Правительство Российской Федерации

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

УДК 515.14
№ госрегистрации АААА-А16-116072110202-1
Инв. №

УТВЕРЖДАЮ

Проректор НИУ ВШЭ
канд. экон. наук, доц.

___________________ М.М. Юдкевич

«_____» __________________ ______ г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

(заключительный)

Руководители темы:

научный руководитель Международной
лаборатории теории представлений
и математической физики
канд. физ.-мат. наук ________________________ А.Ю. Окуньков
подпись, дата

зав. Международной лабораторией
теории представлений и математической
физики д-р физ.-мат. наук, проф. ________________________Б.Л. Фейгин
подпись, дата

Москва 2016

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководители		
Научный руководитель лаборатории, к.ф.-м.н	подпись, дата	Окуньков А.Ю. общая координация работы
Заведующий лаборатории д.ф.-м.н	подпись, дата	Фейгин Б.Л. общая координация работы
Заместитель заведующего лабораторией, д.ф.-м.н	подпись, дата	Забродин А. В. введение, заключение,реферат
Заместитель заведующего лабораторией, к.ф.-м.н	подпись, дата	Пятов П.Н. введение, заключение,реферат
Заместитель заведующего лабораторией, к.ф.-м.н	подпись, дата	Рыбников Л.Г. введение, заключение,реферат
Менеджер научного , проекта	подпись, дата	Жингель Е.А. введение, заключение,реферат
Исполнители		
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Адлер Д.В. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Ахмедова В.Э. раздел 1
Главный научный сотрудник, Ph.D.	подпись, дата	Безрукавников Р.В. общая координация работы
Научный сотрудник, к.ф.-м.н.	подпись, дата	Берштейн М.А. раздел 1
Научный сотрудник, к.ф.-м.н.	подпись, дата	Бурман Ю.М. раздел 1
Научный сотрудник, д.ф.-м.н.	подпись, дата	Буфетов А.И. раздел 1
Младший научный сотрудник, к.ф.-м.н.	подпись, дата	Бычков Б.С. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Вильковиский И.С. раздел 1
	подпись, дата	раздел 1
Младший научный , сотрудник	подпись, дата	Гавриленко П.Г. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Гонин Р.Р. раздел 1

Научный сотрудник, к.ф.-м.н	подпись, дата	Горский Е.А. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Зубов Д.И. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Иванов А.Н. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Ильин А.И. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Ильина А.В. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Калинов Д.А. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Кононов Я.А. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Левинсон Т.И. раздел 1
Младший научный сотрудник,	подпись, дата	Ляшик А. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Матвеева А.А. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Матушко М.Г. раздел 1
Стажер-исследователь, к.ф.-м.н.	подпись, дата	Махлин И.Ю. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Митрущенкова А.А. раздел 1
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	подпись, дата	Орлов А.Ю. раздел 1
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	подпись, дата	Побережный В.А. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Попов П.П. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Попов Ф.К. раздел 1

Научный сотрудник, д.ф.-м.н	подпись, дата	Сапонов П.А. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Семенова А.М. раздел 1
Научный сотрудник, д.ф.-м.н	подпись, дата	Сергеев А.Н. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Слинкин А.М. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Ступаков К.Р. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Сырцева К.А. раздел 1
Научный сотрудник, Ph.D.	подпись, дата	Такаши Т. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Трофимова А.А. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Утиралова А.М. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Филиппова П.А. раздел 1
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	подпись, дата	Хорошкин А.С. раздел 1
Стажер-исследователь,	подпись, дата	Шлыков П.Ю. раздел 1
Младший научный сотрудник,	подпись, дата	Щечкин А.И. раздел 1

РЕФЕРАТ

Отчет на 198 страниц, 1 часть, 2 рис., 193 источников.

Перечень ключевых слов: ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ РЕКУРСИЯ, ЧИСЛА ГУРВИЦА, СИСТЕМА ШЛЕЗИНГЕРА, УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ, τ-ФУНКЦИЯ, КОНФОРМНЫЙ БЛОК, АЛГЕБРА ВИРАСОРО, ПРЕПОТЕНЦИАЛЫ, ИНСТАНТОННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ, ВЕРТЕКСНЫЕ АЛГЕБРЫ, РАЗДУТИЕ НАКАДЖИМЫ-ЁШИОКИ, АФФИННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ, ПОДПРОСТРАНСТВА ФЕЙГИНА-СТОЯНОВСКОГО, ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА, ГРАВИТАЦИОННЫЙ КОЛЛАПС, ПЕТЛЕВЫЕ ПОПРАВКИ, МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ, СВОБОДНО БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ МЕРЫ, КВАНТОВО-КЛАССИЧЕСКОЕ СООТВЕТСТВИЕ, МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ, СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ, ФУНКЦИЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ, КЛАСС УНИВЕРСАЛЬНОСТИ КАРДАРА-ПАРИЗИ - ЖАНГА, АНЗАЦ БЕТЕ, ПРОЦЕСС С ПРОСТЫМИ ЗАПРЕТАМИ, ГОМОЛОГИИ ХЕГОРА-ФЛОЕРА,АЛГЕБРЫ ЧЕРЕДНИКА, ИНВАРИАНТЫ УЗЛОВ, ГОМОЛОГИИ ХОВАНОВА-РОЗАНСКОГО, ГОМОЛОГИЙ КОШУЛЯ, ФОРМУЛЫ БУСКЕ-МЕЛУ–ШЕФФЕРА

Цели работы: развитие общего подхода к разнообразным вопросам, находящимся на стыке теории интегрируемых систем с теорией представлений квантовых и бесконечномерных групп и алгебр.

Задачи: Основными задачами Международной лаборатории теории представлений и математической физики являются:

— изучение и обобщение отечественного и мирового опыта по направлениям научных исследований, проводимых Лабораторией;

— распространение результатов научных исследований;

— содействие развитию научных исследований в России по направлению исследования;

— содействие участию преподавателей, аспирантов и студентов НИУ ВШЭ в научной деятельности Лаборатории, их контактам с зарубежными исследователями;

— содействие развитию международного научного сотрудничества НИУ ВШЭ.

Объекты научного исследования: квантовые когомологии в теории интегрируемых систем, вопросы зеркальной симметрии, многомерные гипергеометрические функции и геометрическая теория представлений, эллиптические конформные блоки и эллиптические гипергеометрические функции, геометрическое соответствие Ленглендса.

Методы исследований: алгебраический и теоретико-представленческий анализ классических и квантовых теорий поля, статистической физики и случайных процессов, исследование интегрируемых структур стоящих за калибровочными киверными теориями и анализ их соответствия с двумерными конформными теориями поля, развитие комбинаторных, гомологических и геометрических методов в теории пространств модулей различных геометрических и аналитических структур с приложениями к проблемам математической физики.

Полученные результаты:

— Показано, что однокомпонентные редукции иерархии Пфафф-Тоды в бездисперсионном пределе описываются системой из двух эллиптических уравнений Левнера (Голузина-Комацу).

— Найдены новые редукции уравнений двумеризованной цепочки Тода, ассоциированные с нижнетреугольными разностными операторами. Получено их гамильтоново описание.

— Дано прямое определение функции Коши–Йоста (известной также как функция Коши–Бейкера–Ахиезера) для случая чисто солитонного решения и подробно рассмотрены свойства этой функции на основе использования уравнения Кадомцева–Петвиашвили II в качестве примера.

— Построен Q-оператор удовлетворяющий TQ-соотношению и коммутирующий с собой для обобщённых восемивершинных моделей определённых через представления алгебры Склянина со старшими спинами.

— Расширено квантово-классическое соответствие до тригонометрического (гиперболического) случая.

— Изучены интегрируемые модели с $\mathfrak{gl}(2|1)$ симметрией, которые решаются с помощью иерархического алгебраического анзаца Бете. Получено действие элементов матрицы монодромии на эти вектора.

— Получено представление для скалярных произведений векторов Бетев самом общем случае.

— Получено детерминантное представление для скалярного произведение векторов Бете, когда параметры Бете подчиняются некоторым условиям, которые слабее чем уравнения Бете.

— Введены новые формулы для степеней стратов пространств Гурвица рода 0, отвечающих функциям с двумя непростыми критическими значениями с предписанными разбиениями кратностей прообразов.

— Найдено обобщение теоремы Бриона, в котором экспоненты точек суммируются с весами, зависящими от минимальной грани, содержащей точку.

— Развито "рациональное"обобщение соответствия между двумя различными способами нумерации парковочными функциями альковов в D_n^{n+1}.

— Развита теория представлений полиномиального роста фейгинской алгебры Ли gl_t. Получены первые результаты, обобщающие двойственность Шура-Вейля.

— Описана q-деформацию формул для τ-функций. Более точно, здесь мы проделываем это для простейшого случая уравнения Пенлеве III(D_8).

— Предложена конструкция коммутативных подалгебр в конечных W-алгебрах типа А. Показано, что в ряде случаев данные подалгебры максимальны, т.е. задают квантовую интегрируемую систему.

— Показано, что формы Якоби чётного индекса, ассоциированные с системой корней B_n, образуют свободную алгебру с $n+1$ образующей над кольцом модулярных форм. Это же свойство подтверждено для рассматриваемых относительно конгруэнц-подгруппы $\Gamma(2)$ форм Якоби произвольного индекса, ассоциированных с системой корней A_n.

— Получен способ вычисления чисел Гурвица-Севери с помощью классических чисел Гурвица в гибком и полужёстком случаях.

— Показано, что для любого подмножества нумерованных вершин I ориентированного графа Г действие оператора Лапласа на ориентированную сумму всех сильно полусвязных графов, в которых набор изолированных вершин совпадает с I, даёт сумму всех ациклических графов в которых множество стоков совпадает с I.

— Для бесконечных детерминантных мер, полученных как возмущения конечного ранга, установлена сходимость семейства детерминантных процессов, полученных индуцированием с исчерпывающего семейства подмножеств фазового пространства, к изначальному, невозмущенному детерминантному процессу.

— Доказано совпадание спектральных последовательностей типа Васильева, вычисляющих когомологии полупростой группы Ли G и множества неособых сечений линейных G-однородных расслоений при отображении орбит.

— Получено точное решение одномерной проблемы Римана-Гильберта на эллиптической кривой, изучены единственность решения и критерии разрешимости. Для двумерной трёхточечной проблемы Римана-Гильберта с неприводимым индуцированным представлением на эллиптической кривой получен в явном вид класс решений для индуцированной задачи.

— Построены операторы частных производных в некоммутативных матричных алгебрах уравнения отражений и разработан аналог дифференциального комплекса де Рама. Для значения параметра деформации $|q| = 1$ найдена конструкция анти-инволюции унитарного типа для квантового дифференциального исчисления над$GL_q(n)$.

— Построены представления W-алгебры с целыми вирасоровскими центральными зарядами на основе теории многокомпонентных свободных безмассовых фермионов в двух измерениях. С помощью вершинных операторов этой теории получены новые данные о тау-функциях многокомпонентных иерархий тодовского типа.

— Показано, что попытка расширить определение кольца представлений на семейство унитарных групп приводит к новому объекту — некоторой градуированной алгебре R, которая играет роль алгебры симметрических функций. Проведено явное вычисление инфинитезимальных генераторов для четырёхпараметрического семейства марковских процессов на дуальном объекте к $U(\infty)$.

Организационные результаты:

— подготовка к изданию научных докладов, статей и других публикаций, содержащих результаты научной деятельности Лаборатории;

— организация и проведение школы-конференции, летних школ и научных семинаров

— организация визитов в Лабораторию зарубежных специалистов

— организация курсов лекций

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория представлений групп и алгебр — это центральная часть математики, имеющая множество как математических, так и физических приложений. Различные аспекты этой теории находят свои проявления в таких далеких друг от друга областях, как алгебраическая и перечислительная геометрия, стохастические процессы, теория нелинейных дифференциальных уравнений, квантовая механика и теория поля, топология узлов и т.д. С точки зрения математической физики теория представлений является ядром теории интегрируемых систем, которая в последние двадцать лет привлекает все больше исследователей, ставит новые задачи и являетя источником множества идей, за частую приводящих к появлению новых областей математики и физики.

Исследования проводившиеся в международной лаборатории теории представлений и математичесой физики в 2016 следовали передовым научным тенденциям развития этих областей и были направлены на разработку новых методов и концепций в теории представлений полупростых алгебр Ли и их деформаций, основанных на идеях теории интегрируемых систем, симплектической геометрии и теории эквивариантных квантовых когомологий колчанных многообразий, развитие комбинаторных, гомологических и геометрических методов в теории пространств модулей алгебраических кривых и их отображений с приложениями к проблемам математической физики, развитие нового подхода в теории интегрируемых систем, связанного с квантовыми когомологиями пространств флагов, нахождение и исследование зеркальной симметрии для кокасательных расслоений пространств флагов, дальнейшее изучение и развитие связей между общими гипергеометрическими функциями и фробениусовыми структурами, ассоциированными с квантовыми когомологиями, изучение связей между динамическими квантовыми группами и геометрией аффинных грассманианов, вычисление характеристических классов глобальных локусов сингулярностей в пространствах модулей отображений алгебраических кривых и развитие связей с интегрируемыми иерархиями, выявление геометрической и теоретико-представленческой природы обнаруженного недавно нетривиального соответствия между квантовыми интегрируемыми системами и классическими интегрируемыми иерархиями, развитие теории представлений и геометрической теории эллиптических деформаций алгебр Ли с приложениями к интегрируемым системам с эллиптическими R-матрицами, алгебраический анализ интегрируемых иерархий солитонных уравнений, интегрируемых моделей классической и квантовой теории поля и статистической физики, анализ интегрируемых структур конформных теорий поля, суперсимметричных калибровочных теорий поля и их деформаций.

В соответствии с возложенными на неё задачами Лаборатория провела следующие мероприятия:

1. подготовила и опубликовала 34 статей (все с аффилиацией НИУ ВШЭ, из них 23 с благодарностью Программе государственной поддержки ведущих университетов РФ "5-100"), 16 препринтов (все с аффилиацией НИУ ВШЭ и благодарностью Программе “5-100”) и более 40 презентаций докладов на международных и российских научных конференциях;
2. организовала и провела международную конференцию "Классические и квантовые интегрируемые системы"(С.Петербург), международную конференцию “Classical and Quantum Integrable Systems and Supersymmetry” (Tyanjin, China), 5-й Международный Семинар «Комбинаторика пространств модулей, числа Гурвица и когомологические теории поля» (Москва), международную школу-конференцию по теории струн, интегрируемым моделям и теории представлений (Москва) и международную школу-конференцию «Черные дыры и асимптотические симметрии в ОТО» (Москва), а также проводила еженедельный семинар по математической физике, семинары в сотрудничестве с ведущими зарубежными специалистами и другие мероприятия, содействующие созданию творческой атмосферы в Лаборатории, и ориентированные в частности, на подготовку молодых учёных, аспирантов и студентов;
3. пригласила и организовала прием четверых ведущих зарубежных специалистов из Франции, Великобритании, Колумбии.

Наша исследовательская работа была сосредоточена на алгебраическом и теоретико-представленческом анализе интегрируемых систем классической и квантовой теорий поля, статистической физики и случайных процессов, исследованиях интегрируемых структур, лежащих в основе колчанных теорий поля. Ниже приведено краткое описание основные научных результатов полученных в процессе работы лаборатории:

Показано, что однокомпонентные редукции иерархии Пфафф-Тоды в бездисперсионном пределе описываются системой из двух эллиптических уравнений Левнера (Голузина-Комацу).

Найдены новые редукции уравнений двумеризованной цепочки Тода, ассоциированные с нижнетреугольными разностными операторами. Получено их гамильтоново описание.

Дано прямое определение функции Коши–Йоста (известной также как функция Коши–Бейкера–Ахиезера) для случая чисто солитонного решения и подробно рассмотрены свойства этой функции на основе использования уравнения Кадомцева–Петвиашвили II в качестве примера. Это позволяет сформулировать преобразования Дарбу через посредство функции Коши–Йоста и дать классификацию этих преобразований. Получено действие преобразований Дарбу на грассманианах, т.е. на пространствах солитонных параметров, и рассмотрена связь преобразований Дарбу со свойством совершенной неотрицательности элементов соответствующих грассманианов.

Был построен Q-оператор удовлетворяющий TQ-соотношению и коммутирующий с собой для обобщённых восемивершинных моделей определённых через представления алгебры Склянина со старшими спинами. Явное построение с помощью сплетающих векторов позволяет доказать правило сумм Бетевских корней, которое не было доказано непосредственно с помощью Анзаца Бете. Таким образом, Q-оператор полезен для анализа Бетевских корней.

Мы расширили квантово-классическое соответствие до тригонометрического (гиперболического) случая. Соответствие дает явную связь между классической тригонометрической моделью Руйсенаарса-Шнайдера с N-частицами и неоднородной твистованной XXZ спиновой цепочкой на N узлах. Так же, как и в рациональном случае, данные спиновой цепочки фиксирует некоторое Лагранжевое многообразие в фазовом пространстве классической интегрируемой системы. Параметры неоднородности совпадают с координатами частиц, в то же время скорости классических частиц пропорциональны собственным значениям Гамильтонианов спиновой цепочки(вычетов правильным образом нормированой трансферматрицы). В рациональном случае соответствия переменные действия в модели Руйсенаарса-Шнайдера равны твистовым параметрам умноженые на некоторые множители, которые определяются квантовыми числами(числами заполнения). В отличие от рационального случая, в тригонометрическом случае происходит расщепление спектра переменных действия (собственных значений матрицы Лакса). Приделом можно получить соотвествие между классической системой Калоджеро-Сазерленда и моделью Годена.

Мы изучали интегрируемые модели с $\mathfrak{gl}(2|1)$ симметрией, которые решаются с помощью иерархического алгебраического анзаца Бете. Используя явные формулы для векторов Бете мы получили действия элементов матрицы монодромии на эти вектора. Мы показали, что результатом этих действий является конечная линейная комбинация векторов Бете. Эти формулы позволяют нам получить выражения для скалярных произведений векторов Бете.

Используя явные формулы действия элементов матрицы монодромии на вектора Бете мы получили представление для скалярных произведений в самом общем случае. Это явное выражение является суммой по разбиениям множества параметров Бете.

Его можно использовать для анализа скалярных произведений с участием оншельных векторов Бете. В качестве побочного результата мы получили детерминантное представление для скалярного произведения общих векторов в интегрируемых моделях с $\mathfrak{gl}(1|1)$ симметрией.

Мы получили детерминантное представление для скалярного произведение векторов Бете, когда параметры Бете подчиняются некоторым условиям, которые слабее чем уравнения Бете. Это представление позволяет нам найти норму оншельных векторов Бете и получить детерминантные формулы для форм-факторов диагональных элементов матрицы монодромии. Мы получили явные детерминантные представления для форм-факторов элементов матрицы монодромии. Мы показали, что все форм-факторы связаны друг с другом специальными пределами параметров Бете. Наши результаты позволяют нам получить детерминантные формулы для форм-факторов локальных оператор в суперсимметричной t-J модели.

Введены новые формулы для степеней стратов пространств Гурвица рода 0, отвечающих функциям с двумя непростыми критическими значениями с предписанными разбиениями кратностей прообразов. При этом один из прообразов имеет произвольную кратность, а другой кратность коразмерности 1. Универсальные когомологические выражения для стратов коразмерности 1 в пространствах Гурвица были получены Казаряном и Ландо. Используя эти выражения для стратов в общих пространствах Гурвица рациональных функций, мы получаем новые, неизвестные ранее явные формулы для семейств двойных чисел Гурвица в роде 0. Эти формулы были высказаны М. Э. Казаряном в качестве гипотетических на основе компьютерных экспериментов. Мы надеемся, что аналогичные вычисления на основе универсальных формул для стратов большей коразмерности позволят получить и более общие явные формулы для чисел Гурвица, а развитые методы позволят доказать более общие тождества на ряды функций от разбиений, определяющих соотношения в кольце когомологий пространств Гурвица.

Установлено, что при применении теоремы Бриона к многограннику Гельфанда–Цетлина и надлежащей специализации вклады большей части вершин зануляются, а вклады оставшихся вершин дают слагаемые в формуле Вейля для характера. Найдено обобщение теоремы Бриона, в котором экспоненты точек суммируются с весами, зависящими от минимальной грани, содержащей точку.

Ранее было замечено, что обратные элементы к афинным перестановкам нумеруются минимальными альковами областей Ши принадлжащих симплексу D_n^{n+1}, который изометричен $(n+1)$ растянутому фундаментальному алькову. Как следствие, альковы в D_n^{n+1} могут быть занумерованы парковочными функциями двумя различными способами. Мы развиваем "рациональное"обобщение этого соответствия.

Мы развиваем теорию представлений полиномиального роста фейгинской алгебры Ли gl_t. Получены первые результаты, обобщающие двойственность Шура-Вейля.

Мы описываем q-деформацию формул для τ-функций. Более точно, здесь мы проделываем это для простейшого случая уравнения Пенлеве III(D_8).

Предложена конструкция коммутативных подалгебр в конечных W-алгебрах типа A. Показано, что в ряде случаев данные подалгебры максимальны, т.е. задают квантовую интегрируемую систему.

Показано, что формы Якоби чётного индекса, ассоциированные с системой корней B_n, образуют свободную алгебру с $n+1$ образующей над кольцом модулярных форм. Это же свойство подтверждено для рассматриваемых относительно конгруэнц-подгруппы $\Gamma(2)$ форм Якоби произвольного индекса, ассоциированных с системой корней A_n. Эти результаты являются частными случаями теоремы Виртмюллера о формах Якоби для произвольной системы корней. В отличие от общей довольно непростой и громоздкой конструкции для рассмотренных случаев удалось получить упрощённое доказательство, использующее элементарные методы.

Для жёстких и полужёстких конфигураций получено выражения чисел Гурвица-Севери через классические числа Гурвица. Если (g,d,ℓ) удовлетворяют неравенству

$$d + \ell \geqslant g + 2$$

(гибкий случай), то для трех наборов прямых $a_1 \dots, a_{2d+2g-2}$, $b_1 \dots, b_\ell$ и $x_1 \dots, x_{d+\ell-g-2}$ общего положения, проходящих через точку p, количество кривых $\Sigma \subset \mathbb{C}P^2$ рода g с нодом кратности ℓ в точке p, касающихся прямых $b_1 \dots, b_\ell$ в точке p, прямых $a_1 \dots, a_{2d+2g-2}$ в точках, отличных от p, и имеющих ноды на прямых $x_1 \dots, x_{d+\ell-g-2}$ (число Гурвица–Севери $\mathfrak{H}_{g,d,\ell}$), равно

$$\mathfrak{H}_{g,d,\ell} = \binom{d}{2}^{d+\ell-g-2} d^\ell h_{g,1^d}/d!,$$

где $h_{g,1^d}$ — классическое число Гурвица.

В полужестком случае, при

$$d + \ell < g + 2 \leqslant d + 2\ell$$

для двух наборов прямых $a_1 \dots, a_{2d+2g-2}$ и $b_1 \dots, b_{d+2\ell-g-2}$ общего положения, проходящих через точку p, количество кривых $\Sigma \subset \mathbb{C}P^2$ рода g с нодом кратности ℓ в точке p, касающихся прямых $b_1 \dots, b_{d+2\ell-g-2}$ в точке p и прямых $a_1 \dots, a_{2d+2g-2}$ в точках, отличных от p (число Гурвица–Севери $\mathfrak{H}_{g,d,\ell}$), равно

$$\mathfrak{H}_{g,d,\ell} = d^{d+2\ell-g-2}\binom{2g-d-\ell-1}{g-3}h_{g,1^d}/d!,$$

где $h_{g,1^d}$ — классическое число Гурвица.

Показано, что для ориентированного графа Γ с нумерованными вершинами и ребрами, такого, что его рёбра с номерами $p_1 \dots, p_m$ являются петлями, оператора Лапласа $\Delta(\Gamma)$ равного сумме, со знаком минус, графов, полученных из графа Γ заменой петель на такие всевозможные ребра с теми же номерами и начальными вершинами, которые не являются петлями и фиксированного подмножества $I = \{i_1 \dots, i_s\} \subset \{1 \dots, n\}$ вершин графа Γ выполняется

$$\Delta\bigl(Y_I\bigr) = A_I,$$

где $A_I \in \mathcal{G}_{n,k}$ есть сумма всех ациклических графов, в которых вершины $i_1 \dots, i_s$, и только они, являются стоками, а

$$Y_I = \sum_G (-1)^{\beta_0(G)} G \in \mathcal{G}_{n,k},$$

где $\beta_0(G)$ — количество компонент связности графа G, а суммирование идёт по множеству всех сильно полусвязных графов, в которых вершины $i_1 \dots, i_s$ (и только они) являются изолированными.

Изучена сходимость вероятностных детерминантных мер, заданных локально ядерными положительными сжатиями. Сходимость в пространстве локально-ядерных операторов влечёт за собой слабую сходимость соответствующих детерминантных мер в пространстве вероятностных мер на пространстве конфигураций. Были рассмотрены процессы, индуцированные бесселевским точечным процессом, а также возмущения конечного ранга бесселевского точечного процесса. Удалось получить достаточные условия сходимости как индуцированных процессов, так и процессов, отвечающих возмущениям конечного ранга.

Для бесконечных детерминантных мер, полученных как возмущения конечного ранга, установлена сходимость семейства детерминантных процессов, полученных индуцированием с исчерпывающего семейства подмножеств фазового пространства, к изначальному, невозмущенному детерминантному процессу.

Многие интересные алгебраические многообразия получаются как нули сечений G-однородных векторных расслоений, где G – полупростая группа Ли. Классические примеры – гиперповерхности и полные пересечения в проективных пространствах. На множестве неособых сечений U действует группа G. Имеются спектральные последовательности типа Васильева, которые вычисляют когомологии U и G. Рационально первые несколько столбцов первой последовательности совпадают со второй. Показано, что в случае линейных расслоений отображение орбит переводит соответствующие классы друг в друга.

Одним из способов обобщения проблемы Римана-Гильберта является переход к логарифмическим связностям в полустабильных расслоениях степени ноль. В рамках данного подхода получено явное решение задачи, критерии разрешимости и описание единственности решений для одномерной задачи на эллиптической кривой. Для двумерной трёхточечной задачи на эллиптической кривой построен в явном виде класс логарифмических связностей, индуцирующих, при ограничении на фундаментальный параллелограмм любое требуемое неприводимое представление свободной группы с двумя генераторами.

В ходе исследований в рамках данного направления были введены аналоги операторов частных производных на некоторых некоммутативных алгебрах. В их числе обертывающие алгебры и их твистованные обобщения — так называемые модифицированные алгебры уравнения отражений. С помощью операторов частного дифференцирования на этих алгебрах строится аналог дифференциального комплекса де Рама.

Для предложенных конструкций дифференциального исчисления исследовался вопрос о деформационных свойствах некоторых квантовых алгебр. В частности доказано, что вопреки распространенному мнению, в так называемой q-алгебре Витта отсутствует аналог свойства Пуанкаре-Биркхофа-Витта. В этой связи рассмотрены различные формы тождества Якоби, связанные с квадратично-линейными алгебрами.

Разработана конструкция анти-инволюции унитарного типа для квантового дифференциального исчисления над $GL_q(n)$ в случае $|q| = 1$. С этой целью была исследована присоединенная алгебра квантовых функций, дифференциальных форм и производных Ли над $GL_q(n)/SL_q(n)$, которая биковариантна с точностью до $GL_q(n)/SL_q(n)$ кодействий. Было определено особое нецентральное спектральное расширение этой алгебры спектральными переменными трех матриц алгебры генераторов. В спектрально расширенной алгебре построено три-параетрическое семейство внутренних автоморфизмов. Эти автоморфизмы используются для конструкции унитарной анти-инволюции для (спектрально расширенного) исчисления над $GL_q(n)$.

Рассматривается теория многокомпонентных свободных безмассовых фермионов в двух измерениях, которая применяется для построения представлений W-алгебр с целыми вирасоровскими центральными зарядами. Вершинные операторы в этой теории определяются в терминах решений соответствующей изомонодромной задачи. Эта конструкция используется для того, чтобы получить новые данные о тау-функциях многокомпонентных иерархий тодовского типа для класса решений, отвечающих изомонодромным вершинным операторам, а также для того, чтобы получить удобное представление для тау-функций изомонодромных деформаций.

В рамках данной темы исследования велись в двух направлениях. Первое направление посвящено построению кольца представлений семейства компактных унитарных групп $U(1), U(2), \ldots$. Здесь был определен новый объект — коммутативная градуированная алгебра R с бесконечномерными однородными компонентами. Она играет роль алгебры симметрических функций, которая выполняет функции кольца представлений для семейства конечных симметрических групп. Основная цель исследований — разработать систему основных определений и подготовить основу для конструкций, которым посвящено второе направление работы.

Второе направление имеет дело с семейством Марковских процессов, заданных на дуальном объекте к бесконечномерной унитарной группе $U(\infty)$. Основной результат здесь состоит в выводе явного выражения для инфинитезимальных генераторов этих процессов. Показано, что генераторы задаются определенными дифференциальными операторами второго порядка, зависящими от частных производных по счетному числу переменных, изначально заданных как операторы на коммутативной алгебре R.

Подробное изложение полученных результатов представлено в основной части отчета. Основная часть разделена на разделы, в которых содержится подробное описание полученных результатов. Каждый раздел содержит собственное введение, где определяются основные понятия, вводятся определения и ставится задача, после чего следует подробное описание методов исследования и полученных результатов. Ссылки на литературу собраны в списке использованных источников. Полученные результаты опубикованы в статьях [1]-[34] и препринтах [35]-[49].

1 Основные научные результаты

1.1 Бездисперсионная иерархия Пфафф-Тоды и эллиптическое уравнение Левнера

1.1.1 Введение

В данной главе мы рассматриваем бездисперсионный предел иерархии Пфафф-Тоды [70, 65] в эллиптической параметризации [50, 51]. Конечной целью является описание однокомпонентных редукций данной иерархии с точки зрения подхода Гиббонса-Царева [58, 57], см. также [63]-[68], в которых были рассмотренны редукции иерархий КП, модифицированной КП и иерархии Тоды с помощью хордового и радиального уравнений Левнера, известных в классическом комплексном анализе [64].

Аналогичное описание редукций иерархии Пфафф-КП (также известной как Пфаффова решетка) дается в [50], где было показано, что в случае иерархии Пфафф-КП уравнение Левнера нужно заменить на его эллиптический аналог (уравнение Голузина-Комацу [61, 59], см также [52]-[71]). Мы покажем, что в случае Пфафф-Тоды редукции описываются решениями системы спаренных эллиптических уравнений Левнера. Доказательство основывается на применении тождеств на тэта-функции.

1.1.2 Бездиспресионная иерархия Пфафф-Тоды

Набор времен в случае бездисперсионной иерархии Пфафф-Тоды (dPfaff-Toda) представляет собой $\mathbf{t} = \{\ldots, \bar{t}_2, \bar{t}_1, \bar{t}_0, t_0, t_1, t_2, \ldots\}$. Далее мы будем пользоваться действительной формой иерархии, где $\bar{t}_k$ обозначает комплексное сопряжение t_k для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$. Введем дифференциальные операторы

$$D(z) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{z^{-k}}{k}\,\partial_{t_k}, \qquad \bar{D}(z) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{z^{-k}}{k}\,\partial_{\bar{t}_k} \tag{1.1.1}$$

и

$$\nabla(z) = \partial_{t_0} + D(z), \qquad \bar{\nabla}(z) = \partial_{\bar{t}_0} + \bar{D}(z). \tag{1.1.2}$$

Уточним, что $\overline{D(z)} = \bar{D}(\bar{z})$, $\overline{\nabla(z)} = \bar{\nabla}(\bar{z})$. В бездисперсионной формулировке Хироты иерархии dPfaff-Toda, переменной является действительная функция $F = F(\mathbf{t})$. Вводя вспомогательные функции

$$P(z) = ze^{-(\partial_{t_0}+\partial_{\bar{t}_0})\nabla(z)F}, \qquad W(z) = ze^{-(\partial_{t_0}-\partial_{\bar{t}_0})\nabla(z)F}, \tag{1.1.3}$$

$$\bar{P}(z) = ze^{-(\partial_{t_0}+\partial_{\bar{t}_0})\bar{\nabla}(z)F}, \qquad \bar{W}(z) = ze^{(\partial_{t_0}-\partial_{\bar{t}_0})\bar{\nabla}(z)F},$$

можно представить уравнения иерархии в форме [65]

$$
\begin{aligned}
e^{D(z)D(\zeta)F}\left(1-\frac{1}{P(z)P(\zeta)}\right) &= \frac{W(z)-W(\zeta)}{z-\zeta}\, e^{(\partial_{t_0}-\partial_{\bar t_0})\partial_{t_0}F} \\
e^{D(z)D(\zeta)F}\left(1-\frac{1}{W(z)W(\zeta)}\right) &= \frac{P(z)-P(\zeta)}{z-\zeta}\, e^{(\partial_{t_0}+\partial_{\bar t_0})\partial_{t_0}F} \\
e^{D(z)\bar D(\bar\zeta)F}\left(1-\frac{1}{P(z)\overline{P(\zeta)}}\right) &= 1-\frac{1}{W(z)\overline{W(\zeta)}} \\
e^{D(z)\bar D(\bar\zeta)F}\left(W(z)-\overline{W(\zeta)}\right) &= \left(P(z)-\overline{P(\zeta)}\right) e^{2\partial_{t_0}\partial_{\bar t_0}F}.
\end{aligned}
\tag{1.1.4}
$$

Здесь $\overline{P(\zeta)} := \bar P(\bar z)$, $\overline{W(\zeta)} := \bar W(\bar z)$. Имеются еще два уравнения, комплексно сопряженные к первому и второму (третье и четвертое являются самосопряженными). Дифференциальные уравнения иерархии Пфафф-Тоды получаются разложением (1.1.4) по степеням z и ζ.

Поделив второе уравнение в (1.1.4) на первое, получим соотношение

$$W(z)+W^{-1}(z)-e^{2\partial_{t_0}\partial_{\bar t_0}F}\big(P(z)+P^{-1}(z)\big)=W(\zeta)+W^{-1}(\zeta)-e^{2\partial_{t_0}\partial_{\bar t_0}F}\big(P(\zeta)+P^{-1}(\zeta)\big)\,.$$

Это значит, что $C := W(z)+W^{-1}(z)-e^{2\partial_{t_0}\partial_{\bar t_0}F}(P(z)+P^{-1}(z))$ не зависит от z. Константа C может быть найдена, если мы устремим $z\to\infty$: $C = 2e^{-(\partial_{t_0}-\partial_{\bar t_0})\partial_{t_0}F}\partial_{\bar t_0}\partial_{t_1}F$. Поделив четвертое уравнение в (1.1.4) на третье, получим соотношение

$$W(z)+W^{-1}(z)-e^{2\partial_{t_0}\partial_{\bar t_0}F}\big(P(z)+P^{-1}(z)\big)=\bar W(\bar\zeta)+\bar W^{-1}(\bar\zeta)-e^{2\partial_{t_0}\partial_{\bar t_0}F}\big(\bar P(\bar\zeta)+\bar P^{-1}(\bar\zeta)\big)$$

которое указывает на то, что C -действительно, т.е., $e^{\partial_{t_0}^2 F}\partial_{t_0}\partial_{\bar t_1}F = e^{\partial_{\bar t_0}^2 F}\partial_{\bar t_0}\partial_{t_1}F$ (это на самом деле одно из уравнений иерархии). В результате, впомогательные функции $P(z), W(z)$ удовлетворяют алгебраическому уравнению [65]

$$W(z)+W^{-1}(z)-R^2\left(P(z)+P^{-1}(z)\right)=C \tag{1.1.5}$$

с действительными коэффициентами

$$R^2=e^{2\partial_{t_0}\partial_{\bar t_0}F},\qquad C=2e^{\partial_{t_0}(\partial_{\bar t_0}-\partial_{t_0})F}\partial_{\bar t_0}\partial_{t_1}F. \tag{1.1.6}$$

Функции $\bar P$, $\bar W$ удовлетворяют тому же уравнению. Данное уравнение определяет эллиптическую кривую с функциями P и W на ней. Локальный параметром возле ∞ является z^{-1}. Как видно из (1.1.3), у P и W простой полюс на бесконечности. Вместе с P, W рассмотрим функции

$$f(z)=\sqrt{P(z)W(z)}=ze^{-\partial_{t_0}\nabla(z)F},\qquad g(z)=\sqrt{\frac{P(z)}{W(z)}}=e^{-\partial_{\bar t_0}\nabla(z)F}. \tag{1.1.7}$$

У функции f простой полюс на ∞, в то время как g там регулярна. $\overline{f(z)} = \bar{f}(\bar{z}) = \bar{z}e^{-\partial_{\bar{t}_0}\bar{\nabla}(\bar{z})F}$, $\overline{g(z)} = \bar{g}(\bar{z}) = e^{-\partial_{t_0}\bar{\nabla}(\bar{z})F}$- комплексно сопряженные им функци. В терминах f, g уравнение эллиптической кривой (1.1.5) записывается

$$R^2(f^2g^2+1)+Cfg = f^2+g^2. \tag{1.1.8}$$

Функции $\bar{f}(z)$, $\bar{g}(z)$ удовлетворяют тому же уравнению. Заметим симметрию $f \leftrightarrow g$.

Мы униформизируем эллиптическую кривую(1.1.8) с помощью тэта-функций $\theta_a(u) = \theta_a(u|\tau)$, $a = 1{,}2{,}3{,}4$ (их определения даны в приложении):

$$f(z) = \frac{\theta_4(u(z))}{\theta_1(u(z))}, \qquad g(z) = \frac{\theta_4(u(z)+\eta)}{\theta_1(u(z)+\eta)}. \tag{1.1.9}$$

Уравнение(1.1.8) кривой удовлетворяется тождественно, если

$$R = \frac{\theta_1(\eta)}{\theta_4(\eta)}, \qquad C = 2\,\frac{\theta_4^2(0)\,\theta_2(\eta)\,\theta_3(\eta)}{\theta_4^2(\eta)\,\theta_2(0)\,\theta_3(0)}. \tag{1.1.10}$$

Модулярный параметр τ кривой (с $\mathrm{Im}\tau > 0$) и параметр η (точка на эллиптической кривой) являются динамическими переменными, зависящими от всех времен: $\eta = \eta(\mathbf{t})$, $\tau = \tau(\mathbf{t})$. Мы считаем η действительной, а τ чисто мнимой. Это предположение согласуется с тем, что R и C - действительные. Зафиксируем разложение функций $u(z) = u(z,\mathbf{t})$, $\bar{u}(z) = \bar{u}(z,\mathbf{t})$ возле ∞ следующим образом:

$$u(z,\mathbf{t}) = \frac{c_1(\mathbf{t})}{z} + \frac{c_2(\mathbf{t})}{z^2} + \ldots, \qquad \bar{u}(z,\mathbf{t}) = \frac{\bar{c}_1(\mathbf{t})}{z} + \frac{\bar{c}_2(\mathbf{t})}{z^2} + \ldots. \tag{1.1.11}$$

В отличие от бездисперсинной иерархии Пфафф-КП, коэффициенты c_i - комплексные.

После униформизации независимыми в (1.1.4) остаются только два уравнения. Согласно [51], мы записываем их в эллиптической форме. Перепишем первое и третье уравнения как

$$(z_1^{-1}-z_2^{-1})e^{\nabla_1\nabla_2 F} = R^{-1}g_1g_2\,\frac{W_1-W_2}{1-P_1P_2},$$

$$e^{\nabla_1\bar{\nabla}_2 F} = R^{-1}g_1\bar{g}_2\,\frac{1-W_1\bar{W}_2}{1-P_1\bar{P}_2},$$

где $\nabla_i = \nabla(z_i)$, $\bar{\nabla}_i = \bar{\nabla}(\bar{z}_i)$, $g_i = g(z_i)$, и т.д. Тождества

$$\frac{W_1-W_2}{1-P_1P_2} = \frac{\theta_1(\eta)}{\theta_4(\eta)}\,\frac{\theta_1(u_1+\eta)\,\theta_1(u_2+\eta)}{\theta_4(u_1+\eta)\,\theta_4(u_2+\eta)}\cdot\frac{\theta_1(u_1-u_2)}{\theta_4(u_1-u_2)},$$

$$\frac{1-W_1\bar{W}_2}{1-P_1\bar{P}_2} = \frac{\theta_1(\eta)}{\theta_4(\eta)}\,\frac{\theta_1(u_1+\eta)\,\theta_1(\bar{u}_2+\eta)}{\theta_4(u_1+\eta)\,\theta_4(\bar{u}_2+\eta)}\cdot\frac{\theta_1(u_1+\bar{u}_2+\eta)}{\theta_4(u_1+\bar{u}_2+\eta)}$$

позволяют нам записать уравнения в виде [51]

$$
\begin{aligned}
(z_1^{-1}-z_2^{-1})\, e^{\nabla(z_1)\nabla(z_2)F} &= \frac{\theta_1(u(z_1)-u(z_2))}{\theta_4(u(z_1)-u(z_2))},\\
e^{\nabla(z_1)\bar\nabla(z_2)F} &= \frac{\theta_1(u(z_1)+\bar u(z_2)+\eta)}{\theta_4(u(z_1)+\bar u(z_2)+\eta)},\\
(z_1^{-1}-z_2^{-1})\, e^{\bar\nabla(z_1)\bar\nabla(z_2)F} &= \frac{\theta_1(\bar u(z_1)-\bar u(z_2))}{\theta_4(\bar u(z_1)-\bar u(z_2))}.
\end{aligned}
\tag{1.1.12}
$$

Заметим, что первое уравнение (половинка иерархии dPfaff-Toda с фиксированными временами) выглядит так же, как уравнение бездисперсионной иерархии Пфафф-Тоды в эллиптической параметризации [50, 51] (однако, тут времена t_k комплексные). Третье уравнение сопряжено с первым. Оно представляет собой еще одну копию бездисперсионной иерархии Пфафф-Тоды только для времен $\bar t_k$ с фиксированными t_k. Второе уравнение содержит смешанные производные по t_k- и $\bar t_k$. Оно как бы "спаривает"две иерархии в одну большую.

Взяв предел $z_2 \to \infty$ в уравнениях (1.1.12), получим:

$$
e^{\partial_{t_0}\nabla(z)F} = z\,\frac{\theta_1(u(z))}{\theta_4(u(z))}, \qquad e^{\partial_{\bar t_0}\nabla(z)F} = \frac{\theta_1(u(z)+\eta)}{\theta_4(u(z)+\eta)}
\tag{1.1.13}
$$

(и комплексно сопряженные уравнения). Это есть не что иное, как комбинация выражений для функций f и g (1.1.9) с их определениями (1.1.7). Дальнейшее разложение при $z \to \infty$ дает

$$
\rho := e^{\partial_{t_0}^2 F} = \pi c_1 \theta_2(0)\theta_3(0),
\tag{1.1.14}
$$

где мы использовали тождество (1.1.34) из приложения. Данное выражение используется для вычислении в следующем параграфе. Для удобства дальнейших вычислений введем функцию

$$
S(u) = S(u|\tau) := \log\frac{\theta_1(u|\tau)}{\theta_4(u|\tau)}
\tag{1.1.15}
$$

(с точностью до константы это логарифм эллиптического синуса sn). Она обладает квазипериодическими свойствами $S(u+1) = S(u)+i\pi$, $S(u+\tau) = S(u)$. Ее производная по u

$$
S'(u) = \partial_u S(u|\tau) = \pi\theta_4^2(0)\frac{\theta_2(u)\theta_3(u)}{\theta_1(u)\theta_2(u)}\,.
$$

Из (1.1.10) следует, что

$$
R = e^{S(\eta)}, \qquad \frac{C}{R} = \frac{2S'(\eta)}{\pi\theta_2(0)\theta_3(0)}.
$$

Логарифмируя уравнения (1.1.12) и применяя ∂_{t_0} and $\partial_{\bar{t}_0}$, мы можем записать иерархию dPfaff-Toda в следующем виде:

$$\nabla(z_1)S\Big(u(z_2)\Big) = \partial_{t_0}S\Big(u(z_1)-u(z_2)\Big), \nabla(z_1)S\Big(u(z_2)+\eta\Big) = \partial_{\bar{t}_0}S\Big(u(z_1)-u(z_2)\Big), \tag{1.1.16}$$

$$\bar{\nabla}(\bar{z}_1)S\Big(u(z_2)\Big) = \partial_{t_0}S\Big(\bar{u}(\bar{z}_1)+u(z_2)+\eta\Big), \bar{\nabla}(\bar{z}_1)S\Big(u(z_2)+\eta\Big) = \partial_{\bar{t}_0}S\Big(\bar{u}(\bar{z}_1)+u(z_2)+\eta\Big),$$

вместе с комплексно-сопряженными уравнениями. В частности, в пределе $z_2 \to \infty$ имеем

$$\nabla(z)\log R = \partial_{\bar{t}_0}S(u(z)) = \partial_{t_0}S(u(z)+\eta).$$

С уравнений (1.1.16) мы начнем изучение однокомпонентных редукций.

1.1.3 Однокомпонентные редукции

Будем искать такие решения иерархии dPfaff-Toda,чтобы $u(z,\mathbf{t})$, $\eta(\mathbf{t})$ и $\tau(\mathbf{t})$ зависели от времен через одну единсвенную переменную $\lambda = \lambda(\mathbf{t})$: $u(z,\mathbf{t}) = u(z,\lambda(\mathbf{t}))$, $\eta(\mathbf{t}) = \eta(\lambda(\mathbf{t}))$, $\tau(\mathbf{t}) = \tau(\lambda(\mathbf{t}))$. Такие решения разываются однокомпонентными редукциями. Мы хотим описать класс функций $u(z,\lambda)$, $\eta(\lambda)$, $\tau(\lambda)$, совместных со всей иерархией. Для упрощения вычислений, мы выбираем $\lambda = \tau$.

В данном параграфе мы используем обозначения

$$E^{(a)}(u) = E^{(a)}(u|\tau) = \partial_u \log\theta_a(u|\tau)$$

для логарифмических производных тэта функций. Для краткости мы записываем

$$E(u) := E^{(1)}(u|\tau) + E^{(4)}(u|\tau) = E^{(1)}\Big(u \;\Big|\; \frac{\tau}{2}\Big).$$

Для частных производных функции S по τ используем $\dot{S}(u) = \partial_\tau S(u|\tau)$. В случае, когда аргумент функции S зависит от τ, полная производная по τ дается формулой

$$\frac{dS(u)}{d\tau} = S'(u)\partial_\tau u + \dot{S}(u). \tag{1.1.17}$$

Для последующих вычислений нам понадобятся тождества

$$4\pi i\dot{S}(u) = 2S'(u)E^{(2)}(u) + \pi^2\theta_4^4(0) \tag{1.1.18}$$

и

$$S'(x_1-x_2)\Big(-E(x_1)+E(x_2)+2E^{(2)}(x_1-x_2)\Big) + \pi^2\theta_4^4(0) = S'(x_1)S'(x_2). \tag{1.1.19}$$

Они доказаны в [50]. Подставляя (1.1.18) в (1.1.17),получаем

$$4\pi i\frac{dS(u)}{d\tau} = S'(u)\Big(4\pi i\partial_\tau u + 2E^{(2)}(u)\Big) + \pi^2\theta_4^4(0). \tag{1.1.20}$$

Заметим, что после подстановки

$$\begin{aligned} 4\pi i\partial_\tau \eta &= E(\xi-\eta) - E(\xi) \\ 4\pi i\partial_\tau u &= -E(u+\xi) + E(\xi) \\ 4\pi i\partial_\tau \bar{u} &= -E(\bar{u}+\bar{\xi}) + E(\bar{\xi}) \end{aligned} \tag{1.1.21}$$

с условием

$$\xi + \bar{\xi} = \eta \tag{1.1.22}$$

уравнения (1.1.16) превращаются в тождества (некоторые детали вычислений даны в приложении). Это означает, что наша редукция согласуется со всей иерархией, при этом ξ, $\bar{\xi}$ - произвольные функции от τ, а $\xi(\tau)+\bar{\xi}(\tau) = \eta(\tau)$. Обращаем внимание, что $-\eta$ удовлетворяет тем же дифференциальным уравнениям, что и $u(z)$.

Учитывая, $\xi+\bar{\xi} = \eta$, можем положить

$$\xi(\tau) = \frac{\eta(\tau)}{2} + i\kappa(\tau), \qquad \bar{\xi}(\tau) = \frac{\eta(\tau)}{2} - i\kappa(\tau), \tag{1.1.23}$$

где $\kappa(\tau)$ произвольная действительно значная функция, которая играет роль "управляющей функции". Уравнение (1.1.21) принимает форму

$$\begin{aligned} 4\pi i\,\partial_\tau \eta(\tau) &= -E(\frac{\eta}{2}+i\kappa) - E(\frac{\eta}{2}-i\kappa) \\ 4\pi i\partial_\tau u(z,\tau) &= -E(u+\frac{\eta}{2}+i\kappa) + E(\frac{\eta}{2}+i\kappa) \\ 4\pi i\partial_\tau \bar{u}(z,\tau) &= -E(u+\frac{\eta}{2}-i\kappa) + E(\frac{\eta}{2}-i\kappa) \end{aligned} \tag{1.1.24}$$

Каждое из данных уравнений является уравнением Голузина-Комацу в немного непривычной форме. Они эквиваленты стандартной форме [52], стр 257. Данные уравнения являются достаточными условиями на функции $u(z,\tau)$, $\bar{u}(z,\tau)$ и $\eta(\tau)$, для совместности со всей бесконечной dPfaff-Toda иерархией. Для данной $\kappa(\tau)$, решаем первое уравнение на $\eta(\tau)$ и подставляем в остальные два.

Уравнения редуцированной иерархии записаны для переменной τ, не являющейся независимой. Чтобы их получить, нам понадобятся соотношения

$$\nabla(z)\tau = \frac{d\tau}{d\log\rho}\,\nabla(z)\log\rho = \frac{dS(u(z))/d\tau}{d\log\rho/d\tau}\,\partial_{t_0}\tau, \tag{1.1.25}$$

$$\bar{\nabla}(\bar{z})\tau = \frac{d\tau}{d\log R}\,\bar{\nabla}(\bar{z})\log R = \frac{dS(\bar{u}(\bar{z}))/d\tau}{dS(\eta)/d\tau}\,\partial_{t_0}\tau \tag{1.1.26}$$

которые легко получить, используя правило дифференцирования сложной функции. Правые стороны можно переписать с помощью формул (1.1.36), (1.1.37), (1.1.39), (1.1.41) из Приложения. В результате получаем

$$\nabla(z)\tau = \frac{S'(u(z)+\xi)}{S'(\xi)}\,\partial_{t_0}\tau\,, \qquad \bar{\nabla}(\bar{z})\tau = -\,\frac{S'(\bar{u}(\bar{z})+\bar{\xi})}{S'(\xi)}\,\partial_{t_0}\tau. \tag{1.1.27}$$

Это не что иное, как производящие функции редуцированной иерархии уравнений гидродинамического типа. Чтобы записать их более подробно, воспользуемся разложением

$$S(u(z)+v) = S'(v) + \sum_{k\geqslant 1}\frac{z^{-k}}{k}B_k'(v)\,, \quad k\geqslant 1. \tag{1.1.28}$$

(Функции $B_k = B_k(v|\tau)$ являются эллиптическими аналогами полиномов Фабера, $B_k'(v) = \partial_v B_k(v)$.) Тогда уравнения запишутся виде:

$$\frac{\partial\tau}{\partial t_k} = \phi_k(\xi(\tau)|\tau)\frac{\partial\tau}{\partial t_0}\,, \qquad \frac{\partial\tau}{\partial\bar{t}_k} = \psi_k(\xi(\tau)|\tau)\frac{\partial\tau}{\partial t_0}\,, \tag{1.1.29}$$

где

$$\phi_k(\xi(\tau)|\tau) = \frac{B_k'(\xi(\tau)|\tau)}{S'(\xi(\tau)|\tau)}\,, \qquad \psi_k(\xi(\tau)|\tau) = -\frac{\bar{B}_k'(\bar{\xi}(\tau)|\tau)}{S'(\xi(\tau)|\tau)}. \tag{1.1.30}$$

Формально мы можем расширить эту систему до значения $k=0$, положив $B_0'(u) = S'(u)$. При $k=0$ получаем уравнение

$$S'(\bar{\xi})\partial_{t_0}\tau + S'(\xi)\partial_{\bar{t}_0}\tau = 0. \tag{1.1.31}$$

Общее решение данных уравнений дается в форме годографа:

$$\sum_{k\geqslant 1} t_k\phi_k(\xi(\tau)) + \sum_{k\geqslant 0}\bar{t}_k\psi_k(\xi(\tau)) = \Phi(\tau). \tag{1.1.32}$$

Здесь Φ произвольная функция от τ.

1.1.4 Приложение

Тэта-функции

Тэта-функции Якоби $\theta_a(u) = \theta_a(u|\tau)$, $a = 1,2,3,4$, определяются формулами

$$
\begin{aligned}
\theta_1(u) &= -\sum_{k\in\zeta} \exp\left(\pi i\tau(k+\frac{1}{2})^2 + 2\pi i(u+\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2})\right), \\
\theta_2(u) &= \sum_{k\in\zeta} \exp\left(\pi i\tau(k+\frac{1}{2})^2 + 2\pi iu(k+\frac{1}{2})\right), \\
\theta_3(u) &= \sum_{k\in\zeta} \exp\left(\pi i\tau k^2 + 2\pi iuk\right), \\
\theta_4(u) &= \sum_{k\in\zeta} \exp\left(\pi i\tau k^2 + 2\pi i(u+\frac{1}{2})k\right)
\end{aligned}
\tag{1.1.33}
$$

с $\operatorname{Im}\tau > 0$. Функция $\theta_1(u)$ нечетная, остальные - четные. Сдвиги на полупериод связывают разные тэта-функции. Также отметим тождество

$$\theta_1'(0) = \pi\theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0). \tag{1.1.34}$$

Большое количество полезных соотношений на тэта функции могут быть найдены в [60].

