля не смешиваются.

Для тензора Римана имеем

$$R_{mn}{}^k{}_l dx^m \wedge dx^n = d(\Gamma_m{}^k{}_l dx^m) + \Gamma_m{}^k{}_p dx^m \wedge \Gamma_n{}^p{}_l dx^n.$$

Из вида индексов ненулевых Γ_{nk}^m следует, что у тензора Римана отличны от нуля только компоненты с k и l одновременно голоморфными или анти-голоморфными. Опуская индекс $R_{mn\bar{k}l}$ и используя симметрию при перестановке пар индексов $R_{mn\bar{k}l} = R_{klmn}$ получаем, что только компоненты вида $R_{i\bar{j}k\bar{l}}$ (и получающиеся из них симметриями) не равны нулю. Отсюда следует формула

$$R_{i\bar{j}l}{}^k = -\bar{\partial}_j \Gamma_{il}^k.$$

Чтобы найти тензор Риччи, используем первое тождество Бьянки:

$$R_{mnkl} + R_{mkln} + R_{mlnk} = 0 \implies R_{i\bar{j}k\bar{l}} + R_{i\bar{l}k\bar{j}} = 0.$$

Отсюда следует, что тензор Риччи $\hat{R}_{k\bar{j}}$ равен следу оператора кривизны со знаком минус

$$\hat{R}_{k\bar{j}} = -R_{k\bar{l}i\bar{j}}g^{\bar{l}i} = -g^{i\bar{l}}R_{k\bar{j}i\bar{l}} = -R_{k\bar{j}i}{}^i.$$

Это соотношение выполняется не для любого комплексного многообразия, а именно в случае Кэлерова многообразия. Из него в частности следует, что, если тензор Риччи равен нулю, то след тензора кривизны также зануляется

$$R_{k\bar{j}i}{}^i = 0.$$

Используя формулу выше, получаем полезное соотношение, которое будет использовано ниже

$$\hat{R}_{k\bar{j}} = -\partial_k \Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{l}} = -\partial_k \bar{\partial}_{\bar{j}} \ln \det g.$$

Из тензора Риччи с помощью оператора J можно сделать замкнутую 2-форму, которая в силу этого соотношения имеет вид

$$\hat{R} = i\hat{R}_{j\bar{k}}dy^j \wedge d\bar{y}^{\bar{k}} = -i\partial\bar{\partial}\ln\det g.$$

Голономия. С параллельным переносом и кривизной непосредственно связано такое понятие как *голономия*.

А именно из определения $R_{i\bar{j}l}^k = [\nabla_i, \bar{\nabla}_{\bar{j}}]_l^k$ следует, что при параллельном переносе вектора v^k вдоль маленького контура C он изменяется на

$$\delta v^k = a^{i\bar{j}}R_{i\bar{j}l}^k v^l,$$

где $a^{i\bar{j}} = \oint_C y^i d\bar{y}^{\bar{j}}$. Для случая Кэлеровых многообразий оба индекса l, k голоморфные или антиголоморфные. Поэтому матрица преобразования $a^{i\bar{j}}R_{i\bar{j}l}^k$, которая исходно лежит в $\mathfrak{so}(6)$, в действительности принадлежит $\mathfrak{u}(3) \subset \mathfrak{so}(6)$, так как коммутирует с комплексной структурой. При фиксированных значениях индексов $i\bar{j}$ $R_{i\bar{j}k\bar{l}}$ является антиэрмитовой 3×3 матрицей. Ещё большее ограничение получаем в случае многообразий Калаби-Яу.

3 Многообразия Калаби-Яу.

3-мерное Кэлерово многообразие называется **многообразием Калаби-Яу**, если Кэлерову метрику g можно выбрать таким образом, что она имеет голономию $su(3)$.

Покажем, что многообразие X с ковариантно-постоянным спинором является многообразием Калаби-Яу. Для того, чтобы это увидеть, возьмём след матрицы голономии. Получаем

$$Hol(a)_l^l = a^{i\bar{j}}R_{i\bar{j}l}^l = -a^{i\bar{j}}\hat{R}_{i\bar{j}} = 0, \quad (17)$$

поскольку тензор Риччи, как мы ранее показали, равен нулю. Поэтому матрица преобразования голономии является бесследовой и лежит в $\mathfrak{su}(3) \subset \mathfrak{u}(3)$. Таким образом X является многообразием Калаби-Яу.

