1) Вывод эффективного действия

2) Разложение вокруг стационарного решения и неприводимые корреляторы

3) Регуляризация в окрестности конформного решения

4) Лестничные диаграммы и конформное ядро

5) Нормируемые и ненормируемые собственные функции

$$G^{-1} = \underbrace{G_b^{-1}}_{\partial_\tau} - \underbrace{\Sigma}$$

ω

$$\Sigma(\tau_1, \tau_2) = (\tau_1 - \tau_2)^{(1-\Delta)\cdot 2}$$

$$\omega^{1-2(1-\Delta)} = \omega^{2\Delta - 1}$$

$\omega \to 0$ $\qquad$ $\omega \ll \omega^{2\Delta-1}$ $\qquad$ $\Delta < 1$

DJ $\qquad$ $\overline{f(J)} = \int \underbrace{f(J)} \, DJ$

$$f(J) = \ln Z$$

$\overline{Z^M} \to 1$ при $M \to 0$

$$\overline{\ln Z} = \lim_{M\to 0} \frac{\overline{Z^M} - 1}{M} = \lim_{M\to 0} \frac{\ln \overline{Z^M}}{M}$$

$$\ln \overline{Z^M} \approx \overline{Z^M} - 1$$

Вывод эффективного действия $I[\Sigma, G]$

$$\hat{H} = -\frac{1}{4!}\sum_{j,k,l,m} J_{jklm}\hat{\chi}_j\hat{\chi}_k\hat{\chi}_l\hat{\chi}_m$$

$$J_{jklm} = \sqrt{\frac{3!\,J^2}{N^3}}\, B_{jklm}, \qquad \overline{B_{jklm}^{\,2}} = 1$$

$$\underbrace{\overline{\ln Z} = \lim_{M\to 0}\frac{\ln \overline{Z^M}}{M}}$$

χ_j^α, $\alpha = 1, \dots, M$

$$Z^M[B] = \int \mathcal{D}\chi \, \exp\left(-\int d\tau \sum_\alpha L_E[B,\chi^\alpha]\right)$$

$$\overline{Z^M} = \int \mathcal{D}\boldsymbol{B}\int \mathcal{D}\boldsymbol{\chi}\, \exp\left(\sum_\alpha \int_0^\beta d\tau \overbrace{\left(-\frac{1}{2}\sum_j \chi_j^\alpha\,\partial_\tau\chi_j^\alpha + \sum_{j<k<l<m}\sqrt{\frac{3!J^2}{N^3}}B_{jklm}\,\chi_j^\alpha\chi_k^\alpha\chi_l^\alpha\chi_m^\alpha\right)}^{-L_E[B,\chi^\alpha]}\right)$$

$$= \int \mathcal{D}\boldsymbol{\chi}\,\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\alpha,j}\int d\tau\,\chi_j^\alpha\,\partial_\tau\chi_j^\alpha + \underbrace{\frac{3!J^2}{2N^3}\sum_{j<k<l<m}\left(\sum_\alpha\int d\tau\,\chi_j^\alpha(\tau)\chi_k^\alpha(\tau)\chi_l^\alpha(\tau)\chi_m^\alpha(\tau)\right)^2}\right)$$

$$\boxed{\int e^{-uB}\, e^{-B^2/2}\,dB/\sqrt{2\pi} = e^{u^2/2}}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{NJ^2}{8}\sum_{\alpha,\beta}\iint d\tau\,d\tau'\,\underbrace{\left(\frac{1}{N}\sum_j \chi_j^\alpha(\tau)\chi_j^\beta(\tau')\right)}_{\Xi_{\alpha\beta}(\tau,\tau')}{}^4$$

$$\exp\left(\frac{NJ^2}{4}\sum_{\alpha,\beta}\int_{\tau>\tau'} d\tau\, d\tau'\, \underbrace{\Xi_{\alpha\beta}(\tau,\tau')}_{\Xi}{}^4\right)$$

$$\underbrace{f(\Xi) = \exp\left(\frac{NJ^2}{4}\Xi^4\right)}$$

$$f(\Xi) = \int f(x)\, \underbrace{\delta(x-\Xi)}_{\int e^{iy(x-\Xi)}\frac{dy}{2\pi}}\, dx$$