Некоторые детали вычислений

Начнем с первого уравнения в (1.1.16),

$$\nabla(z_1)S\Big(u(z_2)\Big) = \partial_{t_0}S\Big(u(z_1)-u(z_2)\Big).$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, можем переписать левую часть как

$$\nabla(z_1)S(u_2) = \nabla(z_1)\tau\,\frac{dS(u_2)}{d\tau} = \nabla(z_1)\log\rho\left(\frac{d\log\rho}{d\tau}\right)^{-1}\frac{dS(u_2)}{d\tau}$$

(где ρ определено в (1.1.14) и для краткости мы положили $u_i \equiv u(z_i)$). В свою очередь, $\nabla(z_1)\log\rho$ найдем, устремив $z_2 \to \infty$ в первом уравнении (1.1.16):

$$\nabla(z_1)\log\rho = \partial_{t_0}S(u_1) = \partial_{t_0}\tau\,\frac{dS(u_1)}{d\tau}.$$

Таким образом, левая сторона

$$\nabla(z_1)S(u_2) = \partial_{t_0}\tau\,\frac{dS(u_1)}{d\tau}\,\frac{dS(u_2)}{d\tau}\left(\frac{d\log\rho}{d\tau}\right)^{-1}.$$

Правая сторона первого уравнения в (1.1.16)

$$\partial_{t_0} S(u_1 - u_2) = \partial_{t_0}\tau \, \frac{dS(u_1 - u_2)}{d\tau}.$$

Учитывая, что $\partial_{t_0}\tau \neq 0$ мы можем увидеть, что первое уравнение в (1.1.16) становится

$$\frac{dS(u_1)}{d\tau}\,\frac{dS(u_2)}{d\tau} = \frac{d\log\rho}{d\tau}\,\frac{dS(u_1 - u_2)}{d\tau}. \tag{1.1.35}$$

С помощью (1.1.20) заменим каждую полную производную по τ. Подставляя $\partial_\tau u$ из (1.1.21) и используя тождество (1.1.19), можем доказать, что

$$4\pi i \, \frac{dS(u(z))}{d\tau} = S'(u(z) + \xi) S'(\xi) \tag{1.1.36}$$

и, в частности, (при $z \to \infty$),

$$4\pi i \, \frac{d\log\rho}{d\tau} = (S'(\xi))^2. \tag{1.1.37}$$

Таким образом, видно, что уравнение(1.1.35) тождественно удовлетворяется:

$$S'(u_1 + \xi)S'(\xi) \cdot S'(u_2 + \xi)S'(\xi) = (S'(\xi))^2 \cdot S'(u_1 + \xi)S'(u_2 + \xi).$$

С другим уравнением в (1.1.16) поступим также. Рассмотрирм второе уравнение,

$$\nabla(z_1) S\Big(u(z_2) + \eta\Big) = \partial_{\bar t_0} S\Big(u(z_1) - u(z_2)\Big).$$

Слева имеем:

$$\begin{aligned}
\nabla(z_1) S(u_2 + \eta) &= \nabla(z_1)\tau \, \frac{dS(u_2+\eta)}{d\tau} \\
&= \nabla(z_1)\log R \, \frac{dS(u_2+\eta)}{d\tau} \left(\frac{d\log R}{d\tau}\right)^{-1} \\
&= \partial_{\bar t_0} S(u_1) \, \frac{dS(u_2+\eta)}{d\tau} \left(\frac{d\log R}{d\tau}\right)^{-1} \\
&= \partial_{\bar t_0}\tau \, \frac{dS(u_1)}{d\tau}\,\frac{dS(u_2+\eta)}{d\tau} \left(\frac{d\log R}{d\tau}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Правая сторона

$$\partial_{\bar t_0} S(u_1 - u_2) = \partial_{\bar t_0}\tau \, \frac{dS(u_1 - u_2)}{d\tau}.$$

Вспомним также, что $\log R = S(\eta)$. Таким образом, второе уравнение в (1.1.16) принимает вид

$$\frac{dS(u_1)}{d\tau}\,\frac{dS(u_2+\eta)}{d\tau} = \frac{dS(\eta)}{d\tau}\,\frac{dS(u_1 - u_2)}{d\tau}. \tag{1.1.38}$$

Точно также, подставляя $\partial_\tau u$ из (1.1.21)и используя тождество(1.1.19), мы можем доказать, что

$$4\pi i \,\frac{dS(u_2+\eta)}{d\tau} = S'(u_2+\xi)S'(\xi-\eta), \tag{1.1.39}$$

$$4\pi i \,\frac{dS(u_1-u_2)}{d\tau} = S'(u_1+\xi)S'(u_2+\xi), \tag{1.1.40}$$

и, в частности,(при $z\to\infty$ в (1.1.39)),

$$4\pi i \,\frac{dS(\eta)}{d\tau} = S'(\xi)S'(\xi-\eta) = S'(\bar\xi)S'(\bar\xi-\eta) \tag{1.1.41}$$

(последнее равенство выполняется в силу $\xi+\bar\xi=\eta$). Таким образом, мы видим, что уравнение (1.1.38) тождественно выполняется :

$$S'(u_1+\xi)S'(\xi)\cdot S'(u_2+\xi)S'(\xi-\eta) = S'(\xi)S'(\xi-\eta)\cdot S'(u_1+\xi)S'(u_2+\xi).$$

Теперь рассмотрим третье уравнение в (1.1.16),

$$\bar\nabla(\bar z_1)S\Big(u(z_2)\Big) = \partial_{t_0}S\Big(\bar u(\bar z_1){+}u(z_2){+}\eta\Big).$$

Его левая сторона

$$\begin{aligned}
\bar\nabla(\bar z_1)S(u_2) &= \bar\nabla(\bar z_1)\tau\,\frac{dS(u_2)}{d\tau}\\
&= \bar\nabla(\bar z_1)\log R\,\frac{dS(u_2)}{d\tau}\left(\frac{d\log R}{d\tau}\right)^{-1}\\
&= \partial_{t_0}S(\bar u_1)\,\frac{dS(u_2)}{d\tau}\left(\frac{d\log R}{d\tau}\right)^{-1}\\
&= \partial_{t_0}\tau\,\frac{dS(\bar u_1)}{d\tau}\,\frac{dS(u_2)}{d\tau}\left(\frac{d\log R}{d\tau}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

При переходе от второй стороки к третьей мы использовали комплексное сопряжение второго уравнения (1.1.16) в пределе $z_2\to\infty$. Правая сторона равна

$$\partial_{t_0}S(\bar u_1+u_2+\eta) = \partial_{t_0}\tau\,\frac{dS(\bar u_1+u_2+\eta)}{d\tau}.$$

Третье уравнение в (1.1.16) становится

$$\frac{dS(\bar u_1)}{d\tau}\,\frac{dS(u_2)}{d\tau} = \frac{dS(\eta)}{d\tau}\,\frac{dS(\bar u_1+u_2+\eta)}{d\tau}. \tag{1.1.42}$$

Подставляя здесь $\partial_\tau u$ из (1.1.21) и используя тождество(1.1.19), мы можем доказать, что

$$4\pi i \,\frac{dS(\bar u(\bar z))}{d\tau} = S'(\bar u(\bar z)+\bar\xi)S'(\bar\xi) \tag{1.1.43}$$

и

$$4\pi i \frac{dS(\bar{u}_1 + u_2 + \eta)}{d\tau} = S'(\bar{u}_1 + \bar{\xi})S'(-u_2 - \xi). \tag{1.1.44}$$

Таким образом, мы видим, что третье уравнение удовлетворяется тождественно:

$$S'(\bar{u}_1 + \bar{\xi})S'(\bar{\xi}) \cdot S'(u_2 + \xi)S'(\xi) = S'(\xi)S'(\xi - \eta) \cdot S'(\bar{u}_1 + \bar{\xi})S'(-u_2 - \xi)$$

(мы используем ограничение $\xi + \bar{\xi} = \eta$ и тот факт, что $S'(u)$ является нечетной функцией).

Расчеты для оставшегося четвертого уравнения (1.1.16)аналогичны.

1.2 Треугольные редукции двумеризованной цепочки Тода

1.2.1 Введение

Недавний повышенный интерес к теории линейных разностных операторов был вызван их связью с теорией дискретных интегрируемых систем нового типа (а именно, пентаграммных отображений и их многомерных обощений), которые, как оказалось, тесно связаны с теорией представлений (фризами Кокстера) и теорией кластерных алгебр.

Напомним, что при пентаграмном отображении образом n-угольника в $\mathbb{RP}^2$ с вершинами v_i является n–угольник, вершины которого являются точками пересечения диагоналей (v_{i-1}, v_{i+1}) и (v_i, v_{i+2}). Как показано в [84], если n и $k+1$ взаимнопросты, то пространство модулей n-угольников в $\mathbb{RP}^k$ изоморфно, как алгебраическое многообразие, пространству $\mathcal{E}_{k+1,n}$ n-периодических линейных разностных уравнений

$$V_i = a_i^{(1)}V_{i-1} - a_i^{(2)}V_{i-2} + \cdots + (-1)^{k-1}a_i^{(k)}V_{i-k} + (-1)^k V_{i-k-1}, \tag{1.2.1}$$

все решения которого (анти)периодичны

$$V_{i+n} = (-1)^k V_i. \tag{1.2.2}$$

В статье [77] такие уравнения названы суперпериодическими. Уравнения (1.2.1) без ограничений (1.2.2) соответствуют, так называемым, скрученным n-угольникам в $\mathbb{RP}^k$, представляющих собой последовательности точек $v_j \in \mathbb{RP}^k, j \in \mathbb{Z}$, для которых существует проективное линейное преобразование M, такое что $v_{j+n} = Mv_j$.

В работе [84] установлено, что пентаграммное отображение является дискретной интегрируемой системой, а именно, оно сохраняет некоторую естественную структуру пуассонова многообразия на пространстве n-периодических нижнетреугольных операторов (1.2.1) порядка 3, и был постоен полный набор интегралов движения в инволюции. В [85] доказана алгебро-геометрическая интегрируемость пентаграмного отображения.

В [83] предложена явная конструкция двойственности между пространствами $\mathcal{E}_{k+1,n}$ и $\mathcal{E}_{n-k-1,n}$, обобщающая классическую двойственность Гэйла для n-угольников. В работе [77] было показано, что обобщенная двойственность Гэйла тесно связана с теорией коммутирующих разностных операторов и была развита спектральная теория нижнетреугольных разностных операторов вида

$$L = T^{-k-1} + \sum_{j=1}^{k} a_i^{(j)} T^{-j},\ a_i^{(j)} = a_{i+n}^{(j)} \tag{1.2.3}$$

с ненулевым старшим коэффициентом

$$a_j^{(1)} \neq 0 \tag{1.2.4}$$

Здесь и далее T является оператором сдвига: $T\psi_j = \psi_{j+1}$

Спектральная теория треугольных разностных операторов интересна сама по себе. Отправной точкой настоящей работы явилось простое наблюдение: спектральная теория треугольных операторов естественным образом связана со специальной редукцией иерархии двумеризованной цепочки Тода.

Замечание 1. Для определенности, в данной статье мы будем рассматривать только случай нижнетреугольных редукций, поскольку инволюция $L \to L^*$, где

$$L^* = T^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} T^j a_i^{(j)} = T^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} a_{i+j}^{(j)} T^j. \tag{1.2.5}$$

формально сопряженный оператор, устанавливает соответствие между нижне- и верхнетреугольными операторами

Напомним, что уравнение двумеризованной цепочки Тода

$$\partial^2_{\xi\eta}\varphi_i = e^{\varphi_i-\varphi_{i+1}} - e^{\varphi_{i-1}-\varphi_i} \tag{1.2.6}$$

является условием совместности двух линейных задач

$$\begin{cases} \partial_\xi \Psi_i = v_i \Psi_i + \Psi_{i-1} \\ \partial_\eta \Psi_i = c_i \Psi_{i+1},\ c_i = e^{\varphi_i - \varphi_{i+1}} \end{cases} \tag{1.2.7}$$

Полная иерархия двумеризованной цепочки Тода представляет бесконечный набор уравнений на функцию $\varphi_i = \varphi_i(t_1^+, t_1^-, t_2^+, t_2^-, \ldots)$ дискретной переменной i и двух наборов непрерывных параметров $t_m^\pm$, называемых обычно "временами"иерархии. Времена t_1^+ и t_1^- далее отождествляются с ξ и η. Уравнения иерархия является условием совместности линейных задач

$$\partial_{t_m^\pm}\Psi = L_m^\pm \Psi, \tag{1.2.8}$$

где $L_m^\pm$ это разностный оператор вида

$$L_m^\pm = \sum_{j=0}^{m} a_{i,m}^{(j,\pm)} T^{\pm j} \tag{1.2.9}$$

со старшими коэффициентами

$$a_{i,m}^{(m,-)} = 1, \qquad a_{i,m}^{(m,+)} = e^{\varphi_i - \varphi_{i+m}}. \tag{1.2.10}$$

Легко проверить, что из совместности второго уравнения в (1.2.7) с (1.2.8) следует

$$a_{i,m}^{(0,-)} = \partial_{t_m^-}\varphi_i, \qquad a_{i,m}^{(0,+)} = 0. \tag{1.2.11}$$

Замечание 2. Важно подчеркнуть, что иерархия произвольного солитонного уравнения, как линейное пространство коммутирующих векторных полей, хорошо определена. При этом, как правило не существует никакого канонического выбора "времен"(что эквивалентно выбору канонического базиса коммутирующих векторных полей). Условие, состоящее в том, что оператор $L_m^\pm$ является (верхне) нижнетреугольным порядка m, исключает данную неоднозначность лишь частично. Этим условием времена определены с точностью до линейных треугольных преобразований $\tilde{t}_m^\pm = t_m^\pm + \sum_{\mu<m} c_\mu^\pm t_\mu^\pm$. Более детально мы вернемся к этому вопросу ниже.

Зафиксируем одно из времен иерархии t_{k+1}^- (или, в общем случае, линейную комбинацию первых $(k+1)$ времен) и рассмотрим решение иерархии, не зависящее от него, т.е.

$$\partial_{t_{k+1}^-}\varphi_i = 0 \tag{1.2.12}$$

Пространство таких решений может быть отождествлено с пространством вспомогательных операторов L_{k+1}^-. Заметим, что из (1.2.11) следует, что при условии (1.2.12), оператор $L = L_{k+1}^-$ становится строго нижнетреугольным, т.е. вида (1.2.3).

Ограничение потока иерархии, связанного со временем $t_m^\pm$, на пространство стационарных решений по времени t_{k+1}^- может быть рассмотрено как конечномерная система с представлением Лакса

$$\partial_{t_m^\pm} L = [L_m^\pm, L] \tag{1.2.13}$$

Для $\xi = t_1^+$ вспомогательный оператор имеет вид $L_1^- = v_i + T^{-1}$ с $v_i = \partial_\xi \varphi_i$ и (1.2.13) эквивалентно системе уравнений на $a_i^{(1)} = e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}}$ и $a_i^{(j)}, j = 2\ldots,k$:

$$\begin{cases} \partial_\xi a_i^{(j)} = a_{i-1}^{(j-1)} - a_i^{(j-1)} + a_i^{(j)}(v_i - v_{i-j}),\ j = 2,\ldots,k \\ 0 = a_{i-1}^{(k)} - a_i^{(k)} + (v_i - v_{i-k-1}),\ \ v_i = \partial_\xi \varphi_i. \end{cases} \tag{1.2.14}$$

Аналогично для $\eta = t_1^+$ получаем систему

$$\partial_\eta a_i^{(j)} = c_i a_{i+1}^{(j+1)} - c_{i-j-1} a_i^{(j+1)}, j = 1,\ldots,k \tag{1.2.15}$$

$$\tag{1.2.16}$$

где $a_i^{(1)} = e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}}$, $c_i = e^{\varphi_i - \varphi_{i+1}}$.

Главной целью данной работы является построение бигамильтоновой теории систем (1.2.14) и (1.2.15). Мы покажем, что пространство строго нижнетреугольных разностных операторов L допускает две различные структуры пуассонового многообразия, и определим соответствующие гамильтонианы.

Для случая $k = 1$ системы (1.2.14) и (1.2.15) имеют наиболее простой и интересный вид:

$$\partial_\xi \varphi_{i-1} - \partial_\xi \varphi_{i+1} = e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}} - e^{\varphi_{i+1} - \varphi_i} \tag{1.2.17}$$

$$\partial_\eta \varphi_i - \partial_\eta \varphi_{i-1} = e^{\varphi_{i-1} - \varphi_{i+1}} - e^{\varphi_{i-2} - \varphi_i} \tag{1.2.18}$$

A posteriori, в этих случаях один из наших главных результатов может быть легко проверен. А именно, легко проверить, что системы (1.2.17) и (1.2.18) являются гамильтоновыми по отношению к форме $\omega = \sum_{i=1}^n d\varphi_i \wedge d\varphi_{i+1}, \varphi_i = \varphi_{i+n}$, с соответствующими гамильтонианами

$$H^- = \sum_{i=1}^n e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}},\ \ H^+ = \sum_{i=1}^n e^{\varphi_{i-2} - \varphi_i}, \varphi_i = \varphi_{i+n} \tag{1.2.19}$$

Но даже в этом простейшем случае, вторая гамильтонова структура уравнений (1.2.17) и (1.2.18) далеко не так очевидна. В заключительном параграфе работы мы доказываем, что при (взаимно-однозначной для нечетных n) замене переменных $e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}} = x_i - x_{i-2} + e_1$ уравнения (1.2.17) переходят в гамильтоновы уравнения по отношению к форме $\widetilde{\omega} = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{i-1}, x_i = x_{i+n}$, с гамильтонианом

$$\widetilde{H}^- = \sum_{i=1}^n x_i^2 (x_{i-1} - x_{i+1})$$

1.2.2 Необходимые сведения

В этом разделе мы представим необходимые сведения из спектральной теории строго нижнетреугольных операторов и конструкцию алгебро-геометрических решений иерархии двумеризованной цепочки Тода.

1.2.2.1 Спектральная теория нижнетреугольных разностных операторов.

Центральное место в спектральной теории разностных операторов занимает понятие спектральной кривой, ассоциированной с n-периодическим разностным оператором L. По определению, точки спектральной кривой параметризуют блоховские решения уравнения

$$L\psi = E\psi, \tag{1.2.20}$$

т.е. решения уравнения (1.2.20), являющиеся собственными функциями оператора монодромии

$$T^{-n}\psi = w\psi. \tag{1.2.21}$$

Обозначим через $\mathcal{L}(E)$ линейное пространство решений уравнения (1.2.20). Его размерность равна порядку оператора L. Оператор монодромии сохраняет $\mathcal{L}(E)$ и, следовательно, определяет конечномерный оператор $T^{-n}(E)$ на нем. Пары комплексных чисел (w,E), для которых существует общее решение уравнений (1.2.20) и (1.2.21) определяются характеристическим уравнением:

$$R(w,E) = \det\big(w \cdot 1 - T^{-n}(E)\big) = 0$$

Полином $R(w,E)$ может быть получен другим способом, а именно, как характеристический полином конечномерного оператора $L(w)$, который является ограничением L на пространство $\mathcal{T}(w) := \{\psi \mid w\psi_{i+n} = \psi_i\}$:

$$R(w,E) = \det\big(E \cdot 1 - L(w)\big) = 0, \;\; L(w) := L\big|_{\mathcal{T}(w)} \tag{1.2.22}$$

Следует подчеркнуть, что семейства алгебраических кривых, являющихся спектральными кривыми, зависят от выбора семейства разностных операторов. В случае строго нижне-треугольных разностных операторов L в работе [77] показано, что соответствующий характеристический полином имеет вид

$$R(w,E) = w^{k+1} - E^n + \sum_{i>0, j\geqslant 0,\; ni+(k+1)j<n(k+1)} r_{ij} w^i E^j = 0, \tag{1.2.23}$$

где $r_{1,0} = \prod_{i=1}^n a_i^1 \neq 0$ (в силу предположения (1.2.4)).

Если n и $k+1$ взаимно просты, тогда афинная кривая, определенная уравнением (1.2.23) в $\mathbb{C}^2$, компактифицируется одной точкой p_-. В этой точке функции $w(p)$ и $E(p)$, естественным образом определенные на Γ, имеют полюс порядка n и $k+1$ соответственно. Другими словами, если выбрать локальную координату z в окрестности p_-, такую что $w = z^{-n}$, то разложение в ряд лорана функции E имеет вид:

$$E = z^{-k-1}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} e_s z^s\right), \quad w = z^{-n}. \tag{1.2.24}$$

В [77] показано, что особая форма уравнения (1.2.23) позволяет выделить другую отмеченную точку p_+ на Γ, являющуюся прообразом $E = 0$ с $w = 0$. В этой точке у $E = E(p)$ имеется простой ноль, а у функции $w = w(p)$ ноль порядка n

$$w = \frac{1}{r_{1,0}} E^n \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} w_s E^s\right) \tag{1.2.25}$$

Аналитические свойства блоховского решения в окрестности выделенных точек описываются следующими двумя утверждениями:

Лемма 1. ([77]) Для любого оператор L вида (1.2.3), порядок и период которого взаимно-просты, существует единственный формальный ряд $E(z)$ вида (1.2.24), такой, что уравнение $L\psi = E\psi$ имеет единственное формальное решение вида

$$\psi_i(z) = z^i \big(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s^-(i) z^s\big). \tag{1.2.26}$$

с периодическими коэффициентами $\xi_s^-(i) = \xi_s^-(i+n)$, нормированными условием $\xi_s^-(0) = 0$.

Для дальнейшего использования изложим кратко идею доказательства.

Доказательство 1. Подстановка (1.2.26) и (1.2.24) в уравнение $L\psi = E\psi$ приводит к системе разностных уравнений на неизвестные константы e_s и неизвестные функции $\xi_s^-(i)$ дискретной переменной i. Первое из этих уравнений имеет вид

$$e_1 + \xi_1^-(i) - \xi_1^-(i-k-1) = a_i^{(k)}. \tag{1.2.27}$$

Условие периодичности для функций ξ_1^- единственным образом определяет

$$e_1 = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)} \tag{1.2.28}$$

и преобразует разностное уравнения (1.2.27) порядка $k+1$ к уравнению порядка 1:

$$me_s + \xi_1^-(i) - \xi_1^-(i-1) = \sum_{j=0}^{m-1} a^{(k)}_{i-j(k+1)}\,, \qquad (1.2.29)$$

где m целое число $1 \leqslant m < n$, такое что $m(k+1) = 1\,(\mathrm{mod}\ n)$. Уравнение (1.2.29) и начальное условие $\xi_1^-(0) = 0$ единственным образом определяют $\xi_1^-(i)$.

Для произвольного s уравнение, определяющее e_s и ξ_s^- имеет вид:

$$e_s + \xi_s^-(i) - \xi_s^-(i-k-1) = Q_s(e_1, \dots, e_{s-1}; \xi_1, \dots, \xi_{s-1}, a_i^{(j)}) \qquad (1.2.30)$$

где Q_s функция, линейная по $e_{s'}, \xi_{s'}$, $s' < s$, и полиномиальная по $a_i^{(j)}$. Аргументы, использованные ранее, позволяют сделать вывод, что оно имеет единственное периодическое решение.

Лемма 2. ([77]) Уравнение $L\psi = E\psi$ имеет единственное формальное решение вида

$$\psi_i(E) = e^{\varphi_i} E^{-i}\Big(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s^+(i) E^s\Big),\ a_i^{(1)} = e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}}, \qquad (1.2.31)$$

с условием нормировки $\xi_s^+(0) = 0$.

Доказательство 2. Подстановка (1.2.31) в (1.2.20) определяет систему неоднородных разностных уравнений первого порядка на неизвестные коэффициенты ξ_s^+. Для $s = 1$

$$\xi_1^+(i) - \xi_1^+(i-1) = e^{\varphi_{i-2} - \varphi_i} a_i^{(2)} \qquad (1.2.32)$$

Для произвольного s уравнения принимают аналогичный вид

$$\xi_s^+(i) - \xi_s^+(i-1) = e^{-\varphi_i} q_s(\xi_1^+, \dots, \xi_{s-1}^+, a_i^{(j)})\,, \qquad (1.2.33)$$

которые вместе с начальными условиями рекуррентно определяют $\xi_s^+(i)$ для всех i.

Из единственности формального решения (1.2.31) имеем

Следствие 1. Формальный ряд (1.2.31) является блоховским решением, т.е. удовлетворяет (1.2.21) с

$$w(E) = \psi_{-n}(E) = r_{1,0}^{-1} E^n \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} w_s E^s\right) \qquad (1.2.34)$$

Из утверждения леммы 1 следует, что компоненты $\psi_i(p), p := (w,E) \in \Gamma$, блоховского решения $\psi(p)$, рассматриваемые как функции на спектральной кривой, имеют нуль порядка i в отмеченной точке p_-. Из утверждения Леммы 2 следует, что $\psi_i(p)$ имеет полюс порядка i в отмеченной точке p_+. Стандартным образом можно доказать, что в этом случае ψ_i является мероморфной функцией на Γ, имеющей вне отмеченных $p_\pm$ (для операторов общего положения) g полюсов $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$, которые не зависят от i (детали см. в [72]). Данные аналитические свойства являются определяющими для дискретной функции Бейкера-Ахиезера, введенной в [73].

Отождествление блоховских функций периодических разностных операторов с дискретной функций Бейкера-Ахиезера является ключевым для установления связи между спектральной теорией нижнетреугольных операторов, теорией коммутирующих разностных операторов (см. [75]) и теорией алгебро-геометрических решений иерархии двумеризованной цепочи Тода.

Соответствие

$$L \longmapsto \{\Gamma, D = \gamma_1 + \cdots + \gamma_g\} \tag{1.2.35}$$

где Γ является спектральной кривой оператора L, D - дивизор полюсов блоховского решения ψ, обычно называется прямым спектральным преобразованием.

Это взаимно-однозначное соответствие между открытыми всюду плотными подмножествами пространства операторов и пространства алгебро-геометрических спектральных данных. Конструкция обратного спектрального преобразования есть частный случай общей конструкции алгебро-геометрических решений иерархии двумеризованной цепочки Тода.

1.2.2.2 Алгебро-геометрические решения иерархии двумеризованной цепочки Тода

Пусть Γ - гладкая алгебраическая кривая рода g с фиксированными локальными координатами $z_\pm$ в окрестностях двух отмеченных точек $p_\pm \in \Gamma$, $z_\pm(p_\pm) = 0$. Пусть $t = \{t_j^\pm,\, j = 1,2\ldots\}$ - набор комплексных параметров, из которых только конечное число ненулевые. Как показано в работе [74]:

Лемма 3. Для произвольного набора g точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ существует единственная мероморфная функция $\Psi_i(t,p)$, $p \in \Gamma$ такая, что : (i) вне отмеченны точек $p_\pm$ она имеет простые полюса в точках γ_s (если γ_s различны); (ii) в окрестностях отмеченных точек она имеет вид

$$\Psi_i(t,z_\pm) = z_\pm^{\mp i} e^{(\sum_m t_m^\pm z_\pm^{-m})} \left(\sum_{s=1}^{\infty} \xi_s^\pm(i,t)\ z_\pm^s \right),\ \ \xi_0^- = 1. \tag{1.2.36}$$

Функция Ψ_i является частным случаем более общего класса, так назваемых многоточечных функцией Бейкера-Ахиезера (см., например, в [82]).

Из единственности Ψ_i, следует:

Теорема 1. [74] Пусть $\Psi_i(t,p)$ - функция Бейкера-Ахиезера, соответствующая произвольному набору данных $\{\Gamma,p_\pm,z_\pm;\gamma_1,\ldots,\gamma_g\}$, тогда существует единственный оператор $L_m^\pm$ вида (1.2.9,1.2.10) с $\varphi_i(t) := \ln \xi_0^+(t)$ такой, что выполняются уравнения (1.2.8).

Замечание 3. По определению, функция Бейкера-Ахиезера зависит от выбора локальных координат $z_\pm$ в окрестностях отмеченных точек $p_\pm$. Выбор локальной координаты соответствует треугольному преобразованию времен $t_m^\pm$ (сравните с замечанием во Введении).

Алгебро-геометричсекие решения двумеризованной цепочки Тода могут быть явно выражены через тэта-функции Римана. Выбор базис циклов a_i,b_i, $i = 1,\ldots,g$ на Γ с канонической матрицей периодов: $a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, a_i \circ b_j = \delta_{ij}$ позволяет определить:

(a) базис нормированных голоморфных дифференциалов ω_i, $\oint_{a_j} \omega_i = \delta_{ij}$;

(b) матрицу b-периодов, $B_{ij} = \oint_{b_j} \omega_i$, и соответствующую тэта-функцию Римана

$$\theta(z) = \theta(z|B) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} e^{2\pi i(m,z)+\pi i(Bm,m)},\ \ z = z_1,\ldots,z_g;$$

(c) многозначное отображение Абеля $A : \Gamma \to \mathbb{C}^g$, в котором координаты вектора $A(p)$ равны $A_k(p) = \int^p \omega_k$

(d) нормированный Абелев дифференциал третьего типа $d\Omega_0$, $\oint_{a_i} d\Omega_0 = 0$, имеющий простые полюса с вычетами ± 1 в точках $p_\pm$, и нормированный абелев дифференциал второго рода $d\Omega_{m,\pm}$, $\oint_{a_i} d\Omega_{m,\pm} = 0$ с полюсами в $p_\pm$ вида $d\Omega_{m,\pm} = d(z_\pm^{-m} + O(z_\pm))$.

Лемма 4. [74] Функция Бейкера-Ахиезера задается формулой

$$\Psi_i(t,p) = \frac{\theta(A(p) + iU_0 + \sum U_{m,\pm}t_m^\pm + Z)\,\theta(A(p_-) + Z)}{\theta(A(p_-) + iU_0 + \sum U_{m,\pm}t_m^\pm + Z)\,\theta(A(p) + Z)}\, e^{i\Omega_0(p)+\sum t_m^\pm \Omega_{m,\pm}(p)} \tag{1.2.37}$$

Здесь суммирование идет по всем парам индексов $(m,\pm)$ и:

a) $\Omega_0(p)$ и $\Omega_{m,\pm}(p)$ абелевы интегралы, $\Omega_0(p) = \int^p d\Omega_0$, $\Omega_{m,\pm}(p) = \int^p d\Omega_{m,\pm}$, соответствующие дифференциалам, введенным выше и нормированным так, что в окрестности p_- они имеют вид

$$\Omega_0(z_-) = \ln z_- + O(z_-),\ \Omega_{m,-}(z_-) = z_-^{-m} + O(z_-),\ \Omega_{m,+}(z_-) = O(z_-);$$

b) $2\pi i U_0$, $2\pi i U_{\alpha,j}$ вектора b-периодов,т.е. вектора с координатами

$$U_0^k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{b_k} d\Omega_0,\ U_{m,\pm}^k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{b_k} d\Omega_{m,\pm}; \tag{1.2.38}$$

c)Z -произвольный вектор, соответствующий дивизору полюсов функции Б.-А.

Заметим, что из билинейных соотношений Римана следует, что $U_0 = A(p_-) - A(p_+)$, а из почленного сравнения коэффициентов при одинаковых степенях в левой и правой частях (1.2.37) можно получить, что

Теорема 2. [74] Алгебро-геометрическое решение двумеризованной цепочки Тода дается формулой

$$\varphi_i(t) = \ln \frac{\theta((i+1)U_0 + \sum U_{m,\pm} t_m^{\pm} + \widetilde{Z})}{\theta(iU_0 + \sum U_{m,\pm} t_m^{\pm} + \widetilde{Z})} + ic_0 + \sum c_{m,\pm} t_m^{\pm} \tag{1.2.39}$$

где $\tilde{Z} = Z + A(p_+)$ произвольный вектор, вектора U_0 и $U_{m,\pm}$ определены в (1.2.38), а константы c_0 и $c_{m,\pm}$ являются старшими членами в разложении абелевых интегралов в окрестности p_-:

$$\Omega_0(z_+) = -\ln z_+ + c_0 + O(z_+), \tag{1.2.40}$$

$$\Omega_{m,+}(z_+) = z_+^{-m} + c_{m,+} + O(z_+),\ \Omega_{m,-}(z_+) = c_{m,-} + O(z_+)$$

Из (1.2.39) легко видеть, что алгебро-геометрическое решение в общем случае является квазипериодической функцией всех переменных, включая и переменную i. Оно n-периодично по дискретной переменной i, если вектор $nU_0 = n(A(p_+) - A(p_-))$ является вектором решетки, определяющей Якобиан кривой Г. Последнее эквивалентно следующему:

Лемма 5. Пусть Г гладкая алгебраическая кривая, на которой существует мероморфная функция w с единственным нулем в некоторой точке p_- и полюсом в другой точке p_+ порядка n. Тогда функция Б.-А., соответствующая $\Gamma, p_\pm$ и произвольному дивизору γ_s, удовлетворяет уравнению (1.2.21), и, как следствие, соответствующее решение иерархии двумеризованной цепочки Тода n-периодично.

Для доказательства данного утверждения достаточно проверить, что функции Ψ_{i-n} и $w\Psi_n$ имеют одни и те же аналитические свойства, м, следовательно, совпадают.

1.2.2.3 Двойственная функция Бейкера-Ахиезера

Для дальнейшего, напомним важное понятие двойственной функции Б.-А. (подробное обсуждение понятия двойственных функций можно найти в [82]).

Для неспециального дивизора $D=\gamma_1+\cdots+\gamma_g$ степени g на гладкой алгебраической кривой Γ рода g с двумя отмеченными точками можно определить двойственный эффективный дивизор $D^+=\gamma_1^+ +\cdots+\gamma_g^+$ степени g следующим образом: для заданного D существует единственный мероморфный дифференциал $d\Omega$ с простыми полюсами с вычетами ± 1 в отмеченных точках, голоморфный всюду кроме этих точек, и нулями в точках γ_s, $d\Omega(\gamma_s)=0$. Дивизор нулей $d\Omega$ имеет степень $2g$. Следовательно, помимо γ_s дифференциал $d\Omega$ имеет нули в g других точках γ_s^+, т.е. $d\Omega(\gamma_s^+)=0$. Другими словами, дивизор D^+ определен уравнением $D+D^+=\mathcal{K}+p_+ +p_- \in J(\Gamma)$, где $\mathcal{K}$ канонический класс, т.е. класс эквивалентности дтвтзора нулей голоморфного дифференциала на Γ.

Функция $\Psi_i^+(t,p)$ двойственная функции Б.-А. $\Psi_i(t,p)$, отвечающей дивизору D, определяется следующими аналитичсекими свойствами: (i) вне отмеченных точек $p_\pm$ она мероморфна и имеет простые полюса в γ_s^+ (если γ_s^+ различны); (ii) в окрестности отмеченных точек она имеет вид

$$\Psi_i^+(t,z_\pm)=z_\pm^{\mp i}e^{-(\sum_m t_m^\pm z_\pm^{-m})}\left(\sum_{s=1}^{\infty}\chi_s^\pm(i,t)\ z_\pm^s\right),\ \ \chi_0^-=1. \tag{1.2.41}$$

Из этого определения следует, что дифференциал $\Psi_i^+\Psi_j d\Omega$ является мероморфным дифференциалом на Γ с возможными полюсами только в отмеченных точках $p_\pm$. Кроме того, для $i>j$ $(i<j)$ он голоморфен в p_+ (p_-). Так как сумма вычетов мероморфного дифференциала равняется нулю, то мы имеем равенство

$$\mathrm{res}_{p_\pm}\Psi_i^+\Psi_j\, d\Omega=\pm\delta_{i,j} \tag{1.2.42}$$

из которого следует, что Ψ^+ удовлетворяет уравнению

$$(\Psi^+L)_i\equiv \Psi_{i+k+1}^+ + a_{i+k}^{(k)}\Psi_k^+ +\dots a_{i+1}^{(1)}\Psi_{i+1}^+ = E\psi_i\,, \tag{1.2.43}$$

сопряженному к (1.2.20), и уравнению

$$-\partial_{t_m^\pm}\Psi^+=\Psi^+L_m^\pm \tag{1.2.44}$$

Тэта-функциональная формула (1.2.39) для двойственной функции Б.-А. имеет вид :

$$\psi_i^+(t,p)=\frac{\theta(A(p)-iU_0-\sum U_{m,\pm}t_m^\pm+Z^+)\,\theta(A(p_-)+Z^+)}{\theta(A(p_-)-iU_0-\sum U_{m,\pm}t_m^\pm+Z^+)\,\theta(A(p)+Z^+)}\times \tag{1.2.45}$$
$$\times e^{-i\Omega_0(p)-\sum t_m^\pm\Omega_{m,\pm}(p)}$$

где $Z+Z^+=\mathcal{K}+A(p_+)+A(p_-)$. Из аналитических свойств Ψ^+ легко следует, что:

Лемма 6. В предположения леммы 5 двойственная функция Б.-А. удовлетворяет уравнению

$$\Psi_i^+ = w\Psi_{i-n}^+ \tag{1.2.46}$$

Замечание 4. Как уже отмечалось выше, построение обратного спектрального преобразования, может рассматриваться как частный случай построение алгебро-геометрических решений иерархии двумеризованной цепочки Тода. Действительно, пусть Γ кривая, определенная уравнением вида (1.2.23), тогда из простого сравнения аналитических свойств следует, что блоховская функция оператора L совпадает с функции Б.-А., зависящей от бесконечного набора переменных, когда все непрерывные времена равны нулю:

$$\psi_i = \Psi_i|_{t_k^\pm=0}$$

1.2.3 Гамильтонова теория редуцированных систем

Системы уравнений (1.2.14) и (1.2.15) были определены как специальные редукции иерархии двумеризованной цепочки Тода. Следовательно, решения соответствующих уравнений даются формулой (1.2.37), в которой тэта-функция Римана соответствует произвольной кривой, определенной уравнением (1.2.23).

В этом разделе мы построим гамильтонову теорию системы, полученной при помощи редукции, следуя общей схеме, предложенной в работах [79, 80]. Согласно этой схеме, на пространстве операторов L, отождествленном с фазовым пространством системы, можно определить семейство два-форм формулой

$$\omega^{(i)} = -\frac{1}{2}\sum_\alpha \mathrm{res}_{p_\alpha} E^{-i}\langle\psi^+(w)\,\delta L \wedge \delta\psi(w)\rangle\, d\Omega \tag{1.2.47}$$

где для любой функции F на пространстве операторов $\delta F(L)$ обозначает ее вариацию (функция Б.-А. с фиксированным значением w и нормировкой является такой функцией), и сумма берется по таким точкам p_α на соответствующей спектральной кривой, где выражение в правой части a-priori имеет полюс: а именно, в отмеченных точках $p_\pm$, где функция Б.-А. и ей двойственная имеют полюса, и для $i > 0$, в нулях p_ℓ, $\ell = 1, \ldots, k$, функции $E = E(p)$, где $w = w(p)$ не зануляется, т.е. $E(p_\ell) = 0$, при $w(p_\ell) \neq 0$.

1.2.3.1 Дифференциал $d\Omega$

Наша первая цель состоит в том, чтобы получить замкнутое выражение для дифференциала $d\Omega$, определенного выше своими аналитическими свойствами, в терминах блоховских собственных функций ψ и двойственных функций ψ^+.

Предположим, что коэффициенты оператора n-периодичны. Следуя способу, предложенному в [76], рассмотрим дифференциал $d\psi$ по отношению к спектральному параметру. Он удовлетворяет неоднородному линейному уравнению

$$(L - E)\, d\psi = dE\psi, \tag{1.2.48}$$

являющемуся дифференциалом уравнения (1.2.20). Дифференцируя (1.2.21), получаем, что $d\psi$ удовлетворяет следующему соотношению монодромии

$$w d\psi_i + dw\psi_i = d\psi_{i-n} \tag{1.2.49}$$

Обозначим среднее функции f_i на интервале $l + 1 \leqslant i \leqslant l + n$ через $\langle f\rangle_l := \frac{1}{n}\sum_{i=l+1}^{l+n} f_i$, а в случае n-периодических функций, когда это среднее не зависит от l, будем для краткости обозначать его через $\langle f\rangle$. Из (1.2.48) следует, что

$$E\langle\psi^+\, d\psi\rangle_l + dE\,\langle\psi^+\psi\rangle = \langle\psi^+(Ld\psi)\rangle_l = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{i=l+1}^{l+n} a_i^{(j)}\psi_i^+ d\psi_{i-j} \tag{1.2.50}$$

Из уравнения (1.2.43) получаем

$$E\langle\psi^+\, d\psi\rangle_l = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{i=l+1}^{l+n} a_{i+j}^{(j)}\psi_{i+j}^+ d\psi_i = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{i=l+1+j}^{l+n+j} a_i^{(j)}\psi_i^+ d\psi_{i-j} \tag{1.2.51}$$

Подставляя (1.2.51) из (1.2.50) и используя (1.2.49), имеем

$$dE\,\langle\psi^+\psi\rangle = \frac{dw}{nw}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{i=l+1}^{l+j} a_i^{(j)}\psi_i^+\psi_{i-j} \tag{1.2.52}$$

Заметим, что левая часть (1.2.52) не зависит от l. Следовательно, правая часть также независима от l. Усредняя по l, получаем уравнение

$$dE\,\langle\psi^+\psi\rangle = \frac{dw}{nw}\langle\psi^+(L^{(1)}\psi)\rangle \tag{1.2.53}$$

где

$$L^{(1)} := \sum_{j=1}^{k+1} j a_i^{(j)} T^{-j} \tag{1.2.54}$$

есть разностный аналог первого потомка дифференциального оператора, введенного в [76].

Из (1.2.53) следует, что нули dw совпадают с нулями мероморфной функции $\langle\psi^+\psi\rangle$, а нули dE с нулями $\langle\psi^+(L^{(1)}\psi)\rangle$. Следовательно, Лемма 7. Дифференциал

$$d\Omega := \frac{dw}{nw\langle\psi^+\psi\rangle} = \frac{dE}{\langle\psi^+(L^{(1)}\psi)\rangle}. \tag{1.2.55}$$

голоморфен вне отмеченных точек $p_\pm$, имеет нули в полюсах ψ и ψ^+, а в точках $p_\pm$ имеет простые полюса с вычетами ± 1.

Утверждение леммы позволяет рассматривать равенство (1.2.55) как явное формулу для дифференциала $d\Omega$, введенного выше при определении двойственной функции Б.-А. с помощью описания его аналитических свойств.

Примеры Для $k = 1$ имеем:

$$d\Omega = \frac{dE}{\langle a_i^{(1)}\psi_i^+\psi_{i-1}^+ + 2\psi_i^+\psi_{i-2}\rangle} = \frac{dw}{nw\langle\psi^+\psi\rangle} \tag{1.2.56}$$

а для $k = 2$

$$d\Omega = \frac{dE}{\langle a_i^{(1)}\psi_i^+\psi_{i-1}^+ + 2a_i^{(2)}\psi_i^+\psi_{i-2} + 3\psi_i^+\psi_{i-3}\rangle} = \frac{dw}{nw\langle\psi^+\psi\rangle} \tag{1.2.57}$$

1.2.3.2 Симплектические листы и координаты Дарбу

Необходимо отметить, что форма $\omega^{(i)}$ не замкнута и вырождена на пространстве всех операторов L. Она становится замкнутой после ограничения на некоторые подмногообразия. Как мы увидим ниже, только формы $\omega^{(0)}$ и $\omega^{(1)}$ невырождены на соответствующих подмногообразиях. Тем самым на пространстве операторов L существуют две структуры пуассонового многообразия. Существование таких структур отражает бигамильтоновую природу интегрируемых систем.

В рамках подхода работ [79, 80], условия, определяющие симплектические листы в каждой из пуассоновых сруктур, эквивалентны тому, что форма $\omega^{(i)}$ не зависит от выбора нормировки блоховской собственной функции ψ. Изменение нормировки эквивалентно преобразованию $\psi_i \to \psi_i h$, $\psi_i^+ \to \psi_i^+ h^{-1}$, где $h = h(w)$ скалярная функция. Под действием такого преобразования дифференциал в правой части (1.2.47) преобразуется в

$$E^{-i}\langle\psi^+(w)\,\delta L \wedge \delta\psi(w)\rangle\, d\Omega + E^{-i}\langle\psi^+(w)\,\delta L\psi(w)\rangle \wedge \delta\ln h\, d\Omega \tag{1.2.58}$$

Следовательно, форма $\omega^{(i)}$ не зависит от нормировки, когдапоследний член в (1.2.58) голоморфен в окрестности точек p_α. Из уравнения

$$(L - E)\delta\psi(w) = -(\delta L - \delta E(w))\psi \tag{1.2.59}$$

и из определения сопряженного оператора следует

$$\langle\psi^+((\delta L - \delta E)\psi)\rangle = \langle(\psi^+(E-L))\delta\psi\rangle = 0 \tag{1.2.60}$$

Используя (1.2.55), получаем утверждение:

Лемма 8. Ограничение формы $\omega^{(i)}$, заданное формулой (1.2.47), на подмногообразие пространства операторов, на котором дифференциал $E^{-i}\delta E(w)\,d\ln w$ голоморфен в окрестности точек p_α, не зависит от нормировки.

Пример. Для $i = 0$ сумма в (1.2.47) берется по отмеченным точка $p_\pm$. В точке p_+ (где $w = 0$) функция E имеет ноль. Следовательно, форма $Ed\ln w$ имеет полюс только в p_-, а значит ее вычет в этой точке равен нулю. Из этого следует равенспво $e_{k+1} = 0$ для коэффициента ряда (1.2.24).

В окрестности p_-, где функция E имеет полюс порядка $(k+1)$, форма $\delta E(w)d\ln w$ имеет полюс порядка $(k+2)$ с нулевым вычетом. Следовательно, если для произвольного набора констант $c = (c_1,\ldots,c_k)$ определить Λ_0^c, как подмногообразие операторов L таких, что

$$\Lambda_0^c := \{L \in \Lambda_0^c|\, e_s(L) = c_s, s = 1,\ldots k\} \tag{1.2.61}$$

где $e_s = e_s(L)$ коэффициенты разложения (1.2.24), то будет верно следующее утверждение

Следствие 2. Форма $\omega^{(0)}$, ограниченная на подмногообразие Λ_0^c, не зависит от нормировки.

Пример. Форма $E^{-1}\delta E(w)d\ln w$ голоморфна в окрестности отмеченной точки p_-. Поскольку сумма ее вычетов равняется нулю, она голоморфна в точке p_+ , если она голоморфна в точках p_ℓ, $\ell = 1\ldots,k$. Используя цепное правило, получаем, что вариация $E(w)$ при фиксированном w связана с вариацией $w(E)$ при фиксированном E формулой $\delta E(w)\,dw + \delta w(E)\,dE = 0$. Следовательно, $\delta\ln E(w)\,d\ln w$ голоморфен в p_ℓ (прообразы $E = 0$, где $w \neq 0$), если выполняется уравнение $\delta w(p_\ell) = 0$. Последнее имеет место на подмногообразии

$$\Lambda_1^c := \{L \in \Lambda_1^c|\, r_{i,0}(L) = c_i, 1 = 1,\ldots k\} \tag{1.2.62}$$

где $c = (c_1,\ldots,c_k)$ константы, $r_{i,0}(L) = r_{i,0}$ коэффициенты многочлена $\det L(w) = w^{k+1} + \sum_{i=1}^k r_{i,0}w^i$.

Следствие 3. Форма $\omega^{(1)}$, ограниченная на подмногообразие Λ_1^c, не зависит от нормировки.

Замечание 5. Для $i > 1$ подмногообразие Λ_i^c, на котором ограничение $\omega^{(i)}$ не зависит от нормировки, описывается системой
$i(k+1)-1$ уравнений:

$$\Lambda_i^c := \{L \in \Lambda_i^c | \, w_{\ell,s} = c_{\ell,s}, s = 1, \ldots, i; \; w_s = c_s, s = 2, \ldots, i\} \tag{1.2.63}$$

где $w_{\ell,s}$ есть коэффициенты разложения

$$w = \sum_{s=0}^{\infty} w_{\ell,s} E^s \tag{1.2.64}$$

функции w в прообразах p_ℓ на Γ точки $E = 0$, в котором $w(p_\ell) \neq 0$; w_s это коэффициенты разложения (1.2.34) функции w в p_+ и $c_{i,s}, c_s$ константы. Следовательно, Λ_i^c имеет размерность $(n-1)k-i+1$. Напомним, что размерность семейства кривых Γ, заданных уравнениями вида (1.2.23), равна $\frac{k(n+1)}{2}$ (число коэффициентов r_{ij}). Для общих значений коэффициентов r_{ij} Γ гладкая кривая рода $g = \frac{k(n-1)}{2}$. Поэтому, соответствие (1.2.35), ограниченное на Λ_i^c, отождествляет последнее с тотальным пространством Якобиевых расслоений над пространством соответствующих спектральных кривых. Для $i > 1$ размерность слоя больше размерности базы. Следовательно, форма $\omega^{(i)}$, ограниченная на Λ_i^c вырождена для $i > 1$.

1.2.3.3 Координаты Дарбу

Для полноты изложим конструкцию координат Дарбу для ограничения $\widehat{\omega}^{(i)}$ формы $\omega^{(i)}$ на подмногообразие Λ_i^c, т.е.

$$\widehat{\omega}^{(i)} := \omega^{(i)}|_{\Lambda_i^c} \tag{1.2.65}$$

Теорема 3. Пусть γ_s полюса функции Б.-А. Тогда имеет место равенство

$$\widehat{\omega}^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{g} E^{-i}(\gamma_s) \delta E(\gamma_s) \wedge \delta \ln w(\gamma_s). \tag{1.2.66}$$

Замечание 6. Поясним смысл правой части этой формулы. По определению, на каждой из спектральная кривых заданы мероморфные функции E и w. Значения $E(\gamma_s)$, $w(\gamma_s)$ этих функций в точках γ_s определяют набор функций на пространстве L-операторов. Внешнее произведение их дифференциалов есть два-форма на нашем фазовом пространстве.

Доказательство 3. Идея доказательство формулы (1.2.66) является весьма общей и не опирается на особый вид L. Мы будем следовать доказательству леммы 5.1 в работе [78] (также см. [81]).

Дифференциал, вычеты которого определяют $\omega^{(i)}$ по формуле (1.2.47), является мероморфным дифференциалом на спектральной кривой Γ. Поэтому, сумма его вычетов в точках p_α равняется со знаком минус сумме вычетов в оставшихся точках. У дифференциала имеются полюса двух типов. Первый из них это полюса γ_s функции ψ. В общем положении эти полюса простые. Заметим, что $\delta\psi$ имеет полюс второго порядка в γ_s. Принимая во внимание, что дифференциал $d\Omega$ равен нулю в γ_s, получаем

$$\mathrm{res}_{\gamma_s} E^{-i}\langle\psi^+\,\delta L\wedge\delta\psi\rangle\,d\Omega=\frac{E^{-i}\langle\psi^+\delta L\psi\rangle}{n\langle\psi^+\psi\rangle}(\gamma_s)\wedge\delta\ln w(\gamma_s)= \tag{1.2.67}$$

$$=\frac{1}{n}E^{-i}(\gamma_s)\delta E(\gamma_s)\wedge\delta\ln w(\gamma_s).$$

Последнее равенство следует из (1.2.60), представляющее собой не более чем стандартную формулу для вариации собственного значения оператора.

Вторым типом полюсов дифференциала в правой части (1.2.47) является множество нулей q_j дифференциала dw. Действительно, в окрестности q_j локальной координатой на спектральной кривой является $\sqrt{w-w(q_j)}$ (в общем положении, когда ноль простой). Вариацию ряда Тейлора для ψ по координате , получаем

$$\delta\psi=-\frac{d\psi}{dw}\delta w(q_j)+O(1). \tag{1.2.68}$$

Поэтому, $\delta\psi$ имеет простой полюс в q_j. Тем же способом получаем, что

$$\delta E=-\frac{dE}{dw}\delta w(q_j). \tag{1.2.69}$$

Из равенств (1.2.68) и (1.2.69) следует

$$\mathrm{res}\,_{q_j} E^{-i}\langle\psi^+\delta L\wedge\delta\psi\rangle\,d\Omega=\mathrm{res}_{q_j}\frac{E^{-i}\langle\psi^+\delta L d\psi\rangle}{n\langle\psi^+\psi\rangle}\wedge\frac{\delta E d\ln w}{dE} \tag{1.2.70}$$

Из кососимметричности внешнего произведения следует, что в (1.2.70) можно заменить δL на $(\delta L-\delta E)$. Тогда, используя тождества $\psi^*(\delta L-\delta E)=\delta\psi^*(E-L)$ и $(E-L)d\psi=-dE\psi$, получаем

$$\mathrm{res}_{q_j} E^{-i}\langle\psi^+\delta L\wedge\delta\psi\rangle d\Omega=-\mathrm{res}_{q_j}\frac{E^{-i}\langle\delta\psi^+\psi\rangle}{n\langle\psi^+\psi\rangle}\wedge\delta E d\ln w= \tag{1.2.71}$$

$$=\mathrm{res}_{q_j}\frac{E^{-i}\langle\psi^+\delta\psi\rangle}{n\langle\psi^+\psi\rangle}\wedge\delta E d\ln w\,,$$

где в последнем равенстве использовалось тождество $\langle\psi^+\psi\rangle(q_j) = 0$ (которое следует, как уже было замечено, из (1.2.53)). По определению, подмногообразия, на которых $\omega^{(i)}$ не зависит от нормировки (см. лемму 8), форма в правой части (1.2.71) не имеет полюсов в точках p_α. Кроме полюсов в q_i, она имеет полюса только в γ_s. Поэтому, после ограничения на такое подмногообразие, получаем равенство

$$\sum_j \mathrm{res}_{q_j} \frac{E^{-i}\langle\psi^+\delta\psi\rangle}{n\langle\psi^+\psi\rangle} \wedge \delta E d\ln w = -\sum_s \mathrm{res}_{\gamma_s} \frac{E^{-i}\langle\psi^+\delta\psi\rangle}{n\langle\psi^+\psi\rangle} \wedge \delta E d\ln w = \tag{1.2.72}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_s E^{-i}(\gamma_s)\delta E(\gamma_s) \wedge \delta \ln w(\gamma_s).$$

Равенство (1.2.66) является прямым следствием уравнений (1.2.67), (1.2.71), (1.2.72).