Первый класс Черна. Мы далеко не всегда знаем явные $\mathfrak{su}(3)$ -метрики на Калаби-Яу. Однако есть полезный неявный критерий, который позволяет определить допускает ли данное многообразие такую метрику, следующий из **теоремы Яу**.

Теорема Яу гласит, что, если *первый класс Черна* Кэлерова многообразия X равен нулю, то на нём существует метрика $\mathfrak{su}(3)$ голономии, то есть X является многообразием Калаби-Яу.

Классы Черна комплексного многообразия являются элементами группы когомологий многообразия. Классы Черна c_n задаются как формы

степени $2n$ такие, что $dc_n = 0$, рассматриваемые с точностью до прибавления точных форм $c_n \sim c_n + d\alpha$. Обозначим $R_l^k = 1/2 R_{ijl}^k dy^i \wedge d\bar{y}^j$, тогда c_n определяются через явную формулу:

$$\sum_n c_n t^n = \det \left(\text{Id} + \frac{itR}{2\pi} \right) \quad (18)$$

и в частности первый класс Черна

$$c_1 = \frac{i}{2\pi} \text{Tr} R.$$

В рассматриваемом случае критерий Яу выполняется, первый класс Черна равен нулю. Это происходит потому, что, как было показано выше, $\text{Tr} R$ для Кэлера многообразия совпадает с тензором Риччи, а тензор Риччи в нашем случае исчезает.

Голоморфная 3-форма. В примерах многообразий Калаби-Яу (кроме тривиальных) явный вид метрик $g_{i\bar{j}}$ с голономией $\mathfrak{su}(3)$ не известен. Однако существует один объект, который уже можно построить явно и который будет играть важную роль в наших вычислениях. А именно мы можем определить 3 - форму Ω

$$\Omega_{ijk} = i\zeta_-^+ \gamma_{ijk} \zeta_+, \quad \Omega = \frac{1}{6} \Omega_{ijk} dy^i \wedge dy^j \wedge dy^k \quad (19)$$

J и Ω - это единственные объекты, которые можно получить, используя только киральные спиноры $\zeta_{\pm}$. Из того факта, что $\nabla \zeta = 0$, следует, что $\nabla \Omega = 0$. Поэтому и также из того, что в комплексных координатах $\bar{\nabla}_{\bar{j}} = \partial_{\bar{j}}$, если $\bar{\nabla}_{\bar{j}}$ применяется к Ω , следует, что форма Ω голоморфна. Кроме того отсюда получаем $d\Omega = 0$, поскольку она уже имеет максимальное число голоморфных индексов. Важно также, что форма Ω нигде не обращается в ноль, поскольку спиноры $\zeta_{\pm}$ являются ковариантно постоянными на многообразиях Калаби-Яу.

Покажем, что, если на Кэлеровом многообразии существует ненулевая нигде форма максимальной степени Ω , то $c_1 = 0$. Действительно, для голоморфной 3-формы Ω имеем

$$\Omega_{ijk} = f(z) \epsilon_{ijk}, \quad ||\Omega||^2 = \Omega_{ijk} \bar{\Omega}^{ijk} = |f(z)|^2 g^{i\bar{i}} g^{j\bar{j}} g^{k\bar{k}} \epsilon_{ijk} \epsilon_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} = |f(z)|^2 \det g.$$

Тогда для класса Черна имеем

$$c_1 = -i\partial\bar{\partial} \ln \det g = -i\partial\bar{\partial} \ln (||\Omega||^2).$$

Функция под логарифмом везде определена однозначно, а поэтому $c_1 = d\alpha$, то есть равен нулю в когомологиях.

Все вышесказанное можно сформулировать следующим образом.
Теорема. Пусть X - 6-мерное вещественное многообразие.¹ Тогда следующие условия эквивалентны:

1. На X существует ковариантно постоянный спинор $\nabla\zeta = 0$ для некоторой метрики.
2. На X существует метрика $SU(3)$ голономии.
3. X является Кэлеровым многообразием с Риччи-плоской метрикой $R_{ij} = 0$.
4. X является Кэлеровым и его первый класс Черна равен нулю $c_1 = 0$.
5. X является Кэлеровым многообразием и на нём есть нигде не нулевая голоморфная форма старшей степени Ω .