для каждого $\alpha, \beta, \tau<\tau'$ своя переменная $\Xi = \Xi_{\alpha\beta}(\tau,\tau') = \frac{1}{N}\sum_j \chi_j^\alpha(\tau)\,\chi_j^\beta(\tau')$

$$\underbrace{x = -G_{\alpha\beta}(\tau,\tau')} \qquad \underbrace{y = i\,\Sigma_{\alpha\beta}(\tau,\tau')}$$

$$= \int \mathcal{D}\Sigma\, \mathcal{D}G \exp\left(N\sum_{\alpha,\beta}\int_{\tau>\tau'} d\tau\, d\tau'\left(\frac{J^2}{4}G_{\alpha\beta}(\tau,\tau')^4 - \Sigma_{\alpha\beta}(\tau,\tau')\Big(G_{\alpha\beta}(\tau,\tau') + \Xi_{\alpha\beta}(\tau,\tau')\Big)\right)\right)$$

$$\overline{Z^M} = \int \mathcal{D}\Sigma\, \mathcal{D}G \Bigg(\int \mathcal{D}\chi \exp\Bigg(-\frac{1}{2}\sum_{\alpha} \int d\tau\, \chi^\alpha \partial_\tau \chi^\alpha - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} \int d\tau\, d\tau'\, \Sigma_{\alpha\beta}(\tau,\tau')\, \chi^\alpha(\tau)\chi^\beta(\tau') + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\int d\tau\, d\tau' \left(\frac{J^2}{4} G_{\alpha\beta}(\tau,\tau')^4 - \Sigma_{\alpha\beta}(\tau,\tau')\, G_{\alpha\beta}(\tau,\tau') \right)\Bigg)\Bigg)^N .$$

$(\chi^\alpha : \alpha = 1, \ldots M)$

Интеграл по грассмановым переменным: $\int D\chi \; \exp\left(\frac{1}{2} A_{jk}\chi_j \chi_k\right) = \mathrm{Pf}\, A$

$$\overline{Z^M} = \int D\Sigma\, DG\, e^{-I[\Sigma, G]}$$

Нормировка: $\int \mathcal{D}\Sigma\, \mathcal{D}G \exp\left(-\frac{N}{2}\sum_{\alpha,\beta} \int d\tau\, d\tau'\, \Sigma_{\alpha\beta}(\tau,\tau')\, G_{\alpha\beta}(\tau,\tau') \right) = 1$

$$\boxed{I^{(M)}[\Sigma, G] = N\left(-\ln \mathrm{Pf}(-\partial_\tau - \hat{\Sigma}) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\int d\tau\, d\tau' \left(\Sigma_{\alpha\beta}(\tau,\tau')\, G_{\alpha\beta}(\tau,\tau') - \frac{J^2}{4} G_{\alpha\beta}(\tau,\tau')^{\cancel{4}\, q} \right)\right)}$$

Стационарное решение (седловая точка): $\min_{\Sigma} \max_{G} I^{(M)}[\Sigma, G]$

Диагональное приближение: $G_{\alpha\beta}(\tau_1,\tau_2) = G(\tau_1,\tau_2)\,\delta_{\alpha\beta}$

$$I[\Sigma, G] = N\left(-\ln \mathrm{Pf}(-\partial_\tau - \hat{\Sigma}) + \frac{1}{2}\int d\tau_1\, d\tau_2 \left(\Sigma(\tau_1,\tau_2)\, G(\tau_1,\tau_2) - \frac{J^2}{q}|G(\tau_1,\tau_2)|^q\right)\right)$$

Стационарное решение (Σ_*, G_*)

$$I_* = \min_{\Sigma} \max_{G} I[\Sigma, G]$$

$$\frac{\delta I}{\delta \Sigma(\tau_1,\tau_2)} = 0 \Longrightarrow -(-\partial_\tau - \Sigma)^{-1} + G = 0 \Longrightarrow G^{-1} = -\partial_\tau^{-1} - \Sigma$$

$$\frac{\delta I}{\delta G(\tau_1,\tau_2)} = 0 \Longrightarrow \Sigma(\tau_1,\tau_2) - J^2 G(\tau_1,\tau_2)^{q-1} = 0$$

Вывод высокотемпературного разложения из эффективного действия

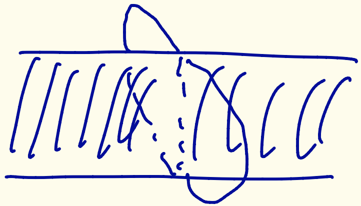
$$Z = \int \underbrace{e^{-I[\Sigma,G]}}\, D\Sigma\, DG$$

$$\int \mathcal{D}\Sigma\, \mathcal{D}G\, \exp\left(\underbrace{-\frac{N}{2}\int d\tau_1\, d\tau_2\, \Sigma(\tau_1,\tau_2)\, G(\tau_1,\tau_2)}_{-N\Sigma G}\right) = 1$$