1.2.3.4 Гамильтонианы

Следующим шагом в построении гамильтоновой теории для систем, допускающих представление Лакса, является доказательство того, что подстановка векторного поля ∂_t, определенного уравнением Лакса, в форму $\omega^{(i)}$, ограниченную на подмногообразие, где она не зависит от нормировки, есть точная 1-форма, т.е. $\widehat{\omega}^{(i)}(\partial_t,X) = \delta H^{(i)}(X)$. Последнее равенство означает, что на подмногообразии, где форма $\widehat{\omega}^{(i)}$ невырождена, векторное поле ∂_t является гамильтоновым с Гамильтонианом H.

Ниже мы примени общую схему к уравнениям (1.2.14) и (1.2.15) и найдем соответствующие Гамильтонианы. Пусть ∂_t векторное поле, определенное уравнениями Лакса, тогда

$$\partial_t L = [M,L], \;\; \partial_t\psi = M\psi - \psi f \tag{1.2.73}$$

где f мероморфная функция на спектральной кривой .

Замечание 7. Появление члена с f в выражеии для $\partial_t\psi$ объясняется следующим фактом: в определении $\omega^{(i)}$ предполагается, что нормировка блоховской функции ψ не зависит от времени : $\psi_0 \equiv 1$. Если зависимость оператора L от t определяется уравнением Лакса, то временная зависимость дивизора полюсов $D(t)$ функции $\psi(t)$ становится линейной после преобразования Абеля. Последнее следует из соотношения

$$\psi_i(t,p) = \Psi_i(t,p)\Psi_0^{-1}(t,p) \tag{1.2.74}$$

где Ψ функция Б.-А., заданная формулой (1.2.37). Из уравнения (1.2.8) следует (1.2.73) с $f(t,p) = \partial_t \ln \Psi_0(t,p)$. Функция f имеет полюса в отмеченных точках $p_\pm$ и представляется в виде

$$f = \sum_{s=1}^{m_\pm} c_s^\pm z^{-s} + O(1) \tag{1.2.75}$$

где $c_s^\pm$ постоянные, которые фактически параметризуют коммутирующие потоки иерархии, а $m_\pm$ порядки оператора M.

Теорема 4. Векторное поле $\partial_{t_m^\pm}$, определенное уравнением Лакса (1.2.13), ограниченное на подмногообразие Λ_i^c, является гамильтоновым для $i = 0,1$ по отношении к формам $\widehat{\omega}^{(i)}$ с гамильтонианами

$$H_{t_m^-}^{(0)} = \mathrm{res}_{p_-} z^{-m} E(z)\, d\ln z = e_{m+k+1} \tag{1.2.76}$$

$$H_{t_m^-}^{(1)} = \mathrm{res}_{p_-} z^{-m} \ln E(z)\, d\ln z \tag{1.2.77}$$

где $E(z)$ ряд (1.2.24) с коэффициентами, определенными в Лемме 1, и

$$H_{t_m^+}^{(i)} = \frac{1}{n} \mathrm{res}_{p_+} E^{-m-i} \ln w(E) dE, \;\; i = 0,1 \tag{1.2.78}$$

и $w(E)$ определен в (1.2.34)

Доказательство 4. Подстановка (1.2.73) и (1.2.55) в (1.2.47) дает

$$\omega^{(i)}(\partial_t,\cdot) = -\frac{1}{2}\sum_{p_\alpha} \mathrm{res}_{p_\alpha} \left(\langle \psi^+ [M,L] \delta\psi \rangle - \langle \psi^+ \delta L (M\psi - \psi f) \rangle \right) \frac{d\ln w}{nE^i \langle \psi^+ \psi \rangle} \tag{1.2.79}$$

Используя уравнение $(L-E)\delta\psi = -(\delta L - \delta E)\psi$, получаем, что дифференциал в правой части (1.2.79) равен

$$-\frac{1}{2}\left(\langle \psi^+ (M\delta E + \delta L f)\psi \rangle - \langle \psi^+ (\delta L\, M + M\, \delta L)\psi \rangle \right) \frac{d\ln w}{nE^i \langle \psi^+ \psi \rangle} \tag{1.2.80}$$

Второй член имеет полюса только в точках p_α. Следовательно,сумма вычетов в этих точках равняется нулю. Первый член равен

$$-\frac{1}{2} \langle \psi^+ (2f + (M-f))\psi \rangle \delta E \frac{d\ln w}{nE^i \langle \psi^+ \psi \rangle} \tag{1.2.81}$$

Из определения f в (1.2.73) следует, что $\langle \psi^+ (M-f)\psi \rangle$ голоморфно в p_α. Поскольку ограничение $E^{-i}\delta E d\ln w$ на Λ_i^c голоморфно в отмеченных точках p_α, второй член в (1.2.81), ограниченный на Λ_i^c, не имеет вычетов в p_α. Напомним, что функция f имеет полюса только в точках $p_\pm$. Используя тождество $\delta E(w) d\ln w = -\delta \ln w(E) dE$ для вычета в p_+, получаем равенство

$$\widehat{\omega}^{(i)}(\partial_t,\cdot) = \frac{1}{n}\mathrm{res}_{p_+} f(E)\delta \ln w(E) E^{-i} dE - \frac{1}{n}\mathrm{res}_{p_-} f(w) E^{-i}(w)\delta E(w) d\ln w \qquad (1.2.82)$$

Напомним, что выбор базисных векторных полей $\partial_{t_m^\pm}$ иерархии зависит от выбора локальных координат в окрестностях отмеченных точек $p_\pm$. Как следует из доказательств леммы 1 и леммы 2, наиболее естественный выбор это $z = w^{-1/n}$ в p_- и $z = E$ в p_+. В этом случае функции $f_m^\pm$, соответствующие $t = t_m^\pm$ имеют полюс в $p_\pm$ вида $f_m^+ = E^{-m} + O(E)$ и $f_m^- = z^{-m} + O(z), z = w^{-1/n}$, соответственно. Тогда из (1.2.82) выводится, что $\widehat{\omega}^{(i)}(\partial_{t_m^\pm},\cdot) = \delta H^{(i)}_{t_m^\pm}$.

1.2.4 Специальные системы координат. Примеры

В начале этого раздела мы введем некоторые специальные системы координат на пространстве нижнетреугольных операторов, в которых формы $\omega^{(\ell)}, \ell = 1{,}2$, имеют локальные плотности. Под последним мы понимаем координаты $x_i^{(j)}$, в которых формы могут быть записаны как $\omega = \sum f_{i,i_1}^{(j,j_1)} \delta x_s^{(j)} \wedge \delta x_{i_1}^{(j_1)}$, где сумма взята по множеству всех индексов, т.ч. $|i - i_1| < d_1$ для некоторого d_1, не зависящего от периода n оператора. Кроме того предполагается, что коэффициенты $f_{i,i_1}^{(j,j_1)}$ являются функциями параметров $x_{i_2}^{(j_2)}$, таких, что $|i - i_2| < d_2$ для некоторого не зависящего от n числа d_2.

Замечание 8. Отметим, что в естественных координатах на пространстве нижнетреугольных операторов, которыми являются их коэффициенты $a_i^{(j)}$, формы не имеют локальных плотностей.

1.2.5 Форма $\omega^{(0)}$

Координаты, в которых форма $\omega^{(0)}$ имеет локальные плотности, мы отождествим с множеством первых k коэффициентов разложения (1.2.26) блоховского решения в отмеченной точке p_-. Формулы (1.2.27) и (1.2.30) для $s = 1, \dots k$ могут быть рассмотрены как определение отображения

$$\{\xi_s^-(i), e_s\} \longmapsto \{a_i^{(j)}\}, \qquad (1.2.83)$$

где функции $\xi_s^-(i)$ определены с точностью до общего сдвига $\xi_s^-(i) \to \xi_s^-(i) + c_i$. Этот сдвиг можно зафиксировать условием нормировки $\xi_s^-(0) = 0$.

Форма $\omega^{(0)}$ из определения (1.2.47) представляет собой среднее по i некоторого выражения, зависящего от $\xi_s^-(i - j), j = 0 \dots k$, и от первых $(k-1)$ коэффициентов разложения в p_- функции

$$\psi_i^* := \frac{\psi_i^+}{\langle \psi^+ \psi \rangle}, \tag{1.2.84}$$

где ψ^+ двойственная функция Б.-А. (1.2.41). Коэффициенты ψ_i^* могут быть найдены рекуррентно из формул

$$\mathrm{res}_{p_-} \psi_i^* \psi_{i-j} d \ln z = \delta_{0,j}, \tag{1.2.85}$$

которые следуют из (1.2.42) и (1.2.55). Выражения для этих коэффициентов в терминах ξ_s^- локальны. Следовательно, утверждение о том, что $\omega^{(0)}$ имеет локальные плотности в новых координатах, является очевидным следствием определения.

Пример $k = 1$. Естественные координаты на пространстве n периодических нижнетреугольных операторов порядка два $L = a_i T^{-1} + T^{-2}$ – это их коэффициенты a_i. Специальные координаты $x_i := \xi_1^-(i)$ определяются с точностью до общего сдвига и константы e_1. Выражение для естественных координат через новые дается формулой (1.2.27):

$$a_i = x_i - x_{i-2} + e_1 \tag{1.2.86}$$

Подстановкой разложения ψ и ψ^+ в (1.2.47) получается для $k = 1$ следующее выражение для ограничения $\omega^{(0)}$ на симплектический лист $e_1 = const$:

$$\widehat{\omega}^{(0)} = \frac{1}{2} \langle da_i \wedge dx_{i-1} \rangle = \langle dx_i \wedge dx_{i-1} \rangle, \tag{1.2.87}$$

где, как и ранее, $\langle \cdot \rangle$ среднее по периоду для выражения, стоящего в скобках.

Замечание 9. Ранее вариация на фазовом пространстве (пространстве параметров) была обозначени как δ для того, чтобы отличать ее от дифференциала d, который берется по отношению к спектральным параметрам. После взятия вычетов дифференциала здесь и ниже мы будем использовать только δ , т.е. $dx_i := \delta x_i$.

Согласно теореме 4, уравнения (1.2.17), ограниченные на симплектический лист $\langle a_i \rangle = \langle e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}} \rangle = e_1 = const$ Гамильтоновы по отношению к $\widehat{\omega}^{(0)}$, где Гамильтониан дается формулой $H_{t_1^-}^{(0)} := e_3$. Для того, чтобы найти это выражение явно в терминах новых координат , будем использовать уравнения (1.2.30). Для $s = 2, k = 1$ имеем

$$\xi_2^-(i) - \xi_2^-(i-2) + e_1 \xi_1(i)^- + e_2 = a_i \xi_1^-(i-1) \tag{1.2.88}$$

Из (1.2.86) следует

$$\xi_2^-(i) - \xi_2^-(i-2) + e_2 = x_i x_{i-1} - x_{i-1} x_{i-2} + e_1 (x_{i-1} - x_i). \tag{1.2.89}$$

Взяв среднее от уравнения (1.2.89), получаем $e_2 = 0$ (напомним, что в доказательстве леммы 8 было показано, что $e_{k+1} = 0$ для произвольного k). Для $s = 3$,$k = 1$ уравнение (1.2.30) имеет вид

$$\xi_3^-(i) - \xi_3^-(i-2) + e_1\xi_2^-(i) + e_3 = a_i\xi_2^-(i-1) = (x_i - x_{i-2} + e_1)\xi_2^-(i-1) \qquad (1.2.90)$$

Усреднив (1.2.90), получаем явное выражение для гамильтониана уравнения (1.2.17) в новых координатах:

$$H^{(0)}_{\partial_{t_1^-}} = e_3 = \langle (x_i - x_{i-2})\xi_2^-(i-1)\rangle = \langle x_i(\xi_2^-(i-1) - \xi_2^-(i+1)\rangle = \qquad (1.2.91)$$

$$= \langle x_i^2(x_{i-1} - x_{i+1})\rangle,$$

где в последнем уравнении было использовано (1.2.88).

Пример $k = 2$. Выражения коэффициентов нижнетреугольного оператора порядка 3 через новые координаты $x_i := \xi_1^-(i)$ и $y_i := \xi_2^-(i)$ даются формулами (1.2.27,1.2.30):

$$a_i^{(2)} = x_i - x_{i-3} + e_1 \qquad (1.2.92)$$

$$a_i^{(1)} = y_i - y_{i-3} + e_1x_i + e_2 - a_i^{(2)}x_{i-2} = \qquad (1.2.93)$$

$$y_i - y_{i-3} - (x_i - x_{i-3})x_{i-2} + e_1(x_i - x_{i-2}) + e_2$$

Подстановка разложения ψ и ψ^+ в (1.2.47) дает следующее выражение

$$\omega^{(0)} = \frac{1}{2}\langle\, da_i^{(1)} \wedge dx_{i-1} + da_i^{(2)} \wedge (\chi_1^-(i)\, dx_{i-2} + d\xi_2^-(i-2))\,\rangle \qquad (1.2.94)$$

где χ_1^- первый коэффициент разложения ψ^+ в отмеченной точке p_-. Из уравнение (1.2.85) с $j = 1$ следует, что $\chi_1^-(i) = -x_{i-1}$. После прямых вычислений получаем выражение для формы $\omega^{(0)}$, ограниченной на лист, вдоль которого e_1 и e_2 постоянны:

$$\widehat{\omega}^{(0)} = \langle\, dy_i \wedge (dx_{i-1} - dx_{i+2}) + d(x_{i-1}x_{i-2}) \wedge dx_i\,\rangle \qquad (1.2.95)$$

$$+e_1\langle dx_i \wedge dx_{i-1}\rangle$$

Уравнение (1.2.17) для $k = 2$, ограниченное на лист, где e_1 и e_2 постоянны, является гамильтоновым по отношению к форме (1.2.95) с гамильтонианом $H^{(0)}_{t_1^-} = e_4$. Прямые, но достаточно громоздкие вчисления приводят к следующему выражению для гамильтониана $H := e_4$:

$$H = \langle\, y_{i-1}(y_i - y_{i-3}) > + < x_ix_{i-1}x_{i-2}(x_{i-1} - x_i) > +e_1 < (x_i^2(x_{i-1} - x_{i+1})\rangle + \qquad (1.2.96)$$

$$+e_2\langle x_{i-1}(x_i - x_{i-1})\rangle + \langle y_i(x_{i+2}^2 - x_{i-1}^2 - x_{i+2}x_{i+1} + x_{i-2}x_{i-1}\rangle$$

1.2.5.1 Форма $\omega^{(1)}$

Выбор системы координат, что в которых $\omega^{(1)}$ имеет локальныю плотность, подсказывает само определение этой формы (1.2.47), которое содержит в себе значение ψ_i в отмеченных точках $p_\ell \in \Gamma$, являющихся прообразами $E = 0$, где $w(p_\ell) \neq 0$.

Пусть $\Phi = \{\phi_i^\ell\}$ есть $(k \times n)$-матрица ранга k, $i = 1, \ldots, n; \ell = 1 \ldots, k$. Две матрицы $\Phi \sim \Phi'$ эквивалентны, если $\Phi' = \Phi\lambda$, где $\lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Пространство классов эквивалентности $[\Phi] := (\Phi/\sim)$ можно представлять себе как множество (упорядоченных) наборов из k различных точек в $n-1$ мерном проективном пространстве, $[\phi^\ell] \in \mathbb{P}^{n-1}$.

Рассмотрим пространство пар $\{[\Phi], W\}$, где $W = \{w_1, \ldots, w_k\}$ множество ненулевых чисел, $w_\ell \neq 0$. Симметрическая группа S_k действует на пространстве таких пар перестановками строк матрицы Φ и координат вектора W. Определим отображение из соответствующего фактор-пространства в пространство n-периодических операторов L вида (1.2.3):

$$\{[\Phi], W\}/S_k \longmapsto L \tag{1.2.97}$$

Заметим, что если набор ненулевых чисел $W = \{w_1, \ldots, w_k\}$ фиксирован, то произвольная $(k \times n)$-матрицы Φ может быть расширена до единственной $(k \times \infty)$-матрицы $\phi_i^\ell, i \in \mathbb{Z}$ такой, что выполнено соотношение $\phi_{i-n}^\ell = w_\ell \phi_i^\ell$. Имея такое расширение, можно единственным образом определить L вида (1.2.3) такой, что для произвольного ℓ последовательность $\phi^\ell = \{\phi_i^\ell\}$ является решением уравнения

$$L\phi^\ell = 0 \ \Leftrightarrow \ \sum_{j=1}^{k} a_i^{(j)} \phi_{i-j}^\ell = -\phi_{i-k-1}^\ell \tag{1.2.98}$$

В самом деле, для фиксированного i уравнения (1.2.98) являются системой k неоднородных линейных уравнений на неизвестные коэффициенты L. Используя правило Крамера, получаем, что

$$a_i^{(j)} = -\frac{|\phi_{i-1}, \ldots, \phi_{i-j+1}, \phi_{i-k-1}, \phi_{i-j-1}, \ldots, \phi_{i-k}|}{|\phi_{i-1}, \ldots, \phi_{i-j+1}, \phi_{i-j} \ , \phi_{i-j-1}, \ldots, \phi_{i-k}|} \tag{1.2.99}$$

Здесь и ниже мы используем следующие обозначения: ϕ_i - k-мерный вектор с координатами $\phi_i := \{\phi_i^\ell\}$, и для произвольного множества $V_1, \ldots, V_k$ k-мерных векторов $|V_1, \ldots, V_k|$ обозначает определитель соответствующей матрицы ,т.е.

$$|V_1, \ldots, V_k| := \det\left(V_i^\ell\right).$$

Напомним, что ранее старший коэффициент $a_i^{(1)}$ оператора параметризовывался переменными φ_i , т.ч. $a_i^{(1)} = e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}}$. Уравнение (1.2.99) для $j = 1$ позволяет отождествить эти переменные с

$$e^{-\varphi_i} := (-1)^{ik} |\phi_{i-1}, \ldots, \ldots, \phi_{i-k}| \tag{1.2.100}$$

и представить уравнение (1.2.99) в виде

$$a_i^{(j)} = (-1)^{ik+1} e^{\varphi_i} |\phi_{i-1}, \ldots, \phi_{i-j+1}, \phi_{i-k-1}, \phi_{i-j-1}, \ldots, \phi_{i-k}| \tag{1.2.101}$$

Теорема 5. Отображение (1.2.97), определенное формулами (1.2.100, 1.2.101), является взаимно-однозначным соответствием между открытыми областями. При этом соответствии, уравнения (1.2.14) и (1.2.15), ограниченные на листы с зафиксированными w_ℓ , являются гамильтоновыми по отношению к форме

$$\widehat{\omega}^{(1)} = \frac{1}{2} \langle d\varphi_{i-1} \wedge d\varphi_i - (-1)^{(i-1)k} e^{\varphi_{i-1}} \sum_{j=1}^{k} da_i^{(j)} \wedge |\phi_{i-2}, \ldots, \phi_{i-k}, d\phi_{i-j}| \rangle \tag{1.2.102}$$

и с гамильтонианами

$$H^- = \langle a_i^{(k)} \rangle ; \quad H^+ = -\langle a_i^{(2)} e^{\varphi_{i-2} - \varphi_i} \rangle \tag{1.2.103}$$

соответственно.

Доказательство Правая часть (1.2.99) симметрична по отношению к перестановкам строк матриц в числителе и знаменателе. Следовательно, отображение (1.2.97) хорошо определено на области, где знаменатель не обращается в ноль. Обратное отображение определено отождествлением w_ℓ с ненулевыми корнями многочлена
$R(w,0) = \det L(w)$ из (1.2.22). Другими словами, w_ℓ представляет собой значение функции $w(p)$ на спектральной кривой Γ оператора L в одном из прообразов $E = 0$, i.e. $p_\ell : (w_\ell, 0) \in \Gamma$. Из этого отождествления следует, что ϕ_i есть ничто иное, как значение функции Б.-А. в p_ℓ, т.е. $\phi_i^\ell = \psi_i(p_\ell)$. Следовательно, первое утверждение теоремы доказано.

Напомним, что по определению $\omega^{(1)}$ равняется среднему по i суммы вычетов в $p_\pm$ и p_ℓ формы

$$-\frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{k} \delta a_i^{(j)} \wedge (\psi_i^* \delta \psi_{i-j})\, E^{-1} d \ln w \tag{1.2.104}$$

Функция Бейкера-Ахиезера ψ_i и ее двойственная ψ_i^+ имеет ноль и полюс порядка i в p_-, соответственно. Поскольку E в p_- имеет полюс порядка $k+1$, форма (1.2.104) голоморфна в p_-. Следовательно, у нее нет вычета в p_-. В p_+ функция E имеет простой ноль. Кроме того форма $E^{-1}d\ln w$ в p_+ имеет полюс порядка 2. Между тем в p_+ функции ψ_i^+ и ψ_i имеют ноль и полюс порядка i, соответственно. Следовательно, члены в сумме (1.2.104) с $j>1$ голоморфны в p_+. Из (1.2.31, 1.2.41) следует, что

$$-\frac{1}{2n}\mathrm{res}_{p_+}\delta a_i^{(1)}\wedge(\psi_i^*\delta\psi_{i-1})\,E^{-1}d\ln w=-\frac{1}{2}\delta(e^{\varphi_i-\varphi_{i-1}})\wedge e^{-\varphi_i}\delta(e^{\varphi_{i-1}}) \qquad (1.2.105)$$

$$=\frac{1}{2}\delta\varphi_{i-1}\wedge\delta\varphi_i$$

Наша следующая цель состоит в том, чтобы представить $\psi_i^+(p_\ell)$ в терминах $\phi^\ell=\psi(p_\ell)$, чтобы в дальнейшем получить замкнутое выражение $\omega^{(1)}$ в терминах переменных ϕ^ℓ.

Лемма 9. Имеют место равенства

$$r_\ell\psi_i^+(p_\ell)=\frac{(-1)^{\ell+k-1}\det\widehat{\Phi}_i^{\ell,k}}{|\phi_{i-2},\ldots,\phi_{i-k-1}|} \qquad (1.2.106)$$

где $r_\ell:=\mathrm{res}_{p_\ell}E^{-1}d\Omega$ и $\widehat{\Phi}_i$ есть $(k\times k)$ матрица со столбцами $(\phi_{i-1},\ldots,\phi_{i-k})$, и $\widehat{\Phi}_i^{\ell,k}$ получается из $\widehat{\Phi}_i$ удалением ℓ-ой строки и последнего столбца.

Доказательство 5. По определению $d\Omega$, дифференциал $\psi_i^+\psi_{i-j}E^{-1}d\Omega$ голоморфен вне точек $p_\pm$ и точек p_ℓ, где E зануляется. Для $2\leqslant j\leqslant k$ он голоморфен в $p_\pm$. Следовательно, сумма его вычетов в p_ℓ равняется нулю:

$$\sum_{\ell=1}^{k}\mathrm{res}_{p_\ell}\ \psi_i^+\psi_{i-j}E^{-1}d\Omega=\sum_\ell r_\ell\psi_i^+(p_\ell)\phi_{i-j}^\ell=0,\ j=2,\ldots,k \qquad (1.2.107)$$

Дифференциал $\psi_i^+\psi_{i-j}E^{-1}d\Omega$ голоморфен в p_- и имеет простой полюс в p_+ с вычетом -1. Тогда

$$\sum_{l}\ \mathrm{res}_{p_\ell}\psi_i^+\psi_{i-k-1}E^{-1}d\Omega=\sum_\ell r_\ell\psi_i^+(p_\ell)\phi_{i-k-q}^\ell=1. \qquad (1.2.108)$$

Уравнения (1.2.107) и (1.2.108) представляют собой систему линейных уравнений на неизвестные $r_\ell\psi_i(p_\ell)$. Из правила Крамера следует (1.2.106).

Заметим, что при последовательном умножении правой части (1.2.106) на $d\phi_{i-j}^\ell$ и взятием среднего по ℓ, можно отождествить последнее с разложением определителя по последнему столбцу, т.е.

$$-\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{k}r_\ell\psi_i^+(p_\ell)d\phi_{i-j}^\ell=-\frac{1}{2}\frac{|\phi_{i-2},\ldots,\phi_{i-k},d\phi_{i-j}|}{|\phi_{i-2},\ldots,\phi_{i-k-1}|}= \qquad (1.2.109)$$

$$=\frac{(-1)^{k(i-1)+1}}{2}\,|\phi_{i-2},\ldots,\phi_{i-k},d\phi_{i-j}|e^{\varphi_{i-1}}$$

Правая часть (1.2.102) равняется сумме (1.2.105) и внешнего произведения выражения (1.2.109) и $da_i^{(j)}$. Равенство (1.2.102) доказано.

Для завершения доказательства теоремы, осталось заметить, что согласно теореме 4 гамильтонианы уравнений (1.2.14) и (1.2.15) равны

$$H^- := H_{\partial_{t_1^-}} = \mathrm{res}_{z=0} \ln E(z) z^{-2} dz = e_1 = \langle a_i^{(k)} \rangle \tag{1.2.110}$$

и

$$H^+ := H_{\partial_{t_1^+}} = \frac{1}{n} \mathrm{res}_{E=0} \ln w(E) E^{-2} dE = w_1 \tag{1.2.111}$$

где w_1 первый коэффициент разложения (1.2.34). Согласно следствию 1

$$n^{-1} \ln w = n^{-1} (\ln \psi_{-n} - \ln \psi_0) = \langle \psi_{i-1} - \psi_i \rangle \tag{1.2.112}$$

Тогда из (1.2.31) и (1.2.32) получаем, что

$$w_1 = \langle \xi_1^+(i-1) - \xi_1^+(i) \rangle = -\langle a_i^{(2)} e^{\varphi_{i-2} - \varphi_i} \rangle \tag{1.2.113}$$

и теорема доказана.

Пример: Для $k = 1$ уравнение (1.2.100) принимает вид $e^{-\varphi_i} = (-1)^i \phi_{i-1}$. Тогда

$$\omega^{(1)} = \frac{1}{2} \langle d\varphi_{i-1} \wedge d\varphi_i - (-1)^{i-1} e^{\varphi_{i-1}} d(e^{\varphi_i - \varphi_{i-1}}) \wedge d\phi_{i-1} \rangle = \langle d\varphi_{i-1} \wedge d\varphi_i \rangle \tag{1.2.114}$$

Заметим, что для $k = 1$ коэффициент $a_i^{(2)} = 1$ и формула (1.2.103) принимают вид (1.2.19).

1.3 КПII: Функция Коши–Йоста, преобразования Дарбу и совершенно неотрицательные матрицы

1.3.1 Введение и обозначения

Были продолжены исследования функции Коши–Йоста и показана ее исключительную роль в исследовании обратной задачи. Эта функция появилась естественным образом в теории (бинарных) преобразований Бэклунда, см. [86]. В [87] эта функция была исследована с алгебро-геометрической точки зрения, и она была названа там ядром Коши–Бейкера–Ахиезера. В [88] и [89] эта функция рассматривалась с точки зрения $\bar{\partial}$-метода для различных классов данных рассеяния. Было показано, что в ее терминах все уравнения иерархии Кадомцева–Петвиашвили могут быть представлены в компактной квазилинейной форме, а решения Йоста возникают как специальные асимптотические значения функции Коши–Йоста, что объясняет наш выбор названия для нее. Мы берем здесь уравнение Кадомцева–Петвиашвили II (КПII), [90],

$$(u_t - 6uu_{x_1} + u_{x_1x_1x_1})_{x_1} = -3u_{x_2x_2}, \tag{1.3.1}$$

а оператором Лакса, [91, 92],

$$\mathcal{L}(x,\partial_x) = -\partial_{x_2} + \partial_{x_1}^2 - u(x), \tag{1.3.2}$$

в качестве примера. В этом случае функция Коши–Йоста может быть определена как первообразная произведения решения Йоста и дуального решения Йоста:

$$F(x,\lambda,\mu) = \int\limits_{\pm\infty}^{x_1} dy_1 \psi(y,\lambda)\varphi(y,\mu)\big|_{y_2=x_2}, \tag{1.3.3}$$

где $\varphi(x,\lambda)$ – решение Йоста уравнения теплопроводности

$$\mathcal{L}(x,\partial_x)\varphi(x,\lambda) = 0,$$

а $\psi(x,\lambda)$ – решение Йоста дуального уравнения, λ и μ – два комплексных параметра, $x = (x_1,x_2,x_3,\ldots)$ (до некоторого конечного числа) означает пространственные и временные независимые переменные. Знак нижнего предела интеграла в (1.3.3) следует выбрать так, чтобы гарантировать его сходимость.

Известно (подробнее см. [87]–[89]), что функция Коши–Йоста имеет единичный вычет при $\mu = \lambda$ и убывает при λ или μ стремящихся к бесконечности, если удален экспоненциальный фактор $e^{(\ell(\lambda)-\ell(\mu))x}$, где

$$\ell(\lambda)x = \sum_{k\geqslant 1} \lambda^k x_k. \tag{1.3.4}$$

В частности, в [88] показано, что в рассмотренном там случае эта функция дается через посредство τ-функции как

$$F(x,\lambda,\mu) = \frac{e^{(\ell(\lambda)-\ell(\mu))x}}{\mu-\lambda}\frac{\tau(x-[\lambda^{-1}]+[\mu^{-1}])}{\tau(x)}, \tag{1.3.5}$$

где предполагается зависимость от бесконечного числа времен $x = (x_1,x_2,x_3,\ldots)$, а квадратные скобки обозначают бесконечный мивовский вектор

$$[\lambda] = \big(\lambda,\lambda^2/2,\lambda^3/3,\ldots\big). \tag{1.3.6}$$

В работе [89] было дано прямое определение функции Коши–Йоста в случае быстро убывающего потенциала уравнения теплопроводности посредством $\bar{\partial}$-задачи для нее. Решение Йоста, потенциал и другие объекты тода даются в терминах этой функции соответствующими предельными переходами. В частности, может быть использован произвольный конечный набор переменных x_k в (1.3.4). Тогда эволюция функции Коши–Йоста по отношению к этим временам дается в замкнутой форме, а эволюции решений Йоста и потенциала следуют соответственно. Здесь мы обобщаем определение функции Коши–Йоста на случай чисто солитонных потенциалов уравнения теплопроводности, исследуем ее свойства и определяем в ее терминах преобразования Дарбу. Это позволяет вывести действие преобразований Дарбу на точки грассманианаов, параметризующих солитонные потенциалы.

В разд. 1.3.2 мы приводим некоторые обозначения и известные результаты для чисто солитонных потенциалов уравнения теплопроводности, подробнее см., например, [93]–[96]. В частности, показано, что солитонные потенциалы нумеруются двумя натуральными числами, N_a и N_b, так что естественно говорить о (N_a,N_b)-солитонах. В разд. 1.3.3 мы определяем функцию Коши–Йоста посредством ее аналитических свойств по отношению к одному из спектральных параметров, λ или μ, и доказываем, что эти свойства однозначно определяют функцию $F(x,\lambda,\mu)$, которая в свою очередь определяет решения Йоста и потенциал уравнения теплопроводности в чисто солитонном случае. В этом смысле наш подход к определению функции Коши–Йоста близок к подходу [97] к определению решений Йоста (Бейкера–Ахиезера) для нестационарного уравнения Шредингера. Далее мы вводим дискретные преобразования функции Коши–Йоста, задаваемые квазилинейными уравнениями на нее, и показываем, что они эквивалентны исходным (билинейным) преобразованиям Дарбу из [86], а также конкретизуем последние. В соответствии с двумя номера, задающими солитонные решения, мы выделяем три типа преобразований Дарбу: заменяющие $N_a \to N_a{+}1$ и сохраняющие N_b, напротив, заменяющие $N_b \to N_b{+}1$ и сохраняющие N_a и те, которые не изменяют ни одного из этих чисел, но изменяют другие параметры солитонов. Мы называем эти преобразования, N_a-преобразования, N_b-преобразования и 0-преобразования, а также рассматриваем обратные к первым двум. Для каждого из этих преобразований мы выводим их действие на соответствующем грассманиане.

1.3.2 Решения Йоста и потенциалы уравнения КПII в чисто солитонном случае

Начнем с некоторых используемых ниже обозначений. Пусть даны два натуральных числа N_a и N_b, удовлетворяющие условию

$$N_a,N_b \geqslant 1. \tag{1.3.7}$$

Пусть

$$\mathcal{N} = N_a + N_b, \text{ so that } \mathcal{N} \geqslant 2. \tag{1.3.8}$$

Нам нужны $\mathcal{N}$ вещественных параметров

$$\kappa_1 < \kappa_2 < \ldots < \kappa_{\mathcal{N}}, \tag{1.3.9}$$

и обозначение

$$\ell(\lambda)x = \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \lambda^3 x_3 + \ldots,$$
$$\ell_n x = \kappa_n x_1 + \kappa_n^2 x_2 + \kappa_n^3 x_3 + \ldots, \quad n = 1, \ldots, \mathcal{N}.$$

где $\ldots$ означают старшие члены, если необходимы, вплоть до некоторого конечного порядка, и где $\lambda \in \mathbb{C}$. Мы используем специальные диагональные вещественные $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ матрицы

$$e^{\ell x} = \operatorname{diag}\{e^{\ell_n x}\}_{n=1}^{\mathcal{N}}$$
$$r = \operatorname{diag}\{r_n\}_{n=1}^{\mathcal{N}}, \qquad r_n = \prod_{\substack{n'=1\\ n'\neq n}}^{\mathcal{N}} (\kappa_n - \kappa_{n'}),$$
$$\kappa = \operatorname{diag}\{\kappa_1, \ldots, \kappa_{\mathcal{N}}\}.$$

Посредством параметров κ_j введем две “неполных” матрицы Вандермонда, т.е., $N_b \times \mathcal{N}$ и $\mathcal{N} \times N_a$ матрицы

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \kappa_1 & \ldots & \kappa_{\mathcal{N}} \\ \vdots & & \vdots \\ \kappa_1^{N_b-1} & \ldots & \kappa_{\mathcal{N}}^{N_b-1} \end{pmatrix}, \qquad V' = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & \kappa_1^{N_a-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots & \kappa_{\mathcal{N}}^{N_a-1} \end{pmatrix}, \tag{1.3.10}$$

удовлетворяющие условию “ортогональности”

$$V r^{-1} V' = 0. \tag{1.3.11}$$

Это равенство соотношение следует из тривиального равенства

$$\sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \frac{\kappa_n^{m-1}}{r_n} = \delta_{m\mathcal{N}}, \quad m = 1, \ldots, \mathcal{N}, \tag{1.3.12}$$

которое совпадает с (1.3.11) при $m = 1, \ldots, \mathcal{N} - 1$.

Наконец, пусть C – $\mathcal{N} \times N_b$ вещественная постоянная матрица. Для максимальных миноров введенных выше прямоугольных матриц мы используем обозначение вида

$$V(\{n_i\}) = \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \kappa_{n_1} & \dots & \kappa_{n_{N_b}} \\ \vdots & & \vdots \\ \kappa_{n_1}^{N_b-1} & \dots & \kappa_{n_{N_b}}^{N_b-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant N_b} (\kappa_{n_j} - \kappa_{n_i}),$$

$$C(\{n_i\}) = \det \begin{pmatrix} C_{n_1,1} & \dots & C_{n_1,N_b} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n_{N_b},1} & \dots & C_{n_{N_b},N_b} \end{pmatrix},$$

где $\{n_1,\dots,n_{N_b}\} \subset \{1,\dots,\mathcal{N}\}$. В этих терминах наложим на матрицу C следующее условие.

Условие 1. Для любого n, $1 \leqslant n \leqslant \mathcal{N}$, существует подмножество $\{n_1,\dots,n_{N_b-1}\}$ из $\{1,\dots,\mathcal{N}\}$, такое что

$$C(n,n_1,\dots,n_{N_b-1}) \neq 0. \tag{1.3.13}$$

Пусть C' – постоянная ненулевая $N_a \times \mathcal{N}$ матрица, "ортогональная" матрице C в том смысле, что по аналогии с (1.3.11) она удовлетворяет

$$C' r C = 0, \tag{1.3.14}$$

где ноль в правой части – $N_a \times N_b$ матрица. Ясно, что благодаря (1.3.7) матрица C' существует и удовлетворяет приведенному выше условию, как показано ниже. Также из соотношений в этом Приложении получаем, что матрицы C и C' дополнительны в том смысле, что для любого $\mathcal{N}$-вектора w существуют такие N_b-вектор w_b и N_a-вектор w_a, что

$$w = C w_b + r C'^{\mathrm{T}} w_a, \tag{1.3.15}$$

где Т означает транспозицию.

Ниже существенную роль играют матрицы $V e^{\ell x} C$ и $C' e^{-\ell x} V'$. В частности, τ-функции даются детерминантами

$$\tau(x) = \det\bigl(V e^{\ell x} C\bigr), \qquad \tau'(x) = \det\left(C' e^{-\ell x} V'\right). \tag{1.3.16}$$

В силу формулы Бине-Коши для детерминанта произведения матриц мы имеем

$$\tau(x) = \sum_{1\leqslant n_1<\ldots<n_{N_b}\leqslant\mathcal{N}} C(\{n_i\})V(\{n_i\})\prod_{j=1}^{N_b} e^{\ell_{n_j}x},$$

$$\tau'(x) = \sum_{1\leqslant n_1<\ldots<n_{N_a}\leqslant\mathcal{N}} C'(\{n_i\})V'(\{n_i\})\prod_{j=1}^{N_a} e^{-\ell_{n_j}x}.$$

Тогда (N_a,N_b)-солитонное решение дается стандартными равенствами

$$u(x) = -2\partial_{x_1}^2 \log\tau(x) \equiv -2\partial_{x_1}^2 \log\tau'(x), \tag{1.3.17}$$

где оба выражения совпадают, поскольку эти τ-функции пропорциональны:

$$\tau(x) = \text{const}\cdot\left(\prod_{n=1}^{\mathcal{N}} e^{\ell_n x}\right)\tau'(x). \tag{1.3.18}$$

Соотношение (1.3.2) Проясняет также смысл Условия 1: если существует такой n_0, что для любого $n_1,\ldots,n_{N_b-1}$ максимальный минор $C(n_0,n_1,\ldots,n_{N_b-1}) = 0$, то тогда $\tau(x)$ не зависит от κ_{n_0}. Таким образом в этом случае мы имеем либо (N_a-1,N_b)-, либо (N_a,N_b-1)-солитонное решение, заданное $\mathcal{N}-1$ параметрами κ_j. Благодаря (1.3.2) то же справедливо для матрицы C'.

Равенство (1.3.17) показывает тот хорошо известный факт, что потенциал $u(x)$ в чисто солитонном случае инвариантен при преобразованиях

$$C \to Cc, \qquad C' \to c'C', \tag{1.3.19}$$

где c и c' – произвольные невырожденные матрицы размера $N_b\times N_b$ и $N_a\times N_a$, соответственно. Таким образом, солитонные решения уравнения КПII параметризуются точками вещественного грассманиана $Gr_{N_b,\mathcal{N}}$, или $Gr_{N_a,\mathcal{N}}$.

В дальнейшем нам также потребуется полином порядка $\mathcal{N}$:

$$R(\lambda) = \prod_{n=1}^{\mathcal{N}}(\lambda-\kappa_n), \tag{1.3.20}$$

так что в силу (1.3.2):

$$r_n = \left.\frac{dR(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\kappa_n} \text{ and } \sum_{n=1}^{\mathcal{N}}\frac{\kappa_n^j}{(\lambda-\kappa_n)r_n} = \frac{\lambda^j}{R(\lambda)}, \quad j=0,\ldots,\mathcal{N}-1. \tag{1.3.21}$$

Обозначая симметрические полиномы от $-\kappa_1,\ldots,-\kappa_{\mathcal{N}}$ как $s_n = s_n(-\kappa_1,\ldots,-\kappa_{\mathcal{N}})$, где

$$s_m(x_1,\ldots,x_N) = \sum_{1\leqslant n_1<\cdots<n_m\leqslant N} x_{n_1}\ldots x_{n_m}, \qquad s_0 = 1, \tag{1.3.22}$$

мы имеем

$$R(\lambda)=\sum_{m=0}^{\mathcal{N}}\lambda^{\mathcal{N}-m}s_m. \qquad (1.3.23)$$

Принимая во внимание, что любой параметр κ_n – корень $R(\lambda)$, получаем

$$\frac{R(\lambda)}{\lambda-\kappa_n}=\sum_{j=0}^{\mathcal{N}-1}R_{\mathcal{N}-1-j}(\lambda)\kappa_n^j,$$

где

$$R_j(\lambda)=\sum_{i=0}^{j}\lambda^{j-i}s_i\equiv\left(\frac{R(\lambda)}{\lambda^{\mathcal{N}-j}}\right)_+. \qquad (1.3.24)$$

Легко видеть, что

$$R(\lambda)-\lambda^{\mathcal{N}-j}R_j(\lambda)=\sum_{i=j+1}^{\mathcal{N}}\lambda^{\mathcal{N}-i}s_i, \qquad (1.3.25)$$

т.е. эта разность есть полином порядка $\mathcal{N}-j-1$.

1.3.3 Функция Коши–Йоста

Рассмотрим случай, когда включено $k\geqslant 3$ времен, так что мы можем считаем, что $x=(x_1,\ldots,x_k)$ и, ср. (1.3.2), $\ell(\lambda)x=\sum_{j=1}^{k}\lambda^k x_k$. Тогда, используя принятые выше обозначения, введем следующее определение.

Определение 1. Мы говорим, что функция $F(x,\lambda,\mu)$, где λ и μ из $\mathbb{C}$, есть функция Коши–Йоста для (N_a,N_b)-солитонного решения уравнения КПII, если функция

$$f(x,\lambda,\mu)=e^{(\ell(\lambda)-\ell(\mu))x}F(x,\lambda,\mu) \qquad (1.3.26)$$

такова, что произведение $(\lambda-\mu)f(x,\lambda,\mu)$ – полином порядка N_b по переменной μ;

$$\operatorname{res}_{\mu=\lambda}f(x,\lambda,\mu)=R(\lambda); \qquad (1.3.27)$$

и для некоторой $\mathcal{N}\times N_b$ (см. (1.3.8)) постоянной матрицы C, удовлетворяющей Условию 1, выполнено

$$\sum_{m=1}^{\mathcal{N}}F(x,\lambda,\kappa_m)C_{mk}=0,\quad k=1,\ldots,N_b. \qquad (1.3.28)$$

Теперь мы докажем, что справедлива

Теорема 1. Функция $(\lambda-\mu)F(x,\lambda,\mu)$ – целая функция переменной λ при любом x, таком, что $\tau'(x)\neq 0$ (см. (1.3.16)), и при любом $\mu\in\mathbb{C}$, произведение $(\lambda-\mu)f(x,\lambda,\mu)$ – полином порядка N_a по переменной λ. Значения функции $F(x,\lambda,\mu)$ в точках $\lambda=\kappa_n$ удовлетворяют

$$\sum_{l=1}^{\mathcal{N}} C'_{jl}F(x,\kappa_l,\mu)=0,\quad j=1,\ldots,N_a, \tag{1.3.29}$$

где C' – матрица, определенная в (1.3.14). Функция $f(x,\lambda,\mu)$ имеет представление

$$\begin{aligned}
f(x,\lambda,\mu)&=\\
&=\frac{R(\mu)}{\mu-\lambda}-R(\mu)\sum_{j=1}^{N_a}\lambda^{j-1}\sum_{m=1}^{\mathcal{N}}\bigl((C'e^{-\ell x}V')^{-1}C'e^{-\ell x}\bigr)_{jm}\frac{1}{\mu-\kappa_m}=\\
&=\frac{R(\lambda)}{\mu-\lambda}+R(\lambda)\sum_{n=1}^{\mathcal{N}}\frac{1}{\lambda-\kappa_n}\sum_{j=1}^{N_b}\bigl(e^{\ell x}C(Ve^{\ell x}C)^{-1}\bigr)_{nj}\mu^{j-1}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Принимая во внимание, что по условию произведение $(\mu-\lambda)f(x,\lambda,\mu)$ является полиномом по переменной μ, мы можем записать

$$(\mu-\lambda)f(x,\lambda,\mu)=\sum_{m=1}^{\mathcal{N}} f(x,\lambda,\kappa_m)\frac{(\kappa_m-\lambda)R(\mu)}{(\mu-\kappa_m)r_m}, \tag{1.3.30}$$

где были использованы равенства (1.3.20) и (1.3.21). Тогда по (1.3.27) получаем

$$\sum_{m=1}^{\mathcal{N}}\frac{f(x,\lambda,\kappa_m)}{r_m}=-1. \tag{1.3.31}$$

С другой стороны, полином в (1.3.30) имеет порядок $\mathcal{N}-1$, хотя по условию он должен быть порядка $N_b<\mathcal{N}$ (ср. (1.3.8)). Итак по (1.3.2) (с заменой λ на μ) имеем

$$\sum_{m=1}^{\mathcal{N}} f(x,\lambda,\kappa_m)\frac{(\kappa_m-\lambda)\kappa_m^j}{r_m}=0,\qquad 0\leqslant j\leqslant N_a-2,$$

где предположено, что $N_a\geqslant 2$. Благодаря (1.3.31) это означает, что

$$\sum_{m=1}^{\mathcal{N}} f(x,\lambda,\kappa_m)\frac{\kappa_m^j}{r_m}=-\lambda^j,\qquad 0\leqslant j\leqslant N_a-1,$$

что справедливо и при $N_a=1$. В силу обозначения (1.3.10) это равенство можно записать в матричной форме как

$$\sum_{m=1}^{\mathcal{N}} f(x,\lambda,\kappa_m)(r^{-1}V')_{mn}=-\lambda^{n-1},\quad 1\leqslant n\leqslant N_a. \tag{1.3.32}$$

Далее, равенство (1.3.28) в терминах функции f означает, что

$$\sum_{m=1}^{\mathcal{N}} f(x,\lambda,\kappa_m)(e^{\ell x}C)_{mn} = 0, \quad n = 1,\ldots,N_b,$$

где было использовано (1.3.2). Итак, в силу (1.3.15) существует такой N_a-вектор $\widetilde{f}_j(x,\lambda)$, что

$$f(x,\lambda,\kappa_m) = \sum_{j=1}^{N_a} \widetilde{f}_j(x,\lambda)\bigl(C'r e^{-\ell x}\bigr)_{jm},$$

где C' – постоянная $N_a \times \mathcal{N}$ матрица, удовлетворяющая (1.3.14). Подставляя $f(x,\lambda,\kappa_m)$ в (1.3.32), в силу предыдущего равенства и учитывая, что $\det\tau'(x) \neq 0$, мы получаем

$$\widetilde{f}_j(x,\lambda) = -\sum_{n=1}^{N_a} \lambda^{n-1}\bigl(C'e^{-\ell x}V'\bigr)^{-1}_{nj}.$$

Подставляя это равенство в предыдущее, мы имеем

$$f(x,\lambda,\kappa_m) = -\sum_{j=1}^{N_a} \lambda^{j-1}\bigl((C'e^{-\ell x}V')^{-1}C'r e^{-\ell x}\bigr)_{jm}, \tag{1.3.33}$$

Благодаря (1.3.31) равенство (1.3.30) можно записать в виде

$$f(x,\lambda,\mu) = \frac{R(\mu)}{\lambda-\mu}\sum_{m=1}^{\mathcal{N}} \frac{f(x,\lambda,\kappa_m)}{r_m} + \sum_{m=1}^{\mathcal{N}} f(x,\lambda,\kappa_m)\frac{R(\mu)}{(\mu-\kappa_m)r_m}.$$

что дает (1) в силу (1.3.31).

Это доказывает, что $(\lambda-\mu)F(x,\lambda,\mu)$ – целая функция μ при любом x ($\det\tau'(x) \neq 0$) и любом $\lambda \in \mathbb{C}$. Более того, (1) показывает, что произведение $(\lambda-\mu)f(x,\lambda,\mu)$ – полином порядка N_a и

$$\operatorname{res}_{\lambda=\mu} f(x,\lambda,\mu) = -R(\mu).$$

Для доказательства равенства (1.3.29) заметим, что по (1)

$$f(x,\kappa_l,\mu) = \frac{R(\mu)}{\mu-\kappa_l} - R(\mu)\sum_{m=1}^{\mathcal{N}}\bigl(V'(C'e^{-\ell x}V')^{-1}C'e^{-\ell x}\bigr)_{lm}\frac{1}{\mu-\kappa_m}, \tag{1.3.34}$$

где использовано (1.3.10). Тогда непосредственное суммирование дает:

$$\sum_{l=1}^{\mathcal{N}} C'_{jl}e^{-\ell_l x}f(x,\kappa_l,\mu) = 0$$

, что благодаря (1.3.26) есть именно (1.3.29). Мы имеем также аналог равенства (1.3.32), имеющий вид

$$\sum_{l=1}^{\mathcal{N}} (Vr^{-1})_{ml}f(x,\kappa_l,\mu) = \mu^{m-1}, \quad 1 \leqslant m \leqslant N_b. \tag{1.3.35}$$

Это следует, если в первом слагаемом в (1.3.34) использовать (1.3.21) и учесть, что второй член исчезает в силу (1.3.11).

Мы видим, что свойства функции $f(x,\lambda,\mu)$ симметричны по отношению к переменным λ и μ. Поэтому естественно ожидать, что помимо (1) она также имеет представление (1). Действительно, понятно, что это представление дает правильную полиномиальную структуру $(\mu-\lambda)f(x,\lambda,\mu)$. Таким образом справедливость равенства (1) эквивалентна условию, что значения

$$f(x,\lambda,\kappa_m) = -\frac{R(\lambda)}{\lambda-\kappa_m} + R(\lambda)\sum_{l=1}^{\mathcal{N}} \frac{1}{\lambda-\kappa_l}\bigl(e^{\ell x}C(Ve^{\ell x}C)^{-1}V\bigr)_{lm} \tag{1.3.36}$$

удовлетворяют (1.3.28). Но это следует в результате непосредственного суммирования и учета равенства (1.3.26). Заметим, что предыдущее соотношение симметрично равенству (1.3.34). Отметим, что (1.3.36) дает (1.3.32) в силу тех же аргументов, что использовались при выводе (1.3.35). ■

Следствие 1. Следуя доказательству этой теоремы можно поменять местами λ и μ, матрицы C и C', равенства (1.3.28) и (1.3.29), и т.д. в Определении 1 и в Теореме 1.

Замечание 1. Соотношения (1.3.33), (1.3.34) и (1.3.36) показывают, что благодаря (1.3.20) значения $f(x,\kappa_l,\mu)$ и $f(x,\lambda,\kappa_m)$ являются регулярными функциями переменных λ и μ, несмотря на полюсное поведение функции $f(x,\lambda,\mu)$ при $\lambda=\mu$. Тем не менее, полюсное поведение $f(x,\lambda,\mu)$ ведет к существенному следствию для свойств этих значений. В силу (1.3.33) и (1.3.10) мы имеем, что $f(x,\lambda,\kappa_m)|_{\lambda=\kappa_l} = -\bigl(V'(C'e^{-\ell x}V')^{-1}C're^{-\ell x}\bigr)$. С другой стороны, в силу (1.3.34) и (1.3.20)

$$f(x,\kappa_l,\mu)|_{\mu=\kappa_m} = r_m\delta_{l,m} - \bigl(V'(C'e^{-\ell x}V')^{-1}C're^{-\ell x}\bigr),$$

так что

$$F(x,\kappa_l,\mu)|_{\mu=\kappa_m} = r_m\delta_{l,m} + F(x,\lambda,\kappa_m)|_{\lambda=\kappa_l}, \tag{1.3.37}$$

где использовано (1.3.26).