4 Когомологии многообразий Калаби-Яу.

В теории струн, изучая компактификации, можно применить приём аналогичный тому, что используется в теории Калуды-Клейна. А именно поля эффективной десятимерной теории (SUGRA) можно разложить по собственным векторам операторов, которые входят в Лагранжиан и проинтегрировать по координатам свёрнутых компактных измерений. В получающейся четырёхмерной теории будут наборы частиц, чьи массы пропорциональны собственным значениям линейных операторов, по одной на каждый собственный вектор. В пределе, когда мы считаем масштаб масс очень большими и поэтому не интересуемся массивными частицами, количество оставшихся безмассовых частиц определяется нуль-модами этих операторов. Операторы, о которых идет речь, являются операторами Дирака и Лапласа на компактном многообразии. А их нуль моды суть гармонические объекты, которые представляют некоторые классы когомологий многообразия. В итоге число безмассовых частиц четырёхмерной теории определяется когомологиям соответствующего шестимерного компактного многообразия.

Когомологии де-Рама.

Рассмотрим математический аспект подробнее. Обозначим за $\Omega^n(X)$ пространство дифференциальных форм степени n на многообразии X . Внешний дифференциал $d : \Omega^{n-1}(X) \rightarrow \Omega^n(X)$

$$d := \sum dx^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$d(\omega_{i_1, \dots, i_{n-1}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-1}}) = \partial_{i_n} \omega_{i_1, \dots, i_{n-1}} dx^{i_n} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-1}} \quad (20)$$

¹если выбросить условие существования ковариантного спинора, то теорема будет верна для любой чётной размерности многообразия

в квадрате даёт ноль, что проверяется из определения. Отсюда следует, что $\text{Im}(d) \subset \text{Ker}(d)$. Формы из первого пространства называются замкнутыми, а из второго точными. Последнее включение позволяет определить важный геометрический инвариант многообразия - когомологии де-Рама.

Definition 1. *Пространством n -мерных когомологий де-Рама $H^n(X)$ называется факторпространство $\text{Ker}(d)/\text{Im}(d)$.*

Элементы когомологий представимы замкнутыми дифференциальными формами по модулю точных.

$$\alpha \in H^n(X) \implies d\alpha = 0, \alpha \sim \alpha + d\gamma.$$

В этом смысле для одного элемента когомологий нельзя выбрать одного канонического представителя, поскольку все элементы одного класса эквивалентны.

Теория Ходжа позволяет выбрать естественного представителя из класса эквивалентности, если на многообразии есть метрика. На компактных многообразиях X с метрикой g есть естественная метрика на пространстве дифференциальных форм. В координатах, если $\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$ и $\beta = \beta_{j_1 \dots j_n} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_n}$, то их спаривание:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_X g^{i_1 j_1} \dots g^{i_n j_n} \alpha_{i_1 \dots i_n} \beta_{j_1 \dots j_n} \sqrt{g} d^N x. \quad (21)$$

В бескоординатной форме эта формула записывается следующим образом:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_X (\alpha, \beta) \sqrt{g} d^N y = \int_X \alpha \wedge \star \beta.$$

Оператор $\star$ определён уравнением выше и называется звездой или дуальностью Ходжа, в координатах его несколько громоздко можно записать как:

$$\star \beta = \varepsilon_{i_{n+1} \dots i_N i_1 \dots i_n} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_n j_n} \beta_{j_1 \dots j_n} \sqrt{g} dx^{i_{n+1}} \dots dx^{i_N}$$

. Используя скалярное произведение, определенное выше, действуя аналогично процедуре из линейной алгебры, можно определить сопряжённый дифференциал d^+

$$\langle d^+ \alpha, \beta \rangle := \langle \alpha, d\beta \rangle,$$

этот оператор понижает степень формы на 1

$$d^+ = \pm \star d \star,$$

С помощью этих операторов можно определить Лапласиан Ходжа-де-Рама, который не меняет степень формы и совпадает с обычным оператором Лапласа при применении к 0-формам, то есть обычным функциям:

Definition 2. *Лапласиан Ходжа-де-Рама на компактном римановом многообразии (X, g) задаётся следующей формулой:*

$$\Delta_d = d^+d + dd^+. \quad (22)$$

Нас будет интересовать его ядро $\text{Ker} \Delta_d$. На компактных многообразиях это конечномерное векторное пространство, более того:

$$\langle \Delta_d \alpha, \alpha \rangle = \langle (d^+d + dd^+) \alpha, \alpha \rangle = \langle d^+ \alpha, d^+ \alpha \rangle + \langle d \alpha, d \alpha \rangle. \quad (23)$$

Из последнего равенства следует, что $\Delta_d \alpha = 0$ тогда и только тогда, когда $d \alpha = 0$ и $d^+ \alpha = 0$.