$$\exp\left(\underbrace{-N\left(\Sigma G\right.} + \underbrace{\ln \mathrm{Pf}(-\partial_\tau - \hat{\Sigma}) + \frac{J^2}{q}\int G^4}_{\text{разложить по степеням } \Sigma \text{ и } G}\left.\right)\right)$$

$$\int \Sigma G\, e^{-\Sigma G}$$

$$\exp(-\Sigma G + G + \Sigma) \approx e^{-\Sigma G}(\cancel{1 + G + \Sigma} + \Sigma G)$$



$$\int e^{-\Sigma G}\,\Sigma G = 1$$

$$\exp\Big(-\Sigma G + \underbrace{G_b^2\,\Sigma^2} + G^4\Big)$$

$$= \exp(-\Sigma G) \cdot \exp(G_b^2\,\Sigma^2 + G^4)$$

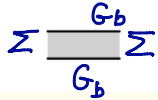
$$(G_b^2\,\underline{\underline{\Sigma^2}})^2\, G^4$$

$$\mathrm{Pf}(-\partial_\tau - \hat{\Sigma}) = \underbrace{\frac{\mathrm{Pf}(-\partial_\tau - \hat{\Sigma})}{\mathrm{Pf}(-\partial_\tau)}} \cdot \underbrace{\mathrm{Pf}(-\partial_\tau)}_{\sqrt{2}}$$

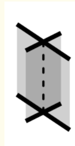
$$G_b(\tau_1, \tau_2) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(\tau_1 - \tau_2)$$

$$N \ln \frac{\mathrm{Pf}(-\partial_\tau - \hat{\Sigma})}{\mathrm{Pf}(-\partial_\tau)} = -N\left(\frac{1}{2}\underbrace{\mathrm{Tr}(\hat{G}_\mathrm{b}\hat{\Sigma})} + \frac{1}{4}\underbrace{\mathrm{Tr}(\hat{G}_\mathrm{b}\hat{\Sigma})^2} + \frac{1}{6}\underbrace{\mathrm{Tr}(\hat{G}_\mathrm{b}\hat{\Sigma})^3} + \cdots\right)$$

$$\det(-\partial_\tau - \Sigma)(-\partial_\tau)^{-1}$$

$$\underbrace{G(\tau, \tau')^4}$$



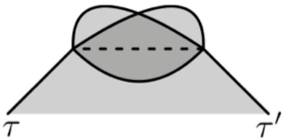
Незамкнутые диаграммы (для корреляционных функций)

$$\boldsymbol{G}(\tau_1, \tau_1', \ldots, \tau_n, \tau_n') = (-1)^n \sum_{j_1,\ldots,j_n} \left\langle \mathbf{T}\, \chi_{j_1}(\tau_1)\chi_{j_1}(\tau_1') \ldots \chi_{j_n}(\tau_n)\chi_{j_n}(\tau_n') \right\rangle$$

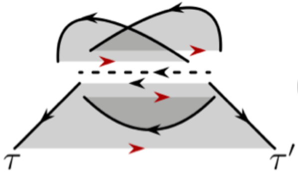
$$\int G_b(\tau_1, \tau_2)\,\Sigma(\tau_2, \tau_3)\, G_b(\tau_3, \tau_4)\,\Sigma(\tau_4, \tau_1)\, d\vec{\tau}$$