1.3.4 Свойства функции Коши–Йоста

Равенства (1) и (1) могут быть записаны в виде

$$\tau'(x)f(x,\lambda,\mu)=\frac{R(\mu)\tau'(x)}{\mu-\lambda}-$$

$$-R(\mu)\sum_{m=1}^{\mathcal{N}}\sum_{i,j=1}^{N_a}(-1)^{i+j}\lambda^{j-1}\det\bigl(C'_{\widehat{i}}e^{-\ell x}V'_{\widehat{j}}\bigr)C'_{im}\frac{e^{-\ell_m x}}{\mu-\kappa_m},$$

$$\tau(x)f(x,\lambda,\mu)=\frac{R(\lambda)\tau(x)}{\mu-\lambda}+$$

$$+R(\lambda)\sum_{n=1}^{\mathcal{N}}\frac{e^{\ell_n x}}{\lambda-\kappa_n}\sum_{i,j=1}^{N_b}(-1)^{i+j}C_{ni}\det\bigl(V_{\widehat{j}}e^{\ell x}C_{\widehat{i}}\bigr)\mu^{j-1},$$

что следует из (1.3.16) и где $V_{\widehat{ij}}$ обозначает матрицу с удаленной j-й строкой и i-м столбцом. Пусть также $C'_{\widehat{i}}$ и $V_{\widehat{i}}$ означают матрицы C' и V с удаленной i-й строкой, а $C_{\widehat{i}}$ и $V'_{\widehat{i}}$ – матрицы C и V' с удаленным i-м столбцом. Теперь, используя формулу Бине–Коши как в (1.3.2), (1.3.2) му получаем

$$\tau'(x)f(x,\lambda,\mu)=\frac{R(\mu)\tau'(x)}{\mu-\lambda}-$$

$$-R(\mu)\sum_{m=1}^{\mathcal{N}}\frac{e^{-\ell_m x}}{\mu-\kappa_m}\sum_{i,j=1}^{N_a}(-1)^{i+j}\lambda^{j-1}C'_{im}\times$$

$$\times\sum_{1\leqslant n_1<\ldots<n_{N_a-1}\leqslant\mathcal{N}}C'_{\widehat{i}}(n_1,\ldots,n_{N_a-1})V'_{\widehat{j}}(n_1,\ldots,n_{N_a-1})\prod_{k=1}^{N_a-1}e^{-\ell_{n_k}x},$$

$$\tau(x)f(x,\lambda,\mu)=\frac{R(\lambda)\tau(x)}{\mu-\lambda}+$$

$$+R(\lambda)\sum_{n=1}^{\mathcal{N}}\frac{e^{\ell_n x}}{\lambda-\kappa_n}\sum_{i,j=1}^{N_b}(-1)^{i+j}C_{ni}\mu^{j-1}\times$$

$$\times\sum_{1\leqslant n_1<\ldots<n_{N_b-1}\leqslant\mathcal{N}}C_{\widehat{i}}(n_1,\ldots,n_{N_b-1})V_{\widehat{j}}(n_1,\ldots,n_{N_b-1})\prod_{k=1}^{N_b-1}e^{\ell_{n_k}x}.$$

Принимая во внимание стандартные соотношения типа

$$\sum_{i=1}^{N_b}(-1)^iC_{mi}C_{\widehat{i}}(n_1,\ldots,n_{N_b-1})=-C(m,n_1,\ldots,n_{N_b-1}),$$

$$\sum_{j=1}^{N_a}(-1)^j\lambda^{j-1}V'_{\widehat{j}}(n_1,\ldots,n_{N_a-1})=-\prod_{j=1}^{N_a-1}(\kappa_{n_j}-\lambda)V'(n_1,\ldots,n_{N_a-1}),$$

перепишем предыдущие равенства в виде

$$\tau'(x)f(x,\lambda,\mu) = \frac{R(\mu)\tau'(x)}{\mu-\lambda} - R(\mu)\sum_{m=1}^{\mathcal{N}} \frac{e^{-\ell_m x}}{\mu-\kappa_m}\times$$

$$\times \sum_{1\leqslant n_1<\ldots<n_{N_a-1}\leqslant\mathcal{N}} C'(m,n_1,\ldots,n_{N_a-1})V'(n_1,\ldots,n_{N_a-1}) \prod_{k=1}^{N_a-1} e^{-\ell_{n_k}x}(\kappa_{n_k}-\lambda),$$

$$\tau(x)f(x,\lambda,\mu) = \frac{R(\lambda)\tau(x)}{\mu-\lambda} + R(\lambda)\sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \frac{e^{\ell_n x}}{\lambda-\kappa_n}\times$$

$$\times \sum_{1\leqslant n_1<\ldots<n_{N_b-1}\leqslant\mathcal{N}} C(n,n_1,\ldots,n_{N_b-1})V(n_1,\ldots,n_{N_b-1}) \prod_{k=1}^{N_b-1} e^{\ell_{n_k}x}(\kappa_{n_k}-\mu).$$

Введем две новые функции, $\tau(x,\lambda,\mu)$ и $\tau'(x,\lambda,\mu)$ таким образом, чтобы

$$f(x,\lambda,\mu) = \frac{\tau(x,\lambda,\mu)}{(\mu-\lambda)\tau(x)} = \frac{\tau'(x,\lambda,\mu)}{(\mu-\lambda)\tau'(x)}, \tag{1.3.38}$$

так что в силу предыдущего

$$\frac{\tau'(x,\lambda,\mu)}{R(\mu)} = \tau'(x) - (\mu-\lambda)\sum_{m=1}^{\mathcal{N}} \frac{e^{-\ell_m x}}{\mu-\kappa_m}\times$$

$$\times \sum_{1\leqslant n_1<\ldots<n_{N_a-1}\leqslant\mathcal{N}} C'(m,n_1,\ldots,n_{N_a-1})V'(n_1,\ldots,n_{N_a-1}) \prod_{k=1}^{N_a-1} e^{-\ell_{n_k}x}(\kappa_{n_k}-\lambda),$$

$$\frac{\tau(x,\lambda,\mu)}{R(\lambda)} = \tau(x) + (\mu-\lambda)\sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \frac{e^{\ell_n x}}{\lambda-\kappa_n}\times$$

$$\times \sum_{1\leqslant n_1<\ldots<n_{N_b-1}\leqslant\mathcal{N}} C(n,n_1,\ldots,n_{N_b-1})V(n_1,\ldots,n_{N_b-1}) \prod_{k=1}^{N_b-1} e^{\ell_{n_k}x}(\kappa_{n_k}-\mu).$$

Благодаря (1.3.38) и Определению 1 отношение $\dfrac{\tau'(x,\lambda,\mu)}{R(\mu)}$ убывает как μ^{-N_a}, когда $\mu\to\infty$, а в силу Теоремы 1 отношение $\dfrac{\tau(x,\lambda,\mu)}{R(\lambda)}$ убывает как λ^{-N_b}, когда $\lambda\to\infty$. Таким образом

$$\frac{\tau(x,\lambda,\mu)}{R(\lambda)} = \sum_{1\leqslant n_1<\ldots<n_{N_b}\leqslant\mathcal{N}} C(\{n_i\})V(\{n_i\}) \prod_{j=1}^{N_b} e^{\ell_{n_j}x}\frac{\kappa_{n_j}-\mu}{\kappa_{n_j}-\lambda},$$

$$\frac{\tau'(x,\lambda,\mu)}{R(\mu)} = \sum_{1\leqslant n_1<\ldots<n_{N_a}\leqslant\mathcal{N}} C'(\{n_i\})V'(\{n_i\}) \prod_{j=1}^{N_a} e^{-\ell_{n_j}x}\frac{\kappa_{n_j}-\lambda}{\kappa_{n_j}-\mu},$$

поскольку вычеты в правых частях этих равенств совпадают с вычетами предыдущих в силу (1.3.2) и (1.3.20). Заметим, что эти соотношения следуют из вырражений для

$\tau(x)$ и $\tau'(x)$ в (1.3.2) и (1.3.2) при подстановке $e^{\ell_n x} \to e^{\ell_n x}\dfrac{\kappa_n-\mu}{\kappa_n-\lambda}$, что с точностью до некоторых несущественных констант есть не что иное, как двойной мивовский сдвиг в (1.3.5). Окончательно мы получаем, что

$$\tau(x,\lambda,\mu) = \sum_{1\leqslant n_1<\ldots<n_{N_b}\leqslant\mathcal{N}} C(\{n_i\})V(\{n_i\})\prod_{\{n_i\}} e^{\ell_{n_i}x}(\mu-\kappa_{n_i})\prod_{\{\bar n_j\}}(\lambda-\kappa_{\bar n_j}),$$

$$\tau'(x,\lambda,\mu) = \sum_{1\leqslant n_1<\ldots<n_{N_a}\leqslant\mathcal{N}} C'(\{n_i\})V'(\{n_i\})\prod_{\{n_i\}} e^{-\ell_{n_i}x}(\lambda-\kappa_{n_i})\prod_{\{\bar n_j\}}(\mu-\kappa_{\bar n_j}),$$

где $\{n_i\}$ набор значений индексов суммирования, а $\{\bar n_j\}$ означает набор индексов дополнительных к ним в $\{n_i\}$ in $\{1,\ldots,\mathcal{N}\}$.

Ввиду (1.3.20) и (1.3.2), (1.3.2) соотношения (1.3.4) и (1.3.4) доказывают, что

$$\tau(x,\lambda,\lambda) = R(\lambda)\tau(x), \qquad \tau'(x,\lambda,\lambda) = R(\lambda)\tau'(x). \tag{1.3.39}$$

Решение Йоста $\varphi(x,\mu)$ уравнения теплопроводности, решение Йоста $\psi(x,\lambda)$ дуального уравнения теплопроводности и потенциал $u(x)$ этого уравнения даются как

$$\varphi(x,\mu) = -\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-N_a+1}f(x,\lambda,\mu)e^{\ell(\mu)x},$$

$$\psi(x,\lambda) = \lim_{\mu\to\infty}\mu^{-N_b+1}f(x,\lambda,\mu)e^{-\ell(\lambda)x},$$

$$u(x) = -2\lim_{\lambda,\mu\to\infty}\lambda^{-N_a+1}\mu^{-N_b+1}f_{x_1}(x,\lambda,\mu),$$

так что благодаря (1.3.38)–(1.3.4):

$$\varphi(x,\mu) = \frac{e^{\ell(\mu)x}}{\tau(x)}\sum_{1\leqslant n_1<\ldots<n_{N_b}\leqslant\mathcal{N}} C(\{n_i\})V(\{n_i\})\prod_{\{n_i\}} e^{\ell_{n_i}x}(\mu-\kappa_{n_i}),$$

$$\psi(x,\lambda) = \frac{e^{-\ell(\lambda)x}}{\tau'(x)}\sum_{1\leqslant n_1<\ldots<n_{N_a}\leqslant\mathcal{N}} C'(\{n_i\})V'(\{n_i\})\prod_{\{n_i\}} e^{-\ell_{n_i}x}(\lambda-\kappa_{n_i}),$$

в то время как для потенциала $u(x)$ мы заново выводим (1.3.17). Следует отметить, что в чисто солитонном случае сами решения Йоста могут быть определены посредством очевидных аналогов Определения 1. Чтобы избежать особенностей по отношению к спектральным параметрам, мы нормируем решение Йоста и дуальное решение таким образом, что $\varphi(x,\mu)e^{-\ell(\mu)x}$ – полином порядка N_b по отношению к μ, а $\psi(x,\lambda)e^{\ell(\lambda)x}$ – полином порядка N_a по λ.

Для получения эволюций функции Коши–Йоста по временам $x_1,x_2,\dots$ подифференцируем (1):

$$f_{x_k}(x,\lambda,\mu)=-R(\mu)\sum_{j=1}^{N_a}\lambda^{j-1}\sum_{m=1}^{\mathcal{N}}\Big\{\sum_{n=1}^{\mathcal{N}}\big((C'e^{-\ell x}V')^{-1}C'e^{-\ell x}\big)_{j,n}\kappa_n^k\times$$
$$\times\big(V'(C'e^{-\ell x}V')^{-1}C'e^{-\ell x}\big)_{n,m}-\big((C'e^{-\ell x}V')^{-1}C'e^{-\ell x}\big)_{j,m}\Big\}\frac{1}{\mu-\kappa_m},$$

где мы использовали (1.3.10). Посредством (1.3.33) и (1) это можно записать как

$$f_{x_k}(x,\lambda,\mu)=-\sum_{n=1}^{\mathcal{N}}f(x,\lambda,\kappa_n)\frac{\kappa_n^k}{r_n}f(x,\kappa_n,\mu). \tag{1.3.40}$$

Учитывая аналитические свойства функции $f(x,\lambda,\mu)$, имеем

$$f_{x_k}(x,\lambda,\mu)=f(x,\lambda,\mu)(\lambda^k-\mu^k)-\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{d\nu\,\nu^k}{R(\nu)}f(x,\lambda,\nu)f(x,\nu,\mu),$$

где было использовано (1.3.21) и где контур интегрирования γ охватывает все $\kappa_1,\dots,\kappa_{\mathcal{N}}$, λ и μ. В силу (1.3.2) и (1.3.26) это означает, что

$$F_{x_k}(x,\lambda,\mu)=\frac{-1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{d\nu\,\nu^k}{R(\nu)}F(x,\lambda,\nu)F(x,\nu,\mu), \tag{1.3.41}$$

В частности, благодаря (1.3.8), (1.3.20) и (1.3.4), (1.3.4) мы имеем

$$F_{x_1}(x,\lambda,\mu)=\psi(x,\lambda)\varphi(x,\mu), \tag{1.3.42}$$

что дает (1.3.3).

1.4 Q-оператор для XYZ модели с высшим спином

1.4.1 Введение

Бакстер ввел Q-оператор в его работе в 1972 г., чтобы найти собственные значения трансфер-матрицы восемивершинной модели. Он удовлетворяет TQ-соотношению:

$$T(u)Q(u)=Q(u)T(u)=h_-(u)Q(u-2\eta)+h_+(u)Q(u+2\eta), \tag{1.4.1}$$

с трансфер-матрицей $T(u)$ и коммутирует с собой: $[Q(u),Q(u')]=0$. (Функции $h_\pm(u)$ будут определены в (1.4.11).) Предположим, что $T(u)$ и $Q(u)$ полупросты. Тогда TQ-соотношение приводит к уравнениям для нулей оператора $Q(u)$, которые, в итоге, дают собственные значения $T(u)$. В 1973 г. Бакстер построил еще другой Q-оператор для восемивершинной модели с четным числом узел и объяснил связь с Анзацем Бете. После этого огромное количество работ было посвящено построению и анализу Q-операторов разных моделей.

Цель работы состоит в обобщении построения Q-оператора Бакстера для моделей со старшими спинами.

В 1992 г. Такебе обобщил восьмивершинную модель посредством представлений со старшими спинами алгебры Склянина, которая была введена Скляниным в 1983. (Восьмивершинная модель соответствует случаю со спином 1/2.) Было показано, что модифицированный алгебраический Анзац Бете (Тахтаджан и Фаддеевб 1979), который является элегантным переформулированием Бакстерского построения собственных векторов, применим и к моделям со старшими спинами.

Такебе дальше исследовал эту модель алгебраическим Анзацем Бете до 1996, но некоторое свойство корней Бете не было доказано и осталось гипотезой. Бакстер показал в 1972 г. , используя голоморфность Q-оператора, что сумма Бетевских корней удовлетворяет условию целочисленности. Подобное свойство для обобщенных моделей со старшими спинами было предложено Такебе в 1995 г. и доказано в специальных случаях. Одна из мотиваций построения Q-оператора для обобщенных моделей – доказательство именно этого правила сумм.

Замечательным образом, хотя построение Q-оператора Бакстера кажется сильно зависит от явной структуры трансфер-матрицы восьмивершинной модели, оказалось, что можно обобщить его метод с нужными изменениями. Действительно,

— вспомогательная матрица $M_\lambda(v)$ (1.4.12), которая переносит внедиагональные блоки L-матрицы вырожденные операторы, остается прежней и для произвольных спинов;

— ядро вырожденного блока скрученной L-матрицы состоит из локальных псевдовакуумных векторов (или сплетающих векторов) $\omega_\lambda(u; v)$ (1.4.15), использованных в алгебраическом Анзаце Бете, как и в случае восемивершинной модели;

— эрмитово сопряжение относительно формы Склянина введенной Скляниным в 1983 г. играет роль транспонирования матриц в Бакстерском построении;

— коммутационное соотношение (1.4.38) операторов Q_R и Q_L, которые являются промежуточными объектами в построении Q-оператора, доказано с помощью леммы Бакстера и теории Розенгрена об эллиптических $6j$-символах и формах Склянина.

Обозначения

— $N \in 2\mathbb{Z}_{>0}$: число узлов в решетке. Мы рассмотрим только четное N.

— $l \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{>0}$: спин представлений в каждом узле.

— $\tau \in i\mathbb{R}_{>0}$; эллиптический модуль (чисто мнимый).

— $\eta \in [-1/2(2l+1), 1/2(2l+1)]$: параметр анизотропии.

— Мы используем те же самые обозначения для тэта-функций, что и в статьях Склянина и в учебнике Мамфорда:

$$\theta_{ab}(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(\pi i \left(\frac{a}{2}+n\right)^2 \tau + 2\pi i \left(\frac{a}{2}+n\right)\left(\frac{b}{2}+z\right)\right). \tag{1.4.2}$$

(ср. обозначения Якоби: $\vartheta_1(\pi z,\tau) = -\theta_{11}(z,\tau)$, $\vartheta_2(\pi z,\tau) = \theta_{10}(z,\tau)$, $\vartheta_3(\pi z,\tau) = \theta_{00}(z,\tau)$, $\vartheta_4(\pi z,\tau) = \theta_{01}(z,\tau)$.)

— Для простоты обозначим $\theta_{11}(z,\tau)$ через $[z]$.

— $[z]_k := \prod_{j=0}^{k-1}[z+2j\eta] = [z][z+2\eta]\dots[z+2(k-1)\eta]$ for $k = 1,2,\dots$, $[z]_0 = 1$.

— Матрицы Паули определены обычным образом:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.4.3}$$

1.4.2 Определение модели и Q-оператора

В этом параграфе определим обобщение восьмивершинной модели, используя представления алгебры Склянина со старшими спинами.

Фиксируем полуцелое число $l \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{>0}$ и берем модуль алгебры Склянина со спином l в качестве пространства локальных состояний V_i ($i = 1,\dots,N$): $V_i \cong \Theta_{00}^{4l+}$. Тотальное Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ является их тензорным произведением:

$$\mathcal{H} := V_N \otimes \cdots \otimes V_1, \tag{1.4.4}$$

и вспомогательное пространство V_0 — двумерное пространство: $V_0 \cong \mathbb{C}^2$.

Трансфер матрица $T(u)$, действующая на $\mathcal{H}$, определяется следующим образом:

$$T(u) := \mathrm{tr}_0 L_N(u) L_{N-1}(u) \dots L_1(u), \tag{1.4.5}$$

где L-оператор $L_j(u) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H} \otimes V_0)$ определяется как

$$L_j(u) = \sum_{a=0}^{3} W_a^L(u) \rho_i(S^a) \otimes \sigma^a \tag{1.4.6}$$

с помощью представления алгебры Склянина на $\mathcal{H}$, $\rho_i := 1 \otimes \cdots \otimes \rho^l \otimes \cdots \otimes 1$, которое действует нетривиально только на V_i. Функции $W_a^L(u)$ в (1.4.6) определены тэта-функциями:

$$\begin{aligned} W_0^L(u) &= \frac{\theta_{11}(u,\tau)}{\theta_{11}(\eta,\tau)}, \quad W_1^L(u) = \frac{\theta_{10}(u,\tau)}{\theta_{10}(\eta,\tau)}, \\ W_2^L(u) &= \frac{\theta_{00}(u,\tau)}{\theta_{00}(\eta,\tau)}, \quad W_3^L(u) = \frac{\theta_{01}(u,\tau)}{\theta_{01}(\eta,\tau)}. \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

а σ^a — матрицы Паули, действующие на V_0.

Когда спин l равен 1/2, локальное квантовое пространство $V_i \cong \Theta_{00}^{2+}$ отожествляется с $\mathbb{C}^2$ базисом $(\theta_{00}(2z,2\tau) - \theta_{10}(2z,2\tau), \theta_{00}(2z,2\tau) + \theta_{10}(2z,2\tau))$, и $\rho^{1/2}(S^a)$ — пропорциональны σ^a. Поэтому трансфер-матрица $T(u)$ является, по сути, трансфер-матрицей восьмивершинной модели.

Из основного соотношения

$$L_{12}(v)L_{13}(u)R_{23}(u-v) = R_{23}(u-v)L_{13}(u)L_{12}(v), \tag{1.4.8}$$

где

$$R(u) = \sum_{a=0}^{3} W_a^R(u)\sigma^a \otimes \sigma^a, \qquad W_a^R(u) := W_a^L(u+\eta), \tag{1.4.9}$$

следует коммутативность трансфер-матриц:

$$T(u)T(u') = T(u')T(u). \tag{1.4.10}$$

Исследование этой модели означает анализ спектра трансфер-матрицы $T(u)$. Модифицированный Анзац Бете Тахтаджяна и Фаддеева был успешно применен к этой модели (Такебе (1992), (1995), (1996)). Однако, когда Бакстер впервые решил восемивершинную модель, он использовал Q-оператор вместо Анзаца Бете.

Q-оператор — обратимый оператор $Q(u) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, который является голоморфной функцией комплексного параметра u и удовлетволяет коммутационному соотношению:

$$\begin{aligned} T(u)Q(u) &= h_-(u)Q(u-2\eta) + h_+(u)Q(u+2\eta), \\ Q(u)T(u) &= h_-(u)Q(u-2\eta) + h_+(u)Q(u+2\eta), \\ Q(u)Q(v) &= Q(v)Q(u), \end{aligned}$$

где функции $h_\pm(u)$ определены следующими формулами.

$$h_\pm(u) := (2[u \mp 2l\eta])^N. \tag{1.4.11}$$

Поскольку трансфер-матрица T выраждена через Q, соотношение (1.4.2) означает $[T(u),Q(v)] = 0$. Выше мы написали два эквивалентных соотношения (1.4.2) и (1.4.2) отдельно, потому что они появятся отдельно.

1.4.3 Построение Q-оператора

Основная стратегия построения Q-оператора модели определенной в §1.4.2 такая же, как у Бакстера в 1973 г.:

а) Найти вспомогательную 2×2-матрицу, переобразование с которой делает (2,1)-компонен L-оператора вырожденной. Тензорное произведение нулевых векторов этой компоненты станет столбцом Q_R-оператора удовлетворяющего TQ-соотношению (1.4.2).

б) Транспонируя Q_R в подходяшим смысле, получим Q_L-оператор удовлетворяющий QT-соотношению (1.4.2).

в) Показать коммутативность $Q_L(u)Q_R(v) = Q_L(v)Q_R(u)$.

г) Q-оператор определяется формулой

$$Q(u) = Q_R(u)Q_R(u_0)^{-1} = Q_L(u_0)^{-1}Q_L(u),$$

где u_0 — общая точка.

1.4.3.1 Столбцы оператора Q_R

Когда Такебе применил обобщенный Анзац Бете Тахтаджяна-Фаддеева к моделям со старшими спинами в девяностых годах, матрица калибровочного преобразования L-оператора была следующая:

$$M_\lambda(v) := \begin{pmatrix} -\theta_{00}\left((\lambda - v)/2, \tau/2\right) & -\theta_{00}\left((\lambda + v)/2, \tau/2\right) \\ \theta_{01}\left((\lambda - v)/2, \tau/2\right) & \theta_{01}\left((\lambda + v)/2, \tau/2\right) \end{pmatrix}. \tag{1.4.12}$$

Обозначим компоненты скрученного этой матрицей L-оператора следующим образом:

$$L_{\lambda,\lambda'}(u;v) = \begin{pmatrix} \alpha_{\lambda,\lambda'}(u;v) & \beta_{\lambda,\lambda'}(u;v) \\ \gamma_{\lambda,\lambda'}(u;v) & \delta_{\lambda,\lambda'}(u;v) \end{pmatrix} := M_\lambda(v)^{-1}L(u)M_{\lambda'}(v), \tag{1.4.13}$$

где $L(u)$ — нетривиальная часть оператора $L_j(u)$ (1.4.6), то есть оператор действующий на $\Theta_{00}^{4l+} \otimes \mathbb{C}^2$:

$$L(u) = \sum_{a=0}^{3} W_a^L(u)\rho^l(S^a) \otimes \sigma^a. \tag{1.4.14}$$

Оператор $\gamma_{\lambda+4l\eta,\lambda}(u;v)$ вырожден, и вектор $\omega_\lambda(u;v) \in \Theta_{00}^{4l+}$ является его нулевым вектором:

$$\omega_\lambda(u;v) := \left[z + \tfrac{\lambda+u-v}{2} + (-l+1)\eta\right]_{2l} \left[-z + \tfrac{\lambda+u-v}{2} + (-l+1)\eta\right]_{2l}, \tag{1.4.15}$$

который называется локальным псевдовакуумом. Это специальный случай ($m = l$) более общих сплетающих векторов в Θ_{00}^{4l+}:

$$\begin{aligned}\phi_{\lambda,\lambda'}(u;v) := \left[z + \tfrac{\lambda+u-v}{2} + (-l+1)\eta\right]_{l+m}\left[-z + \tfrac{\lambda+u-v}{2} + (-l+1)\eta\right]_{l+m} \times \\ \times \left[z + \tfrac{\lambda'+u-v}{2} + (-l+1)\eta\right]_{l-m}\left[-z + \tfrac{\lambda'+u-v}{2} + (-l+1)\eta\right]_{l-m},\end{aligned} \tag{1.4.16}$$

где $\lambda' = \lambda + 4m\eta$ ($m \in -l, l+1, \ldots, l$). Действия компонентов $L_{\lambda,\lambda'}(u;v)$ на $\phi_{\lambda',\lambda}(u;v)$ известны и среди них нам нужны следующие:

$$\begin{aligned}&\alpha_{\lambda+4l\eta,\lambda}(u;v)\omega_\lambda(u;v) = 2[u+2l\eta]\omega_{\lambda-2\eta}(u;v),\\ &\gamma_{\lambda+4l\eta,\lambda}(u;v)\omega_\lambda(u;v) = 0,\\ &\delta_{\lambda+4l\eta,\lambda}(u;v)\omega_\lambda(u;v) = \frac{2[u-2l\eta][\lambda]}{[\lambda+4l\eta]}\omega_{\lambda+2\eta}(u;v).\end{aligned} \tag{1.4.17}$$

Важно, что четность тэта-функций приведет к четности $M_\lambda(v)$:

$$M_{-\lambda}(-v) = M_\lambda(v). \tag{1.4.18}$$

Поэтому вместе с соотношениями (1.4.17) получим

$$\begin{aligned}&\alpha_{\lambda-4l\eta,\lambda}(u;v)\omega_{-\lambda}(u;-v) = 2[u+2l\eta]\omega_{-\lambda-2\eta}(u;-v),\\ &\gamma_{\lambda-4l\eta,\lambda}(u;v)\omega_{-\lambda}(u;-v) = 0,\\ &\delta_{\lambda-4l\eta,\lambda}(u;v)\omega_{-\lambda}(u;-v) = \frac{2[u-2l\eta][\lambda]}{[\lambda-4l\eta]}\omega_{-\lambda+2\eta}(u;-v).\end{aligned} \tag{1.4.19}$$

Более того, из-за структуры локального псевдовакуумного вектора (1.4.15) сдвиг вспомогательного параметра λ в $\omega_\lambda(u;v)$ эквивалентен сдвигу спектрального параметра u:

$$\omega_{\lambda\pm2\eta}(u;v) = \omega_\lambda(u\pm2\eta;v). \tag{1.4.20}$$

Следовательно, соотношения (1.4.17) и (1.4.19) означают, что, грубо говоря, оператор α (соответственно, δ) сдвигает u на $u-2\eta$ (соответственно, $u+2\eta$).

Объединяя эти факты, мы построим вектор $\phi(u;v,\lambda,\vec{\sigma})$, который будет столбцом оператора $Q_R(u)$. Фиксируем комплексные параметры v и λ, а еще последовательность знаков ±1, $\vec{\sigma} = (\sigma_N, \sigma_{N-1}, \ldots, \sigma_1)$, которая удовлетворяет

$$\sum_{k=1}^{N}\sigma_k = 0. \tag{1.4.21}$$

(Напомним, что N — четное число. Судествуют всего $\binom{N}{N/2}$ последовательностей удовлетворяющих этому условию.) Определим последовательность $\{\lambda_j\}_{j=1,\ldots,N+1}$ через

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_{j+1} := \lambda_j + 4\sigma_j l\eta = \lambda + 4l\eta\sum_{k=1}^{j}\sigma_k. \tag{1.4.22}$$

Из условия (1.4.21) следует $\lambda_{N+1} = \lambda_1$. Благодаря четности (1.4.18) $M_\lambda(v)$, получим

$$M_{\sigma_j \lambda_j + 4l\eta}(\sigma_j v) = M_{\lambda_j + 4\sigma_j l\eta}(v) = M_{\lambda_{j+1}}(v) = M_{\sigma_{j+1}\lambda_{j+1}}(\sigma_{j+1} v). \tag{1.4.23}$$

($\sigma_{N+1} := \sigma_1$.)

Поэтому, если вектор $g_j(u) = g_j(u; v,\lambda,\vec{\sigma})$ в V_j определяется

$$g_j(u; v,\lambda,\vec{\sigma}) := \omega_{\sigma_j \lambda_j}(u; \sigma_j v), \tag{1.4.24}$$

то формулы (1.4.17) и (1.4.19) приведут к

$$\begin{aligned}
\alpha_{\lambda_{j+1},\lambda_j}(u; v) g_j(u) &= \alpha_{\lambda_j + 4\sigma_j l\eta, \lambda_j}(u; v) \omega_{\sigma_j \lambda_j}(u; \sigma_j v) \\
&= 2[u + 2l\eta] g_j(u - 2\eta), \\
\gamma_{\lambda_{j+1},\lambda_j}(u; v) g_j(u) &= \gamma_{\lambda_j + 4\sigma_j l\eta, \lambda_j}(u; v) \omega_{\sigma_j \lambda}(u; \sigma_j v) \\
&= 0, \\
\delta_{\lambda_{j+1},\lambda_j}(u; v) g_j(u) &= \delta_{\lambda_j + 4l\eta, \lambda_j}(u; v) \omega_{\sigma_j \lambda_j}(u; \sigma_j v) \\
&= \frac{2[u - 2l\eta][\lambda_j]}{[\lambda_{j+1}]} g_j(u + 2\eta).
\end{aligned} \tag{1.4.25}$$

Вычислим действие трансфер-матрицы на тензорное произведение

$$\phi(u; v,\lambda,\vec{\sigma}) := g_N(u; v,\lambda,\vec{\sigma}) \otimes g_{N-1}(u; v,\lambda,\vec{\sigma}) \otimes \cdots \otimes g_1(u; v,\lambda,\vec{\sigma}) \in \mathcal{H}. \tag{1.4.26}$$

Вставляя $1 = M_{\lambda_j}(v) M_{\lambda_j}(v)^{-1}$ между $L_j(u)$ и $L_{j-1}(u)$ в определении (1.4.5) трансфер-матрицы и используя цикличность следа, можно переписать ее как

$$T(u) = \mathrm{tr}_0 \prod_{j=1,\ldots,N}^{\curvearrowleft} \begin{pmatrix} \alpha_{\lambda_{j+1},\lambda_j}(u; v) & \beta_{\lambda_{j+1},\lambda_j}(u; v) \\ \gamma_{\lambda_{j+1},\lambda_j}(u; v) & \delta_{\lambda_{j+1},\lambda_j}(u; v) \end{pmatrix} \tag{1.4.27}$$

Формулы (1.4.25) сводят $T(u)\phi(u; v,\lambda,\vec{\sigma})$ к треугольной форме, и мы получим

$$T(u)\phi(u; v,\lambda,\vec{\sigma}) = h_-(u)\phi(u - 2\eta; v,\lambda,\vec{\sigma}) + h_+(u)\phi(u + 2\eta; v,\lambda,\vec{\sigma}). \tag{1.4.28}$$

Пусть $\{\phi_k(u) := \phi(u; v_k,\lambda_k,\vec{\sigma}_k)\}_{k=1,\ldots,\dim\mathcal{H}}$ — множество $\dim\mathcal{H} = (2l+1)^N$ векторов с различными параметрами. Определим линейный оператор $Q_R(u) : \mathbb{C}^{\dim\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$ следующим образом:

$$Q_R(u) : e_k \mapsto \phi_k(u), \tag{1.4.29}$$

где $\{e_k\}_{k=1,\ldots,\dim\mathcal{H}}$ — базис $\mathbb{C}^{\dim\mathcal{H}}$. TQ-соотношение (1.4.2) для $Q_R(u)$,

$$T(u)Q_R(u) = h_-(u)Q_R(u - 2\eta) + h_+(u)Q_R(u + 2\eta), \tag{1.4.30}$$

непосредственно следует из (1.4.28).

1.4.3.2 Эрмитово сопряжение и Q_L

Следующий этап — построение оператора $Q_L(u)$ удовлетворяющего "QT"-соотношению (1.4.2). Для этого нужно изучать эрмитово сопряжение оператора $T(u)$. Пространство $\mathcal{H}$ имеет естественную эрмитову структуру индуцированную от формы Склянина на Θ_{00}^{4l+}. Рассмотрим сопряженный оператор относительно этой эрмитовой структуры.

Обозначим четыре компоненты L-оператора (1.4.14) через $L_{\epsilon\epsilon'}(u)$ $(\epsilon, \epsilon' = \pm)$:

$$L(u) = \begin{pmatrix} L_{--}(u) & L_{-+}(u) \\ L_{+-}(u) & L_{++}(u) \end{pmatrix}. \tag{1.4.31}$$

По определению (1.4.7) функций $W_a^L(u)$ и самосопряженности генераторов S^a алгебры Склянина относительно формы Склянина, легко видеть, что сопряжение оператора $L_{\epsilon\epsilon'}$ выражается через $L_{-\epsilon,-\epsilon'}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} (L_{--}(u))^* &= -L_{++}(-\bar{u}), \quad (L_{-+}(u))^* = \quad L_{+-}(-\bar{u}), \\ (L_{+-}(u))^* &= \quad L_{-+}(-\bar{u}), \quad (L_{++}(u))^* = -L_{--}(-\bar{u}). \end{aligned} \tag{1.4.32}$$

Подставив выражение (1.4.31) в определение (1.4.5) трансфер-матрицы, получим

$$\begin{aligned} T(u) = &\sum_{\epsilon_{N-1},\dots,\epsilon_1=\pm} L_{N,-\epsilon_{N-1}}(u)\dots L_{j,\epsilon_j\epsilon_{j-1}}\dots L_{1,\epsilon_1-} \\ &+ \sum_{\epsilon_{N-1},\dots,\epsilon_1=\pm} L_{N,+\epsilon_{N-1}}(u)\dots L_{j,\epsilon_j\epsilon_{j-1}}(u)\dots L_{1,\epsilon_1+}(u), \end{aligned} \tag{1.4.33}$$

где $L_{j,\epsilon\epsilon'}(u)$ — компонента опрератора $L_j(u)$ определенного в (1.4.6). Заметим, что каждое слагаемое в первой сумме однозначно соответствует слагаемому во второй сумме при смене знаков ϵ_j. С другой стороны, число операторов L_{-+} равно число L_{+-} в каждой сумме из-за граничного условия $\epsilon_N = \epsilon_0$ (= знак в самом правом факторе и в самом левом факторе), потому что мы взяли след в (1.4.5). Поэтому в каждом слагаемом в (1.4.33),

$$\begin{aligned} &(\text{число } L_{j,--}) + (\text{число } L_{j,++}) \\ &\qquad\qquad = N - 2(\text{число } L_{j,+-}) \equiv N \equiv 0 \pmod 2). \end{aligned}$$

Сопряжение трансфер-матрицы $T(u)$ получается подстановкой (1.4.32) в (1.4.33):

$$\begin{aligned} \big(T(u)\big)^* = &\sum_{\epsilon_{N-1},\dots,\epsilon_1=\mp} L_{N,+\epsilon_{N-1}}(-\bar{u})\dots L_{j,\epsilon_j\epsilon_{j-1}}(-\bar{u})\dots L_{1,\epsilon_1+}(-\bar{u}) \\ &+ \sum_{\epsilon_{N-1},\dots,\epsilon_1=\mp} L_{N,-\epsilon_{N-1}}(-\bar{u})\dots L_{j,\epsilon_j\epsilon_{j-1}}(-\bar{u})\dots L_{1,\epsilon_1-}(-\bar{u}) \\ &= T(-\bar{u}). \end{aligned} \tag{1.4.34}$$

Знаки в (1.4.32) исчезают в (1.4.34) из-за (1.4.3.2).

Теперь берем сопряжение соотношения (1.4.30) с заменой $-\bar{u}$ вместо u. Получим

$$\begin{aligned} Q_R(-\bar{u})^* T(u) &= \overline{h_-(-\bar{u})} Q_R(-\bar{u}-2\eta)^* + \overline{h_+(-\bar{u})} Q_R(-\bar{u}+2\eta)^* \\ &= h_+(u) Q_R(-\bar{u}-2\eta)^* + h_-(u) Q_R(-\bar{u}+2\eta)^*, \end{aligned} \tag{1.4.35}$$

так как тэта-функция $[u] = \theta_{11}(u,\tau)$ есть нечетная функция. (Здесь опять четность N играет важную роль.) Определяя $Q_L(u)$ по формуле

$$Q_L(u) := Q_R(-\bar{u})^* : \mathcal{H} \to \mathbb{C}^{\dim \mathcal{H}}, \tag{1.4.36}$$

получаем оператор удовлетворяющий соотношению (1.4.2):

$$Q_L(u) T(u) = h_-(u) Q_L(u-2\eta) + h_+(u) Q_L(u+2\eta). \tag{1.4.37}$$

1.4.3.3 Коммутационное соотношение Q_R и Q_L

Важное свойство построенных выше операторов $Q_R(u)$ в (1.4.29) и $Q_L(u)$ в (1.4.36) — коммутационное соотношение

$$Q_L(u) Q_R(u') = Q_L(u') Q_R(u). \tag{1.4.38}$$

(i,j)-компонента произведения $Q_L(u)Q_R(u')$ равна

$$\begin{aligned} (e_i, Q_L(u) Q_R(u') e_j) &= (e_i, Q_R(-\bar{u})^* Q_R(u') e_j) \\ &= \langle Q_R(-\bar{u}) e_i, Q_R(u') e_j \rangle = \langle \phi_i(-\bar{u}), \phi_j(u') \rangle, \end{aligned} \tag{1.4.39}$$

где (,) — эрмитова форма на $\mathbb{C}^{\dim \mathcal{H}}$ определенная по $(e_i,e_j) = \delta_{ij}$. Из этого следует, что если функция $\Phi(u,u')$ от (u,u') определенная по формуле

$$\Phi(u,u') := \langle \phi(-\bar{u}; v,\lambda,\vec{\sigma}), \phi(u'; v',\lambda',\vec{\sigma}') \rangle \tag{1.4.40}$$

является симметрической по u и u' при произвольных выборах параметров $(v,\lambda,\vec{\sigma})$ и $(v',\lambda',\vec{\sigma}')$, то коммутационное соотношение (1.4.38) верно. По определениям (1.4.26) и (1.4.24), $\Phi(u,u')$ переписывается как

$$\Phi(u,u') = \prod_{k=1}^{N} \langle \omega_{\sigma_k \lambda_k}(-\bar{u}; \sigma_k v), \omega_{\sigma'_k \lambda'_k}(u'; \sigma'_k v') \rangle. \tag{1.4.41}$$

Используя результаты Розенгрена (Rosengren (2004), (2007)), мы можем доказать факторизацию $\Phi(u,u')$:

$$\begin{aligned}\Phi(u,u') = C\prod_{k=1}^{N} F\big(\tfrac{\lambda'_k-\bar{\lambda}_k}{2} + \tfrac{\sigma'_k u'+\sigma_k u}{2} + (\sigma'_k - \sigma_k)l\eta + \tfrac{-v'+\bar{v}}{2}\big)\times \\ \times\prod_{k=1}^{N} G\big(\tfrac{\lambda'_k+\bar{\lambda}_k}{2} + \tfrac{\sigma'_k u'-\sigma_k u}{2} + (\sigma'_k - \sigma_k)l\eta + \tfrac{-v'-\bar{v}}{2}\big).\end{aligned} \tag{1.4.42}$$

Здесь константа C зависит только от τ, η, l и N, а функции $F(w)$ и $G(w)$ зависят только от τ, η и l.

Эта формула имеет точно такой же вид как (10.5.27) для восемивершинной модели в книге Бакстера "Exactly solved models in statistical mechanics". Параметры λ и s_j Бакстера соответствуют нашим параметрам $2l\eta$ и $\lambda_j/2$. Бакстер показал, что функции с такой факторизацией являются симметричными функциями по u и u' независимо от функций F и G.

Таким образом, коммутационное соотношение (1.4.38) доказано.

1.4.3.4 Q-оператор и его коммутационные соотношения

Остальные шаги построения Q-оператора одинаковы со случаем восемивершинной модели Бакстера.

Как у Бакстера, ожидается, что вариацией параметров $(v,\lambda,\vec{\sigma}) = (v_k,\lambda_k,\vec{\sigma}_k)$ получаем достаточно большое множество векторов

$$\{\phi_k(u) := \phi(u; v_k,\lambda_k,\vec{\sigma}_k)\}_{k=1,\dots,\dim\mathcal{H}},$$

на которые натягивается пространство $\mathcal{H}$ при общем значении u, хотя мы пока не имеем доказательства. Здесь мы предполагаем такую невырожденность и берем параметр $u = u_0$, такой что $Q(u_0)$ обратим. Мы определим Q-оператор следующим образом:

$$Q(u) := Q_R(u)Q_R(u_0)^{-1} : \mathcal{H} \xrightarrow{Q_R(u_0)^{-1}} \mathbb{C}^{\dim\mathcal{H}} \xrightarrow{Q_R(u)} \mathcal{H}. \tag{1.4.43}$$

Благодаря коммутационному соотношению (1.4.38), имеется

$$Q(u) = Q_L(u_0)^{-1}Q_L(u),$$

$$Q(u)Q(u') = Q_L(u_0)^{-1}Q_L(u)Q_R(u')Q_R(u_0)^{-1} = Q(u')Q(u).$$

Умножив $Q_R(u_0)^{-1}$ на (1.4.30) справа, получим

$$T(u)Q(u) = h_-(u)Q(u-2\eta) + h_+(u)Q(u+2\eta), \tag{1.4.44}$$

а умножение $Q_L(u_0)^{-1}$ на (1.4.37) слева даст

$$Q(u)T(u) = h_-(u)Q(u-2\eta) + h_+(u)Q(u+2\eta). \tag{1.4.45}$$

Следовательно, мы имеем все коммутационные соотношения (1.4.2), (1.4.2), (1.4.2) и

$$T(u)Q(u) = Q(u)T(u) \tag{1.4.46}$$

из (1.4.2) и (1.4.2).

1.4.4 Собственные значения трансфер-матрицы

Используя Q-оператор, мы можем вычислить собственные значения трансфер-матрицы $T(u)$ и доказать правило суммы Бетевских корней.

Для восьмивершинной модели имеются два инволютивных оператора на $\mathcal{H}$, (R = (инверсия стрелок) и S = (умножение на -1 к направленным вниз стрелкам), которые коммутируют с трансфер-матрицей. Бакстер использовал их, чтобы разбить $\mathcal{H}$, и вывел Бетевские уравнения.

В нашей модели также есть две инволюции, $U_1^{\otimes N}$ и $U_3^{\otimes N}$, соответствующие R и S. Они определяются с помощью инволюций на представлениях введенных Склянинным (1983). Такебе показал в 1995 г., что они коммутируют с собой и с трансфер матрицей $T(u)$.

$$(U_a^{\otimes N})^2 = 1, \quad [U_a^{\otimes N}, U_b^{\otimes N}] = [T(u), U_a^{\otimes N}] = 0. \tag{1.4.47}$$

Операторы U_1 и U_3 действуют на локальные псевдовакуумные вектора $\omega_\lambda(u;v)$ (1.4.15) следующим образом:

$$U_1\omega_\lambda(u;v) = e^{-l\pi i}\omega_\lambda(u+1;v),$$

$$U_3\omega_\lambda(u;v) = e^{l\pi i(\tau-1)+2l\pi i(\lambda+u-v+2l\eta)}\omega_\lambda(u+\tau;v).$$

Поэтому операторы $U_a^{\otimes N}$ действуют на столбцы $\phi(u;v,\lambda,\vec{\sigma})$ оператора Q_R (1.4.26) сдвигом параметра:

$$\begin{aligned} U_1^{\otimes N}\phi(u;v,\lambda,\vec{\sigma}) &= e^{-Nl\pi i}\phi(u+1;v,\lambda,\vec{\sigma}), \\ U_3^{\otimes N}\phi(u;v,\lambda,\vec{\sigma}) &= e^{Nl\pi i(\tau-1)+2Nl\pi iu}\phi(u+\tau;v,\lambda,\vec{\sigma}). \end{aligned} \tag{1.4.48}$$

Здесь использована формула (10.5.40) в книге Бакстера,

$$\sum_{k=1}^{N} \sigma_k \lambda_k = -2Nl\eta, \tag{1.4.49}$$

которая является следствием условия (1.4.21) и определения (1.4.22) чисел λ_j. Заметим, что коэффициенты и сдвиг параметра в (1.4.48) не зависят от параметров $(v,\lambda,\vec{\sigma})$. Следовательно, Q_R имеют те же самые свойства:

$$U_1^{\otimes N} Q_R(u) = e^{-Nl\pi i} Q_R(u+1),$$
$$U_3^{\otimes N} Q_R(u) = e^{Nl\pi i(\tau-1)+2Nl\pi i u} Q_R(u+\tau).$$

Из-за унитарности инволюций $U_a^{\otimes N}$ и определения (1.4.36), оператор $Q_L(u)$ удовлетворяет

$$Q_L(u) U_a^{\otimes N} = \left(U_a^{\otimes N} Q_R(-\bar{u}) \right)^*. \tag{1.4.50}$$

Когда $a = 1$, произведение $U_1^{\otimes N} Q_R(-\bar{u})$ равно $e^{-Nl\pi i} Q_R(-\bar{u}+1)$. Так как $[z+1] = -[z]$, $\omega_\lambda(u+2;v) = \omega_\lambda(u;v)$ и $Q_R(u+2) = Q_R(u)$. Поэтому

$$U_1^{\otimes N} Q_R(\bar{u}) = e^{-Nl\pi i} Q_R(-\bar{u}-1) = e^{-Nl\pi i} Q_R(-\overline{(u+1)}), \tag{1.4.51}$$

то есть,

$$Q_L(u) U_1^{\otimes N} = e^{-Nl\pi i} Q_L(u+1). \tag{1.4.52}$$

(Поскольку Nl — целое число, $e^{-Nl\pi i}$ — вещественное число, ± 1.) Подобным образом можем доказать

$$Q_L(u) U_3^{\otimes N} = e^{Nl\pi i(\tau-1)+2Nl\pi i u} Q_L(u+\tau). \tag{1.4.53}$$

Здесь использованы $-\bar{u}+\tau = -\overline{(u+\tau)}$ и $e^{Nl\pi i(\tau-1)} \in \mathbb{R}$, которые следуют из $\tau \in i\mathbb{R}$.

Умножая $Q_R(u_0)^{-1}$ на (1.4.4) и (1.4.4) справа и $Q_L(u_0)^{-1}$ на (1.4.52) и (1.4.53) слева, получим

$$\begin{aligned} U_1^{\otimes N} Q(u) &= Q(u) U_1^{\otimes N} = e^{-Nl\pi i} Q(u+1), \\ U_3^{\otimes N} Q(u) &= Q(u) U_3^{\otimes N} = e^{Nl\pi i(\tau-1)+2Nl\pi i u} Q(u+\tau). \end{aligned} \tag{1.4.54}$$

Доказав коммутативность операторов $T(u)$, $Q(u)$ и $U_a^{\otimes N}$, перейдем к одновременной диагонализации $T(u)$ и $Q(u)$ на собственных пространствах $U_1^{\otimes N}$ и $U_3^{\otimes N}$. Так как

$(U_a^{\otimes N})^2 = 1$ (1.4.47), операторы $U_a^{\otimes N}$ диагонализуемы и имеют собственные значения ± 1. Соответственно, пространство $\mathcal{H}$ разлагается следующим образом:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\nu_1,\nu_3=0,1} \mathcal{H}_{\nu_1,\nu_3}, \qquad U_a^{\otimes N}|_{\mathcal{H}_{\nu_1,\nu_3}} = (-1)^{\nu_a} \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_{\nu_1,\nu_3}}. \tag{1.4.55}$$

Предположим, что $T(u)$ и $Q(u)$ диагональзуемы, как в §10.6 книги Бакстера. Из-за коммутативности они диагонализуются одновременно на $\mathcal{H}_{\nu_1,\nu_3}$ матрицей, не зависящей от u. Обозначим собственные значения $T(u)$ и $Q(u)$ для некоторого собственного вектора через $\Lambda(u)$ и $q(u)$, которые являются голоморфными функциями от u. Из TQ-соотношения (1.4.2) следует соотношение

$$\Lambda(u)q(u) = h_-(u)q(u-2\eta) + h_+(u)q(u+2\eta). \tag{1.4.56}$$

Правила переобразования (1.4.54) сводятся к скалярным уравнениям:

$$\begin{aligned} (-1)^{\nu_1} q(u) &= e^{-Nl\pi i} q(u+1), \\ (-1)^{\nu_3} q(u) &= e^{Nl\pi i(\tau-1)+2Nl\pi i u} q(u+\tau). \end{aligned} \tag{1.4.57}$$

Применяя принцип аргумента в комплексном анализе, можно доказать из (1.4.57), что целая функция $q(u)$ имеет Nl нулей в прямоугольнике с вершинами 0, 1, $1+\tau$ и τ. Обозначим эти нули через $u_1, \dots, u_{Nl}$. Из-за квазипереодичности (1.4.57) функция $q(u)$ имеет и нули в $u_j + n + m\tau$ $(n,m \in \mathbb{Z})$.

Напомним квазипериодичность тэта-функции $[z] = \theta_{11}(z,\tau)$:

$$[z+1] = -[z], \qquad [z+\tau] = -e^{-\pi i\tau - 2\pi i z}[z], \tag{1.4.58}$$

и что $[z] = 0$ эквивалентно $z \in \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$. Поэтому

$$f(u) := \frac{q(u)}{\prod_{j=1}^{Nl}[u-u_j]} \tag{1.4.59}$$

— целая функция, которая не обращается в ноль нигде и имеет квазипериодичность:

$$f(u+1) = (-1)^{\nu_1} f(u), \qquad f(u+\tau) = (-1)^{\nu_3} e^{-2\pi i \sum_{j=1}^{Nl} u_j} f(u) \tag{1.4.60}$$

из-за (1.4.57). Опять используя стандартный аргумент в комплексном анализе, мы можем показать, что $f(u)$ равна e^{Ku} с коэффициентом, где константа K удовлетворяет условию

$$K = \nu_1 \pi i + 2n_1 \pi i, \qquad K\tau = \nu_3 \pi i - 2\pi i \sum_{j=1}^{Nl} u_j + 2n_3 \pi i \tag{1.4.61}$$

для некоторых целых чисел n_1 и n_3. Подставив условие (1.4.61) в определение (1.4.59) функции $f(u)$, получим явную форму $q(u)$:

$$q(u) = Ce^{\nu_1 \pi i u} \prod_{j=1}^{Nl} [u - u_j], \tag{1.4.62}$$

и правило суммы Бетевских корней:

$$\sum_{j=1}^{Nl} u_j \equiv -\frac{\nu_1 \tau}{2} + \frac{\nu_3}{2} \pmod{\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}}. \tag{1.4.63}$$

Подставив $u = u_j$ в 1.4.56, получим уравнение

$$h_-(u_j)q(u_j - 2\eta) + h_+(u_j)q(u_j + 2\eta) = 0, \tag{1.4.64}$$

или, эквивалентно,

$$\left(\frac{[u_j + 2l\eta]}{[u_j - 2l\eta]}\right)^N = e^{4\nu_1 \pi i \eta} \prod_{k=1, k\neq j}^{Nl} \frac{[u_j - u_k + 2\eta]}{[u_j - u_k - 2\eta]}, \tag{1.4.65}$$

которые являются Бетевскими уравнениями. Соответствующее собственное значение трансфер-матрицы равно

$$\begin{aligned} \Lambda(u) = (2[u + 2l\eta])^N e^{-2\nu_1 \pi i \eta} \prod_{j=1}^{Nl} \frac{[u - u_j - 2\eta]}{[u - u_j]} \\ +(2[u - 2l\eta])^N e^{2\nu_1 \pi i \eta} \prod_{j=1}^{Nl} \frac{[u - u_j + 2\eta]}{[u - u_j]}, \end{aligned} \tag{1.4.66}$$

которое впервые было найдено Такебе в 1992 г. с помощью Анзаца Бете.

1.5 Степени когомологических классов мультиособенностей в пространствах Гурвица рациональных функций

В последние десятилетия числа Гурвица, перечисляющие разветвленные накрытия двумерной сферы с предписанными данными ветвления, играют одну из центральных ролей в алгебраической геометрии и теории интегрируемых систем. Разработанные к настоящему моменту методы их вычисления позволяют получить явные формулы для семейств таких чисел лишь в некоторых частных случаях. Один из этих методов, принадлежащий М. Э. Казаряну и С. К. Ландо и базирующийся на теории универсальных многочленов М. Э. Казаряна, состоит в подсчете степеней некоторых классов когомологий в пространствах Гурвица. Пространства Гурвица представляют собой пространства мероморфных функций с предписанными порядками полюсов на кривых заданного рода.

В этой главе мы выводим новые формулы для степеней стратов пространств Гурвица рода 0, отвечающих функциям с двумя непростыми критическими значениями с предписанными разбиениями кратностей прообразов. При этом один из прообразов имеет произвольную кратность, а другой кратность коразмерности 1. Универсальные когомологические выражения для стратов коразмерности 1 в пространствах Гурвица были получены Казаряном и Ландо в [104]. Используя эти выражения для стратов в общих пространствах Гурвица рациональных функций, мы получаем новые, неизвестные ранее явные формулы для семейств двойных чисел Гурвица в роде 0. Эти формулы были высказаны М. Э. Казаряном в качестве гипотетических на основе компьютерных экспериментов. Мы надеемся, что аналогичные вычисления на основе универсальных формул для стратов большей коразмерности позволят получить и более общие явные формулы для чисел Гурвица, а развитые методы позволят доказать более общие тождества на ряды функций от разбиений, определяющих соотношения в кольце когомологий пространств Гурвица.

1.5.1 Пространства Гурвица

1.5.1.1 Стратификация дискриминанта пространств Гурвица

Пусть $\mathcal{H}_{g;\kappa}$ — пространство мероморфных функций степени $k_1+\ldots+k_m=n$ на алгебраических кривых рода g со следующими свойствами:

– каждая мероморфная функция имеет m занумерованных полюсов заданных порядков $k_1,\ldots,k_m$;
– сумма критических значений функции равна нулю.

С топологической точки зрения каждая такая функция является разветвленным n-листным накрытием двумерной сферы поверхностью рода g. Здесь и далее через κ мы обозначаем набор $k_1,\ldots,k_m$.

Согласно [100] это пространство является гладким комплексным орбиобразием (при $g=0$ или достаточно больших n даже комплексным многообразием). Пусть далее $\mathcal{M}_{g;m}$ — пространство модулей комплексных кривых рода g с m отмеченными точками, тогда пространство $\mathcal{H}_{g;\kappa}$ расслоено над $\mathcal{M}_{g;m}$: каждой функции можно сопоставить кривую ее определения с m отмеченными на ней полюсами.

Через $\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa}$ обозначается пополнение пространства $\mathcal{H}_{g;\kappa}$ состоящее из стабильных мероморфных функций [100], [105], [101]. Стабильные отображения определены на нодальных кривых (т.е. кривых, единственными допустимыми особенностями которых являются простые самопересечения) с m отмеченными гладкими точками. Отображение является стабильным, если у него конечное число автоморфизмов. Граница $\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa} \setminus \mathcal{H}_{g;\kappa}$ пополненного пространства Гурвица состоит из стабильных функций на особых кривых.

Через $\overline{\mathcal{M}}_{g;m}$ обозначается пространство модулей стабильных кривых, представляющее собой компактификацию пространства модулей гладких кривых $\mathcal{M}_{g;m}$. Напомним, что нодальная кривая с отмеченными на ней гладкими точками называется стабильной, если ее группа автоморфизмов конечна. Проекция $\mathcal{H}_{g;\kappa} \to \mathcal{M}_{g;m}$ продолжается до проекции $\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa} \to \overline{\mathcal{M}}_{g;m}$. Послойная проективизация $P\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa}$ расслоения $\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa}$ является компактным комплексным орбиобразием.