В функциональном анализе есть следующая теорема

Теорема 1. *Произвольная форма на компактном римановом многообразии раскладывается в сумму*

$$\omega = \tilde{\omega} + d\alpha + d^+ \beta,$$

где $\Delta_d \tilde{\omega} = 0$, это разложение единственно.

Эквивалентно, есть ортогональное (в смысле введённого выше спаривания) разложение

$$\Omega^p(X) = \text{Im } d \oplus \text{Im } d^* \oplus \text{Ker } \Delta_d$$

Заметим, что это разложение зависит от метрики.

Таким образом при выборе оператора Δ_d возникает естественное отождествление пространства когомологий и пространства *гармонических форм*, то есть нулевых мод Лапласиана $H^*(X) \simeq \text{Ker } \Delta_d$. Мы будем активно использовать это соответствие.

Разложение Ходжа для Кэлеровых пространств.

Для комплексных многообразий есть естественное ковариантное разложение дифференциала де-Рама

$$d = \partial + \bar{\partial} = dy^i \partial_i + d\bar{y}^{\bar{i}} \bar{\partial}_{\bar{i}}, \quad (24)$$

каждый из которых в квадрате даёт ноль. Дифференциалы ∂ и $\bar{\partial}$ называются дифференциалами Дольбо.

Пространства дифференциальных форм разбиваются в $\Omega^n(X) = \sum_{p+q=n} \Omega^{p,q}(X)$, соответственно количеству (анти-)голоморфных индексов:

$$\omega_{i^1, \dots, i^p, \bar{j}^1, \dots, \bar{j}^q} dy^1 \cdots dy^p d\bar{y}^{\bar{j}^1} \cdots d\bar{y}^{\bar{j}^q} \in \Omega^{p,q}(X)$$

Можно проверить, что в случае Кэлеровых многообразий операторы Лапласа, построенные по всем трём операторам $d, \partial, \bar{\partial}$ равны:

$$\Delta_{\partial} = \Delta_{\bar{\partial}} = 1/2 \Delta_d,$$

где

$$\Delta_{\partial} = \partial\partial^* + \partial^*\partial, \Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}.$$

Поэтому оператор Лапласа не меняет количество голоморфных и антиголоморфных индексов. То есть, если форма α является гармонической, то и её однородные в смысле (p, q) -разбиения компоненты тоже являются гармоническими.

$\text{Ker } \Delta_d \simeq H^*(X)$, а значит из разбиения дифференциальных форм возникает разбиение когомологий $H^n(X) = \sum_{p+q=n} H^{p,q}(X)$. На компактном Кэлеровом многообразии когомологии де-Рама совпадают с когомологиями оператора $\bar{\partial}$, то есть $\bar{\partial}$ замкнутыми формами по модулю $\bar{\partial}$ точных.

Среди всех групп $H^{p,q}(X)$ есть изоморфные. На пространстве всех когомологий действует оператор комплексного сопряжения $H^{p,q}(X) \rightarrow H^{q,p}(X)$, который в квадрате даёт 1, а значит $H^{p,q}(X) = H^{q,p}(X)$.

Также на когомологиях действует оператор Ходжа $H^{p,q}(X) \rightarrow H^{n-q,n-p}(X)$, равный в квадрате ± 1 , откуда следует, что $H^{p,q}(X) = H^{n-q,n-p}(X)$.

Обозначим $h^{p,q} = \dim H^{p,q}(X)$. Для трёхмерного Кэлерова многообразия независимыми остаются $h^{p,0}, h^{1,1}, h^{2,1}$. Ограничимся рассмотрением связных компактных многообразий с голономией строго $\text{SU}(3)$.