Пример: одна из диаграмм для функции Грина

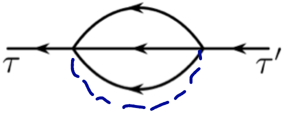
$$\frac{1}{3!}$$



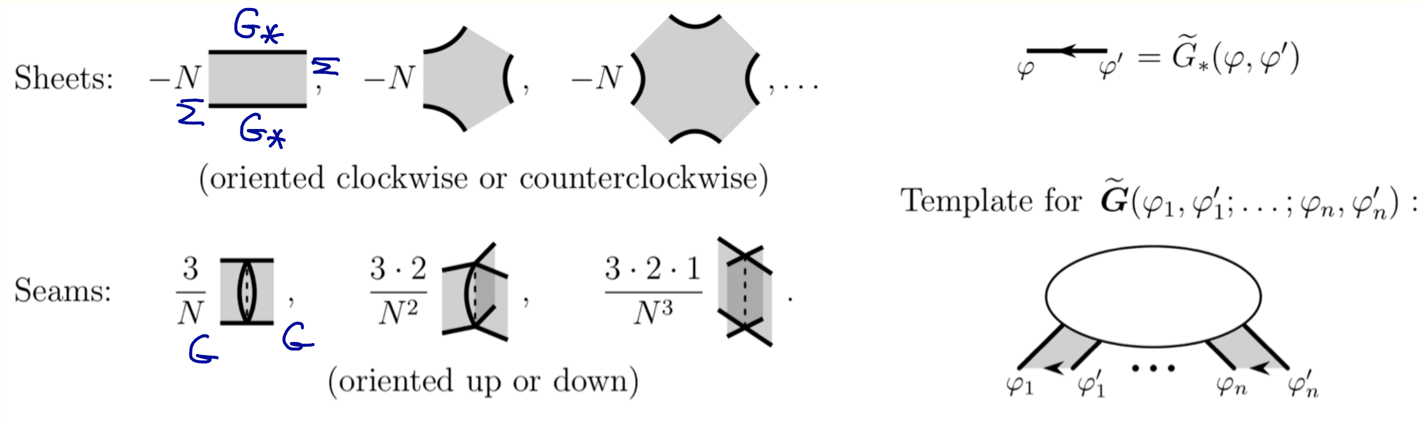
$$= \frac{1}{3!}(-1)^4$$



$$(-N)^4 \frac{3!}{N^3} = N$$



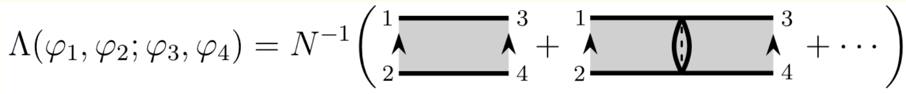
Разложение вокруг стационарного решения

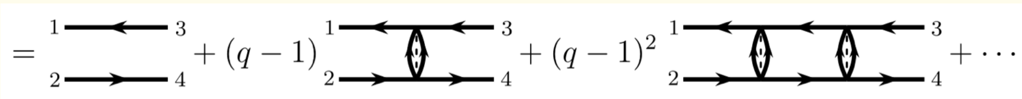


Диаграммы для неприводимой чеырехточечной функции

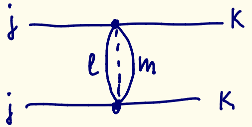
$$\mathcal{F}(\tau_1,\tau_2;\tau_3,\tau_4) = N^{-1}\sum_{j,k}\Big(\langle T_\tau \chi_j(\tau_1)\chi_j(\tau_2)\chi_k(\tau_3)\chi_k(\tau_4)\rangle - \langle\chi_j\chi_j\rangle\langle\chi_k\chi_k\rangle\Big)$$

$$= \Lambda(\tau_1,\tau_2;\tau_3,\tau_4) - (4\leftrightarrow 3) + \text{другие диаграммы}$$

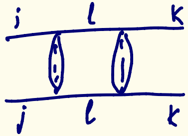




В главном порядке, неприводимый 4-точечный коррелятор есть сумма лестниц

$\sum_{j,k}$ 

$= N^{-3} \underbrace{\sum_{j,k,l,m}}_{N^4} \cdots \sim N,$

$\sum_{j,k}$ 

$\sim (N^{-3})^2 \cdot N^7 \sim \underline{N}$

2n-точечные неприводимые корреляторы в главном порядке

$$I[\Sigma, G] = N\left(-\ln \mathrm{Pf}(-\underbrace{\partial_\tau} - \hat{\Sigma}) + \frac{1}{2}\int d\tau_1\, d\tau_2 \left(\Sigma(\tau_1,\tau_2)\, G(\tau_1,\tau_2) - \frac{J^2}{q}\left|G(\tau_1,\tau_2)\right|^q \right)\right) \to I_*$$

$\cancel{-\delta'(\tau_1,\tau_2)}$ $\sigma(\tau_1,\tau_2)$

$$G_{conn.}(\tau_1,\tau_1',\ldots,\tau_n\tau_n') = -2^n \frac{\delta^{(n)} I_*}{\delta\sigma(\underline{\tau_1,\tau_1'}) \cdots \delta\sigma(\tau_n,\tau_n')} \sim N$$

$$G_{conn.}(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4) = \sum_{j,k}\Big(\langle T_\tau \chi_j(\tau_1)\chi_j(\tau_2)\chi_k(\tau_3)\chi_k(\tau_4)\rangle - \langle\chi_j\chi_j\rangle\langle\chi_k\chi_k\rangle \Big)$$
$$= N \underbrace{\mathcal{F}(\tau_1,\tau_2;\tau_3,\tau_4)}_{\sim 1}$$