Основным предметом наших исследований являются подмногообразия в пространствах Гурвица, состоящие из функций с вырожденными конечными точками ветвлениями. Точка ветвления в образе называется невырожденной, если она имеет $n-1$ различных прообразов, один из которых является точкой ветвления кратности 2 (при этом остальные $n-2$ прообраза — точки гладкости накрытия), и вырожденной в противном случае. По формуле Римана–Гурвица общая мероморфная функция степени n на кривой рода g с фиксированными кратностями $k_1, \dots, k_m$ прообразов бесконечности имеет $n+m+2g-2$ точки невырожденного ветвления. Функции с меньшим количеством точек ветвления в образе образуют дискриминант в пространстве $P\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa}$. Каждой точке ветвления в образе можно сопоставить разбиение μ числа n, представляющее собой неупорядоченный набор кратностей прообразов данной точки. Замыкание в $P\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa}$ множества функций, имеющих ветвления предписанного типа, будем обозначать через $P\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa;\mu_1;\dots;\mu_l}$, где индекс состоит из рода g, кратностей полюсов и набора разбиений кратностей прообразов над конечными точками вырожденного ветвления. Эти подмногообразия называются стратами дискриминанта.

Каждый страт дискриминанта $P\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa;\mu_1;\dots;\mu_l}$ представляет собой комплексное подмногообразие чистой размерности в $P\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa}$, и следовательно, по двойственности Пуанкаре определяет однородный элемент кольца когомологий $H^*(P\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa})$. Будем обозначать его через $\sigma_{g;\kappa;\mu_1;\dots;\mu_l}$,

$$\sigma_{g;\kappa;\mu_1;\dots;\mu_l} = [P\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa;\mu_1;\dots;\mu_l}] \in H^*(P\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa}).$$

Индекс пересечения класса $\sigma_{g;\kappa;\mu_1;\ldots;\mu_l}$ с дополнительной степенью первого класса Черна тавтологического расслоения к $P\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa;\mu_1;\ldots;\mu_l}$ будем называть степенью такого класса. Более общо, пусть A — комплексное многообразие, и предположим, что мультипликативная группа $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел действует на нем без неподвижных точек. Пусть B — многообразие орбит действия группы $\mathbb{C}^*$ на A, и предположим, что B — компактно. Обозначим через $\Psi = c_1(\mathcal{O}(1)) \in H^2(B)$ тавтологический класс этого действия. Для произвольного класса $\beta \in H^*(B)$ назовем его степенью $\deg \beta$ результат спаривания:

$$\deg \beta = \int\limits_B \frac{\beta}{1-\Psi} = \int\limits_B (1+\Psi+\Psi^2+\ldots)\beta.$$

1.5.1.2 Основные результаты

Все дальнейшие вычисления мы проводим при $g=0$. Страты дискриминанта пространства Гурвица коразмерности 1 отвечают вырождениям функций одного из двух видов: наличие у критического значения трехкратного прообраза (каустика) или наличие у критического значения двух двукратных прообразов (страт Максвелла). Это страты $P\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa;1^{n-3}3^1}$ и $P\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa;1^{n-4}2^2}$ соответственно.

Теорема 2. Справедливы равенства:

$$\deg \sigma_{0;\kappa;1^{n-3}3^1} = $$
$$= n^{m-4}\prod_{i=1}^{m}\frac{k_i^{k_i}}{k_i!}\left(n^2+n\left(3(m-2)-\left(\frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{k_m}\right)\right)+\frac{3}{2}(m-2)(m-3)\right).$$

$$\deg \sigma_{0;\kappa;1^{n-4}2^2} = $$
$$= n^{m-4}\prod_{i=1}^{m}\frac{k_i^{k_i}}{k_i!}\left(-2n^2+n\left(m^2-5(m-2)+\left(\frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{k_m}\right)\right)-2(m-2)(m-3)\right).$$

Утверждение теоремы 2 является обобщением результатов в [104], где степени стратов дискриминанта с двумя вырожденными критическими значениями были вычислены для всех стратов коразмерности 2:

$$\begin{aligned}
\deg \sigma_{1^{n-3}3^1;1^{n-3}3^1} &= \frac{3}{8}n^{n-6}(27n^2-137n+180),\\
\deg \sigma_{1^{n-3}3^1;1^{n-4}2^2} &= 3n^{n-6}(n-3)(3n^2-15n+20),\\
\deg \sigma_{1^{n-4}2^2;1^{n-4}2^2} &= 4n^{n-6}(2n^3-16n^2+43n-40).
\end{aligned}$$

Так, например, первое из этих равенств получается подстановкой в первое утверждение теоремы значений $\kappa = 1^{n-3}3^1$, т.е. $k_1 = \cdots = k_{n-3} = 1$, $k_{n-2} = 3$ и $m = n-2$, а дополнительный множитель $\frac{1}{2}$ возникает из-за того, что мы не фиксировали порядок критических значений.

Доказательство теоремы 2 будет проводиться следующим образом: сначала мы сведем вычисление степени страта из левой части к вычислению степеней некоторых базисных когомологических классов в пространствах Гурвица $P\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa}$, а затем вычислим эти степени.

Первый этап доказательства опирается на работу [104]. В ней получены универсальные формулы, выражающие классы стратов коразмерности один в терминах базисных классов в произвольных общих семействах рациональных функций:

$$\sigma_{0;1^{n-3}3^1} = -p_*\zeta + 3p_*\psi + 2p_*\psi^2 - \delta_{0,0}. \tag{1.5.1}$$

$$\sigma_{0;1^{n-4}2^2} = \frac{1}{2}\xi_0^2 - 2p_*\zeta - 5p_*\psi - 3p_*\psi^2 + \delta_{0,0}. \tag{1.5.2}$$

В силу универсальности эти формулы справедливы и в пространствах Гурвица $P\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa}$. Классы когомологий, входящие в правую часть равенств (1.5.1) и (1.5.2), будут определены в § 2.

1.5.1.3 Числа Гурвица

Геометрия дискриминантов в пространствах Гурвица тесно связана с задачей вычисления чисел Гурвица.

Два разветвленных накрытия $f_1 : C_1 \to S^2$ и $f_2 : C_2 \to S^2$ двумерной сферы называются изоморфными, если существует гомеоморфизм $h : C_1 \to C_2$ такой, что $f_1 = f_2 \cdot h$. Как обсуждалось выше, каждой точке ветвления в образе мы сопоставляем разбиение μ кратностей ее прообразов. Определим число Гурвица $h_{g;\mu_1;\mu_2;\dots}$ равенством

$$h_{g;\mu_1;\mu_2;\dots} = \sum_f \frac{1}{|\mathrm{Aut}(f)|},$$

где суммирование ведется по всем классам изоморфизма разветвленных накрытий f сферы степени n поверхностью рода g с разбиениями $\mu_1,\mu_2,\ldots$ над вырожденными точками ветвления, а через $|\mathrm{Aut}(f)|$ обозначено число элементов в группе автоморфизмов такого разветвленного накрытия. Задача Гурвица состоит в подсчете чисел Гурвица. Следующая теорема [100, 104] связывает задачу Гурвица со степенями стратов дискриминанта пространства Гурвица.

Теорема 3. Справедливо равенство

$$h_{g;\mu_1;\mu_2;\ldots} = \frac{|\mathrm{Aut}(\mu_1,\mu_2,\ldots)|r!}{n!}\deg P\overline{\mathcal{H}}_{g;\mu_1;\mu_2,\ldots},$$

где через $\mathrm{Aut}(\mu_1,\mu_2,\ldots)$ обозначено произведение факториалов числа совпадающих разбиений, а через r обозначено общее количество невырожденных критических значений у функций из $P\overline{\mathcal{H}}_{g;\mu_1;\mu_2,\ldots}$.

Числа $h_{g;\mu_1;\mu_2}$ называются двойными числами Гурвица. В отличие от одинарных чисел Гурвица $h_{g;\mu}$ (см. [100]), для двойных чисел Гурвица нет удобных универсальных замкнутых формул.

Кратко опишем текущее состояние дел в области вычисления двойных чисел Гурвица.

В работе [102] получены явные формулы для двухчастных и трехчастных чисел Гурвица рода 0, то есть в случае, когда прообраз одного из критических значений состоит из двух, соответственно трех точек, однако эти формулы трудноприменимы из-за присутствия суммирования по всевозможным разложениям данного разбиения в сумму двух (трех) разбиений. В той же работе Гульден, Джексон и Вакил показали, что числа $h_{g;\mu_1;\mu_2}$ являются многочленами от частей разбиений μ_1 и μ_2.

В работе [108] получен явный вид этих многочленов для двойных чисел Гурвица рода 0 внутри так называемых камер. В работе [99] доказана полиномиальность двойных чисел Гурвица внутри камер для произвольного рода. Отметим, что в нашем случае каждая камера состоит в точности из одного числа Гурвица.

Окуньков в [107] показал, что экспонента производящего ряда для двойных чисел Гурвица является τ-функцией иерархии Тоды, что дает рекуррентные соотношения для вычисления этих чисел в произвольном роде, но не дает явных формул для них. Аналогично, к рекуррентным соотношениям приводят и методы топологической рекурсии [106].

Теоремы 2 и 3 дают следующие выражения для серий двойных чисел Гурвица:

Следствие 1. Справедливы равенства

$$h_{0;\kappa;1^{n-3}3^1} = \frac{|\mathrm{Aut}(\kappa,1^{\mathrm{n}-3}3^1)|(\mathrm{n}+\mathrm{m}-4)!}{n!}\times$$
$$\times\, n^{m-4}\prod_{i=1}^{m}\frac{k_i^{k_i}}{k_i!}\left(n^2+n\left(3(m-2)-\left(\frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{k_m}\right)\right)+\frac{3}{2}(m-2)(m-3)\right).$$

$$h_{0;\kappa;1^{n-4}2^2} = \frac{|\mathrm{Aut}(\kappa,1^{\mathrm{n}-4}2^2)|(\mathrm{n}+\mathrm{m}-4)!}{n!}\times$$
$$\times\, n^{m-4}\prod_{i=1}^{m}\frac{k_i^{k_i}}{k_i!}\left(-2n^2+n\left(m^2-5(m-2)+\left(\frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{k_m}\right)\right)-2(m-2)(m-3)\right).$$

1.5.2 Вычисления в кольцах когомологий пространств Гурвица

Обозначим через $\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa,1}$ пространство таких стабильных рациональных функций степени $k_1+\ldots+k_m$ с полюсами порядков $k_1,\ldots,k_m$ в первых m из $m+1$ отмеченных точек, для которых $m+1$-ая отмеченная точка является критической. Это пространство представляет собой векторное расслоение над пространством модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0;m+1}$. Обозначим через $P\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa,1}$ его послойную проективизацию. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$P\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa,1}@>\pi>>\overline{\mathcal{M}}_{0;m+1} \tag{1.5.3}$$

$$@VpVV@VVV \tag{1.5.4}$$

$$P\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa}@>>>\overline{\mathcal{M}}_{0;m} \tag{1.5.5}$$

в которой вертикальные стрелки представляют собой отображения забывания $m+1$-й отмеченной точки, а горизонтальные — отображения проектирования проективизированного расслоения на базу.

Проекция p является собственным отображением, потому что $m+1$-ая точка не может совпадать ни с какой из первых m отмеченных точек.

На пространстве $P\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa,1}$, поскольку оно является проективизацией, выделен естественный класс вторых когомологий — первый класс Черна тавтологического линейного расслоения, который мы будем обозначать через $\zeta = c_1(\mathcal{O}(1)) \in H^2(P\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa,1})$.

Нам также потребуется класс $\psi \in H^2(P\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa,1})$, равный первому классу Черна относительного дуализирующего пучка отображения $p : P\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa,1} \to P\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa}$. Обозначим через $\Delta \in H^4(P\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa,1})$ класс, представленный множеством особых точек слоев отображения p, и введем классы $\delta_{k,l} = p_*(N^k\Delta^{l+1}) \in H^{2k+4l+2}(P\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa})$, $k = 0,1,2,\ldots$, $l = 0,1,2,\ldots$. Здесь N — первый класс Черна нормального расслоения к множеству особых точек слоев отображения p, см. [104].

Через $\deg_\kappa \beta$ будем обозначать степень класса $\beta \in H^*(P\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa})$ в пространстве $P\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa}$. Для доказательства основной теоремы нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Имеют место равенства

$$\begin{aligned}\deg_{k_1,\ldots,k_m} p_*\zeta^k &= n^{m-2}\prod_{i=1}^m \frac{k_i^{k_i}}{k_i!},\\ \deg_{k_1,\ldots,k_m} p_*\psi^k &= \binom{m-2}{k} n^{m-2-k}\prod_{i=1}^m \frac{k_i^{k_i}}{k_i!}.\end{aligned}$$

Лемма 2. Имеет место равенство

$$\deg_{k_1,\ldots,k_m} \delta_{0,0} = \left(n\cdot\left(\frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{k_m}\right) - \frac{1}{2}(m-2)(m-3)\right) n^{m-4}\prod_{i=1}^m \frac{k_i^{k_i}}{k_i!}.$$

1.5.2.1 Доказательство леммы 1

Пусть $\beta \in H^*(P\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa,1})$, тогда

$$\deg p_*(\beta) = \int\limits_{P\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa}} \frac{p_*(\beta)}{1-p_*(\zeta)} = \int\limits_{P\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa,1}} \frac{\beta}{1-\zeta} =$$

$$= \prod_{i=1}^m \frac{k_i^{k_i}}{k_i!} \int\limits_{\overline{\mathcal{M}}_{0;m+1}} \frac{\pi_*(\beta)}{(1-k_1\psi_1)\ldots(1-k_m\psi_m)}. \qquad (1.5.6)$$

Последнее равенство является результатом вычисления полного класса Сегре расслоения $P\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa} \to \overline{\mathcal{M}}_{0;m}$, см. [100].

Здесь через ψ_i, $i = 1,\ldots,m+1$, мы, как обычно, обозначаем первые классы Черна линейных расслоений $\mathcal{L}_i$ к $\overline{\mathcal{M}}_{0;m+1}$. Слой расслоения $\mathcal{L}_i$ над точкой $(C; x_1,\ldots,x_{m+1})$ пространства модулей есть кокасательная прямая к кривой C в точке x_i. В наших вычислениях будут встречаться только классы $\pi_*(\beta)$, равные некоторой степени класса ψ_{m+1}, т.е. ψ-класса, отвечающего $m+1$-ой отмеченной точке. Таким образом, вычисление степеней когомологических классов на стратах пространства Гурвица сводится к вычислению интегралов мономов от ψ-классов по пространству модулей, значение которых известно со времен работы Виттена [110]:

$$\int\limits_{\overline{\mathcal{M}}_{0;m}} \psi_1^{l_1}\dots\psi_m^{l_m} = \binom{m-3}{l_1,\dots,l_m} \qquad \text{при } l_1+\dots+l_m = m-3. \tag{1.5.7}$$

Лемма 1 доказывается применением равенств (1.5.6) и (1.5.7) к классам ζ и ψ:

$$\begin{aligned}
\deg_\kappa p_*\zeta^k &= \prod_{i=1}^m \frac{k_i^{k_i}}{k_i!}\int\limits_{\overline{\mathcal{M}}_{0;m+1}} \frac{1}{(1-k_1\psi_1)\dots(1-k_m\psi_m)}\\
&= \left(\sum_{l_1+\dots+l_m=m-2} k_1^{l_1}\dots k_m^{l_m}\int\limits_{\overline{\mathcal{M}}_{0;m+1}} \psi_1^{l_1}\dots\psi_m^{l_m}\right)\prod_{i=1}^m\frac{k_i^{k_i}}{k_i!}\\
&= \left(\sum_{l_1+\dots+l_m=m-2}\binom{m-2}{l_1,\dots,l_m}k_1^{l_1}\dots k_m^{l_m}\right)\prod_{i=1}^m\frac{k_i^{k_i}}{k_i!}\\
&= (k_1+\dots+k_m)^{m-2}\prod_{i=1}^m\frac{k_i^{k_i}}{k_i!} = n^{m-2}\prod_{i=1}^m\frac{k_i^{k_i}}{k_i!}.
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\deg_\kappa p_*\psi^k = \prod_{i=1}^m \frac{k_i^{k_i}}{k_i!}\int\limits_{\overline{\mathcal{M}}_{0;m+1}} \frac{\psi_{m+1}^k}{(1-k_1\psi_1)\dots(1-k_m\psi_m)} = \binom{m-2}{k} n^{m-2-k}\prod_{i=1}^m\frac{k_i^{k_i}}{k_i!}.$$

◄

1.5.2.2 Доказательство леммы 2

Каждому разбиению сопоставим стандартным способом его диаграмму Юнга. Пусть $\kappa = (k_1,\dots,k_m)$, $k_1+\ldots+k_m = n$ — разбиение числа n,

$|\mathrm{Aut}(\kappa)|$ — произведение факториалов количеств совпадающих частей в разбиении κ, $m = l(\kappa)$ — длина разбиения. Назовем диаграмму μ поддиаграммой диаграммы κ, $\mu < \kappa$, если μ получается из κ вычеркиванием нескольких строчек. Суммой двух диаграмм μ и λ называется диаграмма $\mu\oplus\lambda$, получающаяся объединением частей исходных диаграмм.

Утверждение 1. Степень класса $\delta_{0,0}$ равна

$$\deg_{k_1,\dots,k_m}\delta_{0,0}=\frac{1}{2}\sum_{\mu\oplus\lambda=\kappa,\mu<\kappa}\frac{|\lambda|^{l(\lambda)-2}}{|\mathrm{Aut}(\lambda)|}\frac{|\mu|^{l(\mu)-2}}{|\mathrm{Aut}(\mu)|}|\mathrm{Aut}(\kappa)|\prod_{i=1}^{m}\frac{k_i^{k_i}}{k_i!} \tag{1.5.8}$$

Доказательство. Класс $\delta_{0,0}$ — это класс особых точек слоев отображения p. Общий особый слой — это особая рациональная кривая с одной особой точкой, т.е., объединение двух гладких рациональных кривых, пересекающихся трансверсально по одной точке. При вырождении гладкого слоя в общий особый слой полюса рациональной функции распределяются по двум неприводимым компонентам особого слоя. Наборы порядков полюсов образуют некоторое разбиение λ, на одной неприводимой компоненте и некоторое разбиение μ, на другой компоненте, причем $\lambda\oplus\mu=\kappa$, $|\lambda|+|\mu|=n$. Степень страта $\delta_{0,0}$ равна сумме степеней его компонент, отвечающих различным распадениям λ,μ, что и дает равенство (1.5.8). ◀

Отметим, что на каждой компоненте особого слоя должно быть не менее одного полюса.

Таким образом, для доказательства леммы 2 нам остается доказать следующее тождество, высказанное в качестве гипотезы М. Э. Казаряном на основе компьютерных экспериментов:

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu\oplus\lambda=\kappa,\mu<\kappa}\frac{|\lambda|^{l(\lambda)-2}}{|\mathrm{Aut}(\lambda)|}\frac{|\mu|^{l(\mu)-2}}{|\mathrm{Aut}(\mu)|}|\mathrm{Aut}(\kappa)|=$$

$$=n^{m-4}\left(n\cdot\left(\frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{k_m}\right)-\frac{1}{2}(m-2)(m-3)\right).$$

Ниже мы называем это тождество тождеством Казаряна. Мы доказываем его в параграфах 2.4 и 2.5.

1.5.2.3 Доказательство основной теоремы 2

В работе [104] получены универсальные формулы для когомологических классов двойственных по Пуанкаре стратам дискриминанта коразмерности 1:

$$\sigma_{1^{n-3}3^1}=-p_*\zeta+3p_*\psi+2p_*\psi^2-\delta_{0,0}, \tag{1.5.9}$$

$$\sigma_{1^{n-4}2^2} = \frac{1}{2}\xi_0^2 - 2p_*\zeta - 5p_*\psi - 3p_*\psi^2 + \delta_{0,0}. \tag{1.5.10}$$

Здесь через $\xi_0 \in H^*(P\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa})$ обозначен класс критических точек функций из $P\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa}$. Классы ζ, ψ и $\delta_{0,0}$ из кольца когомологий $P\overline{\mathcal{H}}_{0;\kappa}$ введены в § 2.

Для завершения доказательства подставим в выражения (1.5.9) и (1.5.10) результаты лемм 1 и 2:

$$\deg \sigma_{0;1^{n-3}3^1;\kappa} = \deg_\kappa \sigma_{1^{n-3}3^1} =$$
$$= \prod_{i=1}^m \frac{k_i^{k_i}}{k_i!}(-n^{m-2} + 3\binom{m-2}{1}n^{m-3} + 2\binom{m-2}{2}n^{m-4} -$$
$$- \left(n\left(\frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_m}\right) - \binom{m-2}{2}\right)n^{m-4}) =$$
$$= n^{m-4}\prod_{i=1}^m \frac{k_i^{k_i}}{k_i!}\left(n^2 + n\left(3(m-2) - \left(\frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_m}\right)\right) + \frac{3}{2}(m-2)(m-3)\right).$$

$$\deg \sigma_{0;1^{n-4}2^2;\kappa} = \deg_\kappa \sigma_{1^{n-4}2^2} =$$
$$= \prod_{i=1}^m \frac{k_i^{k_i}}{k_i!}(-n^{m-3}(2n-4)^2 - 2n^{m-2} - 5\binom{m-2}{1}n^{m-3} - 3\binom{m-2}{2}n^{m-4} +$$
$$+ \left(n\left(\frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_m}\right) - \binom{m-2}{2}\right)n^{m-4}) =$$
$$= n^{m-4}\prod_{i=1}^m \frac{k_i^{k_i}}{k_i!}\left(-2n^2 + n\left(m^2 - 5(m-2) + \left(\frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_m}\right)\right) - 2(m-2)(m-3)\right).$$

Теорема доказана. ◄

1.5.2.4 Тождество Казаряна

В двух следующих параграфах мы доказываем комбинаторное тождество (1.5.2.2).

Пусть $\tau = (t_1, \ldots, t_m)$, $t_1 + \ldots + t_m = n$ — разбиение. Через $|\mathrm{Aut}(\tau)|$ мы обозначаем произведение факториалов количеств совпадающих частей в разбиении τ, через $l(\tau)$ его длину.

Пусть M — конечное множество, $m = |M|$ — количество элементов в нем. Будем обозначать через t_M сумму переменных t с индексами из M:

$$t_M = \sum_{i \in M} t_i.$$

Для каждого подмножества $I \subset M$, $I = \{j_1, \ldots, j_i\}$, обозначим через $\tau(I)$ набор $\{t_{j_1}, \ldots, t_{j_i}\}$.

Лемма 3. Рассмотрим такие диаграммы μ и λ, что $\mu \oplus \lambda = \tau$. Тогда количество таких разбиений $M = I \sqcup J$, что $\tau(I) = \mu$, $\tau(J) = \lambda$ равно $\frac{|\mathrm{Aut}(\tau)|}{|\mathrm{Aut}(\mu)| \cdot |\mathrm{Aut}(\lambda)|}$.

Доказательство. Таких разбиений будет несколько, если среди частей t_i разбиения τ будут совпадающие. Количество способов выбрать несколько из этих совпадающих частей равно биномиальному коэффициенту. Произведение биномиальных коэффициентов по всем совпадающим частям в разбиении τ равно в точности $\frac{|\mathrm{Aut}(\tau)|}{|\mathrm{Aut}(\mu)| \cdot |\mathrm{Aut}(\lambda)|}$.
◀

Теперь преобразуем левую часть равенства (1.5.2.2). Напомним, что

$$|I| = l(\lambda),\ |J| = l(\mu),\ p = |\lambda| = t_I,\ q = |\mu| = t_J,$$

тогда из леммы 3 следует, что выполнено равенство:

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu \oplus \lambda = \kappa, \mu < \kappa} \sum_{\lambda \vdash p, \mu \vdash q} \frac{p^{l(\lambda)-2}}{|\mathrm{Aut}(\lambda)|} \frac{q^{l(\mu)-2}}{|\mathrm{Aut}(\mu)|} |\mathrm{Aut}(\kappa)| = \frac{1}{2} \sum_{I \sqcup J = M} t_I^{|I|-2} t_J^{|J|-2}.$$

Перепишем тождество Казаряна:

$$\sum_{I \sqcup J = M} t_I^{|I|-2} t_J^{|J|-2} = t_M^{|M|-4} \left(2t_M \cdot \left(\frac{1}{t_1} + \ldots + \frac{1}{t_{|M|}} \right) - (|M|-2)(|M|-3) \right), \quad (1.5.11)$$

где суммирование идет по всем упорядоченным разбиениям множества M на два непересекающихся не пустых подмножества.

1.5.2.5 Многочлены Абеля

Разобьем доказательство равенства (1.5.11) на несколько шагов.

Сначала отметим, что левая и правая часть тождества, рассматриваемые как функции переменных t_i, представляются рациональными функциями и имеют полюса первого порядка в точках $t_i = 0$, $i \in M$. Главные части функций в этих точках совпадают. Действительно, в левой части полюс в точке $t_i = 0$ возникает в случае, когда одно из множеств I или J состоит из одного элемента i, поэтому коэффициент при $\frac{1}{t_i}$ в левой части равен $2t_{M\setminus\{i\}}^{|M|-3}$. В правой части только первое слагаемое имеет полюса, причем множитель при $\frac{1}{t_i}$ равен $2t_M^{|M|-3}$; его значение при $t_i = 0$ также равно $2t_{M\setminus\{i\}}^{|M|-3}$.

Лемма 4. Разность

$$\sum_{I\sqcup J=M} t_I^{|I|-2} t_J^{|J|-2} - 2t_M^{|M|-3}\left(\frac{1}{t_1} + \ldots + \frac{1}{t_{|M|}}\right)$$

является симметрическим многочленом от переменных t_i, $i \in M$, зависящим только от суммы этих переменных.

Поскольку как уменьшаемое, так и вычитаемое являются симметрическими функциями переменных t_i, разность также является их симметрической функцией. Кроме того мы уже доказали, что указанная в лемме разность является многочленом. Осталось доказать, что этот симметрический многочлен зависит только от суммы t_M переменных t_i. Для этого достаточно доказать, что применение разностного оператора Δ_i:

$$\Delta_i f(t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_m) = f(t_1, \ldots, t_i + h, \ldots, t_m) - f(t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_m),$$

к указанной разности дает один и тот же результат вне зависимости от номера i переменной t_i. Или, другими словами, что применение разности операторов $\Delta_i - \Delta_j$ дает 0.

Применение разности $\Delta_i - \Delta_j$ к сумме в первом слагаемом из леммы 4 дает 0 для всех слагаемых, отвечающих подмножествам $I \subset M$, содержащим либо оба индекса i и j, либо ни одного из них. Поэтому в качестве аргумента разностного оператора можно оставить сумму по тем разбиениям множества M на два непересекающихся подмножества, в которых индексы i и j лежат в разных подмножествах:

$$(\Delta_i - \Delta_j) \sum_{I\sqcup J=M} t_I^{|I|-2} t_J^{|J|-2} \quad = \quad 2(\Delta_i - \Delta_j) \sum_{\substack{I\sqcup J=M \\ I\ni i, J\ni j}} t_I^{|I|-2} t_J^{|J|-2}.$$

Преобразуем теперь аргумент оператора конечной разности в правой части равенства, сделав подстановку $t_i = x$, $t_j = y$. При этой замене многочлен $t_I^{|I|-2}$, $I \ni i, I \not\ni j$ переходит в многочлен $(x + t_{I\setminus\{i\}})^{|I\setminus\{i\}|-1}$. Введем многочлен $P_M(x) = x(x + t_M)^{|M|-1}$, тогда

$$\sum_{\substack{I\sqcup J=M \\ I\ni i, J\ni j}} t_I^{|I|-2} t_J^{|J|-2} \quad = \quad \sum_{I\sqcup J=M_{ij}} \frac{P_I(x)}{x} \frac{P_J(y)}{y}$$

где $M_{ij} = M \setminus \{i,j\}$. Отметим, что здесь подмножества I и J могут быть пустыми. Далее заметим, что многочлены $P_M(x)$ являются множественными многочленами Абеля биномиального типа [109], поэтому для них выполняется биномиальное тождество:

$$\sum_{I \sqcup J = M_{ij}} \frac{P_I(x)}{x} \frac{P_J(y)}{y} = \frac{P_{M_{ij}}(x+y)}{xy}.$$

Теперь результат применения разностного оператора $\Delta_i - \Delta_j = \Delta_x - \Delta_y$ легко вычислить:

$$(\Delta_x - \Delta_y) \frac{P_{M_{ij}}(x+y)}{xy} = (x+y+h)(x+y+h+t_{M_{ij}})^{|M_{ij}|-1} \left(\frac{1}{(x+h)y} - \frac{1}{(y+h)x} \right).$$

С другой стороны, применим разностный оператор $\Delta_i - \Delta_j$ ко второму слагаему многочлена из леммы 4:

$$\begin{aligned}
(\Delta_i - \Delta_j)(t_M)^{|M|-3} \left(\frac{1}{t_1} + \ldots + \frac{1}{t_{|M|}} \right) &= \\
(t_M + h)^{|M|-3} (\Delta_i - \Delta_j) \left(\frac{1}{t_1} + \ldots + \frac{1}{t_{|M|}} \right) &= \\
= (t_M + h)^{|M|-3} \left(\frac{1}{t_i + h} - \frac{1}{t_i} - \frac{1}{t_j + h} + \frac{1}{t_j} \right) &= \\
(t_M + h)^{|M|-3} (t_i + t_j + h) \left(\frac{1}{(t_i + h) t_j} - \frac{1}{(t_j + h) t_i} \right)&.
\end{aligned}$$

Требуемое равенство следует из того, что $x = t_i$, $y = t_j$ и $(t_M + h)^{|M|-3} = (x+y+h+t_{M_{ij}})^{|M_{ij}|-1}$. Доказательство леммы 4 закончено.

Для завершения доказательства тождества Казаряна осталось доказать, что разность его правой и левой частей

$$F(t_M) = \sum_{\substack{I \sqcup J = M \\ I \neq \emptyset, J \neq \emptyset}} t_I^{|I|-2} t_J^{|J|-2} - t_M^{|M|-4} \left(2t_M \left(\frac{1}{t_1} + \ldots + \frac{1}{t_{|M|}} \right) - (|M|-2)(|M|-3) \right)$$

которая является симметрическим многочленом от переменных t_i, $i \in M$, и зависит только от суммы t_M этих переменных, тождественно равна 0. Это достаточно доказать после подстановки в эти многочлены значений $t_i = t$ для всех $i \in M$.

$$F(t_M)|_{t_i=t, i=1,\ldots,|M|} = \sum_{\substack{I\sqcup J=M\\ I\neq\emptyset, J\neq\emptyset}} |I|^{|I|-2}t^{|I|-2}|J|^{|J|-2}t^{|J|-2} - (|M|t)^{|M|-4}(|M|^2+5|M|-6) =$$

$$= t^{|M|-4}\left(\sum_{\substack{I\sqcup J=M\\ I\neq\emptyset, J\neq\emptyset}} |I|^{|I|-2}|J|^{|J|-2} - |M|^{|M|-4}(|M|^2+5|M|-6)\right).$$

Или что то же самое, нам осталось доказать, что:

$$\sum_{\substack{i+j=m\\ i,j\neq 0}} \binom{m}{i} i^{i-2}j^{j-2} = m^{m-4}(m^2+5m-6).$$

Последнее равенство следует из равенство коэффициентов при мономе x^2y^2 в биномиальном тождестве для классических многочленов Абеля:

$$(x+y)(x+y+n)^{n-1} = \sum_{i+j=n}\binom{n}{i}x(x+i)^{i-1}y(y+j)^{j-1}.$$

1.6 Структуры пространств форм Якоби, ассоциированных с системами корней A_n и B_n.

В рамках исследований по основным направлениям научной деятельности лаборатории была проводились работы по изучению структуры пространств форм Якоби, ассоциированных с системами корней типа A_n и B_n. Нам удалось показать, что формы Якоби чётного индекса, ассоциированные с системой корней B_n, образуют свободную алгебру с $n+1$ образующей над кольцом модулярных форм. Аналогичный результат был получен и для случая системы корней A_n для форм Якоби произвольного индекса, однако вместо полной модулярной группы $SL_2(\mathbb{Z})$ рассматривалась конгруэнц-подгруппа $\Gamma(2)$.

В 1992 году К. Виртмюллером была доказана более общая теорема. Им были рассмотрены формы Якоби для произвольной системы корней, кроме E_8, для полной модулярной группы без дополнительных условий на чётность индекса. Однако, его доказательство весьма непростое и трудоёмкое. Одной из наших целей было выявить ключевые моменты в его доказательстве, упростить доказательство, и попытаться получить, хотя бы в некоторых простых случаях, результаты теоремы Виртмюллера используя только элементарные методы, в том числе, разработанные нами в ходе этой работы.

Речь идёт о следующих объектах. Пусть L – решётка, порождённая системой корней R, со скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)$, W – группа Вейля этой системы корней, а $Z = (z_1, \ldots, z_n) \in L \otimes \mathbb{C}$. Тогда формой Якоби веса k и индекса m, где k, $m \in \mathbb{Z}$, относительно данной системы корней и группы $SL_2(\mathbb{Z})$, или некоторой её конгруэнц-подгруппы Γ, называется голоморфная функция

$$\varphi : \mathcal{H} \times (L \otimes \mathbb{C}) \to \mathbb{C},$$

удовлетворяющая следующим условиям:

а) $\varphi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{Z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k e^{\pi i m \frac{c(Z,Z)}{c\tau+d}} \varphi(\tau, Z)$ для всякого $\tau \in \mathcal{H}$ и всех

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})(\text{или } \Gamma)$$

б) $\varphi(\tau, Z + l\tau + l') = e^{-2\pi i m(l,Z) - \pi i m(l,l)\tau} \varphi(\tau, Z)$ для $l, l' \in L$;

в) $\varphi(\tau, w(Z)) = \varphi(\tau, Z)$ для $w \in W$

г) $\varphi(\tau, Z)$ локально ограничена в $+i\infty$

Множество форм Якоби всех весов и индексов обозначается $J_{*,*}(R)$.

Основным результатом полученным нами в данном направлении является является теорема, утверждающая, что если R – система корней ранга n (A_n или B_n), то

$$J_{*,*}(R) = M_*[\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}],$$

где каждая форма φ_j имеет вес $-k(j)$ и индекс $m(j)$.

Причём в случае A_n весами являются $k(j) = j$, кроме $k(1) = 0$, а индексами $m_j = 1$ для каждого j. В случае же B_n весами являются $k(j) = 2j - 2$, а индексами $m_j = 2$ для всех j. Причём указанные выше образующие были построены явно.

В качестве основной функции в нашей работе мы использовали следующую функцию. Пусть z – одномерная комплексная переменная. Тогда функция $\omega(\tau, z)$ задаётся как

$$\omega(\tau, z) = (\zeta^{1/2} - \zeta^{-1/2}) \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(1 - q^j\zeta)(1 - q^j\zeta^{-1})}{(1 - q^j)^2},$$

где $q = e^{2\pi i\tau}, \zeta = e^{2\pi i z}$.

Множество нулей функции $\omega(\tau, z)$ – это в точности $\{(\tau, z) \,|\, z \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau\}$, что немедленно следует из явного вида функции $\omega(\tau, z)$.

Функция $\omega(\tau, z)$ сама по себе не является формой Якоби, но при помощи неё можно построить целую серию форм, связанных с системами корней типа A_n и B_n. А именно, было показано, что форма

$$a_n(\tau, Z) = \prod_{i=1}^{n} \omega(\tau, z_i)$$

является формой Якоби веса $-n$ и индекса 1 для системы корней A_n, а форма

$$b_n(\tau, Z) = \prod_{i=1}^{n} \omega^2(\tau, z_i)$$

в свою очередь, является формой Якоби веса $-2n$ и индекса 2 для системы корней B_n.

Как было установлено, функция $\omega(\tau, z)$ обладает следующими свойствами

а) $\omega(\tau, z+1) = -\omega(\tau, z)$;
б) $\omega(\tau, z+\tau) = -e^{-2\pi i z - \pi i \tau}\omega(\tau, z)$;
в) $\omega(\tau+1, z) = \omega(\tau, z)$;
г) $\omega(-1/\tau, z/\tau) = (1/\tau)e^{\pi i z^2/\tau}\omega(\tau, z)$

Из указанных выше условий на $\omega(\tau, z)$ немедленно следует, что определённые ранее функции $a_n(\tau, Z)$ и $b_n(\tau, Z)$ действительно являются формами Якоби для систем корней A_n и B_n.

В качестве другого примера была рассмотрена форма Якоби веса 0 и индекса 2 для решётки “B_1”:$= \mathbb{Z}$. А именно, была взята форма

$$b_0(\tau, z) = \omega^2(\tau,z)\wp(\tau,z),$$

где $\wp(\tau,z)$ – $\wp$-функция Вейерштрасса.

При помощи формы b_0 можно построить форму веса 0 и индекса 2, связанную с системой корней B_n, для любого n, рассмотрев

$$\prod_{j=1}^{n} b_0(\tau, z_j).$$

Для того, чтобы построить другие формы Якоби для систем корней типа B_n, с помощью указанной формы b_0, были определены подъёмы форм Якоби. Для формы b_0 подъёмы устроены как

$$L_n(b_0)(\tau, z_1, \dots, z_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} b_0(\tau, z_i).$$

Для произвольной формы Якоби $\varphi(\tau, z_1, \dots, z_n)$, связанной с системой корней B_n, подъём определялся следующей формулой:

$$L_1(\varphi)(\tau, z_1, \dots, z_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} b_0(\tau, z_i)\varphi(\tau,z_1, \dots,z_{i-1}, z_{i+1}, \dots,z_{n+1}).$$

Далее индуктивно:

$$L_{s+1}(\varphi)(\tau, z_1, \ldots, z_{n+s}) = \sum_{i=1}^{n+s} b_0(\tau, z_i) L_s(\varphi)(\tau, z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_{n+s}).$$

Как нами было показано, для определённых выше объектов выполняются следующие условия:

а) $L_s(b_n) \in J_{-2n,2}(B_{n+s})$.
б) Форма $L_s(b_n)$ при фиксированном τ не равна нулю тождественно.

Основываясь на этих свойствах, нам удалось доказать ряд содержательных утверждений, в частности:

а) Формы

$$L_{n-1}(b_0), L_{n-1}(b_1), L_{n-2}(b_3), \ldots, L_1(b_{n-1}), b_n \in J(B_n)$$

алгебраически независимы над кольцом модулярных форм.

б) Формы Якоби чётного индекса образуют свободную алгебру $J_{*,2*}(B_n)$ над кольцом модулярных форм. Формы

$$L_{n-1}(b_0), L_{n-1}(b_2), \ldots, L_1(b_{n-1}), b_n$$

могут быть выбраны в качестве образующих этой алгебры.

Аналогичное исследование было проведено и для случая систем корней A_n. Для системы корней A_1, в качестве формы Якоби веса 0 и индекса 1 была выбрана форма

$$a_0(\tau, z) = \frac{\vartheta_3(\tau, z)}{\theta_3(\tau)},$$

где

$$\vartheta_3(\tau, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2/2} \zeta^n, \theta_3(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2/2}.$$

Повторяя приёмы, использованные для системы корней B_n, мы можем для любого n получить при помощи формы a_0 форму веса 0 и индекса 1, связанную с системой корней A_n, рассмотрев

$$\prod_{j=0}^{n} a_0(\tau, z_j).$$

Определённая выше функция a_0, как можно проверить, является формой Якоби веса 0 и индекса 1 для системы корней A_1 и группы $\Gamma(2)$. Дальнейшие шаги к выявлению структуры алгебры форм Якоби аналогичны проделанным для систем корней B_n.

Подъёмы в случае решёток A_n определяются как

$$L_1(\varphi)(\tau, z_0, \ldots, z_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} a_0(\tau, z_i)\varphi(\tau, z_0, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_{n+1}),$$

а далее индуктивно, что в конце концов ведёт к объявленному нами основному результату, в его части, относящейся к A_n, утверждающему, что

а) Формы

$$L_{n-1}(a_0), L_{n-1}(a_2), \ldots, L_1(a_{n-1}), a_n \in J(A_n)$$

алгебраически независимы над кольцом модулярных форм относительно конгруэнц-подгруппы $\Gamma(2)$.

б) Формы Якоби для системы корней A_n образуют свободную алгебру $J_{*,*}(A_n)$ над кольцом модулярных форм относительно конгруэнц-подгруппы $\Gamma(2)$. Формы

$$L_{n-1}(a_0), L_{n-1}(a_2), \ldots, L_1(a_{n-1}), a_n$$

могут быть выбраны в качестве образующих этой алгебры.

Таким образом нам действительно удалось элементарными методами получить для ряда случаев утверждение теоремы Виртингера.

1.7 Числа Гурвица-Севери

Также в рамках работы лаборатории продолжались начатые ранее исследования чисел Гурвица и их обобщений, в частности, чисел Гурвица-Севери. Эти объекты широко распространены, весьма важны и актуальны в современной теории интегрируемых систем и теории струн, особенно в связи с исследованиями свойств тау-функций интегрируемых иерархий. Напомним, что классическое число Гурвица, как известно, определяется как число классов изоморфизма пар (Σ, f), где Σ — компактная комплексная кривая, а

$$f : \Sigma \to \mathbb{C}P^1$$

голоморфное отображение с заданным типом особенностей. Две пары (Σ_1, f_1), (Σ_2, f_2) называются изоморфными, если существует голоморфный диффеоморфизм

$$h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$$

такой, что $f_2 \circ h = f_1$. Тип особенностей функции f, также иногда называемый паспортом голоморфной функции, задаётся набором разбиений $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ числа n — степени отображения f. Предположим, разбиение λ_i имеет вид $(\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{im_i})$. Говорят, что f

имеет особенность данного типа, если она имеет s критических значений, причем прообраз i-го из них (для всех $i = 1, \ldots, s$) состоит из m_i критических точек кратностей $\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{im_i}$. При этом "критической точкой кратности 1" условно называется некритическая точка.

Вычисление классического числа Гурвица легко сводится к комбинаторной задаче об умножении перестановок: с точностью до тривиальных множителей число Гурвица равно количеству способов представить единичную перестановку в виде произведения s перестановок (элементов группы S_n), имеющих циклические типы $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$. Для произвольного s и набора разбиений $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ решение этой задачи лежит за пределами возможностей современной науки. Хорошо изучен, например, в статье Казаряна и Ландо об алгебро-геометрическом доказательстве гипотезы Виттена, частный случай, когда одно из разбиений ($\lambda_1 = \lambda$) — произвольное, а все остальные имеют вид $2^1 1^{n-2}$, то есть, когда прообраз критического значения состоит из одной критической точки минимальной кратности, и нужного количества некритических точек. И этом случае соответствующее число Гурвица $h_{g,\lambda}$ может быть вычислено быстрым алгоритмом; набор $h_{g,\lambda}$ удовлетворяет ряду тождеств, связанных с теорией интегрируемых систем.

Зафиксируем точку $p \in \mathbb{C}P^2$ и рассмотрим множество $\mathcal{W}_{g,d,\ell}$ состоящее из всех неприводимых плоских кривых степени $d + \ell$, имеющих нод кратности ℓ в точке p (то есть, ℓ гладких локальных ветвей, пересекающихся трансверсально в точке p; случай $\ell = 0$ отвечает точке p не лежащей на кривой), и имеющих вне p только простые ноды, возможно, в нулевом количестве. Множество $\mathcal{W}_{g,d,\ell}$ непусто если и только если

$$g \leqslant \begin{pmatrix} d+\ell-1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \ell \\ 2 \end{pmatrix}$$

Множество $\mathcal{W}_{g,d,\ell}$ называют (открытым, обобщённым) многобразием Севери, классическому случаю отвечает $\ell = 0$. Изучение этого объекта было инициировано Ф. Севери в 1920-ые годы. Как позднее было показано в известных работах Харриса $\mathcal{W}_{g,d,\ell}$ является неприводимым и имеет размерность $3d + 2\ell + g - 1$. Другой хорошо изученной характеристикой многообразий Севери является их степень. Число Гурвица-Севери, $\mathfrak{H}_{g,d,\ell}$, определение которого мы дадим ниже, представляет собой не менее естественную чем степень характеристику многобразия $\mathcal{W}_{g,d,\ell}$ но при этом куда более сложно вычислимую для троек (g,d,ℓ) общего положения.

Число Гурвица–Севери плоских кривых $\mathfrak{H}_{g,d,\ell}$ было впервые введено в частном случае Онгаро и Б. Шапиро, а в общем случае, позднее, — в работе Ю. Бурмана и Б. Шапиро в рамках исследований нашей лаборатории. Оно определяется как количество классов изоморфизма пар (Σ,f), где $\Sigma \subset \mathbb{C}P^2$ — плоская кривая, а

$$f : \Sigma \to \mathbb{C}P^1$$

проекция кривой Σ из точки $p \in \mathbb{C}P^2$, имеющая данные особенности. При определении типа особенности, в отличие от классического случая, нужно рассматривать не только критические точки функции f, соответствующие касательным к кривой Σ, проведенным через центр проекции p, но и узлы (ноды) кривой Σ. Кроме того, центру проекции p разрешается лежать на кривой, в том числе и в ноде произвольной кратности, и при определении типа особенности следует различать касательные к кривой в точке p и касательные, проходящие через p, но касающиеся кривой в другой точке.

На предыдущих этапах нами был разобран случай, когда все критические значения функции f и все ноды кривой Σ, за исключением точки p, простые.

В ходе дальнейших исследований, оказалось, что в зависимости от рода g и степени d кривой Σ, а также количества ℓ гладких ветвей кривой, пересекающихся в точке p, следует различать три случая:

а) Гибкий случай, когда $d + \ell \geqslant g + 2$.
б) Полужёсткий случай, когда $d + \ell < g + 2 \leqslant d + 2\ell$.
в) Жёсткий случай, когда $d + 2\ell < g + 2$.

Доказанный нами для гибкого случая результат утверждает следующее. Пусть (g,d,ℓ) удовлетворяют неравенству

$$d + \ell \geqslant g + 2$$

(гибкий случай). Тогда для трех наборов прямых $a_1 \dots, a_{2d+2g-2}$, $b_1 \dots, b_\ell$ и $x_1 \dots, x_{d+\ell-g-2}$ общего положения, проходящих через точку p, количество кривых $\Sigma \subset \mathbb{C}P^2$ рода g с нодом кратности ℓ в точке p, касающихся прямых $b_1 \dots, b_\ell$ в точке p, прямых $a_1 \dots, a_{2d+2g-2}$ в точках, отличных от p, и имеющих ноды на прямых $x_1 \dots, x_{d+\ell-g-2}$ (число Гурвица–Севери $\mathfrak{H}_{g,d,\ell}$), равно

$$\mathfrak{H}_{g,d,\ell} = \binom{d}{2}^{d+\ell-g-2} d^\ell h_{g,1^d}/d!,$$

где $h_{g,1^d}$ — классическое число Гурвица.

В полужестком случае полученный результат имеет следующий вид. Пусть (g,d,ℓ) удовлетворяют неравенствам

$$d + \ell < g + 2 \leqslant d + 2\ell$$

(полужесткий случай). Тогда для двух наборов прямых $a_1 \dots, a_{2d+2g-2}$ и $b_1 \dots, b_{d+2\ell-g-2}$ общего положения, проходящих через точку p, количество кривых $\Sigma \subset \mathbb{C}P^2$ рода g с нодом кратности ℓ в точке p, касающихся прямых $b_1 \dots, b_{d+2\ell-g-2}$ в точке p и прямых $a_1 \dots, a_{2d+2g-2}$ в точках, отличных от p (число Гурвица–Севери $\mathfrak{H}_{g,d,\ell}$), равно

$$\mathfrak{H}_{g,d,\ell} = d^{d+2\ell-g-2}\binom{2g-d-\ell-1}{g-3}h_{g,1^d}/d!,$$

где $h_{g,1^d}$ — классическое число Гурвица.

В жёстком случае способ вычисления числа Гурвица–Севери на настоящий момент неизвестен. По современным представлениям считается, что этот случай требует совершенно особой, новой техники и подходов.

Введённые понятия и полученные результаты можно сравнить и сопоставить с известными характеристиками для ряда классических случаев.

а) Проекция гладкой кубики из точки, на ней не лежащей. Этому случаю отвечает тройка $(g,d,\ell) = (1,3,0)$ что даёт гибкий случай. Классическое число Гурвица $h_{1,1^3} = 240$, следовательно $\mathfrak{H}_{1,3,0} = 40$. Этот результат был получен ранее Онгаром и Б. Шапиро.

б) Проекция гладкой кубики из точки, лежащей на ней. Соответствующая тройка $(g,d,\ell) = (1,2,1)$ снова попадает в гибкий случай. Классическое число Гурвица $h_{1,1^2} = 1$, и значит, число Гурвица-Севери $\mathfrak{H}_{1,3,0} = 1$. В данном случае результат может быть подтверждён непосредственным прямым вычислением.

в) Проекция нодальной кубики из внешней точки отвечает гибкой тройке $(g,d,\ell) = (0,3,0)$. Для такой конфигурации $h_{0,1^3} = 24$. Таким образом, $\mathfrak{H}_{0,3,0} = 12$. Для непосредственной проверки результата в этом случае можно использовать систему компьютерной алгебры.

г) Проекция нодальной кубики из её гладкой точки соответствует гибкой тройке $(g,d,\ell) = (0,2,1)$. Классическое число Гурвица $h_{0,1^2} = 1$, и следовательно, для числа Гурвица-Севери получаем $\mathfrak{H}_{0,2,1} = 1$, что легко подтверждается непосредственным вычислением числа кривых вручную.

д) Проекция гладкой квартики из точки, лежащей на ней. В данном случае тройка (g,d,ℓ) равна $(3,3,1)$, что соответствует полужёсткому случаю. Классическое число Гурвица $h_{3,1^3} = 19680$, из чего получаем число Гурвица-Севери $\mathfrak{H}_{0,2,1} = 3280$.

Кроме того, отметим, что полученные результаты и разработанная техника позволяют наметить ряд важных и перспективных направлений для дальнейшего развития теории. Приведём несколько из них, особенно на наш взгляд интересных.

а) Рассмотренное нами определение чисел Гурвица-Севери очевидным образом допускает непосредственное обобщение с класса многообразий Севери $\mathcal{W}_{g,d,\ell}$ на более общий класс многообразий $\mathcal{W}_{g,d,\ell,\mu}$, ранее появлявшийся в работах Харриса и Рана. А именно речь идёт о введении дополнительной характеристики μ, описывающей порядок касания рассматриваемых кривых с заданными прямыми, проходящими через точку p. Можно ожидать, что в этой более общей постановке теоремы описывающие числа Гурвица-Севери для жёстких и полужёстких троек должны иметь прямые аналоги и обобщения.

б) Проблема вычисления чисел Гурвица-Севери для простейшего из жёстких случаев $g = (d-1)(d-2)/2, \ell = 0$, то есть, когда гладкая плоская кривая степени d проецирается из точки, на ней не лежащей, имеет крайне сильное сходство с задачей вычисления чисел Цойтена. Конкретнее, в некотором специальном случае, проблема Цойтена состоит в нахождении числа гладких плоских кривых степени d, касающихся заданного набора $d(d+3)/2$ прямых общего положения. Число Гурвица-Севери для случая $g = (d-1)(d-2)/2, \ell = 0$ даёт число $G-$орбит гладких кривых степени d, касающихся заданного множества $d(d+3)/2 - 3$ прямых, проходящих через точку p, где группа $G \subset PGL(3,\mathbb{C})$ состоит из проективных преобразований $\mathbb{C}P^2$ сохраняющих точку p и все прямые, проходящие через p. В настоящее время обе проблемы считаются нерешёнными, и по общему мнению трудными.

в) Один из возможных подходов к вычислению чисел Гурвица в нестабильных случаях, таких как $((d-1)(d-2)/2, d, 0)$ состоит в применении тропической геометрии. Так например, Бертран, Бругалл и Михалкин смогли получить некоторые классические числа Цойтена с помощью изучения их тропических аналогов.

г) Наконец, было бы крайне интересно выявить возможные связи чисел Гурвица-Севери с какими-либо инвариантами Громова-Виттена плоских кривых.

1.8 Матричные теоремы о деревьях

Как и планировалось ранее, в рамках деятельности лаборатории были продолжены работы по исследованию матричных теорем о деревьях. Классическая матричная теорема о деревьях открыта Кирхгоффом в 1847 году. В ней устанавливается связь между главным минором лапласовской $n \times n$ матрицы с некоторой суммой мономов, проиндексированных множеством деревьев с n вершинами. С тех пор теорема Кирхгофа оставалась популярным объектом исследований, и послужила основанием для немалого числа, порой неожиданных, и крайне разнообразных обобщений, аналогий, приложений и новых доказательств в различных областях математики и физики. Например, в этой связи можно упомянуть обобщение на произвольные миноры, обобщение на случай несимметричных матриц Лапласа и на графы с произвольным 2-ядром, на лапласианы дискретных линейных расслоений со связностями, определение и исследование свойств аналога данной конструкции для пфаффианов, обобщение на случай матриц, представимых функциями от операторов ранга один, включая аналоги всех коксетеровских подгрупп и приложения в исследовании грассмановых гипердетерминантов. И хотя исходная задача, сформулированная изначально Кирхгоффом, касалась вычисления сопротивления в электроцепи, разработанная теория и подходы позднее нашли своё применение в таких разных областях математики, как, например, стохастические процессы и изучение вложимости графов в поверхности.

Перейдём к постановке задачи и деталям конструкции. Рассмотрим квадратную матрицу L размера $n \times n$, на внедиагональных местах которой стоят независимые переменные a_{ij}, а на i-ом месте диагонали (для всех $i = 1 \dots, n$) — выражение $-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Классическая матричная теорема о деревьях, впервые доказанная Г. Кирхгоффом в 1847 г. (для симметрических матриц и главных миноров коразмерности 1) и в своей нынешней форме, позднее — У. Таттом , утверждает, что минор матрицы L, полученный вычеркиванием строк с номерами $i_1 \dots, i_s$ и столбцов с номерами $j_1 \dots, j_s$, равен, с точностью до знака, сумме мономов вида $a_{p_1 q_1} \dots a_{p_{n-s} q_{n-s}}$, где граф, построенный по набору вершин $1 \dots, n$ и рёбер $(p_1 q_1) \dots, (p_{n-s} q_{n-s})$ представляет собой s-компонентный лес, такой что в каждой компоненте его имеется корень — вершина i_α, содержится одна из вершин j_β $(\alpha, \beta = 1 \dots, n)$, и все ребра направлены в сторону корня.