Условие гармоничности $\Delta_{\bar{\partial}} \omega^{p,0} = 0$ для $\omega^{p,0}$ совпадает с условием голоморфности потому, что

$$\Delta_{\bar{\partial}} \omega^{p,0} = 0 \Leftrightarrow \bar{\partial}\omega^{p,0} = 0, \bar{\partial}^*\omega^{p,0} = 0,$$

и последнее равенство выполнено автоматически, поскольку $\bar{\partial}$ делает из (p, q) формы $(p, q-1)$ форму. Таким образом необходимо узнать число голоморфных $(p, 0)$ форм.

Сначала заметим, что голоморфное касательное пространство трёхмерно, и под действием группы голономии преобразуется, как 3-х компонентный вектор-столбец под действием унитарной матрицы. $(1, 0)$ -формы, то есть векторы кокасательного пространства преобразуется как вектор-строка, а общие $(p, 0)$ формы преобразуются как внешняя степень $\Lambda^p \mathbf{3}_{\text{su}(3)}$ под действием группы голономии.

Это означает, что единственными ковариантно постоянными формами могут быть только константы и формы старшей степени, поскольку третья внешняя степень одномерна, и под действием матрицы умножается на её определитель, который равен единицы. Чтобы связать ковариантно постоянные и голоморфные формы, мы используем формулу Вайценбоха о связи оператора Лапласа и ∇^2

$$\Delta_d \omega = -\nabla^2 \omega + U[\omega],$$

где $U[\omega]$ некоторый оператор степени 0, зависящий от кривизны. В случае $(p, 0)$ -форм этот оператор $U[\omega]$ равен нулю, и мы находим, что гармонические $(p, 0)$ формы на компактном многообразии ковариантно

постоянны. А это значит, что для $1 < p < n$ все $h^{p,0} = 0$. Форма же старшей степени (голоморфная форма объёма) преобразуется как синглет под действием $\mathfrak{su}(3)$ и поэтому гармоническую форму $\Omega \in \mathcal{H}^{n,0}$ мы строим аналогично построению ковариантно постоянного спинора и комплексной структуры. Более того, две такие формы отличаются на голоморфную функцию, а значит на константу, то есть $h^{n,0} = 1$. Заметим, что её существование можно было получить из условия того, что $c_1 = 0$. Таким образом из всех $h^{p,q}$ на трёхмерном Калаби-Яу могут быть различными только $h^{1,1}$ и $h^{2,1}$. Эти же числа переставляются так называемой зеркальной симметрией, которая утверждает, что для Калаби-Яу X найдётся зеркальный образ - другое многообразие КЯ $\tilde{X}$ с переставленными числами Ходжа.

5 Appendix

Свойства Калаби-Яу из $SU(3)$ голономии. Прделаем вывод свойств Калаби-Яу, используя понятие голономии.

1) $\Leftrightarrow$ 2)

Рассмотрим шестимерное риманово многообразие. У него есть естественное главное расслоение реперов касательного пространства со структурной группой $SO(6)$. Спиноры лежат в ассоциированном с ним расслоении, которое является спинорным представлением $SO(6)$ ²

Связность Леви-Чивиты порождает связность на каждом из этих расслоений. Параллельный перенос элементов расслоения вдоль петель из некоторой точки в себя действует на них элементом из подгруппы $SO(6)$, которая называется группой голономии многообразия. В частности сечение ковариантно постоянно, если и только если это действие тривиально. Действительно, в таком случае мы можем параллельно продолжить сечение из одной точки в другую, а тривиальность действия голономии означает, что это продолжение не зависит от пути, и обратно.

Таким образом для пространства компактификации группа голономии должна тривиально действовать на некоторый спинор. Спиноры на M^6 преобразуются в представлении $\mathbf{4} + \bar{\mathbf{4}}$ алгебры $\mathfrak{su}(4) \simeq \mathfrak{so}(6)$. Наибольшая подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{su}(4)$, имеющая инвариантное подпространство в $\mathbf{4}$ и $\bar{\mathbf{4}}$ это $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(3)$, при этом $\mathbf{4}_{\mathfrak{su}(4)} = \mathbf{3}_{\mathfrak{su}(3)} + \mathbf{1}_{\mathfrak{su}(3)}$. На более простом языке матрицы 3×3 имеют в четырёхмерном пространстве неподвижный вектор. Таким образом, мы получили, что для существования ковариантно постоянного спинора группа голономии многообразия должна быть не больше, чем $SU(3)$. Многообразия, допускающие метрику с такой голономией, называются многообразиями Калаби-Яу.³

²правильнее было бы говорить о двулистном накрытии $\text{Spin}(6)$ группы $SO(6)$. Также мы не обсуждаем некоторые аспекты глобального поведения, связанные с неоднозначностью.