(Для сравнения, $\boldsymbol{G}(\tau_1,\tau_1',\ldots,\tau_n,\tau_n') = (-1)^n \sum_{j_1,\ldots,j_n} \langle \mathbf{T}\, \chi_{j_1}(\tau_1)\chi_{j_1}(\tau_1')\ldots\chi_{j_n}(\tau_n)\chi_{j_n}(\tau_n')\rangle \sim \underline{N^n}$)

$$-\sum_i \langle \chi_i(\tau_1)\,\chi_i(\tau_2)\rangle = N\langle G(\tau_1,\tau_2)\rangle = 2\frac{\delta \ln Z}{\delta \sigma(\tau_1,\tau_2)} = -2\frac{\delta I_*}{\delta \sigma(\tau_1,\tau_2)}$$

$$\sum_{jk} \langle\!\langle \chi_j(\tau_1)\,\chi_j(\tau_2)\;\chi_k(\tau_3)\chi_k(\tau_4)\rangle\!\rangle = N^2 \langle\!\langle G(\tau_1,\tau_2)\,G(\tau_3,\tau_4)\rangle\!\rangle$$

$$\approx -2^2\,\frac{\delta^2 I_*}{\delta\sigma(\cdot\cdot)\,\delta\sigma(\cdot\cdot)}$$

$$\frac{I}{N} = -\ln \mathrm{Pf}\Big(-\underbrace{\hat{\sigma}}_{\partial_\tau} - \hat{\Sigma}\Big) + \frac{1}{2}\iint d\tau_1\, d\tau_2 \left(\Sigma G - \frac{J^2}{q} G^q\right)$$

$$-\delta'(\tau_1-\tau_2) = \sigma(\tau_1,\tau_2) \qquad \tilde{\Sigma} = \Sigma + \tilde{\sigma}$$

$$-\ln \mathrm{Pf}(-\tilde{\Sigma}) + \frac{1}{2}\iint \left(\tilde{\Sigma} G - \frac{J^2}{q}G^q\right) \frac{1}{2}\int d\tau_1\, d\tau_2\, \underline{\underline{\sigma}}\, G$$

$$\ln Z \approx -I_*$$

Конформный предел: $\beta J \to \infty$

Эффективное действие при $\beta J \gg 1$:

1) Конформное решение соответствует $\sigma = 0$, $G \sim G_c \sim \underbrace{\theta_{12}}^{-2\Delta} \mathrm{sgn}\, \theta_{12}$

2) Удобно сделать замену $\tilde{\Sigma} = \Sigma + \sigma$

IR

3) Будем записывать уравнения в произвольной «системе отсчета» φ $\boxed{\theta_1 - \theta_2 \gg \varepsilon}$

$\varphi: \theta \to \varphi(\theta)$: $S^1 \to S^1$ $\theta = \frac{2\pi}{\beta}\tau$

$\varepsilon \ll 1$

$$G(\tau_1,\tau_2) = \widetilde{G}_\varphi(\varphi_1,\varphi_2)\,\varepsilon_\varphi(\varphi_1)^\Delta\,\varepsilon_\varphi(\varphi_2)^\Delta,$$

$$\Sigma(\tau_1,\tau_2) = J^2\Big(\widetilde{\Sigma}_\varphi(\varphi_1,\varphi_2) - \tilde{\sigma}_\varphi(\varphi_1,\varphi_2)\Big)\,\varepsilon_\varphi(\varphi_1)^{1-\Delta}\,\varepsilon_\varphi(\varphi_2)^{1-\Delta},$$

$$\sigma(\tau_1,\tau_2) = J^2\tilde{\sigma}_\varphi(\varphi_1,\varphi_2)\,\varepsilon_\varphi(\varphi_1)^{1-\Delta}\,\varepsilon_\varphi(\varphi_2)^{1-\Delta}.$$

$$\varepsilon_\varphi(\varphi) = \frac{2\pi}{\beta J}\frac{d\varphi}{d\theta} = J^{-1}\frac{d\varphi}{d\tau}$$

4) $\tilde{I} = I - \beta E_0 + \underbrace{N s_0}$

энтропия при «нулевой» температуре

$T \gg \underbrace{T_g \sim J e^{-\sqrt{N}}}$

Результат:

$$\frac{\tilde{I}[\widetilde{\Sigma}, \widetilde{G}]}{N} = \left[-\ln \mathrm{Pf}(-\hat{\widetilde{\Sigma}}) + \frac{1}{2} \int d\varphi_1 \, d\varphi_2 \left(\widetilde{\Sigma}(\varphi_1, \varphi_2) \, \widetilde{G}(\varphi_1, \varphi_2) - \frac{1}{q} \left| \widetilde{G}(\varphi_1, \varphi_2) \right|^q \right) \right]_{\text{reg.}}$$
$$- \frac{1}{2} \int d\varphi_1 \, d\varphi_2 \, \tilde{\sigma}(\varphi_1, \varphi_2) \, \widetilde{G}(\varphi_1, \varphi_2)$$