В ходе проведённых нами в рамках научной деятельности лаборатории исследований удалось сформулировать и доказать крайне важное и далеко идущее обобщение матричной теоремы о деревьях.

Для формулировки и описания результата необходимо привести ряд предварительных определений. А именно, будем называть ориентированный граф сильно связным, если для любых двух его вершин существует соединяющий их ориентированный путь из ребер. Далее, граф называется сильно полусвязным, если каждая его компонента связности (в топологическом смысле) является сильно связным графом. Это условие эквивалентно тому, что любое ребро графа входит в некоторый ориентированный цикл. В случае же если граф вообще не содержит ориентированных циклов он называется ациклическим. Напомним также, что вершина ориентированного графа называется источником, если в нее не входит ни одно ребро, и стоком, если ни одно ребро из нее не выходит. Изолированная вершина является источником и стоком одновременно. Наконец, ребро называется петлей, если его конец совпадает с его началом.

Зафиксируем натуральные числа n и k и рассмотрим векторное пространство $\mathcal{G}_{n,k}$, порожденное всеми ориентированными графами с n нумерованными вершинами и k нумерованными ребрами. На определённом таким образом векторном пространстве можно ввести оператор Лапласа

$$\Delta : \mathcal{G}_{n,k} \to \mathcal{G}_{n,k}$$

задав его как линейный оператор, действующий известным образом на образующих пространства графов. Пусть Γ — ориентированный граф с нумерованными вершинами и ребрами, такой что его рёбра с номерами $p_1 \ldots, p_m$ являются петлями. Тогда $\Delta(\Gamma)$ равен сумме, со знаком минус, графов, полученных из графа Γ заменой петель на такие всевозможные ребра с теми же номерами и начальными вершинами, которые не являются петлями. Тем самым, результирующая сумма $\Delta(\Gamma)$ будет состоять из $m(n-1)$ члена.

Выберем теперь из набора вершин графа Γ фиксированное подмножество

$$I = \{i_1 \ldots, i_s\} \subset \{1 \ldots, n\}$$

и обозначим через $A_I \in \mathcal{G}_{n,k}$ сумму всех ациклических графов, в которых вершины $i_1 \ldots, i_s$, и только они, являются стоками. Далее, введём обозначение

$$Y_I = \sum_G (-1)^{\beta_0(G)} G \in \mathcal{G}_{n,k},$$

где $\beta_0(G)$ — количество компонент связности графа G, а суммирование производится по множеству всех сильно полусвязных графов, в которых вершины $i_1 \ldots, i_s$ (и только они) являются изолированными.

В определённых выше обозначениях наш основной результат гласит, что имеет место соотношение

$$\Delta\big(Y_I\big) = A_I.$$

Рассмотрим подробнее соответствие полученного соотношения с классическими результатами из данной области.

Очевидно, что любая компонента ациклического графа непременно должна содержать сток. Отсюда вытекает, что количество s стоков в графе $G \in \mathcal{G}_{n,k}$ не может быть меньше, чем $n-k$, из чего следует, что при $s < n-k$ имеет место равенство $A_I = 0$. Далее, если граф является сильно полусвязным, то он не может иметь стоки нигде кроме изолированных вершин. Следовательно, количество неизолированных вершин $n-s$ не может превосходить количество рёбер — в силу чего, при том же условии на число стоков $s < n-k$ получаем условие $Y_I = 0$.

Рассмотрим теперь граничный случай $s = n - k$. Как следует из сказанного выше, при данном соотношении параметров каждая компонента связности сильно полусвязного графа является ориентированным циклом. Предположим $m \in \{1 \ldots, n\} \setminus I$, и обозначим через $\sigma(m)$ вершину, следующую за m в соответствующем цикле. Тогда σ будет являться перестановкой множества $\{1 \ldots, n\} \setminus I$ и её четность очевидно равна $(-1)^{\beta_0(G)}$.

Всякому графу G, имеющему n нумерованных вершин, можно сопоставить функцию на множестве $\mathrm{Mat}(n)$ матриц $n \times n$. А именно, значение $G(A)$, где $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ — матрица, можно положить равным произведению $\prod_{(pq)} a_{pq}$, где умножение производится по множеству всех ребер (pq) графа G. Это соответствие допускает продолжение по линейности на всё векторное пространство $\mathcal{G}_{n,k}$. Из приведенного выше описания сильно полусвязных графов с $s = n - k$ стоками следует, что в данном случае число $Y_I(A)$ в точности равно диагональному главному минору матрицы A, полученному вычеркиванием строк и столбцов с номерами $i_1 \ldots, i_s$. В свою очередь из определения оператора Лапласа Δ теперь следует, что $\Delta(Y_I)(A)$ представляет собой аналогичный описанному выше минор, но взятый из матрицы L. Но теперь, поскольку ациклические графы не могут содержат петель, а матрицы A и L совпадают вне своих диагоналей, получаем равенство

$$A_I(A) = A_I(L).$$

Таким образом, из приведённых выше рассуждений немедленно следует, что классическая матричная теорема Кирхгоффа о деревьях для диагональных миноров в действительности представляет собой частный (для $s = n - k$) случай доказанной нами теоремы о структуре действия оператора Лапласа .

Подводя итог, можно заметить, что в данном направлении нами получены весьма важные и содержательные результаты, и наработан существенный задел для дальнейших исследований данной области науки с хорошими перспективами на успех.

1.9 Теоремы о сходимости для детерминантных мер

В соответствии с намеченным ранее планом работ были продолжены исследования разнообразных вопросов сходимости для ряда различных детерминантных мер.

В частности, нами была изучена сходимость вероятностных детерминантных мер, заданных локально ядерными положительными сжатиями. Сходимость в пространстве локально-ядерных операторов влечёт за собой слабую сходимость соответствующих детерминантных мер в пространстве вероятностных мер на пространстве конфигураций. Нами были рассмотрены процессы, индуцированные бесселевским точечным процессом, а также возмущения конечного ранга бесселевского точечного процесса. В ходе исследований удалось получить достаточные условия сходимости как индуцированных процессов, так и процессов, отвечающих возмущениям конечного ранга.

Для бесконечных детерминантных мер, полученных как возмущения конечного ранга, установлена сходимость семейства детерминантных процессов, полученных индуцированием с исчерпывающего семейства подмножеств фазового пространства, к изначальному, невозмущенному детерминантному процессу.

Нами построены и исследованы подходящие подмножества пространства конфигураций в пространстве конечных мер на фазовом пространстве E и даны достаточные условия предкомпактности семейств детерминантных мер в слабой топологии на пространстве конечных мер, определённых, в свою очередь, на пространстве конечных мер на E. Эта топология сильнее, чем обычная слабая топология на пространстве конечных мер на пространстве мер Радона, которая эквивалентна слабой топологии на пространстве конечных мер на пространстве конфигураций. Также получено доказательство исчезновения "гауссового параметра" для эргодических компонент мер Пикрелла. Изучена слабая сходимость индуцированных процессов и возмущений конечного ранга в этой новой топологии.

В рамках этого круга задач мы рассмотрели вероятностные детерминантные меры, индуцированные положительными сжимающими операторами. Во-первых, напомним, что сходимость последовательности таких операторов в пространстве локально ядерных операторов влечет слабую сходимость соответствующих вероятностных детерминантных мер в пространстве конечных мер на пространстве конфигураций.

Перейдём к непосредственому описанию рассматриваемых конструкций и подробному описанию полученных результатов.

Пусть семейство операторов $K_n \in \mathscr{I}_{1,\mathrm{loc}}(E,\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, и оператор $K \in \mathscr{I}_{1,\mathrm{loc}}(E,\mu)$ индуцируют вероятностные детерминантные меры $\mathbb{P}_{K_n}$, $n \in \mathbb{N}$, и $\mathbb{P}_K$ соответственно на пространстве $\mathrm{Conf}(E)$. В таком случае, из сходимости

$$K_n \to K \text{ при } n \to \infty$$

в пространстве $\mathscr{I}_{1,\mathrm{loc}}(E,\mu)$ следует сходимость

$$\mathbb{P}_{K_n} \to \mathbb{P}_K \text{ при } n \to \infty$$

в слабой топологии на пространстве $\mathfrak{M}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{Conf}(E))$.

Приведённое выше утверждение является непосредственным следствием определения вероятностных детерминантных мер.

Далее, непосредственно из классической формулы для асимптотики Гейне – Мелера можно получить в качестве прямого следствия что для любого $s > -1$ выполняется

$$\tilde{K}_n^{(s)} \to \tilde{J}_s \text{ в } \mathscr{I}_{1,\mathrm{loc}}((0,+\infty),\mathrm{Leb})$$

и

$$\mathbb{P}_{\tilde{K}_n^{(s)}} \to \mathbb{P}_{\tilde{J}_s} \text{ в } \mathfrak{M}_{\mathrm{fin}}\mathrm{Conf}((0,+\infty)).$$

Наша следующая цель — показать, что при определённых дополнительных условиях описанная выше сходимость сохраняется как при переходе к индуцированным процессам, так и при переходе к возмущениям конечного ранга.

Ниже мы приводим точные формулировки.

Сперва напомним, что для оператора проектирования Π, действующего в пространстве $L_2(E,\mu)$, и неотрицательной ограниченной измеримой функции g на пространстве E, для которой оператор $1+(g-1)\Pi$ обратим, мы ввели оператор

$$\tilde{\mathfrak{B}}(g,\Pi) = \sqrt{g}\Pi(1+(g-1)\Pi)^{-1}\sqrt{g}.$$

Теперь зафиксируем функцию g и установим соответствие между сходимостью последовательности проекторов Π_n и сходимостью соответствующей последовательности $\tilde{\mathfrak{B}}(g,\Pi_n)$.

Рассмотрим набор Π_n,$\Pi \in \mathscr{I}_{1,\mathrm{loc}}(E,\mu)$ — операторов ортогонального проектирования и

$$g : E \to [0,1]$$

измеримую функцию, такую что

$$\sqrt{1-g}\Pi\sqrt{1-g} \in \mathscr{I}_1(E,\mu)$$

и

$$\sqrt{1-g}\Pi_n\sqrt{1-g} \in \mathscr{I}_1(E,\mu), n \in \mathbb{N}.$$

Предположим кроме того, что дополнительно выполняются набор следующих условий.

а) Во-первых,

$$\Pi_n \to \Pi \text{ при } n \to \infty$$

в пространстве $\mathscr{I}_{1,\mathrm{loc}}(E,\mu)$;

б) В-вторых, для предельного оператора выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{tr}\,\sqrt{1-g}\Pi_n\sqrt{1-g} = \mathrm{tr}\,\sqrt{1-g}\Pi\sqrt{1-g}$$

в) В-третьих, оператор $1 + (g-1)\Pi$ обратим.

Тогда операторы $1 + (g-1)\Pi_n$ также являются обратимыми для всех достаточно больших n, и кроме того, выполняется предельное соотношение

$$\tilde{\mathfrak{B}}(g, \Pi_n) \to \tilde{\mathfrak{B}}(g, \Pi) \text{ в } \mathscr{I}_{1,\mathrm{loc}}(E,\mu)$$

и, соответственно,

$$\mathbb{P}_{\tilde{\mathfrak{B}}(g,\Pi_n)} \to \mathbb{P}_{\tilde{\mathfrak{B}}(g,\Pi)} \text{ при } n \to \infty$$

в слабой топологии на $\mathfrak{M}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{Conf}(E))$.

В качестве полезного существенного замечания укажем, что второе из дополнительных условий может быть заменено на требование того, чтобы операторы $(g-1)\Pi_n$ сходились к $(g-1)\Pi$ по норме. Это условие более слабое, и именно им мы фактически пользуемся. Тем не менее, в приложениях и конкретных вычислениях будет удобнее проверять сходимость следов, чем сходимость операторов по норме.

Для доказательства сформулированного выше утверждения об обратимости операторов Π_n и сходимости последовательностей операторов $\tilde{\mathfrak{B}}(g, \Pi_n)$ и мер $\mathbb{P}_{\tilde{\mathfrak{B}}(g,\Pi_n)}$ заметим, что из первых двух условий и теоремы Грюмма следует, что

$$\sqrt{1-g}\,\Pi_n \to \sqrt{1-g}\,\Pi \text{ в } \mathscr{I}_2(E, \mu),$$

а следовательно, тем более, должно выполняться

$$(g-1)\Pi_n \to (g-1)\Pi$$

по норме при $n \to \infty$. Теперь возьмем ограниченное борелевское подмножество $D \subset E$ и проверим, что при $n \to \infty$ выполняется

$$\chi_D \tilde{\mathfrak{B}}(g, \Pi_n)\chi_D \to \chi_D \tilde{\mathfrak{B}}(g, \Pi)\chi_D \text{ в пространстве } \mathscr{I}_1(E,\mu).$$

Проверка этого свойства составляет основную часть доказательства.

Из сделанных при формулировке утверждения предположений немедленно непосредственно следует сходимость по норме

$$(1 + (g-1)\Pi_n)^{-1} \to (1 + (g-1)\Pi)^{-1}.$$

Более того, имеет место и сходимость

$$\chi_D \Pi_n \to \chi_D \Pi$$

при $n \to \infty$ в сильной операторной топологии. Кроме того, можно заметить, что в силу всё тех же дополнительных исходных предположений, справедливо и соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{tr} \chi_D \Pi_n \chi_D = \operatorname{tr} \chi_D \Pi \chi_D.$$

Из последнего утверждения, в силу теоремы Грюмма вытекает, что имеет место сходимость

$$\chi_D \Pi_n \to \chi_D \Pi$$

по норме Гильберта–Шмидта, и, тем более, по норме.

Таким образом, мы получили подтверждение сходимости

$$\chi_D \tilde{\mathfrak{B}}(g, \Pi_n) \chi_D \to \chi_D \tilde{\mathfrak{B}}(g, \Pi) \chi_D$$

по норме. Чтобы теперь проверить требуемую нам сходимость в смысле пространства $\mathscr{I}_1$, снова, используя теорему Грюмма, достаточно проверить справедливость соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{tr} \chi_D \tilde{\mathfrak{B}}(g,\Pi_n) \chi_D = \operatorname{tr} \chi_D \tilde{\mathfrak{B}}(g, \Pi) \chi_D.$$

С этой целью заметим, во-первых, что для любого ограниченного оператора A и пары операторов $K_1, K_2 \in \mathscr{I}_2$ непосредственной проверкой устанавливается, что

$$|\operatorname{tr}(K_1^* A K_2)| \leqslant ||K_1||_{\mathscr{I}_2} \cdot ||A|| \cdot ||K_2||_{\mathscr{I}_2}.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что для операторов K_1, K_2 из пространства $\mathscr{I}_2$ и произвольного ограниченного оператора A функция $\operatorname{tr}(K_1^* A K_2)$ будет непрерывной. После чего, требуемую сходимость следов

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{tr} \chi_D \tilde{\mathfrak{B}}(g,\Pi_n) \chi_D = \operatorname{tr} \chi_D \tilde{\mathfrak{B}}(g, \Pi) \chi_D.$$

можно получить как следствие из этой непрерывности, в силу того, что согласно определению

$$\chi_D \tilde{\mathfrak{B}}(g,\Pi) \chi_D = \chi_D \sqrt{g-1} \Pi (1 + (g-1)\Pi)^{-1} \Pi \sqrt{g-1} \chi_D,$$

и имеют место сходимость по норме

$$(1 + (g-1)\Pi_n)^{-1} \to (1 + (g-1)\Pi)^{-1}.$$

и сходимость последовательности

$$\chi_D \Pi_n \to \chi_D \Pi.$$

в смысле $\mathscr{I}_2$.

Таким образом, из приведённых выше рассуждений вытекает и окончательное доказательство основного заявленного результата о сходимости вероятностных детерминантных мер

$$\mathbb{P}_{\tilde{\mathfrak{B}}(g,\Pi_n)} \to \mathbb{P}_{\tilde{\mathfrak{B}}(g,\Pi)} \text{ при } n \to \infty$$

в слабой топологии на $\mathfrak{M}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{Conf}(E))$.

1.10 Спектральные последовательности и когомологии неособых сечений однородных расслоений

Многие интересные алгебраические многообразия получаются как нули сечений G-однородных векторных расслоений, где G – полупростая группа Ли. Классические примеры – гиперповерхности и полные пересечения в проективных пространствах. Сечение векторного расслоения называется неособым, если оно трансверсально пересекает нулевое сечение. Обозначим множество таких сечений через U. На U действует группа G. Имеются спектральные последовательности типа Васильева, которые вычисляют когомологии U и G. Рационально первые несколько столбцов первой последовательности совпадают со второй. Возникает вопрос, не получаются ли соответствующие классы одни из других при отображении орбит.

Стенбринк, Петерс и А. Горинов раннее доказали, что в случае полных пересечений в проективных пространствах ответ положительный. В то же время же появились идеи о возможном подходе к доказательству общего случая. В этом году нам удалось успешно довести намеченную тогда программу до конца в случае линейных расслоений. При этом в ходе работ возникла уверенность, что в последующем результат получится распространить на случай расслоений произвольного ранга.

Перечислим несколько важнейших возможных приложений полученных нами в этой области результатов.

a) Рациональные когомологии пространства U (дополнения к дискриминанту) очень часто распадаются в тензорное произведение когомологий U/G (пространства модулей) и когомологий группы G. На практике, хоть пространство U/G "меньше чем U, и когомологии U вычислить проще. Для этого можно использовать, например, спектральную последовательность Васильева. Зная теорему о расщеплении, мы из рациональных когомологий U можем вывести рациональные когомологии U/G, которые часто представляют независимый интерес.
Частным случаем являются куски естественной стратификации пространств модулей кривых некоторых родов. Например, кривая рода 3 или гиперэллиптична, или являет-

ся квартикой в $\mathbb{P}^2$, а кривая рода 4 гиперэллиптична или полное пересечение квадрики и кубики в $\mathbb{P}^3$. Именно это разбиение этих пространств модулей позволило в свое время Лойенге, Васильеву и Томмази вычислить их когомологии. Можно надеяться, что подобным образом удастся посчитать когомологии $\mathcal{M}_5$, которые на данный момент неизвестны.

б) Теорема о расщеплении когомологий U в тензорное произведение целочисленно неверна. Однако, насколько она неверна, удаётся проконтролировать. Предположительно, из этого наблюдения можно получить (практическая реализация пока что удалась только лишь в случае линейных расслоений) массу следствий следующего типа: порядок группы автоморфизмов неособого сечения однородного векторного расслоения является делителем некоторого явного числа, зависящего от классов Черна расслоения.

в) Многие из этих результатов допускают распространение на случай конечной характеристики. А именно, результаты про распадение когомологий в тензорное произведение остаются верны и для конечной характеристики если произвести замену обычных когомологий на стековые этальные, при условии что дискриминантное многообразие определено над $\mathbb{Z}$. Пока что неизвестно, является ли это условие в самом деле необходимым. Результаты, касающиеся групп автоморфизмов остаются верны без модификаций, но лишь для части порядка группы, взаимно простой с характеристикой.

1.11 О явной разрешимости проблемы Римана-Гильберта не эллиптической кривой

Одним из важных направлений работы коллектива лаборатории было исследование ряда обратных задач монодромии и в частности, различных обобщений проблемы Римана-Гильберта. Проблема Римана-Гильберта является одной из классических и наиболее известных обратных задач монодромии. Из того что множество решений линейного дифференциального уравнения есть конечномерное векторное пространство, а аналитическое продолжение всякого решения уравнения с мероморфными коэффициентами также является решением, следует, что с каждым таким линейным дифференциальным уравнением на сфере Римана связано действие фундаментальной группы сферы с проколами в особых точках коэффициентов уравнения на пространстве решений уравнения. Взятый в точке z_0 росток фундаментального набора решений $Y_{z_0}(z)$ под действием аналитического продолжения вдоль петли γ, начинающейся в отмеченной точке z_0 переходит в некоторый другой росток $g_\gamma\big(Y(z)\big)$ который, будучи базисом того же самого конечномерного пространства решений связан с исходным базисом умножением справа не некоторую невырожденную матрицу G_γ.

$$Y_{z_0}(z) \mapsto g_\gamma\big(Y(z)\big) = Y_{z_0}(z) G_\gamma$$

Несложно проверить, что возникающий матричный множитель G_γ зависит лишь от гомотопического класса петли $[\gamma]$. Также можно проверить, что характер зависимости G_γ от выбора начального ростка $Y_{z_0}(z)$ и отмеченной точки z_0 таковы, что описанная конструкция корректно определяет связанное с имеющим мероморфные коэффициенты линейным дифференциальным уравнением порядка p с особыми точками $\{a_1,\ldots,a_n\}$ представление фундаментальной группы сферы Римана с проколами в $\{a_1,\ldots,a_n\}$.

$$\chi : \pi_1\big(\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus \{a_1,\ldots,a_n\}\big) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{C}^p) \simeq \mathrm{GL}(p,\mathbb{C})$$
$$\chi : [\gamma] \mapsto g_\gamma \simeq G_\gamma^{-1}$$

где эквивалентности в правых частях отвечают выбору базиса для координатного описания операторов. Полученное таким образом представление фундаментальной группы называется представлением монодромии уравнения, а образ $\mathrm{Im}(\chi)$ группой монодромии уравнения. В 1850-ых годах Б. Риманом впервые был поставлен вопрос о построении, или хотя бы существовании различных классов дифференциальных уравнений с заданными набором особых точек и группой монодромии. Как оказалось позже, на сфере Римана данный вопрос наиболее интересен и содержателен для класса фуксовых систем,

$$\frac{dy}{dz} = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{z-a_i} y, \quad y \in \mathbb{C}^p, \quad B_i \in \mathrm{GL}(p,\mathbb{C}), \quad \sum_{i=1}^{n} B_i = 0$$

то есть, систем линейных дифференциальных уравнений с полюсами первого порядка. Этот случай был выделен в отдельную задачу – проблему Римана-Гильберта, также известную как двадцать первая проблема Гильберта.

Долгое время, проблема Римана-Гильберта ошибочно считалась решённой положительно, хотя и не конструктивно, что убавило интерес к исследованиям в данной области и сместило основное их направление в сторону поисков эффективно решаемых случаев. Однако, в конце двадцатого века ряд неожиданных открытий, а именно, обнаружение Джимбо, Мива и Сато связи проблемы Римана-Гильберта с рядом задач квантовой теории поля и построение ими при некоторых дополнительных ограничениях решения, имеющего физический смысл, и по-построению оказавшегося изомонодромным, свойство, оказавшееся крайне важным в дальнейшем, затем, обнаруженное Б. Мальгранжем свойство Пенлеве у шлезингеровских изомонодромных деформаций и наконец, полученное А. Болибрухом в общем случае отрицательное решение проблемы Римана-Гильберта инициировали до сих пор продолжающийся всплеск интереса к обратным задачам монодромии. В настоящее время наиболее популярными и актуальными направлениями исследования в этой области являются являются следующие три направления: исследование свойств тау-функций изомонодромных деформаций и уравнений Пенлеве и их связей с конформными блоками конформных теорий поля; исследования изомонодромных деформаций на римановых поверхностях, в особенности на эллиптических кривых в связи с многочисленными плодотворными приложениями в теории классических и квантовых интегрируемых систем; и наконец, исследование алгебро-геометрических свойств отображения монодромии и изомонодромных деформаций имеющее помимо физических приложений большую важность для таких областей фундаментальной математики как алгебраическая геометрия, пуассонова геометрия и теория специальных функций.

Как уже упоминалось, в общем случае отрицательное решение проблемы Римана-Гильберта было получено А. Болибрухом. Им же было показано, что всякое неприводимое представление, тем не менее, может быть реализовано монодромией фуксовой системы независимо от положения особых точек. Помимо неприводимости известны и другие достаточные условия положительной разрешимости проблемы Римана-Гильберта. Положительно решается проблема для представлений размерности один и два, для коммутативных групп монодромии, для представлений с хотя бы одной диагонализуемой локальной монодромией, и ряда других случаев. При этом полного описания достаточных условий положительной разрешимости до сих пор не получено. Разработанные при решении задачи подходы и методы, как и сам полученнный результат оказались важными и имеющими множество приложений для большого круга задач современной математической физики и аналитической теории дифференциальных уравнений. Представляют интерес и различные возможные обобщения данной задачи.

Например, можно рассмотреть вопрос об обобщении задачи на случай отличных от сферы римановых поверхностей, в первую очередь, на эллиптические кривые. Первый вопрос с которым при этом придётся столкнуться это обобщение понятия фуксовой системы. Естественная попытка обобщения, основанная на том, что классические фуксовы системы очевидно находятся в соответствии с логарифмическими дифференциальными 1-формами на сфере Римана, или, что то же самое, с логарифмическими связностями в тривиальном расслоении на сфере Римана, немедленно столкнётся с той трудностью, что в силу несложного подсчёта размерностей для римановых поверхностей рода большего нуля число параметров, задающих представление фундаментальной группы проколотой поверхности превосходит число параметров определяющих связность, препятствие к реализации имеет топологическую природу, и в такой постановке, задача очевидно имеет в общем случае отрицательное решение.

По этой причине приходится использовать более сложные конструкции связанные с расслоениями. А именно, можно заметить, что при решении классической задачи на сфере Римана существеннейшую роль играла полустабильность тривиального расслоения на сфере Римана наряду со стабильностью пар расслоение-связность для произвольных голоморфных расслоений с неприводимой монодромией. Напомним, что расслоение E называется полустабильным если для всякого подрасслоения F его наклон

$$\kappa(F) = \deg F / \operatorname{rk} F$$

не превосходит наклона всего расслоения E, если же неравенство строгое, то расслоение называется стабильным. Для пар расслоение-связность выполнение тех же условия требуется только от стабилизирующихся связностью подрасслоений F. Именно эти понятия являются ключевыми при геометрическом подходе к проблеме Римана-Гильберта, при таком взгляде, можно считать, что тривиальные расслоения в классической задаче возникли только потому, что в силу теоремы Биркгофа-Гротендика на сфере не существует других полустабильных голоморфных расслоений степени ноль. Естественным было бы ожидать, что возможные обобщения должны строиться с использованием именно такого подхода.

Таким образом, мы получаем следующую формулировку обобщения проблемы Римана-Гильберта: по заданным компактной кривой Λ рода g, набору точек $\{a_1, \ldots, a_n\} \in \Lambda$ и представлению фундаментальной группы проколотой кривой $\Lambda \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ построить на Λ полустабильное расслоение степени ноль с логарифмической связностью ∇, имеющей особенности исключительно в точках $\{a_1, \ldots, a_n\}$ и монодромию, реализующую данное представление фундаментальной группы.

В рамках исследовательской деятельности лаборатории мы занимались изучением описанного выше обобщения проблемы Римана-Гильберта на случай эллиптической кривой, обращая особое внимание на возможность явного эффективного построения решения. Были рассмотрены два класса задач — одномерные задачи с произвольным числом особенностей и двумерные задачи с тремя особыми точками. Выбор именно этих случаев был обусловлен тем рядом специфических свойств этих моделей. Во-первых, одномерная задача с как и на сфере, является коммутативной, что позволяет рассчитывать на построение решения проблемы Римана-Гильберта в явном виде. Во-вторых, одномерная модель является простейшей возможной из задач на эллиптической кривой и после её подробного разбора результаты и методы могут найти своё применение при исследовании более сложных задач, в частности двумерной. В-третьих, как известно, на эллиптической кривой, для того чтобы дивизор степени ноль являлся эффективным требуется выполнение дополнительного условия — дивизор должен “лежать” на решётке периодов кривой, при этом одномерную проблему Римана-Гильберта можно рассматривать как обобщение вопроса об эффективности дивизора степени ноль на случай неоднозначных функций, ветвящихся при обходе особых точек, но инвариантных, или хотя бы квазипериодических при сдвигах по решётке периодов, что, очевидно, отвечает переходу от сечений тривиального расслоения к сечениям расслоения степени ноль общего вида на заданной эллиптической кривой.

Что касается двумерной трёхточечной задачи, то интересно сопоставление со сферическим случаем. Дело в том, что на сфере Римана результаты, описывающие различные случаи положительной разрешимости как правило являются теоремами существования, не давая явных способов построения решения. В этом смысле двумерная задача с тремя точками является критической. Как было показано Б. Крыловым, во-первых, она решается положительно для всех возможных начальных данных задачи, и во-вторых, решение всегда можно построить явно. Последнее свойство связано с тем, что все неприводимые представления в этом случае являются жёсткими и однозначно восстанавливаются по спектрам локальных монодромий, а все приводимые отвечают некоторым вырождениям задачи и распадаются на несколько классов, в каждом из которых, проведя соответствующий анализ удаётся получить решение в явном виде. При этом, хорошо известно, что уже для четырёх точек в размерности два явное восстановление уравнения по монодромии сводится к решению шестого уравнения Пенлеве, в общем случае решающегося лишь в классе трансцендентов Пенлеве. Соответственно, интерес вызывает вопрос о свойствах аналогичной задачи в эллиптическом случае. А именно, можно ли здесь получить явные решения и имеются ли какие-либо дополнительные ограничения, по сравнению с системами общего вида, на явный вид решения.

Перейдём к описанию методов и результатов. Обозначим через Λ_τ эллиптическую кривую, полученную при факторизации комплексной плоскости по решетке $\{1,\tau\}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$. Традиционно основным инструментом для анализа на эллиптических кривых являются тэта-функции. Для наших целей удобно воспользоваться первой тэта-функцией Якоби $\theta(z)$, определяемой как:

$$\theta(z) = \theta_1(z|\tau) = \imath \sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^m q^{(m-\frac{1}{2})^2} e^{(m-\frac{1}{2})2\pi\imath z},$$

где $q(\tau) = e^{\imath\pi\tau} = e^{\imath\pi x - \pi y}$ задает отображение верхней полуплоскости $H = \{\tau \in \mathbb{C}|\operatorname{Im}\tau > 0\}$ в единичный круг $D = \{q \in \mathbb{C} \,|\, |q| < 1\}$. Модуль отношения соседних членов ряда равен $|-q^{2m}e^{2\pi iz}| \leqslant |q|^{2m}e^{2\pi|z|}$. Следовательно, поскольку $\lim_{m\to\infty}|q|^{2m} = 0$, то θ-функция задается рядом целых функций от z, сходящимся абсолютно и равномерно в любом круге. Значит и сама функция $\theta(z)$ является целой.

Для исследования вопросов монодромии требуется информация о ветвлении $\theta(z)$ и её производной. Непосредственно из определения видно что

$$\begin{aligned} &\theta(z+1) = -\theta(z) \\ &\theta(z+\tau) = -q^{-1}e^{-2\pi i z}\theta(z). \end{aligned}$$

Отсюда выводятся соотношения для производных:

$$\begin{aligned} &\theta'(z+1) = -\theta'(z) \\ &\theta'(z+\tau) = q^{-1}e^{-2\pi i z}\big(2\pi i\theta(z) - \theta'(z)\big). \end{aligned}$$

И следовательно, для логарифмических производных получаем

$$\begin{aligned} &\frac{\theta'(z+1)}{\theta(z+1)} = \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} \\ &\frac{\theta'(z+\tau)}{\theta(z+\tau)} = \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} - 2\pi i. \end{aligned}$$

Для сдвинутых тэта-функций имеем

$$\begin{aligned} &\theta(z-a+1) = -\theta(z-a) \\ &\theta(z-a+\tau) = -q^{-1}e^{-2\pi\imath z}\theta(z-a)e^{2\pi\imath a} \end{aligned}$$

где a произвольная точка эллиптической кривой Λ_τ.

Из приведённых выше формул для логарифмической производной $\theta(z)$ следует, что так как полюсов внутри фундаментального параллелограмма у $\theta(z)$ нет, то в этом параллелограмме она имеет только один простой ноль. В силу нечётности функции это точка $z = 0$. Рассмотрим как изменяется значение $\theta^\alpha(z)$ при аналитическом продолжении по петле вокруг $z = 0$. Так как ноль простой, то ветвление аналогично ветвлению z^α, обозначив через g^* оператор монодромии вокруг нуля получаем

$$g^*\left(\theta^\alpha(z)\right) = \theta^\alpha(z)\cdot e^{2\pi\imath\alpha}.$$

Заметим, далее,что в отличие от сферы, где расслоения традиционно описываются двумя картами с одним склеивающим коциклом, на кривой Λ_τ расслоение можно задать одной картой и двумя сдвигами: на 1 и на τ. Описывать различные голоморфные линейные расслоения E в этом случае удобно через описание их сечений. Напомним, что нас интересуют полустабильные расслоения степени ноль. Сечение $\varphi(z)$ расслоения степени ноль должно иметь равное число нулей и полюсов внутри фундаментального параллелограмма. Далее, сечение $\varphi(z)$ может иметь какую-то монодромию при обходах по a- и b-циклам, или, что то же самое при сдвигах на 1 и τ. Пусть при сдвиге на 1 сечение $\varphi(z)$ умножается на $\mu(z)$, а при сдвиге на τ на $\nu(z)$. Так как $\mu(z)$ и $\nu(z)$ должны быть голоморфнообратимы на всей эллиптической кривой, то из компактности следует, что обе эти функции обязаны быть константами $\mu(z) \equiv \mu, \nu(z) \equiv \nu$. Следовательно $\varphi(z) \cdot \mu^{-z} = \varphi(z) \cdot \exp(-z \ln \mu)$ при сдвиге на 1 сохраняет свое значение, при сдвиге на τ умножается на $\nu \cdot \exp(-\tau \ln \mu) = \nu \cdot \mu^{-\tau}$, и имеет те же самые нули и полюса что и $\varphi(z)$. Таким образом, для описания расслоения E достаточно рассматривать сечения не меняющиеся при сдвиге на 1, и умножающиеся на некоторое ν при сдвигах на τ.

Параметр ν при этом определён неоднозначно так как умножение сечения на $e^{2\pi\imath z}$ сохраняет его нули, полюса, инвариантность при сдвигах на единицу, и изменяет ν на $\nu \cdot e^{2\pi\imath\tau}$. Следовательно ν определяется с точностью до умножения на целую степень $e^{2\pi\imath\tau}$. В дальнейшем нам будет удобнее работать с параметром λ связанным с ν соотношением $\nu = e^{2\pi\imath\lambda}$.

Рассмотрим, как могут быть устроены мероморфные сечения такого расслоения. То есть нас интересуют функции, инвариантные относительно сдвигов на единицу и умножающиеся на некоторую константу $e^{2\pi\imath\lambda}$ при сдвигах на τ. С такими объектами мы можем эффективно работать с помощью введённой ранее θ-функции.

Определим функцию

$$\varphi_\lambda(z) = \frac{\theta(z-\lambda)}{\theta(z)}.$$

Из свойств θ-функции следует

$$\varphi_\lambda(z+1) = \varphi(z)$$
$$\varphi_\lambda(z+\tau) = \varphi(z) \cdot e^{2\pi\imath\lambda}$$

Кроме того, очевидно $\varphi_\lambda(z)$ имеет ровно один ноль и один полюс на эллиптической кривой. Значит, $\varphi_\lambda(z)$ является однозначным сечением некоторого линейного расслоения E степени ноль. Обозначим это расслоение $\mathcal{O}_\lambda(0)$. Несложно заметить, что для любой точки b на эллиптической кривой Λ_τ функция ${}^b\varphi_\lambda(z) = \varphi_\lambda(z-b)$ отличается от $\varphi_\lambda(z)$ на мероморфную двоякопериодическую функцию, и значит тоже является сечением $\mathcal{O}_\lambda(0)$. Как легко видеть, модулярный параметр λ вместе со степенью k полностью и однозначно определяет линейное расслоение $\mathcal{O}_\lambda(k)$, отношение двух сечений φ, ψ с равными λ и k это мероморфная функция, то есть, сечение тривиального расслоения $\mathcal{O}_0(0)$.

Из определения λ и сказанного выше о неоднозначной определенности ν немедленно следует, что параметр λ определён на комплексной плоскости с точностью до сдвигов по решетке $\{1,\tau\}$ то есть, задающий на кривой Λ_τ расслоение параметр λ принимает значения на том же самом факторе по решётке, который задаёт эллиптическую кривую Λ_τ. Это хорошо известный факт о том, что пространство модулей линейных расслоений фиксированной степени на эллиптической кривой само является эллиптической кривой с тем же модулярным параметром.

Произведение k разных сечений вида ${}^{b_i}\varphi_\lambda(z)$, является произведением θ-функций в некоторых целых степенях, сумма которых равна нулю, и значит, задает сечение в расслоении $\mathcal{O}_{k\lambda}(0)$. Переобозначим для удобства нули и полюса этого произведения через a_i, тогда построенное сечение имеет вид

$$\varphi(z) = \theta^{k_1}(z-a_1)\cdots\theta^{k_n}(z-a_n),$$

где k_i-целые и

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = 0.$$

Из свойств ветвления $\theta(z)$ получаем

$$\begin{aligned}\varphi(z+1) &= (-1)^{\sum k_i}\varphi(z) = \varphi(z)\\ \varphi(z+\tau) &= \varphi(z)\cdot e^{2\pi\imath\sum k_i a_i}\end{aligned}$$

и следовательно, так как $\varphi(z)$ является однозначным сечением $\mathcal{O}_{k\lambda}(0)$, выполняется

$$\sum_{i=1}^{n} k_i a_i = k\lambda.$$

Теперь легко видеть, что всякое выражение вида

$$\varphi(z) = \theta^{\alpha_1}(z-a_1)\cdots\theta^{\alpha_n}(z-a_n)$$

с любыми комплексными α_i такими что $\sum \alpha_i = 0$, а a_i произвольные точки эллиптической кривой будет (многозначным) сечением расслоения $\mathcal{O}_\lambda(0)$, где

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$$

При этом характер многозначности сечения таков, что оно ветвится только при обходе особых точек a_i, но не при обходе по $a-$ и $b-$циклам кривой Λ_τ.

Найдем теперь в расслоении $\mathcal{O}_\lambda(0)$ форму связности для которой φ_λ было бы горизонтальным сечением, то есть

$$d\varphi_\lambda(z) = \omega_\lambda(z)\varphi_\lambda(z)$$

Из

$$d\theta^{\alpha_i}(z-a_i) = \alpha_i\theta'(z-a_i)\theta^{\alpha_i-1}(z-a_i)dz$$

получаем что

$$d\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\theta'(z-a_i)}{\theta(z-a_i)}\varphi dz$$

$$\omega_\lambda(z) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\theta'(z-a_i)}{\theta(z-a_i)} dz$$

Построенная форма связности имеет логарифмические особенности в точках a_i и не изменяется при сдвигах на 1 и на τ.

$$\omega_\lambda(z+1) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\theta'(z-a_i+1)}{\theta(z-a_i+1)} dz = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\theta'(z-a_i)}{\theta(z-a_i)} dz = \omega_\lambda(z)$$
$$\omega_\lambda(z+\tau) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\theta'(z-a_i+\tau)}{\theta(z-a_i+\tau)} dz = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\theta'(z-a_i)}{\theta(z-a_i)} dz - 2\pi\imath \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \omega_\lambda(z)$$

Инвариантность при сдвигах формы, задающей связность в данном случае является спецификой одномерной задачи, в общем случае большей размерности форма связности сопрягается на матрицу, зависящую от λ.

Рассмотрим теперь какой вид могут иметь одномерные представления, входящие в начальные данные проблемы Римана-Гильберта на эллиптической кривой.

$$\chi : \pi_1\left(\Lambda_\tau \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}\right) \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^*$$

На кривой без проколов, как известно, фундаментальная группа порождается парой из $a-$ и b-цикла с одним соотношением $aba^{-1}b^{-1} = \mathrm{id}$, отвечающим стягиваемости петли, обходящей фундаментальный параллелограмм по периметру. Очевидно существует такое упорядочивание точек a_i и выбор обходящих их классов петель γ_i при котором последовательный обход всех проколов эквивалентен обходу периметра параллелограмма, и следовательно, на проколотой кривой соотношение имеет вид $\gamma_1 \cdots \gamma_n = aba^{-1}b^{-1}$. Что влечёт соотношение $g_1 \cdots g_n \nu_2 \nu_1 \nu_2^{-1} \nu_1^{-1} = 1$ на соответствующие матрицы монодромии. Так как задача одномерная, матрицы монодромии являются скалярами, и следовательно коммутируют. Значит, автоматически выполняется $\nu_2 \nu_1 \nu_2^{-1} \nu_1^{-1} = 1$ и следовательно $g_1 \cdots g_n = 1$.

Далее, как уже было указано, монодромии по периодам кривой определены неоднозначно и зависят от выбора тривиализации расслоения. Сечение с данными монодромии (ν_1,ν_2) может быть переведено элементарным калибровочным преобразованием с сохранением всех прочих свойств в сечение с ветвлением (ν_1',ν_2') если выполняется $\nu_1^\tau/\nu_2 = {\nu'}_1^\tau/{\nu'}_2$. Следовательно, всегда можно полагать одну из монодромий тривиальной. Выберем для удобства $\nu_1 = 1$, и определим λ соотношением $\nu_2 = e^{2\pi i \lambda}$. Порядок ($\nu_1$,$\nu_2$) соответствует здесь сдвигам на 1 и τ на кривой Λ_τ. Параметр λ, как было показано выше, с точностью до сдвигов по решетке $\{1,\tau\}$.

Таким образом, исходные данные монодромии для одномерной проблемы Римана-Гильберта на эллиптической кривой Λ_τ можно задать набором $g_1, \ldots, g_n$,λ таким что $g_1 \cdots g_n = 1$.

Дальнейшие шаги к построению решения таковы: сначала мы строим линейное расслоение $\mathcal{O}_\mu(0)$ с сечением, имеющим требуемую монодромию вокруг проколов и однозначным при сдвигах по периодам, а затем замечаем, что при переходе к расслоению $\mathcal{O}_{\mu-\lambda}$ то же самое сечение получает требуемую монодромию теперь уже полностью. Как следствие, можно заметить, что в тривиальном расслоении задача разрешима если и только если параметр λ принадлежит некоторому дискретному множеству.

Реализуем первый шаг. Выберем произвольно числа α_k так, чтобы выполнялось $\exp{(2\pi\imath\alpha_k)} = g_k$. Каждое из α_k определено с точностью до целого слагаемого. При любом их выборе ввиду $g_1 \cdots g_n = 1$ должно выполняться $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = p \in \mathbb{Z}$. Будем называть набор $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ нормализованным если сумма всех его элементов равна нулю. Очевидно, при любом начальном выборе α_k набор можно нормализовать изменением хотя бы одной его компоненты.

Пусть $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ нормализованный набор, построенный по данным монодромии $g_1, \ldots g_n$. Положим

$$\psi(z) = \theta^{\alpha_1}(z - a_1) \cdots \theta^{\alpha_n}(z - a_n)$$

Из свойств тэта-функций следует, что при обходе вокруг $z = a_k$ монодромия $\psi(z)$ равна $\exp(2\pi\imath\alpha_k) = g_k$. При сдвигах же на 1 и τ происходит умножение $\psi(z)$ на 1 и $\exp{(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i)}$ соответственно. Таким образом, $\psi(z)$ является однозначным (по периодам, но не вокруг проколов) сечением расслоения $\mathcal{O}_\mu(0)$ где $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$. В то же время, на $\psi(z)$ можно смотреть как на многозначное по периодам с монодромиями 1 и $e^{2\pi i\mu}$ соответственно, сечение тривиального расслоения $\mathcal{O}_0(0)$ с той же самой монодромией вокруг проколов. В первом случае соответствующие данные монодромии имеют вид $g_1, \ldots$,g_n,0, во втором $g_1, \ldots$,g_n,μ. В обоих случаях $\psi(z)$ является горизонтальным сечением связности

$$\nabla = d - \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\theta'(z - a_i)}{\theta(z - a_i)} dz$$

Остаётся заметить, что при переходе от расслоения $\mathcal{O}_\mu(0)$ к расслоению $\mathcal{O}_{\mu-\lambda}(0)$ ветвление произвольного сечения при сдвигах по периодам не меняется для сдвигов на 1 и умножается на e^λ для сдвигов на τ. А следовательно, в расслоении $\mathcal{O}_{\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i - \lambda}(0)$ построенная выше логарифмическая связность ∇ имеет монодромию $g_1, \ldots$,g_n,λ.

Интересным вопросом является единственность построенного решения, которую достаточно проверить для тривиального расслоения. По ходу построений выше мы получили в тривиальном расслоении логарифмическую связность с монодромией $g_1, \dots, g_n, \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$. Покажем, что при заданном наборе $\{a_1,...,a_n\}$ единственное значение параметра λ при котором возможна реализация монодромии $g_1, \dots, g_n, \lambda$ в тривиальном расслоении это $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$. Очевидно, из этого будет следовать, что построенные в общем случае расслоение и связность определены однозначно.

Предположим противное, пусть $\eta(z)$ сечение тривиального расслоения с монодромией $g_1, \dots, g_n, \nu$. Тогда отношение $\xi(z) = \eta(z)/\psi(z)$ является однозначной мероморфной функцией внутри фундаментального параллелограмма и следовательно, однозначным мероморфным сечением расслоения $\mathcal{O}_{\nu-\mu}(0)$. Обозначим кратность нуля или полюса в точке a_i через k_i и рассмотрим отношение

$$\widetilde{\xi}(z) = \frac{\xi(z)}{\theta^{k_1}(z - a_1) \cdots \theta^{k_n}(z - a_n)} \tag{1.11.1}$$

Знаменатель, очевидно, есть однозначное сечение расслоения $\mathcal{O}_{\sum_{i=1}^n k_i a_i}(0)$, а следовательно, $\widetilde{\xi}(z)$ по построению является гладким и нигде не зануляющимся сечением $\mathcal{O}_{\nu-\mu-\sum_{i=1}^n k_i a_i}(0)$. Покажем, что это возможно только в случае $\nu - \mu - \sum_{i=1}^n k_i a_i = 0$.

Так как z и $\widetilde{\xi}$ гладкие функции на фундаментальном параллелограмме Π и $\widetilde{\xi}$ нигде не равно нулю, то

$$I = \oint_{\Pi} z d\big(\ln \widetilde{\xi}(z)\big) = 0$$

С другой стороны, в силу симметрий $\widetilde{\xi}$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \textstyle\int_0^1 z d\big(\ln \widetilde{\xi}(z)\big) + \int_{1+\tau}^{\tau} z d\big(\ln \widetilde{\xi}(z)\big) = \int_1^0 \tau \cdot d\big(\ln \widetilde{\xi}(z)\big) = \tau \ln \widetilde{\xi}(z)\Big|_0^1 = 0 \\
I_2 &= \textstyle\int_1^{1+\tau} z d\big(\ln \widetilde{\xi}(z)\big) + \int_{\tau}^{0} z d\big(\ln \widetilde{\xi}(z)\big) = \int_0^{\tau} 1 \cdot d\big(\ln \widetilde{\xi}(z)\big) = \ln \widetilde{\xi}(z)\Big|_0^{\tau} = \\
&= 2\pi\imath \left(\nu - \mu - \textstyle\sum_{i=1}^n k_i a_i\right)
\end{aligned}$$

И следовательно, из $I = I_1 + I_2$ получаем $\nu - \mu - \sum_{i=1}^n k_i a_i = 0$.

Таким образом, для положительной разрешимости проблемы Римана-Гильберта в тривиальном расслоении на эллиптической кривой необходимо чтобы выполнялось $\nu - \mu - \sum_{i=1}^n k_i a_i = 0$ по модулю $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$. Остаётся заметить, что $\mu + \sum_{i=1}^n k_i a_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^n k_i a_i = \sum_{i=1}^n \widetilde{\alpha}_i a_i = \widetilde{\mu}$ где $\widetilde{\mu}_i = \alpha_i + k_i$ некоторый новый нормализованный набор $\widetilde{\alpha}_i$. И значит модулярный параметр ν должен совпадать с $\widetilde{\mu} = \sum_{i=1}^n \widetilde{\alpha}_i a_i$ для некоторого нормализованного набора $\widetilde{\alpha}_i$.

Окончательный результат можно сформулировать так. Для заданных эллиптической кривой Λ_τ, особых точек $\{a_1, \dots, a_n\}$ и данных монодромии $g_1, \dots, g_n, \lambda$ одномерная проблема Римана положительно разрешима в тривиальном расслоении если, и только если для некоторых целых p, q и нормализованного набора $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, где $e^{2\pi\imath\alpha_k} = g_k$

выполняется

$$\lambda = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k + p + q\tau,$$

Соответствующая форма связности в имеет вид

$$\omega(z) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\theta'(z-a_k)}{\theta(z-a_k)} dz \tag{1.11.2}$$

В общем же случае решение даётся той же формой связности в расслоении $\mathcal{O}_{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k a_k - \lambda}(0)$ и других решений не существует.

Как и ожидалось при обсуждении возможных способов обобщения проблемы Римана-Гильберта, оказалось, что для реализации в тривиальном расслоении требуется выполнение некоторых дополнительных условий на монодромию, в классе же полустабильных расслоений степени ноль задача всегда имеет явного вида положительное решение.

Перейдём к описанию результатов, достигнутых в двумерном случае. Нами ставилась задача найти возможные обобщения эффективной разрешимости на сфере Римана двумерной трёхточечной проблемы Римана-Гильберта на случай эллиптических кривых. С проблемой Римана-Гильберта тесно связана проблема Делиня-Симпсона, связанная в своей мультипликативной и аддитивной версиях с выбором из заданного набора орбит $\mathcal{G}_i$ присоединённого действия группы $\mathrm{GL}(p,\mathbb{C})$ на себе или, в аддитивной версии на алгебре $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ неприводимого набора представителей $g_i \in \mathcal{G}_i$ таким образом, чтобы было выполнено соотношение $g_1 \cdot \dots \cdot g_n = 1$ или $g_1 + \dots + g_n = 0$ соответственно. В общем случае проблема не решена, но при $p = 2$, $n = 3$ имеет простое явное решение, единственное с точностью до общего сопряжения. Именно на этом основана явная разрешимость трёхточечной двумерной проблемы Римана-Гильберта. Конкретнее, применяется тот факт, что в случае общего положения (т.е. при отсутствии резонансов) локальная монодромия сопряжена экспоненте вычета. Тогда по представлению монодромии, то есть, по решению мультипликативной проблемы определяются орбиты для соответствующей аддитивной проблемы, а её, в случае $p = 2$, $n = 3$ явно строящееся решение даёт вычеты искомой фуксовой системы.

Сразу можно заметить, что полного аналога точной разрешимости этого случая на эллиптической кривой ожидать не приходится, данные монодромии расширяются, включая в себя монодромии по периодам кривой, появляются дополнительные степени свободы и нарушается жёсткость представления. Следовательно, речь идёт о поиске и наложении некоторых дополнительных ограничений, и исследовании явной разрешимости в этих редуцированных случаях.

В первую очередь заметим, что поскольку речь идёт о двумерных полустабильных расслоениях степени ноль, то есть $E \simeq \mathcal{O}_\lambda(0) \oplus \mathcal{O}_{-\lambda}(0)$, то форма, задающая в них связность должна удовлетворять соотношениям на сдвиги по периодам:

$$\omega(z+1) = \omega(z)$$

$$\omega(z+\tau) = \begin{pmatrix} e^{2\pi\imath\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi\imath\lambda} \end{pmatrix} \omega(z) \begin{pmatrix} e^{-2\pi\imath\lambda} & 0 \\ 0 & e^{2\pi\imath\lambda} \end{pmatrix}$$

Из чего несложно вывести, что 1-форма $\omega(z)$, задающая в расслоении E логарифмическую связность ∇ с особенностями $\{a_1,\ldots,a_n\}$ и вычетами

$$\mathrm{res}_{z=a_i}\omega = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta \end{pmatrix},$$

сумма которых равна нулю, имеет вид

$$\omega(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\begin{pmatrix} \alpha_i\theta'(z-a_i) & \beta_i\frac{\theta'(0)}{\theta(-2\lambda)}\theta(z-a_i-2\lambda) \\ \gamma_i\frac{\theta'(0)}{\theta(2\lambda)}\theta(z-a_i+2\lambda) & \delta_i\theta'(z-a_i) \end{pmatrix}}{\theta(z-a_i)} dz + \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} dz.$$

Пусть теперь нам дано неприводимое представление фундаментальной группы

$$\chi : \pi_1\left(\Lambda_\tau \setminus \{a_1,a_2,a_3\}\right) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}),$$

Будем называть его существенно неприводимым если неприводимо индуцированное им представление

$$\chi_{\mathrm{ind}} : \pi_1\left(D \setminus \{a_1,a_2,a_3\}\right) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}),$$

где $D \in \Lambda_\tau$ диск, содержащий особые точки $\{a_1,a_2,a_3\}$.

Пусть теперь χ_0 какое-либо неприводимое представление

$$\chi_0 : \pi_1\left(\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus \{d_1,d_2,d_3\}, z_0\right) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}),$$

По сказанному выше известно явное решение (B_1,B_2,B_3) соответствующих проблем Делиня-Симпсона и Римана-Гильберта. Так как тройка определяется с точностью до общего сопряжения, можно считать B_1 верхнетреугольной, а B_2 нижнетреугольной, такой набор будем называть нормализованным для данного представления χ_0.

Рассмотрим теперь описанного выше для связностей на эллиптической кривой вида 1-форму $\Omega(z)$, построенную по вычетам (B_1,B_2,B_3) с нулевой постоянной частью $C_1 = C_2 = 0$ и произвольным параметром λ. Так как связь вычетов связности с локальной монодромией имеет локальный характер и не зависит от глобальных свойств поверхности можно было бы предположить, что данная связность имеет монодромию такую монодромию χ, что $\chi_{\text{ind}} = \chi_0$. Однако это неверно, так как соотношение в фундаментальной группе тора с тремя проколами имеет вид

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_a\gamma_b\gamma_a^{-1}\gamma_b^{-1}$$

и следовательно, и для матриц монодромии

$$G_1G_2G_3 = G_aG_bG_a^{-1}G_b^{-1}$$

Про монодромию, связанную со сдвигами по периодам в построенной связности нам пока что ничего не известно, но сразу можно заметить, что даже если положить коммутатор в правой части имеет известное фиксированное значение из $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, то получающаяся задача восстановления монодромии крайне схожа с условиями постановки задачи двумерной четырёхточечной задачи изомонодромной деформации, что является одной из эквивалентных форм шестого уравнения Пенлеве, как хорошо известно, требующего для своего решения введения нового класса трансцендентных функций. Следовательно, для достижения явной разрешимости необходимо введение дополнительных ограничений.