³заодно мы получили, что условие существования спинорного расслоения равносильно тому, что структурная группа многообразия редуцируется до $\mathfrak{su}(N)$

2) $\Rightarrow$ 3), 4), 5)

Изучим геометрические следствия $SU(3)$ голономии. Во-первых, покажем, что многообразие с голономией $U(3)$ является комплексным и более того, кэлеровым.

Итак, если на многообразии есть метрика с голономией $U(3)$, построим ковариантно постоянную комплексную структуру J , $\nabla J = 0$. Для этого будем действовать также, как и для спинора. Касательные вектора принадлежат $\mathfrak{so}(6) \simeq \mathfrak{su}(3) \oplus \bar{\mathfrak{su}}(3)$. В комплексификации касательного пространства в некоторой точке зададим J в виде матрицы

$$J = \begin{pmatrix} iE & 0 \\ 0 & -iE \end{pmatrix} \quad (25)$$

где E - это единичная 3×3 матрица, а базис выбран так, чтобы матрицы преобразования голономии имели вид

$$g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} \quad (26)$$

По построению оператор J коммутирует с группой голономии, и таким образом мы можем его параллельно продолжить на всё многообразие. След оператора кривизны является $\mathfrak{u}(1)$ генератором группы голономии в разложении $\mathfrak{u}(3) = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{su}(3)$, то есть если голономия лежит в $\mathfrak{su}(3)$ то метрика является Риччи-плоской и наоборот. Более того, след тензора кривизны также является представителем первого класса Черна, поэтому голономия $SU(3)$ означает, что многообразие является Кэлеровым и с нулевым классом Черна c_1 .

Теперь покажем наличие ненулевой голоморфной три-формы. Голоморфные три-формы лежат в представлении $\Lambda^3 \mathfrak{su}(3) \sim 1_{\mathfrak{su}(3)}$, то есть форма не преобразуется под действием голономии, а значит её можно построить в одной точке

$$\Omega_{ijk} = \epsilon_{ijk}$$

и разнести, используя связность, на всё многообразие K .

4) $\Leftrightarrow$ 5)

По определению

$$c_1 = \frac{i}{2\pi} \text{Tr} R_{i\bar{j}} dy^i d\bar{y}^{\bar{j}},$$

где R_{ij} - кривизна любой связности на касательном расслоении. Связность в касательном пространстве порождает связность и на формах максимальной степени 3. Легко видеть, что её кривизна совпадает со следом кривизны R_{ij} с точностью до знака

$$[\nabla_i, \nabla_j] \omega_{klm} = -R_{ijp}^p \omega_{klm},$$

а значит классы Черна $c_1 = i/2\pi \text{Tr} R$ касательного расслоения и расслоения форм со знаком минус совпадают.

Ненулевая голоморфная 3-форма Ω_{ijk} задаёт всюду определённый базис в одномерном расслоении $\Lambda^3 T^* K$, таким образом получаем $\mathbb{C} \times X = \Lambda^3 T^* X$. На тривиальном расслоении можно выбрать нулевую связность, потому первый класс Черна равен нулю. Если же одномерное расслоение нетривиально, то его первый класс Черна всегда отличен от нуля.

4), 5) $\Rightarrow$ 1), 2), 3) Из сложной теоремы Яу, следует, что на Кэлеровом компактном многообразии с нулевым первым классом Черна существует Риччи плоская метрика (то есть метрика голономии $\subset \text{SU}(3)$). Явный вид этой метрики не известен для нетривиальных примеров и на практике используют метрики многообразия удовлетворяющие условиям 4), 5).

Квинтика Дворка Построим явный пример многообразия Калаби-Яу, который окажется важным и в дальнейшем.