$X[\tilde{\Sigma}, \tilde{G}] - X[\tilde{\Sigma}_c, \tilde{G}_c]$

Действие $\mathrm{Diff}(S^1)$:

G — (Δ, Δ)-форма

Σ — $(1-\Delta, 1-\Delta)$-форма

$\mathcal{F}_h^{1/2}$

h – формы

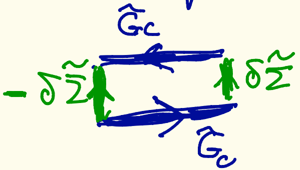
$y = V(x)$

$(Vf)(y) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-h} f(x)$

$$\tilde G_* = \tilde G_c = -b^{\Delta}|\varphi_{12}|^{\Delta}\,\mathrm{sgn}\,\varphi_{12} \qquad (\sigma = 0,$$

$$\varphi = \theta = \frac{2\pi\tau}{\beta}$$

$$\frac{\tilde I}{N} = \underbrace{\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left(\hat G_c\,\delta\tilde\Sigma\right)^2} + \frac{1}{2}\int\left(\delta\tilde\Sigma\,\delta\hat G - \frac{q-1}{2}\,\overbrace{\tilde G^{q-2}(\delta\tilde G)^2}^{(\delta\tilde G,\ \cancel{B}\,\delta\tilde G)}\right) - \frac{1}{2}\int\tilde\sigma\left(\hat G_c + \delta\hat G\right)$$



$$-(\delta\tilde\Sigma,\ A\,\delta\tilde\Sigma) = \int d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3\,d\tau_4\ \delta\tilde\Sigma(\tau_1,\tau_2)\,\overbrace{A(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4)}^{\hat G_c(\tau_1,\tau_3)\,\tilde G(\tau_4,\tau_2)}\,\delta\tilde\Sigma(\tau_3,\tau_4)$$

$$g(\varphi_1,\varphi_2) = \underbrace{\sqrt{q-1}\,|G_c(\varphi_1,\varphi_2)|^{\frac{q-2}{2}}}_{R_c}\ \underbrace{\tilde G(\varphi_1,\varphi_2)}_{\hat G_c + \delta\tilde G} \leftarrow (\Delta,\Delta) \qquad \delta g$$

$$f(\varphi_1,\varphi_2) = R_c^{-1}\,\tilde\Sigma, \qquad s(\varphi_1,\varphi_2) = R_c^{-1}\,\tilde\sigma(\varphi_1,\varphi_2)$$

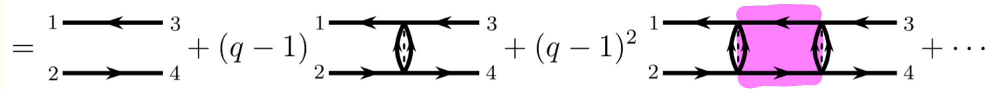
$$\frac{\tilde{I}}{N} = -\frac{1}{4}\left(\delta \overset{\delta\tilde{\Sigma}}{\overset{\downarrow}{f}},\ K_c\,\delta f\right) + \frac{1}{2}\left(\delta f, \delta g\right) - \frac{1}{4}\left(\delta g, \delta g\right) - \frac{1}{2}\left(\overset{\sigma}{\overset{\downarrow}{S}},\ g_c + \delta g\right)$$

$$\frac{\tilde{I}}{N} = -\frac{1}{2}\left(S,\ g_c + \delta g\right) + \frac{1}{4}\left(\delta g,\ \underbrace{\left(K_c^{-1} - 1\right)}_{\left(\frac{K_c}{1-K_c}\right)^{-1}}\delta g\right)$$

$$\frac{\tilde{I}_*}{N} = -\frac{1}{2}\left(S, g_c\right) - \frac{1}{4}\left(S,\ \underbrace{\frac{K_c}{1-K_c}}_{K_c + K_c^2 + K_c^3 + \cdots}\, S\right)$$

Сумма лестниц в конформном пределе

$\tilde{\mathcal{F}}(\varphi_1,\varphi_2;\varphi_3\varphi_4)$



$- (3 \leftrightarrow 4)$

$$R^{-1}KR^{-1} + R^{-1}K^2R^{-1} + R^{-1}K^3R^{-1} + \cdots$$

$$\frac{K}{1-K}$$

Интегральное ядро:

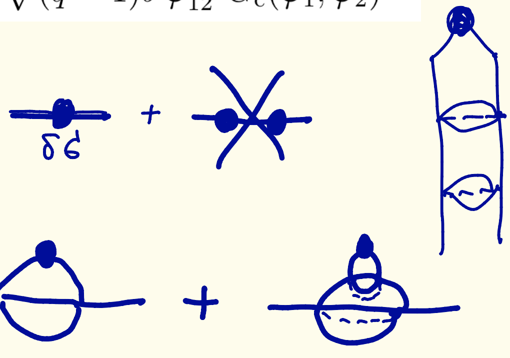
$$\boxed{K_c(\varphi_1,\varphi_2;\varphi_3,\varphi_4) = (q-1)\left|\widetilde{G}_*(\varphi_1,\varphi_2)\right|^{\frac{q-2}{2}}\widetilde{G}_*(\varphi_1,\varphi_3)\,\widetilde{G}_*(\varphi_4,\varphi_2)\left|\widetilde{G}_*(\varphi_3,\varphi_4)\right|^{\frac{q-2}{2}}}$$

$\sim |\varphi_{12}|^{-2\Delta}$

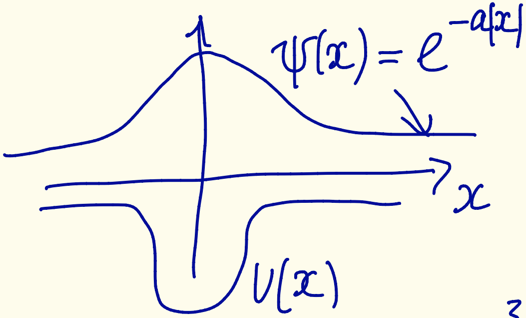
$$R_c(\varphi_1,\varphi_2) = \sqrt{q-1}\left|\widetilde{G}_c(\varphi_1,\varphi_2)\right|^{\frac{q-2}{2}} = -\sqrt{(q-1)b}\,\varphi_{12}^{-1}\,\widetilde{G}_c(\varphi_1,\varphi_2)^{-1}$$

Друкая интерпретация: функция отклика

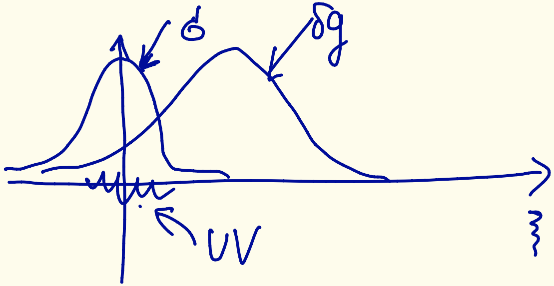
$\delta\tilde{G} =$



$$\underbrace{\delta\tilde{G}}_{R_c^{-1}} = \underbrace{(K+K^2+K^3+\cdots)}_{\frac{K}{1-K}}\underbrace{\delta\tilde{\sigma}}_{R}$$



$$e^{ikx}$$



$$\xi = \ln\left(J\,|\tau_1 - \tau_2|\right) = \ln \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{\varepsilon}$$

Задача на собственные значения: $K_c f = k_c f$

$$K_c f(\varphi_1, \varphi_2) = \int K_c(\varphi_1, \varphi_2; \varphi_3, \varphi_4)\, f(\varphi_3, \varphi_4)\, d\varphi_3\, d\varphi_4$$

K_c самосопряжен относительно скалярного произведения $\int d\varphi_1 d\varphi_2\; u(\varphi_1, \varphi_2)^* v(\varphi_1, \varphi_2)$

K_c коммутирует с дробнолинейными преобразованиями $V: z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, $z = e^{i\varphi}$

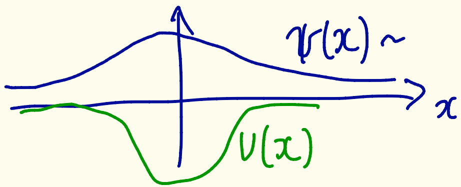
где f преобразуется как $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ форма:

$$(Vf)(\varphi_1, \varphi_2) = {V^{-1}}'(\varphi_1)^{\frac{1}{2}}\, {V^{-1}}'(\varphi_2)^{\frac{1}{2}}\, f\left(V^{-1}(\varphi_1), V^{-1}(\varphi_2)\right)$$