Нами был рассмотрен случай $G_a = 1$. Такое условие с одной стороны гарантирует вырождение коммутатора в правой части соотношения на монодромии, что сразу обеспечивает однозначное восстановление монодромии в левой части и влечёт её равенство χ_0, а с другой стороны, допускает непосредственную проверку и реализацию по явному виду $\Omega(z)$.

А именно, как уже указывалось, для монодромии вокруг проколов имеет место соотношение

$$\ln G_k \sim 2\pi i B_k = 2\pi i \mathrm{res}_{z=a_i}\omega(z) = \oint_{\gamma_k} \omega(z).$$

Аналогичное описание допускает и монодромия по периодам эллиптической кривой:

$$\ln G_a \sim \int\limits_0^1 \Omega(z),\ \ \ln G_b \sim \int\limits_0^\tau \Omega(z).$$

Введём для элементов тройки (B_1,B_2,B_3) обозначения

$$B_i = \begin{pmatrix} {}^ib_1 & {}^ib_2 \\ {}^ib_3 & {}^ib_4 \end{pmatrix},$$

и обозначим интегралы

$$I_k(\lambda) = \int\limits_0^1 \frac{\theta'(0)}{\theta(2\lambda)}\frac{\theta(z-a_k+2\lambda)}{\theta(z-a_k)}dz,\ J_k(\lambda) = \int\limits_0^1 \frac{\theta'(0)}{\theta(-2\lambda)}\frac{\theta(z-a_k-2\lambda)}{\theta(z-a_k)}dz$$

Теперь можно заметить, что элементы главной диагонали интеграла $\Omega(z)$ от 0 до 1 автоматически равны нулю в силу $B_1+B_2+B_3=0$, а элементы побочной диагонали имеют вид

$$^1b_2 I_1(\lambda) +^2 b_2 I_2(\lambda) +^3 b_2 I_3(\lambda) = P$$

и

$$^1b_3 J_1(\lambda) +^2 b_3 J_2(\lambda) +^3 b_3 J_3(\lambda) = Q$$

Покажем, что существует эквивалентная выбранной канонической тройка

$$(\widetilde{B_1},\widetilde{B_2},\widetilde{B_3}) = D^{-1}(B_1,B_2,B_3)D,\ D\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$$

Для которой $\widetilde{P}=\widetilde{Q}=0$. Отсюда будет следовать $\ln G_a\sim 0$, а значит, и точное равенство $\ln G_a = 0$, влекущее $G_a=1$.

Очевидно, условия на $\widetilde{P},\widetilde{Q}$ эквивалентны требованию к одновременной нижнетреугольности матрицы

$$I_1(\lambda)\widetilde{B}_1 + I_2(\lambda)\widetilde{B}_2 + I_3(\lambda)\widetilde{B}_3 = D^{-1}\left(I_1(\lambda)B_1 + I_2(\lambda)B_2 + I_3(\lambda)B_3\right)D$$

и верхнетреугольности матрицы

$$J_1(\lambda)\widetilde{B}_1 + J_2(\lambda)\widetilde{B}_2 + J_3(\lambda)\widetilde{B}_3 = D^{-1}\left(J_1(\lambda)B_1 + J_2(\lambda)B_2 + J_3(\lambda)B_3\right)D.$$

А значит, такое преобразование D существует всегда, кроме случая, когда

$$R = I_1(\lambda)B_1 + I_2(\lambda)B_2 + I_3(\lambda)B_3$$

и

$$S = J_1(\lambda)B_1 + J_2(\lambda)B_2 + J_3(\lambda)B_3$$

иимеют жорданову нормальную форму вида клетки (2×2) с общим собственным подпространством. В этом случае, так как обе матрицы бесследовые то они пропорциональны $R=\alpha S$.

Для определённой нами канонической тройки вычеты имеют вид

$$B_1 = \begin{pmatrix} ^1b_1 & 1 \\ 0 & -^1b_1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} ^2b_1 & 0 \\ k & -^2b_2 \end{pmatrix}, B_3 = -B_1 - B_2$$

причём, для всех элементов известны явные выражения через спектры монодромии χ_0. Отсюда, обозначив $I_{kl}(\lambda) = I_k(\lambda) - I_l(\lambda)$, и аналогично введя $J_{kl}(\lambda)$ получаем

$$R = \begin{pmatrix} ^1b_1 & 1 \\ 0 & -^1b_1 \end{pmatrix} I_{13}(\lambda) + \begin{pmatrix} ^2b_1 & 0 \\ k & -^2b_2 \end{pmatrix} I_{23}(\lambda)$$

и

$$S = \begin{pmatrix} {}^1b_1 & 1 \\ 0 & -{}^1b_1 \end{pmatrix} J_{13}(\lambda) + \begin{pmatrix} {}^2b_1 & 0 \\ k & -{}^2b_2 \end{pmatrix} J_{23}(\lambda)$$

Из вида побочной диагонали следует, что

$$I_{13} + \alpha J_{13} = I_{23} + \alpha J_{23} = 0.$$

Из свойств эллиптических функций легко видеть, что это условие имеет полную коразмерность, и легко нарушается, если необходимо, деформацией параметра λ.

Следовательно, требуемая нам тройка $(\widetilde{B_1},\widetilde{B_2},\widetilde{B_3})$ всегда существует, и более того, строится явно. Заметим, что из-за наличия голоморфной части у формы связности переход от формы $\Omega(z)$ с вычетами (B_1,B_2,B_3) к форме $\widetilde{\Omega}(z)$ с вычетами $(\widetilde{B_1},\widetilde{B_2},\widetilde{B_3})$ не является, в отличие от сферы Риана калибровочным преобразованием, это существенное преобразование связности.

Теперь мы можем окончательно сформулировать полученный результат. Явно построенная по заданному неприводимому представлению

$$\chi_0 : \pi_1\left(\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus \{d_1, d_2, d_3\}\right) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}),$$

связность $\widetilde{\nabla}$ с формой $\widetilde{\Omega}(z)$ в полустабильном расслоении E степени ноль на эллиптической кривой Λ_τ имеет существенно неприводимую монодромию

$$\chi : \pi_1\left(\Lambda_\tau \setminus \{a_1, a_2, a_3\}\right) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}),$$

такую что

$$\chi_{\mathrm{ind}} = \chi_0,$$

выполняется

$$\chi(\gamma_a) = 1$$

и при этом

$$\chi(\gamma_b) \sim \exp\left(2\pi i \int\limits_0^\tau \widetilde{\Omega}(z)\right).$$

1.12 Формулы Бриона

Неприводимые характеры являются одним из центральных объектов изучения теории представлений алгебр Ли. Классической формулой для характера неприводимого представления полупростой алгебры Ли является формула Вейля. Есть множество различных способов вывода этой формулы, в том числе традиционные алгебраические способы. Мы, однако, обратимся сейчас к способу геометрическому.

Пусть g — комплексная полупростая алгебра Ли, $F = G/B$ — соответствующее ей многообразие флагов. Для целочисленного доминантного веса λ на F можно определить эквивариантное линейное расслоение $\mathcal{L}_\lambda$. При этом окажется, что пространство глобальных сечений расслоения $\mathcal{L}_\lambda$ есть в точности соответствующее неприводимое представление L_λ, а старшие когомологии у $\mathcal{L}_\lambda$ нулевые (теорема Бореля–Вейля–Ботта). Это позволяет получить формулу для характера χL_λ, выписав эквивариантную голоморфную формулу Лефшеца. Полученная таким образом формула совпадет с формулой Вейля для характера и будет иметь вид суммы по неподвижным точкам в F. При этом вклад каждой точки будет определяться локальными свойствами расслоения $\mathcal{L}_\lambda$ в этой точке.

Такой подход, состоящий в разложении некоторой глобальной сущности в сумму ее локальных аппроксимаций в неподвижных точках, иногда называют «квазиклассическим» — термин физического происхождения. Эта работа во многом посвящена тому наблюдению, что своего рода квазиклассический подход можно применить и к другому не менее важному для нас классу формул для характеров — комбинаторным формулам. Обсудим вкратце этот класс формул.

Комбинаторная формула представляет характер в виде суммы по некоторому комбинаторному множеству — дискретному набору объектов с заданными свойствами. Как правило, при этом в представлении указывается базис, элементы которого нумеруется тем же комбинаторным множеством, откуда сразу же вытекает формула для характера. Архетипичный пример здесь — это базис Гельфанда–Цетлина в представлении алгебры $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Этот базис нумеруется таблицами Гельфанда–Цетлина или эквивалентными им полустандартными таблицами Юнга и дает комбинаторную формулу для характера неприводимого конечномерного $\mathfrak{gl}_n$-модуля (многочлена Шура). Также в этом контексте стоит упомянуть обобщения базисов Гельфанда–Цетлина на другие типы, струнные базисы и мономиальные базисы Фейгина–Фурье–Литтелманна–Винберга для типов A и C.

Практически во всех этих примерах оказывается, что рассматриваемые комбинаторные объекты являются массивами целых чисел, удовлетворяющих набору линейных неравенств. Это позволяет представить комбинаторное множество в виде множества целых точек в некотором выпуклом многограннике, архетипичный пример, опять же — многогранники Гельфанда–Цетлина. При этом вклад каждой целой точки в формулу для характера оказывается определенной экспонентой этой точки. Здесь и появляется упомянутый нами квазиклассический подход — теорема Бриона из теории решеточных многогранников. Она представляет сумму экспонент целых точек многогранника в виде суммы по его вершинам. При этом вклад каждой вершины определяется касательным конусом к многограннику в этой вершине, то есть, опять же, локальной аппроксимацией многогранника.

Обсудим теперь, каким образом этот сюжет обобщается в двух направлениях. Сперва перейдем от неприводимых характеров к многочленам Холла–Литтлвуда, а затем от полупростых алгебр к аффинным.

Многочлены Холла–Литтлвуда P_λ также нумеруются целочисленными доминантными весами и являются однопараметрическими деформациями неприводимых характеров. Они определяются при помощи несложного видоизменения формулы Вейля для характера с введением дополнительной переменной t. Классические многочлены Холла–Литтлвуда соответствуют типу A и изначально появились в теории абелевых p-групп. Они обладают целым списком свойств, относящихся к разным областям математики.

Для произвольного финитного типа эти многочлены можно получить в том же геометрическом квазиклассическом контексте, что и неприводимые характеры. Для этого нужно рассмотреть на многообразии флагов F подкрученный пучок дифференциальных форм $\Omega^* \otimes \mathcal{L}_\lambda$. Этот пучок в общем случае уже не будет ациклическим и поэтому применение эквивариантной голоморфной формулы Лефшеца даст так называемую эквивариантную эйлерову характеристику:

$$\sum_{i,j\geqslant 0}(-1)^i t^j \chi(H^i(F,\Omega^j \otimes \mathcal{L}_\lambda)).$$

Эта эйлерова характеристика и будет многочленом Холла–Литтлвуда. (Строго говоря, в случае особого веса λ данная эйлерова характеристика будет равна многочлену Холла–Литтлвуда с точностью до множителя — многочлена от t. Для избавления от этого множителя можно вместо F рассмотреть соответствующее параболическое многообразие флагов.)

В типе A для многочленов Холла–Литтлвуда известна комбинаторная формула. Как и формула Гельфанда–Цетлина, она следует из правила ветвления для этих многочленов и описывается следующим образом. Параметризующее множество опять же состоит из таблиц Гельфанда–Цетлина, а соответствующее таблице слагаемое есть произведение экспоненты из формулы Гельфанда–Цетлина и некоторого многочлена от переменной t, так называемого t-веса. Таким образом, многочлен Холла–Литтлвуда типа A также может быть представлен в виде суммы экспонент целых точек в многограннике, но на этот раз взвешенной.

Перейдем к обсуждению аффинных алгебр Ли. Как и для любой симметризуемой алгебры Каца–Муди, характер интегрируемого неприводимого представления такой алгебры можно записать при помощи формулы Каца–Вейля, обобщающей формулу Вейля для финитного случая.

Остановим свое внимание на типе $\tilde{A}$ и алгебрах $\widehat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C})$. В этом случае можно определить соответствующее (бесконечномерное) многообразие флагов F и заданное целочисленным доминантным весом λ линейное расслоение $\mathcal{L}_\lambda$. Будет иметь место аналог теоремы Бореля–Вейля–Ботта: это расслоение вновь будет ациклическим и нулевые когомологии будут представлять из себя интегрируемое неприводимое представление L_λ. Далее, выписав соответствующую версию эквивариантной голоморфной формулы Лефшеца, мы получим формулу для неприводимого характера в виде суммы по неподвижным точкам, которая совпадет с формулой Каца–Вейля.

Более того, для интегрируемого неприводимого характера алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C})$ была также получена комбинаторная формула. Эта формула тоже задается комбинаторным базисом, элементы которого параметризуются целыми точками в некотором многограннике, правда, уже бесконечномерном. Вклад точки при этом тоже равен определенной ее экспоненте.

Наконец, для целочисленного доминантного веса λ симметризуемой алгебры Каца–Муди можно определить функцию Холла–Литтлвуда, аналогичным образом продеформировав формулу Каца–Вейля. (Слово «функция» используется вместо слова «многочлен» по причине бесконечности этих выражений.) Обратимся опять же к типу $\tilde{A}$. В этом случае функции Холла–Литтлвуда играют роль в теории представлений двойной аффинной алгебры Гекке, а также в геометрии упомянутых аффинных многообразий флагов. В последнем контексте они появляются вполне аналогично финитному случаю: как эквивариантные эйлеровы характеристики подкрученных пучков дифференциальных форм на аффинных многообразиях флагов.

Метод получения формул для характеров при помощи теоремы Бриона в литературе освещен слабо. Из известных автору работ к нему можно отнести разве что статью Фейгина и Локтева, где рассматриваются некоторые финитизации упомянутых бесконечномерных многогранников, появляющихся в комбинаторной формуле для аффинного неприводимого характера. Там проверяется некоторая версия теоремы Бриона для этих многогранников и упоминаются близкие к самой теореме Бриона идеи Пухликова и Хованского.

Одна из основных целей этой работы — это восполнить этот пробел. Первый шаг должен заключаться в том, чтобы применить теорему Бриона к многогранникам Гельфанда–Цетлина и установить, какая формула для характера получается таким образом. В отношении финитного случая стоит также цель найти обобщение (взвешенную версию) теоремы Бриона, которую можно было бы применить к комбинаторной формуле для классических многочленов Холла–Литтлвуда, и исследовать результат этого применения.

Кроме того, планируется сформулировать аналог теоремы Бриона для бесконечномерного многогранника, параметризующего базис в неприводимом $\widehat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C})$-модуле, и, опять же, получить таким образом формулу для характера.

Вторая основная цель и центральное нововведение этой работы: получение комбинаторной формулы для аффинных функций Холла–Литтлвуда типа $\tilde{A}$. При этом желательно, чтобы новая формула тоже имела вид суммы по целым точкам того или иного многогранника и доказывалась при помощи формулы типа Бриона для этого многогранника.

— Установлено, что при применении теоремы Бриона к многограннику Гельфанда–Цетлина и надлежащей специализации вклады большей части вершин зануляются, а вклады оставшихся вершин дают слагаемые в формуле Вейля для характера.

— Найдено обобщение теоремы Бриона, в котором экспоненты точек суммируются с весами, зависящими от минимальной грани, содержащей точку.

— Обобщение теоремы Бриона применено к комбинаторной формуле для многочленов Холла–Литтлвуда и показано, что снова вклады большей части вершин зануляются, а вклады оставшихся дают слагаемые в стандартной формуле для многочлена Холла–Литтлвуда.

— Доказана формула типа Бриона для многогранника из комбинаторной формулы для неприводимого аффинного характера. При этом показывается, что вклады части вершин нулевые, а вклад остальных — слагаемые в формуле Каца–Вейля для характера.

— Целым точкам в том же многограннике приписываются веса (многочлены от t) и формулируется комбинаторная формула для функций Холла–Литтлвуда типа $\tilde{A}$ в виде суммы экспонент точек с приписанными им весами.

— Для все того же многогранника и построенной системы весов доказывается версия найденного обобщения теоремы Бриона и при помощи нее доказывается найденная комбинаторная формула.

1.13 Парковочные функции

Парковочные функции повсеместно встречаются в современной комбинаторике. Можно определить естественное действие симметрической группы на парковочных функциях. Орбиты этого действия нумеруются неубывающими парковочными функциями, которые соответствуют путям Дика. Это связывает парковочные функции и разнообразные комбинаторные объекты подсчитываемые числами Каталана. В серии работ Garsia, Haglund, Haiman, см. [169, 170], рассаматриваются связи между числами Каталана и пакровочными функциями с пространством диагональных гармоник. Так же существуют глубокие свзяи с геометрией схем Гильберта.

После работ Pak, Staneley, Athanasiadis [179] и Linusson [156] стало ясно парковочные функции тесно связаны с комбинаторикой афинных симметрических групп. В частности, они позволяют построить две различные биекции между парковочными функциями и областями Ши набора гиперплоскостей. В работах [153, 162, 177] было замечено, что обратные элементы к афинным перестановкам нумеруются минимальными альковами областей Ши принадлжащих симплексу D_n^{n+1}, который изометричен $(n+1)$ растянотуму фундаментальному алькову. Как следствие, альковы в D_n^{n+1} могут быть занумерованы парковочными функциями двумя различными способами.

Мы развиваем "рациональное" обобщение этого соответствия. Функция $f : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ называется m/n-парковочной функцией если диаграмма Юнга со строками длины $f(1), \ldots, f(n)$ расположенными в порядке убывания лежит под диагональю прямоугольника $m \times n$.

Напомним что биекция $\omega : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ называется афинной перестановкой если $\omega(x+n) = \omega(x)+n$ для любых x и $\sum_{i=1}^{n} \omega(i) = \frac{n(n+1)}{2}$. Для любого положительного целого m, мы называем афинную перестановку m-стабильной, если $\omega(x+m) > \omega(x)$ для любого x. Все конструкции настоящей работы базируются на следующим простом наблюдении:

Предложение 1. Tckb m b n взаимнопросты, то m-стабильные афинные перестанвки нумеруются альковами симплекса D_n^m который изометричен m-растянутому фундаментальному алькову. В частности, число m-стабильных афинных перестановок равно m^{n-1}.

Симплекс D_n^m (впервые определенный в [161, 177]) играет центральную роль в нашем исследовании. Мы показываем, что альковы естественно занумерованы различными алгебраическими и геометрическими объектами такими как клетки в некоторых афинных слоях Спрингера и несимметрических полиномах Макдональда в точке $q^m = t^n$. Мы приводим комбинаторный словарь который позволяет переходить от одного описания к другому. Мы определяем два отображения $\mathcal{A}, \mathcal{PS}$ между m-стабильными афинными перестановками и m/n-парковочными функции и доказываем следующий результат о них:

Теорема 4. Отображения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{PS}$ удовлетворяют следующим свойствам:

а) Отображение $\mathcal{A}$ биективно для любых m и n.

б) Отображение $\mathcal{PS}$ биекция для $m = kn \pm 1$. Для $m = kn + 1$, оно эквивалентно нумерации Пака-Стэнли области Ши.

в) Отображение $\mathcal{PS} \circ \mathcal{A}^{-1}$ обощает биекцию ζ определённую Haglund в [169]. Точнее, если взять $m = n + 1$ и ограничить отображения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{PS}$ на множество представителей правых смежных классов минимальной длины $S_n \backslash \widetilde{S}_n$, тогда $\mathcal{PS} \circ \mathcal{A}^{-1}$ становится ζ из работы Haglund.

Замечание 2. Для $m = n + 1$ биекция $\mathcal{A}$ похожа на нумерация областей Ши [156] , но отличается от неё.

Гипотеза 1. Отображение $\mathcal{PS}$ биективно для всех взаимнопростых m и n.

Отображение $\mathcal{PS}$ имеет важное геометрическое значение. В [174] Lusztig и Smelt рассматривали определенные слои Спрингера $\mathcal{F}_{m/n}$ в афинном флаговом многообразии и доказали, что они могут быть покрыты m^{n-1} афинными клетками. В [165, 166] соответсвующее подмногообразие Грассманиана было изучено под именем фактора Якоби, и была построена биекция между его клетками и путями Дика в прямоугольнике $m \times n$. В работе [171] Hikita обобщил этот комбинаторный анализ и построил биекцию между клетками афинного слоя Спрингера и m/n-парковочной функцией(используя немного другую терминологию). Он привел весьма запутанную комбинаторную формулу для размерностей клетки. Мы переформулируем его результаты в терминах отображения $\mathcal{PS}$.

Теорема 5. Афинный слой Спрингера $\mathcal{F}_{m/n}$ допускает замощение афинными клетками Σ_ω ествественно занумерованными m-стабильными афинными перестановками ω. Размерности этих клетока равны

$$\dim \Sigma_\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{PS}_\omega(i).$$

Следствие 2. Если отбражение $\mathcal{PS}$ биективно (в частности, если $m = kn \pm 1$), то полином Пуанкаре $\mathcal{F}_{m/n}$ задаётся следующей простой формулой:

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k \dim \mathrm{H}^k \left(\mathcal{F}_{m/n}\right) = \sum_{f \in \mathcal{PF}_{m/n}} t^{2 \sum_i f(i)}.$$

В работах Varagnolo, Vasserot and Yun [182, 183] было доказано, что на когомологиях афинных слоёв Спрингера $\mathcal{F}_{m/n}$ есть действие двойной афинной алгебры Гекке(DAHA). На самом деле, все конечномерные представления $DAHA$ могут быть построенны таким образом. С другой стороны, Чередник, третий автор выше и Suzuki [158, 180] дали комбиноторное описание представлений $DAHA$ в терминах периодических стандартных таблиц Юнга и несимметрическмх полиномов Макдональда.

Теорема 6. Сущеествует базис(из несимметричных полиномво Макдональда) в конечномерном представлении DAHA естественно занумерованный альковами m-растянутого фундаментального симплекса. Из Предложения 1.1, эти альковы могут быть поставлены в соответствие с m-стабильными перестановками ω. Вес такого несимметричного полинома Макдональда может быть явно посчитан в терминах парковочной функции $\mathcal{A}_\omega$.

Отображения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{PS}$ могут быть использованы двух статистик на m-стабильных перестановках (или, эквивалентно, на m/n-парковочных функциях):

$$\mathrm{area}(\omega) := \frac{(m-1)(n-1)}{2} - \sum \mathcal{A}_\omega(i),\ \mathrm{dinv}(\omega) := \frac{(m-1)(n-1)}{2} - \sum \mathcal{PS}_\omega(i).$$

В случае $m = n+1$ Armstrong показал в [153] (в несколько другиз терминах), что area и dinv статистики совпадают со статистиками определнными в [170] как часть “Shuffle Conjecture”.

Гипотеза 2. Комбинаторные ряды Гильберта

$$H_{m/n}(q,t) := \sum_\omega q^{\mathrm{area}(\omega)} t^{\mathrm{dinv}(\omega)}$$

симметричны по q и t для любых m и n:

$$H_{m/n}(q,t) = H_{m/n}(t,q).$$

Для поддержки этой гипотезы, заметим что "слабая симметрия"$H_{m/n}(q,1) = H_{m/n}(1,q)$ следует из биективности отображения $\mathcal{PS}$. Действительно,

$$\begin{aligned} H_{m/n}(q,1) &= \sum_\omega q^{\frac{(m-1)(n-1)}{2} - \sum \mathcal{A}_\omega(i)} \\ &= \sum_{f \in \mathcal{PF}_{m/n}} q^{\frac{(m-1)(n-1)}{2} - \sum f(i)} = \sum_\omega q^{\frac{(m-1)(n-1)}{2} - \sum \mathcal{PS}_\omega(i)} = H_{m/n}(1,q). \end{aligned}$$

Вторая часть равенства следует из биективности отображения $\mathcal{A}$, а третья из биективности $\mathcal{PS}$. В частности, "слабая симметрия"выполена для $m = kn \pm 1$.

Достаточно неожиданно, мы нашли версию отображения $\mathcal{PS}$ для конечной симметрической группы S_n. Перестановка $\omega \in S_n$ называется m-стабильной, если $\omega \in S_n$ для любых $i \leqslant n - m$. Лекго видеть, что число m-стабильных перестановок равно определнному мультибиномиальному коэффициенту. Пусть $\mathcal{PS}_\omega(\omega(i))$ это число инверсий высоты не более чем m в ω, содержащих i на правом конце.

Теорема 7. Ограничение отображения $\mathcal{PS}$ на конечную симметрическую группу S_n инъективно для любых m и n.

Напрмиер, если $m = 2$, отображение $\mathcal{PS}$ осуществялет биекцию между множеством 2-стабильных перестановок S_n и множеством путей Дика длины n со свободным правым концом. Мы также рассматриваем связи этой конечной версии нашей конструкции с теорией слоёв Спрингера.

1.14 Алгебра Ли $\mathfrak{gl}_t$

Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{sl}_2$ со стандартным базисом $\{e,f,h\}$ с коммутационными соотношениями:

$$[h,e] = 2e,$$

$$[h,f] = -2f,$$

$$[e,f] = h,$$

и элементом Казимира $c = ef + fe + \frac{h^2}{2} \in \mathcal{Z}(U(\mathfrak{sl}_2))$.

Определение 2. Алгеброй Ли $\mathfrak{gl}(t)$ называется алгебра Ли, построенная по ассоциативной алгебре $U(\mathfrak{sl}_2)/(c - \frac{(t+1)(t-1)}{2})$, со скобкой Ли $[a,b] = ab - ba$.

Поскольку в $U(\mathfrak{sl}_2)$ можно выбрать базис в форме $\{e^i h^j c^k, f^i h^j c^k\}$, мономы вида $e^i h^k$ и $f^i h^k$ образуют базис в $\mathfrak{gl}(t)$. Некоторые полезные формулы:

$$ef = E(h) = \frac{1}{2}(h - \frac{h^2}{2} + \frac{(t-1)(t+1)}{2}),$$

$$fe = F(h) = \frac{1}{2}(-h - \frac{h^2}{2} + \frac{(t-1)(t+1)}{2}),$$

$$[e,e^k P(h)] = e^{i+1}(P(h) - P(h+2)), \tag{1.14.1}$$

$$[e,f^kP(h)] = f^{k-1}(F(h)(P(h)-P(h+2))-k(h-(k-1))), \qquad (1.14.2)$$

Также $\mathfrak{gl}(t)$ являетя $\mathfrak{sl}_2$-модулем относительно присоединенного действия подалгебры, натянутой на элементы $\{e,f,h\}$. Весовое разложение относительно действия элемента h задает на $\mathfrak{gl}(t)$ $\mathbb{Z}$-градуировку:

$$\mathfrak{gl}(t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{gl}(t)^i;\ \mathfrak{gl}(t)^i = \{x \in \mathfrak{gl}(t) \mid [h,x] = 2ix\} =$$

$$= \begin{cases} \{e^iP(h) \mid P(h) \in \mathbb{C}[h]\} & i \geqslant 0, \\ \{f^iP(h) \mid P(h) \in \mathbb{C}[h]\} & i < 0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что элемент h действует на $\mathfrak{gl}(t)$ полупросто.

Утверждение 2. Как $\mathfrak{sl}_2$-модуль $\mathfrak{gl}(t) \simeq \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}} V_{2i}$, где V_k - неприводимое конечномерное представление $\mathfrak{sl}_2$ со старшим весом k.

Алгебра $U(\mathfrak{sl}_2)$ имеет фильтрацию конечномерными $\mathfrak{sl}_2$-инвариантными подпространствами (где $U(\mathfrak{sl}_2)_k$ - многочлены степени не выше k от образующих). А значит, в силу полупростоты категории конечномерных представлений $\mathfrak{sl}_2$, как $\mathfrak{sl}_2$-модуль является прямой суммой V_k. А значит, то же самое выполнено для $\mathfrak{gl}(t)$ как для фактор-модуля. Найдем все особые векторы в $\mathfrak{gl}(t)$, собственные для h, то есть однородные относительно градуировки, введенной выше. Таковы только элементы вида $e^kP(h), f^kP(h)$. В то же время, из соотношений (1) и (2) следует, что e коммутирует только с выражениями вида e^k, следовательно, искомые вектора - все e^k и только они. Значит, в разложение входят все V_{2k} по одному разу. $\square$

Утверждение 3. $\mathfrak{gl}(t)$ порождается V_0, V_2 и V_4 как алгебра Ли.

Заметим, что, получив любой вектор из V_{2i}, мы получаем автоматически и весь V_{2i}, так как модуль неприводим, а $V_2 \simeq \mathfrak{sl}_2$. Введем обозначение $a = -\frac{1}{2}[f, e^2] = e(h-1) \in V_4$. Тогда

$$[a, e^m] = [eh, e^m] = 2me^{m+1} \in V_{2m+2}.$$

Значит, из $e^m \in V_{2m}$ и $a \in V_4$ можно получить e^{m+1}, а следовательно, и весь V_{2m+2}. Утверждение доказано. $\square$

Утверждение 4. При $t = n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ в $\mathfrak{gl}(t)$ есть идеал I_n, такой, что
$\mathfrak{gl}(t)/I_n \simeq \mathfrak{gl}_n$.

Представление V_{n-1} n-мерно, неприводимо и пропускается через фактор по идеалу, порожденному $(c-\frac{(n-1)(n+1)}{2})$. Имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
U(\mathfrak{sl}_2) \arrow[rr] \arrow[dr] & & End(V_{n-1}) \arrow[r] & 0 \\
& U(\mathfrak{sl}_2)/(c-\frac{(n-1)(n+1)}{2}) \arrow[ur, "f"] & &
\end{tikzcd}$$

Таким образом, имеем сюръективный гомоморфизм $f:\mathfrak{gl}(n)\to\mathfrak{gl}_n$. Его ядро - искомый идеал I_n, изоморфный как $\mathfrak{sl}_2$-модуль $\bigoplus_{i\geqslant n}V_{2i}$. $\square$

Утверждение 5. При $t\notin\mathbb{Z}$ $\mathfrak{sl}(t)\overset{\text{def}}{=}\mathfrak{gl}(t)/V_0$ – простая алгебра.

Пусть существует идеал $J\in\mathfrak{sl}(t)$. Он по необходимости является также и $\mathfrak{sl}_2$-подмодулем. Заметим, что в силу Утв.2, если $V_{2i}\subset J$, то и для любого $j>i$ $V_{2j}\subset J$. Докажем, что при нецелых значениях t присоединенное действие V_4 на V_{2k} порождает также и V_{2k-2}. Рассмотрим старший вектор $v_{2k-2}=f^3v_4\otimes v_{2k}-\frac{3}{k}f^2v_4\otimes fv_{2k}+\frac{9}{k(2k-1)}fv_4\otimes f^2v_{2k}-\frac{6}{k(2k-1)(k-1)}v_4\otimes f^3v_{2k}\in V_{2k-2}\subset V_4\otimes V_{2k}$. После замены действия элемента f и тензорного произведения на коммутатор и подстановки e^2 и e^k вместо v_4 и v_{2k} соответственно, получим выражение $\frac{12k(k+1)(t^2-k^2)}{(2k-1)}e^{2k-2}$, действительно принадлежащее V_{2k-2} при $t\neq\pm k$. Значит, если идеал J содержит какой-нибудь подмодуль V_{2i}, то он содержит и все остальные и совпадает со всем $\mathfrak{sl}(t)$. $\square$

Выберем разложение, согласованное с градуировкой: $\mathfrak{gl}(t)=\mathfrak{n}_-\oplus\hbar\oplus\mathfrak{n}_+$, где $\mathfrak{n}_-=\bigoplus_{i<0}\mathfrak{gl}(t)^i$, $\mathfrak{n}_+=\bigoplus_{i>0}\mathfrak{gl}(t)^i$, $\hbar=gl(t)^0$. При $t=n$ данное разложение после факторизации совпадает с картановским разложением для $\mathfrak{gl}_n=\mathfrak{gl}(n)/I_n$.

Мы хотим изучать представления $\mathfrak{gl}(t)$, порожденные старшим вектором v:

$$\forall x\in\mathfrak{n}_-\ \ xv=0,$$

$$\forall h\in\hbar\ \ hv=\chi(h)v.$$

Самый простой из них - модуль Верма, однако, слишком велик и как $\mathfrak{sl}_2$-модуль имеет бесконечномерные весовые подпространства. Категорией $\mathcal{O}(\mathfrak{gl}(t))$ назовем категорию $\mathfrak{gl}(t)$-модулей, имеющих конечномерные уровни относительно действия элемента h, и ограниченное сверху множество весов. Любой такой модуль содержит особый вектор и является последовательным расширением модулей, порожденных старшим вектором. Для любого модуля , порожденного старшим вектором, можем определить градуировку $M^i=\mathfrak{gl}(t)^{-i}v$, а также его характер: $\chi_M(x)=\sum_{i\geqslant0}dim\ M^i\cdot x^i$. В работе Б.Шойхета[2] было введено определение параболической подалгебры $\partial_{a_1,..,a_n}$ и доказано, что все порожденные старшим вектором модули из категории $\mathcal{O}(\mathfrak{gl}(t))$ являются фактор-модулями представлений, индуцированных с одномерных $\partial_{a_1,..,a_n}$-модулей.

Пусть $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$ - подалгебра в $\mathfrak{gl}(t)^{-1}$, порожденная всеми элементами вида $\{f(h-a_1)...(h-a_n)P(h) \mid P(h) \in \mathbb{C}[h]\}$.

Утверждение 6.

$$\widetilde{\mathfrak{n}}_- \cap \mathfrak{gl}(t)^{-k} = \{f^k \prod_{i=1}^{n}[(h-a_i)(h-a_i-2)...(h-a_i-2(k-1))]P(h) \mid P(h) \in \mathbb{C}[h]\}.$$

Это следует из того, что $P(h)f = fP(h-2)$. □

Определение 3. Параболическая подалгебра $\partial_{a_1,..,a_n} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\mathfrak{n}}_- \oplus \hbar \oplus \mathfrak{n}_+$.

Утверждение 7. $\partial_{a_1,...,a_n}$ - подалгебра.

Докажем индукцией по m, что

$$[f^k \textstyle\prod_{i=1}^{n}\big((h-a_i)(h-a_i-2)...(h-a_i-2(k-1))\big)P(h), e^m Q(h)] \in \partial_{a_1,...,a_n}. \quad (*)$$

Для m = 1:

$$[f^k \prod_{i=1}^{n}((h-a_i)(h-a_i-2)...(h-a_i-2(k-1))P(h), eQ(h)] =$$

$$= f^{k-1} \prod_{i=1}^{n}((h-a_i)(h-a_i-2)...(h-a_i-2(k-2))) \cdot R(h) \in \widetilde{\mathfrak{n}}_-.$$

Где

$$R(h) = F(h)\Big(\prod_{i=1}^{n}(h-a_i+2) \cdot P(h+2)Q(h) -$$

$$- \prod_{i=1}^{n}(h-a_i-2k+2) \cdot P(h)Q(h-2k)\Big) -$$

$$-k(h-k+1) \prod_{i=1}^{n}(h-a_i-2k+2) \cdot Q(h-2k).$$

В то же время $\mathfrak{n}_+$ порождено $\mathfrak{gl}(t)^1$, то есть для любого многочлена $Q(h)$ и для любого m существует такой многочлен $T(h)$, что $e^m Q(h) = [e, e^{m-1}T(h)]$. А значит, для произвольного m можно представить $e^m Q(h)$ в виде $[e, x]$, где $x \in \mathfrak{gl}(t)^{m-1}$, а следовательно,

$ad(x)$ сохраняет $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$ по предположению индукции. Обозначим $f^k \prod_{i=1}^n \big((h-a_i)(h-a_i-2)...(h-a_i-2(k-1))\big)P(h)$ за y. Тогда коммутатор (*) равен

$$[y,[e,x]] = [e,[y,x]] + [x,[e,y]]. \quad (**)$$

По предположению индукции и по доказанному выше $ad(x)$ и $ad(e)$ сохраняют $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$, следовательно, (**) лежит в $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$. Утверждение доказано. □

Утверждение 8.

$$\hbar \cap [\widetilde{\mathfrak{n}}_-, \mathfrak{n}_+] = [\widetilde{\mathfrak{n}}_- \cap \mathfrak{gl}(t)^{-1}, \mathfrak{gl}(t)^1]$$

Докажем по индукции, что $[\widetilde{\mathfrak{n}}_- \cap \mathfrak{gl}(t)^{-m}, \mathfrak{gl}(t)^m] \in [\widetilde{\mathfrak{n}}_- \cap \mathfrak{gl}(t)^{-1}, \mathfrak{gl}(t)^1]$. Для $m = 1$ очевидно. Пусть $f^m Q(h) \in \widetilde{\mathfrak{n}}_-$. Покажем, что $[f^m Q(h), e^m P(h)] \in [\widetilde{\mathfrak{n}}_- \cap \mathfrak{gl}(t)^{-1}, \mathfrak{gl}(t)^1]$. Мы знаем, что для некоторого $T(h)$

$$f^m Q(h) = [f \prod_{i=1}^n (h-a_i), f^{m-1}T(h)],$$

где $f^{m-1}T(h) \in \widetilde{\mathfrak{n}}_-$.

$$[[f \prod_{i=1}^n (h-a_i), f^{m-1}T(h)], e^m P(h)] = [\underbrace{[e^m P(h), f^{m-1}T(h)]}_{\text{в } \mathfrak{gl}(t)^1}, f \prod_{i=1}^n (h-a_i)] +$$

$$+ [\underbrace{[f \prod_{i=1}^n (h-a_i), e^m P(h)]}_{\text{в } \mathfrak{gl}(t)^{m-1}}, \underbrace{f^{m-1}T(h)}_{\text{в } \mathfrak{gl}(t)^{-m+1}}].$$

По предположению индукции второе слагаемое лежит в $[\widetilde{\mathfrak{n}}_- \cap \mathfrak{gl}(t)^{-1}, \mathfrak{gl}(t)^1]$. Значит и вся сумма тоже, что и требовалось доказать. □

Рассмотрим некоторое одномерное представление $\theta : \partial_{a_1,\ldots,a_n} \to \mathbb{C}$. Задать такое представление - то же самое, что задать характер $\theta : \hbar \to \mathbb{C}$, такой, что $\theta([\widetilde{\mathfrak{n}}_-, \mathfrak{n}_+]) = 0$. По вышедоказанному, это эквивалентно условию $\theta([\widetilde{\mathfrak{n}}_- \cap \mathfrak{gl}(t)^{-1}, \mathfrak{gl}(t)^1]) = 0$ или $\theta([f \cdot \prod_{i=1}^n (h-a_i) \cdot P(h), eQ[h]]) = 0 \ \ \forall P(h), Q[h] \in \mathbb{C}[h]$.

Определение 4.

$$\mathcal{L}_{a_1,\ldots,a_n;\theta} \stackrel{\text{def}}{=} U(\mathfrak{gl}(t)) \bigotimes_{U(\partial_{a_1,\ldots,a_n})} \mathbb{C}_\theta.$$

Утверждение 9. Любой $\mathfrak{gl}(t)$-модуль M из категории $\mathcal{O}(\mathfrak{gl}(t))$, порожденный старшим вектором, является фактор-модулем $\mathcal{L}_{a_1,\ldots,a_n;\theta}$.

Пусть $dim\ M^1 = k$. Для доказательства рассмотрим множество

$$J = \{x \in \mathfrak{gl}(t) \mid xv = \mu(x)v\}.$$

Очевидно, что J является подалгеброй и $J \supset \hbar \oplus \mathfrak{n}_+$. Рассмотрим $J^1 = J \cap M^1$. Пусть $fP(h) \in J^1$. Так как $[fP(h), Q(h)] = fP(h)(Q(h)-Q(h-2)) \in J^1$, то $J^1 = \{fP(h) \mid P(h) \in I \subset \mathbb{C}[h]\}$, I - некоторый идеал. При этом $J^1 \neq \emptyset$, т.к. M^1 должно быть конечномерно, и $J^1 v = 0$ из соображений градуировки. Отсюда немедленно следует утверждение. $\square$

Одни из наиболее простых $\mathfrak{gl}(t)$-модулей – это модули Верма для $\mathfrak{sl}_2$, на которых элемент Казимира действует с константой $\frac{(t-1)(t+1)}{2}$, то есть M_{t-1} и M_{-t-1}. Они лежат в категории $\mathcal{O}(\mathfrak{gl}(t))$, и несложное вычисление показывает, что M_λ является фактор-представлением $\mathcal{L}_{\lambda,\theta}$, где $\theta(h^k) = \lambda^k$, а λ принимает значения $t-1, -t-1$.

Определение 5. Категорией $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}(\mathfrak{gl}(t))$ назовем тензорную абелеву категорию, порожденную M_{t-1} и M_{-1-t}. Также определим категории $\mathcal{C}(M_{t-1})$ и $\mathcal{C}(M_{-t-1})$, порожденные только одним из модулей.

Во многом можно считать M_{t-1} и M_{-t-1} аналогом стандартного представления V и его двойственного V^* для $\mathfrak{gl}_n$. А категорию $\mathcal{C}$ – аналогом $Rep_{\mathfrak{gl}_n}$ - категории конечномерных представлений $\mathfrak{gl}_n$.

В частности, верно следующее утверждение (аналог двойственности Шура-Вейля):

Утверждение 10. Для некотрого всюду плотного в $\mathbb{C}$ множества значений парметра t выполнено:

$$Hom_{\mathfrak{gl}(t)}(M_\lambda^{\otimes k}, M_\lambda^{\otimes l}) = \begin{cases} 0 & k \neq l, \quad (1) \\ \mathbb{C}S_k & k = l. \quad (2) \end{cases}$$

Где λ принимает значения $t-1$ и $-t-1$, а S_k дейтвует перестановками на сомножителях.

(1): Первое утверждение сразу следует из того, что $1 \in V_0 \subset \mathcal{Z}(U(\mathfrak{gl}(t)))$ действует на данных модулях с разными константами.

(2): Очевидно, что все $\mathbb{C}S_k$ коммутирует с действием $\mathfrak{gl}(t)$. Докажем, что ничто больше не коммутирует. Рассмотрим подпространство $M_{<l} := \bigoplus_{i<l}(M_\lambda^{\otimes k})^i$. Все, что коммутирует с $U(\mathfrak{gl}(t))$, сохраняет весовое разложение, а следовательно коммутирует с проектором на $M_{<l}$ – P. Достаточно показать, что централизатор $PU(\mathfrak{gl}_t)P$ – это образ групповой алгебры от S_k. Докажем это утверждение при фиксированном l для

некоторого достаточно большого целого t. Условие того, что централизатор некоторой алгебры имеет размерность не больше данной - открытое. Следовательно, утверждение будет доказано для некоторого открытого всюду плотного множества значений t. Пересечение по всем l (т.е. счетного числа) таких множеств будет по-прежнему всюду плотным.

Рассмотрим модуль $V = V_{n-1}^{\otimes k}$. На нем действует симметрическая группа S_k и $\mathfrak{gl}_n$. Теорема Шура-Вейля говорит, что $Hom_{S_k}(V,V) = U(\mathfrak{gl}_n)$, что по теореме плотности (или о двойном централизаторе) равносильно тому, что $Hom_{\mathfrak{gl}_n}(V,V) = \mathbb{C}S_k$. Рассмотрим $V_{<l} = \bigoplus_{i=0}^{l-1} V^i$ (здесь V градуирован как $\mathfrak{gl}(n)$-модуль). Пусть P - проектор на $V_{<l}$. Заметим, что S_k сохраняет $V_{<l}$, поэтому $P \in Hom_{S_k}(V,V) = U(\mathfrak{gl}_n)$.

Лемма: $Hom_{S_K}(V_{<l},V_{<l}) = P\,U(\mathfrak{gl}_n)P$.

От противного: пусть существует оператор $a : V_{<l} \to V_{<l}$, такой, что $a \notin P\ U(\mathfrak{gl}_n)P$ и для любого оператора из S_k его ограничение на $V_{<l}$ коммутирует с a. Тогда тавтологическое продолжение a на все пространство V, во-первых, не лежит в $U(\mathfrak{gl}_n)$, а во-вторых, коммутирует со всеми операторами из S_k (т.к. S_k сохраняет $V_{<l}$). Противоречие. Лемма доказана. $\square$

Утверждение можно переформулировать как "Для любого оператора $A \in End(V_{<l})$, коммутирующего с действием S_k, существует оператор из $U(\mathfrak{gl}_n)$, такой, что ограничение его образа при гомоморфизме $\pi : U(\mathfrak{gl}_n) \to V$ на $V_{<l}$ совпадает с A". Отсюда видно, что оно останется верным после вложения $\mathfrak{gl}_n$ в $\mathfrak{gl}(n)$ как $\mathfrak{sl}_2$-модуля, а также после отображения $V_{<l} \to M_{<l}$. После применения теоремы плотности получим требуемое утверждение. $\square$

Мы видим, что категории $\mathcal{C}(M_{t-1})$ и $\mathcal{C}(M_{-t-1})$ устроены практически точно так же, как и категория конечномерных представлений $\mathfrak{gl}_n$. Категория $\mathcal{C}$, как оказывается, устроена гораздо сложнее и является интересным объектом для дальнейших исследований.

1.15 τ-функции.

Цель исследования — найти q-деформацию формул для τ-функций, предложенных в работах [139],[140]. Более точно, здесь мы проделываем это для простейшего случая уравнения Пенлеве III(D_8).

Указанное уравнение в стандартной форме выглядит как дифференциальное уравнение второго порядка на функцию $w(z)$:

$$w'' = \frac{w'^2}{w} - \frac{w'}{z} + \frac{2w^2}{z^2} - \frac{2}{z} \tag{1.15.1}$$

Это уравнение может быть переписано как система двух билинейных Тода-подобных уравнений на две τ-функции [137]:

$$1/2D^2_{[\log z]}(\tau(z),\tau(z)) = z^{1/2}\tau_1(z)\tau_1(z), \quad 1/2D^2_{[\log z]}(\tau_1(z),\tau_1(z)) = z^{1/2}\tau(z)\tau(z), \tag{1.15.2}$$

где $D^2_{[\log z]}$ обозначает вторую производную Хироты от $\log z$, а τ_1 — преобразование Бэклунда τ-функции (здесь группа преобразований Бэклунда равна $\mathbb{Z}_2$). Функция $w(z)$ равна $-z^{1/2}\tau(z)^2/\tau_1(z)^2$, преобразование Бэклунда действует на w как $w \mapsto z/w$.

Формула Гамаюна-Иоргова-Лисового для этой τ-функции имеет вид: [140]

$$\tau(\sigma,s|z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C(\sigma+n)s^n z^{(\sigma+n)^2}\mathcal{F}((\sigma+n)^2|z), \tag{1.15.3}$$

где s,σ играют роль констант интегрирования. Функция $\mathcal{F}(\Delta|z)$ обозначает Уиттекеровский предел конформного блока алгебры Вирасоро в представлении со старшим весом Δ и центральным зарядом $c = 1$. Здесь $C(\sigma) = 1/(\mathrm{G}(1-2\sigma)\mathrm{G}(1+2\sigma))$, где G — G-функция Барнса. Функция $\tau(\sigma,s|z)$ имеет очевидное свойство $\tau(\sigma,s|z) = s^{-1}\tau(\sigma+1,s|z)$ (квазипериодичность по σ) а преобразование Бэклунда действует как $\tau_1 \propto \tau(\sigma+1/2,s|z)$. Тогда билинейные уравнения и формуля для w будут (детали в [137])

$$1/2D^2_{[\log z]}(\tau(\sigma,s|z),\tau(\sigma,s|z)) = z^{1/2}\tau(\sigma+1/2,s|z)\tau(\sigma-1/2,s|z), \tag{1.15.4}$$

$$w(z) = -z^{1/2}\frac{\tau(\sigma,s|z)^2}{\tau(\sigma-1/2,s|z)\tau(\sigma+1/2,s|z)} \tag{1.15.5}$$

Формула для τ-функции (1.15.3) была доказана независимо разными способами в работах [142] и [136]. Например, в работе [136] доказательство основано на билинейных соотношениях на конформные блоки алгебры Вирасоро.

Естественно ожидать, что существует некоторая q-деформация формулы (1.15.3), которая дает τ-функцию для q-разностного уравнения Пенлеве. Мы следуем подходу Сакаи к q-деформированным уравнениям [149], в котором дискретным уравнениям соответствуют определенные рациональные поверхности. Эти поверхности параметризуются двумя сопряженными решетками в группе Пикара $\mathbb{CP}^2$, раздутого в 9 точках ($\mathbb{Z}^{1,9}$). Эти решетки обозначаются R и $R^\perp$ и определяют так называемый поверхностный и симметрийный тип соответственно. Соответствующие таблицы Сакаи

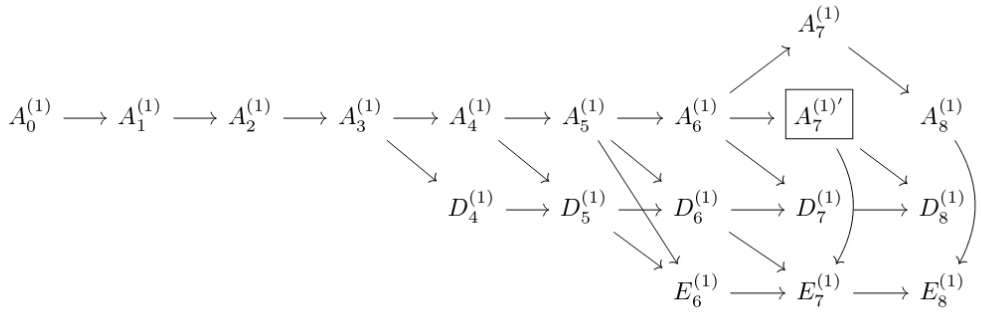

Рисунок 1 — Классификация Сакаи, поверхностный тип

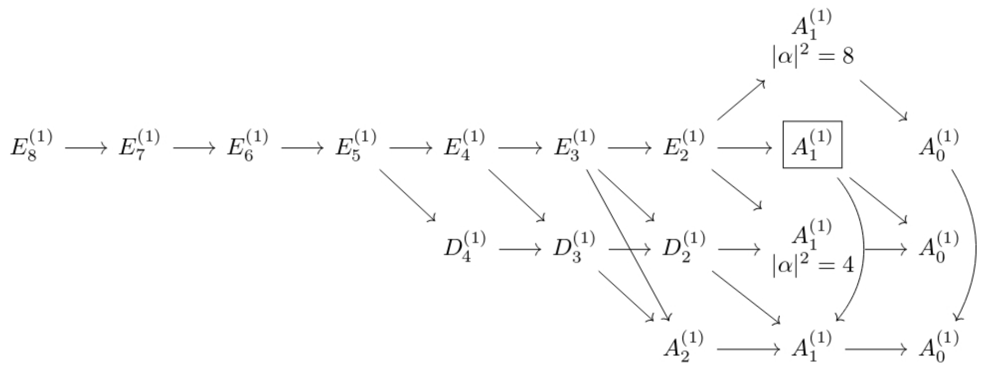

Рисунок 2 — Классификация Сакаи, симметрийный тип

изображены на Рис. 1 и 2. Тут $X_n^{(1)}$ — стандартные обозначения для решеток аффинных систем корней. Детали обозначения см. в [149] or [144]. Стрелки же на диаграммах обозначают вырождения поверхностей.

Добавим ещё, что эти диаграммы содержат информацию и про непрерывные уравнения Пенлеве, а именно, им соответствуют последние две строчки диаграмм. Соответствующая симметрия — это группа преобразований Бэклунда соотвествующего уравнения, а поверхность — так называемое пространство начальных состояний [147]. При этом стрелка соответствует ещё и непрерывному пределу. Для уравнения (1.15.1) это поверхность типа $D_8^{(1)}$, поэтому мы его называем Пенлеве III(D_8). q-деформация этого уравнения соответствует деформации поверхности начальных данных (см. [149, Sec 7]). Поэтому мы рассматриваем q-разностное уравнение Пенлеве, соответствующее поверхности типа $A_7^{(1)\prime}$ с симметрийным типом $A_1^{(1)}$ (на Рис. 1, 2 оно в рамках).

Такая поверхность зависит от двух параметров, которые мы обозначаем как q и Z (q-деформированный аналог z в (1.15.1)). Соответствующее уравнение — некоторое условие на действие группы симметрий на поверхности. Оно имеет вид:

$$\overline{G}\underline{G} = \left(\frac{G-Z}{G-1}\right)^2 \tag{1.15.6}$$

Группа симметрий – полупрямое произведение группы диэдра на аффинную группу Вейля $W = D_4 \ltimes W(A_1^{(1)})$, порождающаяся генераторами π_1, π_2, s_1 с соотношениями $s_1^2 = 1, \pi_1^2 = \pi_2^4 = (\pi_1\pi_2)^2 = 1, s_1 = \pi_1 s_1 \pi_1^{-1} = \pi_2^2 s_1 \pi_2^{-2}$. Общепринятого уравнения τ-функции для этого разностного уравнения нету, поэтому мы используем подход работы [151] (см. также [144]). Удобно ввести 4 τ-функции $\mathcal{T}_1$,$\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$, $\mathcal{T}_4$. Тогда в этом подходе мы получили результат

Теорема 6. Действие генераторов s_1, π_1, π_2 группы W на $\mathcal{T}_i, i = \overline{1{,}4}$ заданное Табл. 1 дает представление W в поле $\mathbb{C}(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3, \mathcal{T}_4, q^{1/4}, Z^{1/4})$.