Мы зададим его как гиперповерхность в четырёхмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^4$. Напомним, что проективное пространство - это пространство с однородными координатами $(X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5)$, где не все $X_i = 0$ и точки X_i и λX_i отождествляются. Примеры карт на этом многообразии получаются, если поделить на какую-то одну ненулевую координату $(X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : 1)$. Это многообразие является Кэлеровым с Кэлеровой метрикой Фубини-Штуди

$$g_{j\bar{k}} = \frac{1}{\sigma} \left(\delta_{j\bar{k}} - \frac{X_k \bar{X}_{\bar{j}}}{\sigma} \right), \quad \sigma = \sum |X_i|^2 \quad (27)$$

Это можно проверить, вычисляя дифференциал Кэлеровой формы или получая её из Кэлерова потенциала

$$K = \ln \left(\sum_i X_i \bar{X}_{\bar{i}} \right).$$

Эта форма ограничивается на любое подмногообразие $\mathbb{P}^4$ и остаётся замкнутой, поэтому любое подмногообразие проективного пространства Кэлерово.

Для наших целей рассмотрим гиперповерхность $\mathbb{P}^4(5)$, заданную одним неособым однородным полиномом пятой степени

$$M = \{(X_i) \in \mathbb{P}^4 \mid P_5(X_i) = 0\}.$$

Почему пятой станет понятно чуть позже. M - это трёхмерное комплексное или шестимерное вещественное многообразие.

Близкие полиномы задают одно и то же вещественное пространство, поскольку топология не может меняться при маленьких деформациях.

Особые полиномы имеют комплексную коразмерность не меньше 1, то есть вещественную не меньше 2, значит две любые квинтики можно соединить неособым путём γ в пространстве полиномов, значит все неособые квинтики

задают одно и то же вещественное многообразие.

При этом комплексные структуры могут быть (и являются) разными. Покажем, что так построенное многообразие является многообразием Калаби-Яу. Для этого мы явно предъявим голоморфную 3-форму. Пусть $X_5 = \xi$, тогда

$$\Omega = \frac{\xi dX_1 dX_2 dX_3}{\partial P_5(X_i)/\partial X_4}. \quad (28)$$

где мы считаем X_1, X_2, X_3 голоморфными координатами y^1, y^2, y^3 на M . Если P - полином пятой степени, то Ω хорошо определена (степени числителя и знаменателя одинаковы) а также нигде не зануляется. Может показаться, что эта форма зависит от выбора координат X_1, X_2, X_3 , но это не так, $\partial P_5(X_i)/\partial X_4$ - это якобиан замены координат $(X_1, X_2, X_3, X_4) \rightarrow (X_1, X_2, X_3, X_4, P_5(X_i))$. Явная конструкция Ω , в которой видно, что она не имеет сингулярностей:

$$\Omega = \frac{1}{2\pi i} \oint_{P=0} \frac{dP}{P} \Omega = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{X_5 dX_1 dX_2 dX_3 dX_4}{P_5(X_i)}.$$

Особенно нас будет интересовать случай конкретного семейства многообразий, определяемого полиномами вида

$$P_5(X_i) = P_\psi(X_i) = X_1^5 + X_2^5 + X_3^5 + X_4^5 + X_5^5 - 5\psi X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$$

в $\mathbb{P}^4$. Его зеркальным образом является разрешение особенностей его фактора по максимальной подгруппе симметрий $\mathbb{Z}_5^3$. Единственная $(1,1)$ гармоническая форма приходит из формы Фубини-Штуди на $\mathbb{P}^4$, а $h^{2,1}$ можно посчитать следующим образом. Различные полиномы пятой степени задают различные комплексные многообразия, если они не являются глобальными заменами координат в $\mathbb{P}^4$. Все однородные полиномы пятой степени раскладываются по базису

$$X_1 X_2 X_3 X_4 X_5, X_i^2 X_j X_k X_l, X_i^3 X_j X_k, X_i^4 X_j, X_i^5, X_i^3 X_j^2, X_i^2 X_j^2 X_k.$$

Его размерность равна $1 + 20 + 30 + 20 + 5 + 20 + 30 = 126$. Замены координат в проективном пространстве записываются общей матрицей 5×5 , то есть количество полиномов с точностью до изоморфизма равно $126 - 25 = 101$. В данном случае так описываются все деформации комплексной структуры, то есть $h^{2,1} = 101$.