Нормируемые и ненормируемые собственные функции:

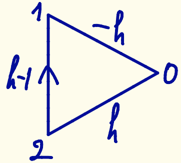
$SL(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$H = -\frac{1}{2m}\partial_x^2 + U(x)$$

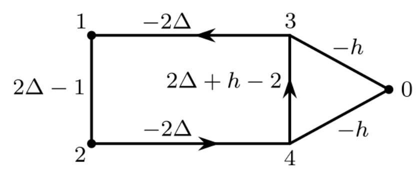


Собственные функции общего вида (ненормируемые):

$$W_h(\varphi_1,\varphi_2;\underline{\varphi_0}) = (\operatorname{sgn}\varphi_{12})\,|\varphi_{12}|^{h-1}|\varphi_{10}|^{-h}|\varphi_{20}|^{-h} =$$

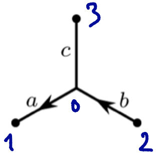


$K_c W_h =$

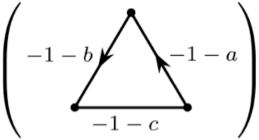


$= K_c(h)\, W_h$

$F^{1/2}_{1-h}$



$$= -\frac{4}{\pi}\Gamma(1+a)\,\Gamma(1+b)\,\Gamma(1+c)\,\cos\left(\tfrac{\pi}{2}a\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}b\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}c\right)$$



for $\quad a+b+c=-2.$

$\int |\varphi_{10}|^{-a}\operatorname{sgn}\varphi_{10}\ |\varphi_{20}|^{-b}\operatorname{sgn}\varphi_{20}\ |\varphi_{30}|^{-c}\, d\varphi_0$

$$\int d\varphi_3\, d\varphi_4\, K_c(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)\, W_h(\varphi_3,\varphi_4,\varphi_0) = K_c(h)\cdot W_h(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_0)$$

Собственное значение:

$$\boxed{k_c(h) = \frac{u\left(\Delta-\frac{1-h}{2}\right)u\left(\Delta-\frac{h}{2}\right)}{u\left(\Delta+\frac{1}{2}\right)u(\Delta-1)}, \qquad \text{where} \quad u(x) = \Gamma(2x)\sin(\pi x)}$$

$\boxed{K_c(h)=1}$ $\qquad K_c \qquad \omega(K)$

$h = h_I = \underbrace{2}, \underbrace{3.77}, \underbrace{5.7}, \ldots \qquad \Delta = \frac{1}{4}$

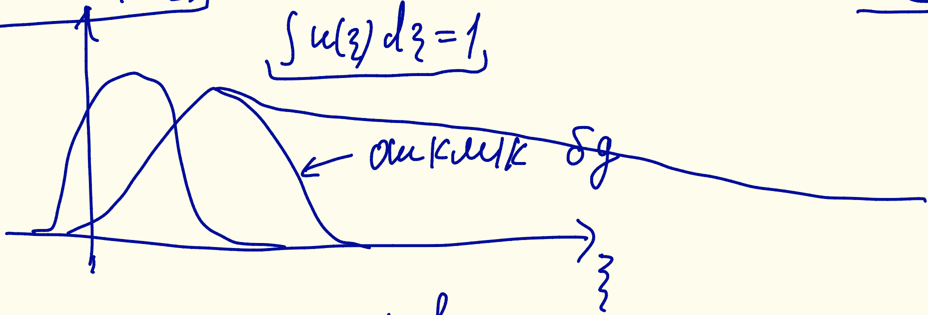
$$\tilde{G}_c \sim (\theta_1-\theta_2)^{-2\Delta} \qquad \delta\tilde{G}_c \sim (\theta_1-\theta_2)^{-2\Delta+1-h}$$

$$\underline{(\theta_1-\theta_2)^{-2\Delta-1}}$$

$$\boxed{\sigma(\tau_1,\tau_2)=\delta'(\tau_1-\tau_2)}$$

$$\underline{\int u(\xi)\,d\xi = 1}$$

$$\xi = \ln\frac{\theta_1-\theta_2}{\varepsilon}$$



$$\varepsilon = \frac{2\pi}{\beta J}$$

$$\sigma(\tau_1,\tau_2) \sim |\tau_1-\tau_2|^{2\Delta-1-h}\,\operatorname{sgn}(\tau_1-\tau_2)\, u\big(\underbrace{\ln J|\tau_1-\tau_2|}_{\xi}\big)$$

$$\boxed{\int \sigma(\tau,0)\,\tau\,d\tau = \cancel{-1}} - \text{const}$$