Таблица 1 — Представление W на τ-функциях $\mathcal{T}_i$

	Z	q	F	G	$\mathcal{T}_1$	$\mathcal{T}_2$	$\mathcal{T}_3$	$\mathcal{T}_4$
π_1	$1/Z$	$1/q$	$F/(qZ)$	$1/G$	$\mathcal{T}_3$	$\mathcal{T}_2$	$\mathcal{T}_1$	$\mathcal{T}_4$
π_2	$1/(qZ)$	q	G/Z	$1/F$	$\mathcal{T}_4$	$\mathcal{T}_1$	$\mathcal{T}_2$	$\mathcal{T}_3$
s_1	$1/Z$	q	$F\frac{(G-1)^2}{(G-Z)^2}$	G/Z	$\mathcal{T}_1$	$\frac{\mathcal{T}_3^2+Z^{1/2}\mathcal{T}_1^2}{Z^{1/4}\mathcal{T}_4}$	$\mathcal{T}_3$	$\frac{\mathcal{T}_1^2+Z^{1/2}\mathcal{T}_3^2}{Z^{1/4}\mathcal{T}_2}$
s_0	$1/(q^2Z)$	q	$F/(qZ)$	$G\frac{(1-F)^2}{(Zq-F)^2}$	$\frac{\mathcal{T}_4^2+(qZ)^{1/2}\mathcal{T}_2^2}{(qZ)^{1/4}\mathcal{T}_3}$	$\mathcal{T}_2$	$\frac{\mathcal{T}_2^2+(qZ)^{1/2}\mathcal{T}_4^2}{(qZ)^{1/4}\mathcal{T}_1}$	$\mathcal{T}_4$
T	qZ	q	$\frac{(F-qZ)^2}{(-1+F)^2G}$	F	$\mathcal{T}_2$	$\frac{\mathcal{T}_2^2+(qZ)^{1/2}\mathcal{T}_4^2}{(qZ)^{1/4}\mathcal{T}_1}$	$\mathcal{T}_4$	$\frac{\mathcal{T}_4^2+(qZ)^{1/2}\mathcal{T}_2^2}{(qZ)^{1/4}\mathcal{T}_3}$

Здесь $s_1 = \pi_1 s_0 \pi_1$ — сопряжение корня внешним автоморфизмом, а $T = \pi_2^{-1} \circ s_0$ — оператор сдвига бесконечного порядка.

Следующая задача — получение выражения для $\mathcal{T}_i$ как функции от Z. Так же, как в непрерывном случае это сводится к одному уравнению на функцию $\mathcal{T}(u{,}s;q|Z)$, дополненному условием квазипериодичности

$$\begin{gathered} Z^{1/4}\mathcal{T}(u{,}s;q|qZ)\mathcal{T}(u{,}s;q|q^{-1}Z) = \mathcal{T}(u{,}s;q|Z)^2 + Z^{1/2}\mathcal{T}(uq{,}s;q|Z)\mathcal{T}(uq^{-1}{,}s;q|Z) \\ \mathcal{T}(uq^2{,}s;q|Z) = s^{-1}\mathcal{T}(u{,}s;q|Z). \end{gathered} \tag{1.15.7}$$

Тут u, s — q-деформированные аналоги параметров σ,s в (1.15.3).

Мы предлагаем решение этой системы уравнений в виде анзаца:

$$\mathcal{T}(u{,}s;q|Z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s^n C(uq^{2n};q|Z)\frac{\mathcal{F}(uq^{2n};q^{-1}{,}q|Z)}{(uq^{2n+1};q{,}q)_\infty(u^{-1}q^{-2n+1};q{,}q)_\infty} \tag{1.15.8}$$

Тут $\mathcal{F}(u;q^{-1}{,}q|Z)$ обозначает Уиттекеровский предел q-деформированного конформного блока [134], $(u;q{,}q)_\infty$ обозначает двойной бесконечный q-символ Похгаммера, а функция $C(u;q|Z)$ определена вторыми разностными производными

$$\frac{C(uq;q|Z)C(uq^{-1};q|Z)}{C(u;q|Z)^2} = -Z^{1/2} \tag{1.15.9}$$

$$\frac{C(uq;q|qZ)C(uq^{-1};q|q^{-1}Z)}{C(u;q|Z)^2} = -uZ^{1/4} \tag{1.15.10}$$

$$\frac{C(u;q|qZ)C(u;q|q^{-1}Z)}{C(u;q|Z)^2} = Z^{-1/4}. \tag{1.15.11}$$

Функция $C(u;q|Z)$ — q-деформированный аналог z^{σ^2} из формулы (1.15.1). Примерами таких функций могут быть

$$\begin{aligned} C_1(u;q|Z) &= \Gamma((qZ)^{1/4};q^{1/4},q^{1/4})^3/ \\ &\quad \big(\Gamma(i(qZu)^{1/4};q^{1/4},q^{1/4})\,\Gamma(i(qZ)^{1/4}u^{-1/4};q^{1/4},q^{1/4})\big) \qquad (1.15.12) \\ C_c(u;q|Z) &= (-1)^{2\left(\frac{\log u}{2\log q}\right)^2}\Gamma(-(qZ)^{1/4};q^{1/4},q^{1/4})\exp\left(\frac{\log^2 u \log Z}{4\log^2 q}\right), \qquad (1.15.13) \end{aligned}$$

где использована эллиптическая гамма-функция.

То что эта τ-функция действительно удовлетворяет системе уравнений выше следует из гипотезы про билинейное соотношение на соответствующие конформные блоки. Это соотношение имеет вид

$$\sum_{2n\in\mathbb{Z}} \frac{u^{2n}Z^{2n^2}}{\prod\limits_{\epsilon,\epsilon'=\pm1}(u^{\epsilon}q^{1+2\epsilon' n};q,q)_\infty} F(uq^{-2n};q^{-1},q|q^{-1}Z)F(uq^{2n};q^{-1},q|qZ) =$$

$$= (1-Z^{1/2})\sum_{2n\in\mathbb{Z}} \frac{Z^{2n^2}}{\prod\limits_{\epsilon,\epsilon'=\pm1}(u^{\epsilon}q^{1+2\epsilon' n};q,q)_\infty} F(uq^{-2n};q^{-1},q|Z)F(uq^{2n};q^{-1},q|Z)$$

Мы не доказываем эту гипотезу, но приводим ряд аргументов, почему такое соотношение должно быть, в частности, проверяем его в первых нескольких порядках. Кроме всего прочего, мы, конечно, проверяем, что предел $q \to 1$ дает нам из уравнения (1.15.6) и τ-функции (1.15.8) непрерывное уравнение (1.15.1) и непрерывную τ-функцию (1.15.3).

Наконец, мы получаем q-деформацию алгебраического решения Пенлеве III(D_8) $w(z) = \pm\sqrt{z}$ [141]. Оно имеет вид:

$$G(Z) = Z^{1/16}(\mp Z^{1/2}q^{1/2};q^{1/2},q^{1/2}). \tag{1.15.14}$$

Как вывод, можно заметить, что общая задача поднять τ-функцию от Z на всю группу W пока остается не полностью решенной.

1.16 Конечные W-алгебры

Пусть $\mathfrak{g}$ полупростая комплексная алгебра Ли. Пусть $\mathbb{O}$ какая-то её нильпотентная орбита относительно присоединённого действия Ad G соответствующей группы Ли. Тогда для любого $e \in \mathbb{O}$, по теореме Джекобсона-Морозова, можно найти такие $f, h \in \mathfrak{g}$, что $\{e, f, h\}$ образуют $\mathfrak{sl}_2$–тройку. Определим теперь срез Слодовы: $S_e = e + \mathrm{Ker}\ \mathrm{ad} f$. Очевидно, что срез является аффиным подмногообразием в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Также, на пространстве функций на S_e имеется естественная скобка Пуассона [187].

Далее мы будем пользоваться отождествлением $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ через форму Киллинга $(x, y)_K = \mathrm{Tr}\ \mathrm{ad} x \mathrm{ad} y$, $x, y \in \mathfrak{g}$, так что $\langle \Phi(e), f \rangle = 1$, и рассматривать действие группы на $\mathfrak{g}^*$, а не на $\mathfrak{g}$. Соответственно, под срезом Слодовы далее мы будем понимать $\Phi(S_e)$, но для простоты обозначений будем обозначать его также.

Существует ещё одна конструкция среза Слодовы — через гамильтонову редукцию. Известно, что алгебра Ли разбивается в прямую сумму подпространств относительно действия полупростого элемента h: $\mathfrak{g} = \oplus \mathfrak{g}_i$, где h действует на $\mathfrak{g}_i$ с собственным значением i. Обозначим через χ характер $\mathfrak{g}$, такой что $x \mapsto (e, x)_K$. На $\mathfrak{g}_{-1}$ имеется естественная невырожденная кососимметрическая форма: $\omega(x, y) = \chi([x, y])$. Относительно этой формы мы можем выбрать лагранжево подпространство l. Определим $\mathfrak{m}_e = l \oplus_{i\ell-2} \mathfrak{g}_i$. Т.к. соответствующая $\mathfrak{m}_e$ группа Ли M_e является подгруппой в G, M_e действует на $\mathfrak{g}^*$, и мы можем рассмотреть гамильтонову редукцию $\mathfrak{g}^* //_\chi \mathfrak{m}_e$. Несложно убедиться, что это подмногообразие в $\mathfrak{g}^*$ и есть S_e. Доказательство этого факта можно найти по следующим ссылкам: [187][190].

Теперь мы можем рассмотреть пространство функций на срезе $\mathbb{C}[S_e]$. Из конструкции гамильтоновой редукции видно, что $\mathbb{C}[S_e] = (S(\mathfrak{g})/(\mathfrak{m}_e - \chi(\mathfrak{m}_e))S(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{m}_e}$. Конечной W–алгеброй W_e называется квантовая гамильтонова редукция:

$$(U(\mathfrak{g})/(\mathfrak{m}_e - \chi(\mathfrak{m}_e))U(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{m}_e}.$$

Она является квантованием $\mathbb{C}[S_e]$. Очевидно, что W_e можно представлять и в следующей форме: $\left(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{m}_e)} \mathbb{C}_\chi\right)^{\mathfrak{m}_e}$.

1.2. Для конечных W–алгебр типа A существует ещё одно описание, но для того, чтобы его сформулировать, нам нужно определить янгиан $Y(\mathfrak{g}l_n)$ (для краткости его часто обозначают Y_n) и его некоторое обобщение — сдвинутый янгиан $Y_n(\sigma^\lambda)$.

Янгиан Y_n это некоторая деформация алгебры $U(\mathfrak{ggl}_n[t])$. Обычно его задают через образующие, причём существует несколько эквивалентных определений. Подробнее об этом, а также о свойства Y_n, можно прочитать в статье Молева [189]. Из этой статьи нас так же будет интересовать описание семейства коммутативных подалгебр в Y_n, называемых подалгебрами Бете.

Сдвинутый янгиан $Y_n(\sigma^\lambda)$, в свою очередь, это деформация алгебры $U(\mathfrak{a})$, где $\mathfrak{a}$ некоторая подалгебра $\mathfrak{gl}_n[t]$. Обычно его задают через три семейства образующих $D_i^{(r)}$, $E_i^{(r)}$ и $F_i^{(r)}$, которые зависят от доминантного веса — λ. Желающих подробнее узнать структуру сдвинутого янгиана, в частности явный вид образующих, мы отсылаем к статье Брандана и Клещёва [185], где они впервые определили $Y_n(\sigma^\lambda)$. Главным результатом статьи [185] является следующая теорема:

Теорема 8. (Брандан, Клещёв) Сдивутый янгиан $Y_n(\sigma^\lambda)$, где вес λ определяется размерами блоков ЖНФ нильпотента e, сюрьективно отображается на W_e.

Заметим, что в случае, когда нильпотент e состоит из блоков одинакового размера, сдвинутый ягиан совпадает с обычным. В нашей работе для такого e мы хотим сравнивать максимальные коммутативные подалгебры в W_e, которые мы построим, с образом подалгебры Бете в Y_n.

1.3. Конечные W–алгебры возникают в разных областях теории представлений, например, они бывают нужны при изучении бесконечномерных представлений $U(\mathfrak{g})$ или её конечномерных представлений над полем конечной характеристики [188]. Однако нас больше интересует связь W–алгебр с геометрическими конструкциями теории представлений.

Пусть M_d — пространство гладких отображений из $\mathbb{P}^1$ в пространство неполных флагов $\mathbb{F}l = G/P$ степени $d = (d_1, \dots, d_{n-1})$. Это пространство некомпактное, поэтому рассмотрим его компактификацию [184]:

$$Q_d = \{\mathbb{F}_\bullet = \{0 \subset \mathbb{F}_1 \subset \dots \subset \mathbb{F}_{n-1} \subset \mathcal{O}^{\oplus N}\} |\ \mathrm{rk}\, \mathbb{F}_i = n_i; \deg \mathbb{F}_i = -d_i\},$$

где $\mathbb{F}_i$ — локально свободные пучки. Q_d - гладкое многообразие. Если $d = d' + \delta_i$, мы можем рассмотреть пространство $C^i_{d,d'} = \{\mathbb{F}_\bullet, \mathbb{F}'_\bullet | \mathbb{F}_j = \mathbb{F}'_j, j \neq i; \mathbb{F}_i \subset \mathbb{F}'_i\}$. Получили:

$$\begin{tikzcd} & C^i_{d,d'} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ Q_d & & Q_{d'} \end{tikzcd}$$

Тогда $e_i = p_* q^* : H^*(Q_{d'}) \to H^*(Q_d)$ — семейство операторов действующих на $\oplus_d H^*(Q_d)$. В статье [184] рассматриваются такие операторы, однако главным результатом статьи является рассмотрение немножко подкрученных операторов такого вида. Вместо многообразия $C^i_{d,d'}$ можно рассматривать его линейное расслоение со слоем $\mathcal{L}_\rangle = \mathbb{F}'_\rangle/\mathbb{F}_\rangle$. Тогда можно рассмотреть семейство операторов $e_i^r = p_* c_1(\mathcal{L}_\rangle)^\nabla \amalg^*$. Главный результат статьи [184] — проверка того, что эти операторы образуют конечную W–алгебру, для нильпотентного элемента с жордановой клеткой с блоками размера $n_i - n_{i-1}$, при условии, что $n_i - n_{i-1}$ образуют доминантный вес.

1.4. Мы занимаемся поиском максимальной коммутативной подалгебры в конечной W–алгебре W_e относительно имеющейся на ней скобки Пуассона. В терминах предыдущего пункта конечные W–алгебры соответсвуют операторам квантового умножения на классы Черна. Наша цель найти их чисто алгебраическое описание. В разделе 2 мы кратко опишем конструкцию максимальных коммутативных подалгебр в $S(\mathfrak{g})$, которые называются подалгебрами сдвига аргумента. Они поднимаются до максимальных коммутативных в $U(\mathfrak{g})$. Пользуясь некоторым обобщением этой конструкции мы для некоторых частных случаев в типе A получим максимальные коммутативные подалгебры в $\mathbb{C}[S_e]$, которые поднимаются до максимальных коммутативных в W_e.

1.17 Некоммутативное дифференциальное исчисление.

В наших недавних работах было введен понятие частных производных на некоторых некоммутативных алгебрах, в частности на обёртывающей алгебре алгебры Ли $gl(m)$ и на её супер и твистованном (опеределение дано ниже) аналогах. Эти новые частные производные отличаются от классических тем, что для них правило Лейбница выглядит иначе.

В связи с этим возникает вопрос: какие операторы, действующие на заданной некоммутативной алгебре A, могут рассматриваться как аналоги классических частных производных? Этот вопрос актуален, если алгебра A есть деформация (квантование) симметрической алгебры $\mathrm{Sym}(V)$ векторного пространства V или её супер или твистованного аналога. Мы даём ответ на поставленный вопрос для обёртывающих алгебр некоторых алгебр Ли.

Отметим, что ответ зависит от рассматриваемой алгебры Ли. Тем не менее, после того как введены частные производные, мы можем определить аналог комплекса де Рама на соответствующей обёртывающей алгебре. По сравнению с другими известными на сегодняшний день подходами к определению комплекса де Рама, наш выделяется тем, что возникающие в нём объекты обладают хорошим деформационным свойством. Для конечно порождённых квадратично-линейных алгебр (обёртывающих алгебр в частности), с которыми мы работаем, это свойство означает, что справедлив аналог теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта и что размерности однородных компонент соответствующей квадратичной алгебры фиксированы (по крайней мере для общего параметра деформации). Отметим, что сейчас термин "PBW свойство" часто используют для обозначения того, что мы называем "хорошим деформационным свойством". Однако, мы предпочитаем использовать последний вариант для линейных деформаций квадратичных алгебр. С другой стороны, параметры нашего комплекса снабжены односторонней структурой A-модуля, в то время как в классическом случае для того, чтобы использовать правило Лейбница, необходима структура двухстороннего A-модуля. Кроме того, мы определяем понятие алгебры Вейля $\mathcal{W}(U(g))$, порождённой обёртывающей алгеброй данной алгебры Ли, и соответствующие частные производные. Также мы приводим несколько примеров таких алгебр Вейля.

Помимо этого, мы обобщаем все рассматриваемые объекты (частные производные, алгебру Вейля, комплекс де Рама) на алгебру уравнения отражений и её модификацию. Эту алгебру и все связанные с ней объекты мы называем твистованными, потому что они возникают из некоторых преобразований ветвления. Одной из целей настоящего исследования является явное построение упомянутых выше твистованных объектов. Стоит отметить, что некоторые деформации обычных производных были известны довольно давно, например, q-производная (также известная как производная Джексона)

$$\partial_q(f(t)) = \frac{f(qt) - f(t)}{t(q-1)} \tag{1.17.1}$$

и разностный оператор

$$\partial_\hbar(f(t)) = \frac{f(t+\hbar) - f(t)}{\hbar} \tag{1.17.2}$$

(называемый ниже $\hbar$-производной), или они же, но немного изменённые. Они привлекательны тем, что их можно использовать для построения новых алгебр, которые являются аналогами тех, что построены с помощью классических производных. Наиболее широко известные примеры таких алгебр это q-алгебра Витта и q-алгебра Вирасоро.

Изучение деформационного свойства обёртывающей алгебры q-алгебры Витта также является нашей целью. В частности, установлено, что PBW свойство не выполняется для такой обёртывающей алгебры, что противоречит распространенному мнению. Также PBW свойство нарушается для обёртывающей алгебры $\hbar$-алгебры Витта, построенной по $\hbar$-производным вместо обычных производных. Наша мотивировка основана на аналоге условия Якоби, полезном при работе с квадратичными алгебрами и их квадратично-линейными деформациями. Наличие этого условия необходимо для того, чтобы выполнялось PBW свойство и, поскольку в вышеупомянутых алгебрах не выполняется условие Якоби, мы приходим к нашему заключению.

В связи с этим мы рассматриваем другие виды условия Якоби, которые полезны для обобщения некоторых объектов и операторов, связанных с алгебрами Ли, а именно, комплекса Шевалле-Эйленберга и присоеднинённого представления. Следует отметить, что как правило эти виды условия Якоби не эквивалентны и каждый из них выполняет свою роль в теории квадратично-линейных алгебр.

В дальнейшем мы рассматриваем различные варианты того, как можно связать дифференциальную алгебру с обёртывающей алгеброй $gl(m)$. В частности, мы обобщаем построение этой связи на обёртывающие алгебры некоторых других алгебр Ли и расширяем построение на алгебру уравнения отражений. Главный вопрос, который возникает в ходе этого построения, состоит в том, как определить алгебру, порождённую дифференциальными операторами, действующими на генераторах исходной алгебры, чтобы для соответствующего оператора де Рама d выполнялось обычное свойство: $d^2 = 0$. Для этого мы рассматриваем упомянутые выше версии алгебры Витта и показываем, что PBW свойство не выполняется в их обёртывабщих алгебрах. Кроме того, мы обсуждаем различные виды условия Якоби, относящихся к всевозможным обобщениям понятия алгебры Ли.

1.17.1 Частные производные на $U(gl(m))$: различные подходы

В дальнейшем мы будем рассматривать различные деформации симметрической алгебры $\mathrm{Sym}(g)$, где g — алгебра Ли. Основным примером такой деформации будет $g = gl(m)_\hbar$, где индекс $\hbar$ означает, что в определении скобки Ли на $gl(m)$ возникает множитель $\hbar$. Зафиксируем базис $\{n_i^j\}$, $1 \leqslant i,j \leqslant m$, в $gl(m)$. Тогда скобка Ли элементов n_i^j, n_k^l в этом базисе имеет вид:

$$[n_i^j, n_k^l] = \hbar(n_i^l \delta_k^j - n_k^j \delta_i^j), \qquad 1 \leqslant i,j,k,l, \leqslant m.$$

В каждой однородной компоненте симметрической алгебры $\mathrm{Sym}(gl(m))$ мы фиксируем базис, состоящий из симметрических полиномов, то есть тех элементов, которые инварианты относительно действия симметрической группы. Обозначим $\{e_\beta\}$ соответствующий базис всей алгебры $\mathrm{Sym}(gl(m))$. Всякий элемент e_β это полином по генераторам алгебры $\mathrm{Sym}(gl(m))$. Базис в фильтрованной квадратично-линейной алгебре $U(gl(m)_\hbar)$ мы будем обозначать $\{\hat{e}_\beta\}$. Элемент $\hat{e}_\beta$ может быть получен заменой генераторов $\mathrm{Sym}(gl(m))$ в полиноме e_β соответствующими генераторами алгебры $U(gl(m)_\hbar)$.

Теперь рассмотрим линейной отображение

$$\alpha : \mathrm{Sym}(gl(m)) \to U(gl(m)_\hbar)$$

определённое на введённых выше базисах следующим образом:

$$\alpha(e_\beta) = \hat{e}_\beta.$$

Это отображение является ключевым в подходе квантования Вейля.

Используя это отображение мы можем для любого оператора

$$\mathcal{Q} : \operatorname{Sym}(gl(m)) \to \operatorname{Sym}(gl(m))$$

построить оператор $\mathcal{Q}_\alpha : U(gl(m)_\hbar) \to U(gl(m)_\hbar)$ следующим образом:

$$\mathcal{Q}_\alpha = \alpha \circ \mathcal{Q} \circ \alpha^{-1}.$$

Так, по частным производным в алгебре $\operatorname{Sym}(gl(m))$ мы можем построить частные производные в $U(gl(m)_\hbar)$ и рассматривать их как некоммутативные аналоги классических частных производных. И наоборот, по каждому оператору на алгебре $U(gl(m)_\hbar)$ можно восстановить оператор в $\operatorname{Sym}(gl(m))$. Например, умножение в алгебре $U(gl(m)_\hbar)$, по которому восстанавливается умножение в $\operatorname{Sym}(gl(m))$, называется $\star$-умножением (порождённое $U(gl(m)_\hbar)$). Это умножение часто используется при квантовании динамических моделей. В таких моделях (например, в модели Шрёдингера) кинетическая часть, в которую входят угловые моменты, остаётся классической, а умножение координатных функций заменяется на $\star$-умножение.

Аналогично, эти модели могут рассматриваться в терминах алгебры $U(gl(m)_\hbar)$, однако тогда частные производные (угловые моменты) должны быть заменены их образами при отображении α. Заметим, что для последних не выполняется правило Лейбница ни в какой его форме. Однако, если эти "производные" действуют на полностью симметризованном элементе, то можно применять обычное правило Лейбница.

Отметим, что можно использовать другие способы задания отображения α (например, способ Вика). Однако, описанный выше подход (квантование Вейля) приводит к возникновению $GL(m)$-ковариантного отображения.

В отличие от этого способа определения аналогов частных производных на $U(gl(m)_\hbar)$, наш подход заключается в том, что мы изменяем правило Лейбница. Модифицированное правило Лейбница может быть реализовано как коумножение, определённое на частных производных следующим образом

$$\Delta(\partial_i^j) = \partial_i^j \otimes 1 + 1 \otimes \partial_i^j + \hbar \sum_k \partial_k^j \otimes \partial_i^k. \tag{1.17.3}$$

Здесь и далее мы используем обозначение $\partial_i^j = \partial_{n_j^i}$ для частной производной по переменной n_j^i. Таким образом, мы полагаем по определению:

$$\partial_i^j(n_k^l) = \delta_i^l \delta_k^j, \tag{1.17.4}$$

то есть это действие представляет собой спаривание двойственных базисов $\{n_i^j\}$ и $\{\partial_i^j\}$. Кроме того, мы полагаем, что производные являются линейными операторами и, дейсвтуя на элементы основного поля $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$), дают ноль. Теперь, с помощью коумножения (1.17.3) можно определить действие производных на полиномы по генераторам алгебры.

Эквивалентная форма правила Лейбница состоит в следующем. Рассмотрим ассоциативное умножение $n_i^j \circ n_k^l = \delta_k^j n_i^l$ в алгебре Ли $gl(m)$. Заметим, что $[n_i^j, n_k^l] = n_i^j \circ n_k^l - n_k^l \circ n_i^j$. Теперь, вдобавок к (1.17.4), опредим действие производных на квадратичные мономы следующим образом:

$$\partial_i^j(n_a^b\, n_c^d) = \partial_i^j(n_a^b)\, n_c^d + n_a^b\, \partial_i^j(n_c^d) + \hbar\, \partial_i^j(n_a^b \circ n_c^d).$$

возникает сумма мономов младших степеней, начиная с нулевой (константа) и заканчивая $(p-1)$-й. In this sum the $(p-k)$-th order component $(1 \leqslant k \leqslant p)$ is composed from all monomials, each of them being obtained by the pairing of ∂_i^j and the $\circ$-product of a subset of k elements from the initial monomial. В этой сумме мономы степени $(p-k)$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ получаются в результате спаривания ∂_i^j и $\circ$-произведения подмножества из k элементов исходного монома. (!!!) Кроме того, у всех мономов степени $(p-k)$ есть общий множитель $\hbar^{k-1}$. Мы поясняем это правило на примере монома третьей степени:

$$\begin{aligned}\partial_i^j(n_a^b\, n_c^d\, n_k^l) &= \partial_i^j(n_a^b)\, n_c^d\, n_k^l + n_a^b\, \partial_i^j(n_c^d)\, n_k^l + n_a^b\, n_c^d\, \partial_i^j(n_k^l)\\ &+ \hbar\left(\partial_i^j(n_a^b \circ n_c^d)\, n_k^l + \partial_i^j(n_a^b \circ n_k^l)\, n_c^d + n_a^b\, \partial_i^j(n_c^d \circ n_k^l)\right)\\ &+ \hbar^2 \partial_i^j(n_a^b \circ n_c^d \circ n_k^l).\end{aligned}$$

Заметим, что частные производные коммутируют друг с другом. Обозначим за $\mathcal{D}$ ассоциативную алгебру с единицей, порождённую частными производными. Она обладает структурой биалгебры, в которй коумножение на генераторах определяется формулой (1.17.3), а коединица $\varepsilon : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ определяется обычным образом, то есть убивает все генераторы ∂_i^j и отправляет $1_{\mathcal{D}}$ (единицу алгебры $\mathcal{D}$) в единичный элемент поля.

Введённое выше коумножение позволяет ввести так называемые перестановочные соотношения между частными производными и элементами алгебры $\mathcal{U} = U(gl(m)_\hbar)$

$$\partial_i^j \otimes n_k^l = (\partial_i^j)_1 \triangleright n_k^l \otimes (\partial_i^j)_2, \quad \text{где} \quad \Delta(\partial_i^j) = (\partial_i^j)_1 \otimes (\partial_i^j)_2$$

в обозначениях Свидлера. Символ $\triangleright$ означает применение оператора к элементу. Явно эти коммутационные соотношения записываются в виде

$$\partial_i^j \otimes n_k^l - n_k^l \otimes \partial_i^j = \delta_i^l \delta_k^j\, 1_{\mathcal{U}} \otimes 1_{\mathcal{D}} + \hbar\, 1_{\mathcal{U}} \otimes (\partial_i^l \delta_k^j - \partial_k^j \delta_i^l).$$

Их также можно представить в матричной форме:

$$D_1\, P\, N_1\, P - P\, N_1\, P\, D_1 = P + \hbar(D_1\, P - P\, D_1). \tag{1.17.5}$$

Здесь $D = \|\partial_i^j\|$ и $N = \|n_i^j\|$ – матрицы, состоящие из элементов ∂_i^j и n_i^j соответственно (нижний индекс нумерует строки), $A_1 = A \otimes I$ для произвольной матрицы A, где I – единичная матрица. P есть матрица перестановки. Отметим, что мы опускаем символы $1_{\mathcal{U}}$, $1_{\mathcal{D}}$ и знак $\otimes$ в (1.17.5).

Алгебра, порождённая двумя подалгебрами $U(gl(m)_\hbar)$ и $\mathcal{D}$, на генераторы которой наложены перестановочные соотношения (1.17.5), называется алгеброй Вейля. Отметим, что для $\hbar = 0$ мы получаем классическую алгебру Вейля, порождённую $\mathrm{Sym}(gl(m))$ и классические частные производные по генераторам[1].

Перестановочные соотношения (1.17.5) были получены при переходе к пределу $q \to 1$ в перестановочных соотношениях модифицированной алгебры уравнения отражений в предположении, что симметрия Гекке является деформацией обычной перестановки. В общем случае, перестановочные соотношения сами могут задавать частные производные. Чтобы задать действие производной ∂_i^j на элемент $a \in U(gl(m)_\hbar)$, нужно действовать следующим образом. Сначала переставляем множители в произведении $\partial_i^j \otimes a$ в смысле перестановочных соотношений, а затем примениям коединицу к правому множителю получившегося элемента из $U(gl(m)_\hbar) \otimes \mathcal{D}$. Коединица как и всегда убивает мономы, составленные из генераторов, кроме констант, и отправляет $1_{U(gl(m)_\hbar)}$ в $1_{\mathbb{K}}$.

Завершая этот раздел, повторим, что существует три способа определения частных производных на алгебре $U(gl(m)_\hbar)$. Один из них основан на введении коумножения (1.17.3), другой использует $\circ$-умножение в алгебре $U(gl(m)_\hbar)$, а третий основан на перестановочных соотношениях. Аналогичные подходы также существуют на обёртывающих алгебрах супер-алгебр Ли типа $gl(m|n)_\hbar$ и их твистованных аналогах, связанных с инволютивным твистом. Ниже мы рассматриваем похожие алгебры, связанные с неинволютивным твистом (а именно, твистом геккевского типа). Единственный известный способ определения частных производных на этих алгебрах основан на перестановочных соотношениях.

1.17.2 Частные производные на других обёртывающих алгебрах

Для других обёртывающих алгебр частные производные на алгебре $U(gl(m)_\hbar)$ нужно определять по-другому. Рассмотрим некоторые примеры.

[1]Физики предпочитают называть эту алгебру алгеброй Гейзенберга.

Пусть $\mathfrak{g}_h$ является подалгеброй Ли в алгебре Ли $gl(m)_\hbar$. В большинстве случаев не удаётся определить частные производные с помощью $\circ$-умножения, потому что оно некорректно определено на подалгебре $\mathfrak{g}_h$. Что касается коумножения (1.17.3) и перестановочных соотношений (1.17.5), то в общем случае они не могут быть ограниченны на алгебру $U(\mathfrak{g}_h)$ (примеры ниже).

Тем не менее, как операторы, частные производные по элементам $\mathfrak{g}_h$ определены корректно. Чтобы показать это, зафиксируем дополнительное к $\mathfrak{g}_h$ подпространство W, такое что $gl(m)_\hbar = \mathfrak{g}_h \oplus W$ (как сумма векторных пространств). Теперь выберем базисы в $\mathfrak{g}_h$ и W и составим из них базис всего пространства $gl(m)_\hbar$. В пространстве, порождённом частными производными, перейдем к дуальному базису.

Пусть x_i – элемент выбранного базиса $\mathfrak{g}_h$. Теперь, применяя производную ∂^{x_i} к моному, состоящему из элементов $\mathfrak{g}_h$, мы получаем полином, который также состоит из элементов $\mathfrak{g}_h$, хотя коумножение (1.17.3), записанное в новом базисе $gl(m)$, содержит производные по элемнетам W.

Рассмотрим некоторые подалгебры в алгебре Ли $gl(2)_\hbar$ или, точнее говоря, в её компактной форме $u(2)_\hbar$. Фиксируя в $u(2)_\hbar$ стандартный базис $\{t, x,y,z\}$, такой что

$$[x,y] = \hbar z, \quad [y,z] = \hbar x, \quad [z,x] = \hbar y, \quad [t,x] = [t,y] = [t,z] = 0,$$

и рассматривая базис двойственного пространства ∂^t, ∂^x, ∂^y, ∂^z, мы получаем следующие коммутационные соотношения

$$\begin{array}{lll}
\partial^t\, t - t\,\partial^t = 1 + \frac{\hbar}{2}\,\partial^t & \partial^t\, x - x\,\partial^t = -\frac{\hbar}{2}\,\partial^x & \partial^t\, y - y\,\partial^t = -\frac{\hbar}{2}\,\partial^y \\
\partial^t\, z - z\,\partial^t = -\frac{\hbar}{2}\,\partial^z & & \\[1ex]
\partial^x\, t - t\,\partial^x = \frac{\hbar}{2}\,\partial^x & \partial^x\, x - x\,\partial^x = 1 + \frac{\hbar}{2}\,\partial^t & \partial^x\, y - y\,\partial^x = \frac{\hbar}{2}\,\partial^z \\
\partial^x\, z - z\,\partial^x = -\frac{\hbar}{2}\,\partial^y & & \\[1ex]
\partial^y\, t - t\,\partial^y = \frac{\hbar}{2}\,\partial^y & \partial^y\, x - x\,\partial^y = -\frac{\hbar}{2}\,\partial^z & \partial^y\, y - y\,\partial^y = 1 + \frac{\hbar}{2}\,\partial^t \\
\partial^y\, z - z\,\partial^y = \frac{\hbar}{2}\,\partial^x & & \\[1ex]
\partial^z\, t - t\,\partial^z = \frac{\hbar}{2}\,\partial^z & \partial^z\, x - x\,\partial^z = \frac{\hbar}{2}\,\partial^y & \partial^z\, y - y\,\partial^z = -\frac{\hbar}{2}\,\partial^x \\
\partial^z\, z - z\,\partial^z = 1 + \frac{\hbar}{2}\,\partial^t. & &
\end{array}$$

Для начала рассмотрим подалгебру Ли $su(2)_\hbar \subset u(2)_\hbar$. Для любого полинома вида $f(x, y, z) = f_1(x)\, f_2(y)\, f_3(z)$ действие частных производных ∂^x определяется таким образом:

$$\partial^x(f) = 2\hbar^{-1}\,(B(f_1)\,A(f_2)\,A(f_3) + A(f_1)\,B(f_2)\,B(f_3)),$$

где

$$A(f(v)) = \frac{1}{2}\Big(f(v - i\,\hbar/2) + f(v + i\,\hbar/2)\Big),$$

$$B(f(v)) = \frac{i}{2}\Big(f(v - i\,\hbar/2) - f(v + i\,\hbar/2)\Big).$$

Несмотря на то, что в правые части формул входит мнимая единица $i = \sqrt{-1}$, в левой части она отсутствует, так как у f действительные коэффициенты и $\hbar \in \mathbb{R}$. Аналогичные формулы справедливы для производных ∂^y, ∂^z. Следовательно, получаем, что

$$\partial^x(f), \partial^y(f), \partial^z(f) \in U(su(2)_\hbar).$$

Определение 1 Рассмотрим алгебру Ли g и её обёртывающую алгебру $U(g)$. Зафиксируем базис $\{x_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$ в g и обозначим за $c^k_{i,j}$ структурные константы алгебры Ли g в этом базисе. Введём алгебру $\mathcal{W}(U(g))$, порождённую $U(g)$ и коммутативной алгеброй $\mathcal{D}$ с генераторами ∂^l, $1 \leqslant l \leqslant m$, для которой выполняются перестановочные соотношения

$$[\partial^i, x_j] = -[x_j, \partial^i] = b^i_{j,k}\,\partial^k + \delta^i_j. \tag{1.17.6}$$

Мы называем алгебру $\mathcal{W}(U(g))$ алгеброй Вейля, если выполняется тождество Якоби для скобки

$$[\,,]: \wedge^2(W) \to W \oplus \mathbb{K}, \quad W = g \oplus \mathrm{span}(\partial^i),$$

совпадающей со скобкой Ли на g, действующей тривиально на $\mathcal{D}$ и определённой как (1.17.6) на $\mathrm{span}(\partial^i) \otimes g$ и на $g \otimes \mathrm{span}(\partial^i)$.

Заметим, что тождество Якоби должно выполняться в случае, когда образ скобки лежит в $W \oplus \mathbb{K}$. На самом деле, должны выполняться соотношения

$$[\partial^p, [x_i, x_j]] = [[\partial^p, x_i], x_j] - [[\partial^p, x_j], x_i],$$

или на языке структурных констант

$$c^k_{i,j} b^p_{k,l} = b^p_{i,k} b^k_{j,l} - b^p_{j,k} b^k_{i,l}, \quad c^p_{i,j} = b^p_{i,j} - b^p_{j,i}.$$

Заметим, что вследствие теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта существует канонический изоморфизм между градуированной алгеброй $Gr\,\mathcal{W}(U(g))$ и коммутативной алгеброй, порождённой элементами x_i и ∂^j.

Тот факт, что алгебра $\mathcal{W}(U(u(2)_\hbar))$ является алгеброй Вейля в смысле приведённого выше определения, проверяется напрямую. Однако, для обёртывающей алгебры $U(su(2)_\hbar)$ не удаётся определить алгебру Вейля как фактор алгебры $\mathcal{W}(U(u(2)_\hbar))$. В самом деле, достаточно убедиться, что нарушается соотношение

$$[\partial^x, [x, y]] = [[\partial^x, x], y] - [[\partial^x, y], x]$$

в предположении, что $\partial^t = 0$. Этот пример показывает, что если мы хотим определить частные производные на обёртывающей алгебре, то необходимо рассматривать алгебру Вейля, отвечающую большей алгебре Ли.

Правда, с подалгеброй $g \subset u(2)_\hbar$, порождённой элементами t и x, дела обстоят проще. Эта алгебра Ли коммутативна. Поэтому её обёртывающая алгебра совпадает с $\mathrm{Sym}(g)$, и соответствующие частные производные и алгебра Вейля могут быть определены классическим образом. Однако, рассматривая подалгебру $\mathcal{W}(U(u(2)_\hbar))$, порождённую элементами t,x,∂^t,∂^x, мы получаем другую алгебру Вейля, соответствующую той же алгебре Ли g. Таким образом, у нас есть две различные алгебры Вейля, отвечающие одной алгебре g.

Вообще говоря, для двумерной коммутативной алгебры Ли перестановочные соотношения должны выглядеть следующим образом

$$\partial^t t - t\partial^t = 1 + (a_1\partial^t + b_1\partial^x), \quad \partial^t x - x\partial^t = (a_2\partial^t + b_2\partial^x),$$

$$\partial^x t - t\partial^x = (c_1\partial^t + d_1\partial^x), \quad \partial^x x - x\partial^x = 1 + (c_2\partial^t + d_2\partial^x).$$

Было бы интересно описать всевозможные наборы констант $a_1, \ldots, d_2$, которые порождают алгебру Вейля на двумерной коммутативной алгебре Ли (а также некоммутативной). Два описанных выше примера соответсвуют следующим наборам констант: в классическом случае все константы равны нулю, а во втором случае отличные от нуля константы это $a_1 = d_1 = -b_2 = c_2 = \frac{\hbar}{2}$.

Полагая

$$b_1 = c_1 = a_2 = 0, \quad a_1 = d_1 = c_2,$$

мы получаем несколько более общую алгебру Вейля (здесь на b_2 нет никаких ограничений).

В заключение отметим следующий факт. Несмотря на то, что способ введения частных производных на обёртывающей алгебре не является универсальным, он оказывается более общим, чем тот, что основывается на введении коумножения на алгебре $\mathcal{D}$. Это наблюдение справедливо также для твистованных алгебр.

1.17.3 Конструция унитарной квантовой группы дифференциального исчисления

Вскоре после открытия теории квантовых групп конструкция дифференциального исчисления на квантовых пространствах и квантовых группах стала одной из самых популярных тем в некоммутативной геометрии и привлекла большое количество исследований. Основные работы были посвящены биковариантным постулатам и идеологии R-матрицы . Существенный прогресс был вскоре достигнут в построении алгебр дифференциальных операторов (производные Ли) и дифференциальных форм над общими линейными квантовыми группами. В то же время, при всех попытках усложнить исчисление более утонченными структурами возникли серьезные трудности. Это касается изучения реальных форм квантовых групп, где унитарные квантовые группы так и не были найдены при наиболее интересных значениях квантового параметра. Это же случилось с конструкцией внешней алгебры для дифференциальных форм над квантовыми ортогональной и симплектической группами, где была доказана невозможность ее построения. Также случилось и с конструкцией комплекса де Рама над специальными линейными группами в рамках исследования Вороновича.

Настоящее исследованине направлено на решение проблемы построения унитарной анти-инволюции для дифференциального исчисления над линейными группами. Одна из ключевых идей для решения этой проблемы уже была использована в построении анти-инволютивного отображения, но не в квантовых группах, а в большей алгебре — двойной алгебре Гейзенберга. Другой важный ингридиент нашего построения — спектральное расширение алгебры исчисления, которое было разработано на основе теоремы Кэли-Гамильтона для квантовых матричных алгебр.

Мы опишем алгебры дифференциального исчисления над общими и специальными линейными группами и введем алгебры квантовых функций, дифференциальных форм и производных Ли над $GL_q(n)$, а также рассмотрим их $SL_q(n)$-редукцию и биковариантую структуру. Кроме того, мы воспользуемся теоремой Кэли-Гамильтона для алгебр уравнения отражения типа $GL_q(n)$. Это лево- и право-инвариантные алгебры производных Ли. Мы построим специальное нецентральное расширение алгебры дифференциального исчисления со спектральными переменными — собственные значения трех матриц, порождающих подалгебры уравнения отражения в дифференциальном исчислении(две из них — матрицы лево- и право-инвариантных производных Ли). Затем, в спектрально расширенной алгебре мы представим трех-параметрическое семейство внутренних автоморфизмов. Для конкретных целых значений параметров эти автоморфизмы воспроизводят эволюцию q-деформированной вершины с дискретным временем.

Мы опишем конструкцию разложения Гаусса для алгебр уравнения отражения и представим унитарную анти-инволюцию в (спектрально расширенном) дифференциальном исчислении над $GL_q(n)$. Также мы обсудим ограничение анти-инволюции на дифференциальное исчисление над $SL_q(n)$.

1.17.4 Дифференциальные формы и производные Ли на $GL_q(n)$

В этом разделе мы опишем ассоциативные алгебры с единицей над $GL_q(n)$ и $SL_q(n)$ — квантование классического исчисления над $GL(n)/SL(n)$. Квантовые алгебры исчисления порождены компонентами четырех $n \times n$ матриц:

$\|T^i_j\|^n_{i,j=1}$ – координатные функции,

$\|\Omega^i_j\|^n_{i,j=1}$ – право-инвариантные 1-формы,

$\|L^i_j\|^n_{i,j=1}$ – право-инвариантные производные Ли,

$\|K^i_j\|^n_{i,j=1}$ – лево-инвариантные производные Ли.

В случае $GL_q(n)$ на генераторы накладываются множество квадратичных соотношений, которые фиксируют классические значения для размерностей пространств однородных полиномов от генераторов. Например, $\binom{n^2+k-1}{k}$ и, соответственно, $\binom{n^2}{k}$ - это размерности пространств однородных полиномов от координатных функций k-ого порядка и, соответственно, право-инвариантные 1-формы. Эти соотношения в общем допускают алфавитное упорядочение генераторов и, следовательно, мы называем ихперестановочные соотношения. Переход к $SL_q(n)$ исчислению достигается наложением еще одного полиномиального соотношения для каждой матрицы генераторов. Мы называем эти соотношения условия редукции.

Оба, перестановочные соотношения и условия редукции задаются с использование R-матрицы — $n^2 \times n^2$ матрицы $R \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n)$ удовлетворяющей Артинову соотношению кос. Мы рассматриваем R-матрицу $SL(n)$ типа, что означает, в частности, что ее минимальный многочлен квадратичен.

Наш главный мотивирующий пример — исчисление связанное со стандартной R-матрицей Дринфельда-Джимбо

$$R \,=\, \sum_{i,j=1}^{n} q^{\delta_{ij}} E_{ij} \otimes E_{ji} \,+\, (q-q^{-1}) \sum_{i<j} E_{ii} \otimes E_{jj}\,. \tag{1.17.7}$$

Здесь $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, и $(E_{ij})_{kl} := \delta_{ik}\delta_{jl}$, $i,j = 1,\ldots,n$, - матричные единицы. Как мы покажем, квантовое дифференциальное исчисление, связанное с матрицей (1.17.7) допускает специализацию унитарного типа. Это главный результат нашей работы. Как бы то ни было, мы подчеркиваем, что согласованное $SL_q(n)$ и $GL_q(n)$ дифференциальное исчисление может быть связано с R-матрицей типа $SL(n)$. Среди них имеются мультипараметрические обобщения R-матрицы Дринфельда-Джимбо и Креммер-Жерве R-матрицы. Следовательно, мы представляем часть конструкции в общем виде и придерживаемся рассмотрения частного случая Дринфельда-Джимбо.

Теперь мы продолжим выписывать точные формулы.

1.17.4.1 Квантование функций

В этом и следующих разделах мы будем считать, что $R \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n)$ является R-матрицей $SL(n)$ типа. Это понятие вместе с обозначением сжатого матричного индекса и понятие R-следа, Tr_{R}, и q-антисимметризатора, $A^{(n)}$, которые появляется в формулах ниже, объяснены в Приложении.

Перестановочные соотношения для квантованных координатных функций над $GL_q(n)$ в компактных обозначениях матричных пространств имеют вид

$$R\,T_1\,T_2 = T_1\,T_2\,R\,. \tag{1.17.8}$$

Строго говоря, также предполагается обратимость квантового детерминанта матрицы T

$$\det_{\mathrm{R}} T := \mathrm{Tr}_{(1,\dots,n)}\big(A^{(n)} T_1 T_2 \dots T_n\big)\,. \tag{1.17.9}$$

Свойство R-матрицы R типа $SL(n)$ гарантирует центральность $\det_{\mathrm{R}} T$ и условия $SL_q(n)$ редукции:

$$\det_{\mathrm{R}} T \;=\; 1. \tag{1.17.10}$$

В дальнейшем мы обозначаем ассоциативную универсальную алгебру с единицей, порожденную элементами T_{ij} с учетом соотношений (1.17.8), (1.17.10) — $\mathcal{F}[R]$ и назовем ее алгеброй функций над $SL_q(n)$. Ее также коротко называют RTT алгебра.

В стандартном подходе $\mathcal{F}[R]$ наделяется структурой алгебры Хопфа, из которой мы напомним формулы для копроизведения и антипода:

$$\Delta(T_{ij}) \;=\; \textstyle\sum_{k=1}^{n} T_{ik} \otimes T_{kj}\,, \tag{1.17.11}$$

$$(T^{-1})_1 \;=\; q^{n(n-1)}\, n_q\, \mathrm{Tr}_{\mathrm{R}\,(2,\dots,n)}\big(T_2 \dots T_n A^{(n)}\big)\,(\det_{\mathrm{R}} T)^{-1}\,, \tag{1.17.12}$$

где $n_q := (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1})$ - q-число. Использование символа T^{-1} для антипода вместо стандартного обозначения $S(T)$ обосновывается равенствами

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} T_{ik}\,(T^{-1})_{kj} \;=\; \sum_{k=1}^{n} (T^{-1})_{ik}\,T_{kj} \;=\; \delta_{ij}\,1\,. \tag{1.17.13}$$

1.17.4.2 Квантование форм

Перестановочные соотношения для квантовой внешней алгебры право-инвариантных дифференциальных форм над $GL_q(n)$ имеют вид (впервые они были предложены в работах Зумино с соавторами)

$$R\,\Omega^g_1 R\,\Omega^g_1 \,=\, -\,\Omega^g_1 R\,\Omega^g_1 R^{-1}\,. \tag{1.17.14}$$

В этой алгебре будут выполнены следующие перестановочные соотношения для R-следа Ω^g

$$\left(\mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}\,\Omega^g\right)\Omega^g \,+\, \Omega^g\left(\mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}\,\Omega^g\right) \,=\, -(q-q^{-1})\,(\Omega^g)^2$$

Таким образом наивная $SL_q(n)$ редукция $\mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}\,\Omega^g = 0$ невозможна. Вместо этого, можно заметить, что R-бесследная матрица

$$\Omega \,:=\, \Omega^g - \frac{q^n}{n_q}\left(\mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}\,\Omega^g\right) I \tag{1.17.15}$$

порождает подалгебру в (1.17.14), которая не содержит элемент $\mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}\,\Omega^g$:

$$R\,\Omega_1 R\,\Omega_1 \,+\, \Omega_1 R\,\Omega_1 R^{-1} \,=\, \kappa_q\left(\Omega_1^2 \,+\, R\,\Omega_1^2 R\right)\,. \tag{1.17.16}$$

Здесь мы обозначили

$$\kappa_q := \frac{q^n(q-q^{-1})}{n_q + q^n(q-q^{-1})}, \qquad \text{предполагая дополнительно} \qquad n_q + q^n(q-q^{-1}) \neq 0. \tag{1.17.17}$$

Перестановочные соотношения (1.17.8),(1.17.16) вместе с

$$R\,\Omega_1 R^{-1} T_1 \,=\, T_1\,\Omega_2 \tag{1.17.18}$$

определяют алгебру, которая согласуется с условиями $SL_q(n)$ редукции для функций (1.17.10) и для 1-форм

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}\,\Omega \,=\, 0\,. \tag{1.17.19}$$

Мы назовем ее внешней алгеброй дифференциальных форм над $SL_q(n)$. Аналогично, соотношения (1.17.8),(1.17.14) вместе с (1.17.18), где Ω заменена на Ω^g, определяют внешнюю алгебру дифференциальных форм над $GL_q(n)$. Как мы увидим, все соотношения, содержащие матрицы 1-форм Ω^g/Ω, в дифференциальном исчислении над $GL_q(n)/SL_q(n)$ одинаковы, с единственным исключением их собственных перестновок (1.17.14) и (1.17.16). Далее мы всегда будем выписывать соотношения для Ω, понимая, что их анологи для Ω^g имеют такую же форму.

Так же, внешняя алгебра может быть записана в терминах лево-инвариантных 1-форм

$$\Theta^g_{ij} \,=\, (T^{-1}\Omega^g T)_{ij}, \qquad \Theta_{ij} \,=\, (T^{-1}\Omega T)_{ij}, \tag{1.17.20}$$

Вывод перестановочных соотношений и условий редукции для Θ - это хорошее упражнение с R-матричной техникой. Получаем:

$$R^{-1}\Theta^g_2 R\,\Theta^g_2 \,=\, -\,\Theta^g_2 R\,\Theta^g_2 R, \tag{1.17.21}$$

$$R^{-1}\Theta_2 R\,\Theta_2 \,+\, \Theta_2 R\,\Theta_2 R \,=\, \kappa_q \left(\Theta_2^2 \,+\, R\,\Theta_2^2 R\right), \tag{1.17.22}$$

$$\mathrm{Tr}\,\Theta \,=\, 0, \tag{1.17.23}$$

$$\Theta_1 T_2 \,=\, T_2 R^{-1}\Theta_2 R, \qquad \text{(for both, } \Theta \text{ and } \Theta^g). \tag{1.17.24}$$

Здесь $R_{op} := PRP$, и $P \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n)$ - перестановочный оператор: $P(u \otimes v) = v \otimes u$.

Би-инвариантные объекты внешней алгебры задаются R-следами степеней Ω. Их алгебра не меняется при квантовании и выглядит как

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}\,\Omega^{2i} \;=\; \mathrm{Tr}\,\Theta^{2i} \,=\, 0 \qquad\qquad \forall\, i \geqslant 1, \tag{1.17.25}$$

$$\omega_i \,:=\, \mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}\,\Omega^{2i+1} \;=\; \mathrm{Tr}\,\Theta^{2i+1} \quad \forall\, i = 1, \ldots, n-1, \tag{1.17.26}$$

$$\omega_i\,\omega_j \;=\; -\,\omega_j\,\omega_i\,. \tag{1.17.27}$$

1.17.4.3 Квантование производных Ли

Алгебра квантовых право-инвариантных производных Ли (см. уравнение(1.17.28) ниже) широко известна под названием алгебраурвнения отражения (RE). Она была представлена в контексте рассеяния растиц на полупрямой, и с тех пор было найдено некоторое количество приложений в теории интегрируемых систем, некоммутативной геометрии и квантовых группах.

Обычно алгебра квантовых функций и инвариантных производных Ли, заданная уравнением (1.17.8) и уравнениями (1.17.28),(1.17.29) ниже имеет также свое название — дубль Гейзенберга(HD). Действие производных Ли на функциях такое же, как действие на соответствующих векторных полях и, следовательно, дубль Гейзенберга может быть рассмотрен как алгебра дифференциальных опраторов над квантовой группой.

Изначально было записано целое множество соотношений для право-инвариантных производных Ли:

$$R\,L_1 R\,L_1 \;=\; L_1 R\,L_1 R\,, \tag{1.17.28}$$

$$R\,L_1 R\,T_1 \;=\; \gamma^2\,T_1 L_2\,, \tag{1.17.29}$$

$$R\,L_1 R\,\Omega_1 \;=\; \Omega_1 R\,L_1 R\,. \tag{1.17.30}$$

Для $SL_q(n)$-редукции мы введем квантовый определитель L в виде

$$\det_{\mathrm{R}} L \;:=\; \mathrm{Tr}_{\mathrm{R}\,(1,\ldots,n)}\left(A^{(n)} L_{\overline{1}} \ldots L_{\overline{n}}\right), \tag{1.17.31}$$

где используется краткое обозначение

$$L_{\overline{1}} := L_1\,, \quad L_{\overline{i}} := R_{i-1}\,L_{\overline{i-1}}\,R_{i-1}^{-1} \quad \forall\, i > 1. \tag{1.17.32}$$

для $\overline{i}$-ой копии матрицы L. В дальнейшем, мы предполагаем обратимость и требуем центральность $\det_{\mathrm{R}} L$ — последнее условие фиксирует значение параметра γ в (1.17.29)

$$\gamma = q^{1/n}. \tag{1.17.33}$$

Условия $SL_q(n)$-редукции тогда становятся:

$$\det_{\mathrm{R}} L \;=\; q^{-1}\,1. \tag{1.17.34}$$

Удобство нормирования на q^{-1} станет очевидно позже при определении автоморфизма ϕ_L.

Замечание. В алгебре производных Ли над $GL_q(n)$ элемент $\det_{\mathrm{R}} L$ может быть не центральным. Обычно, это достигается, если $\gamma = 1$. Или, можно положить $\gamma = q^{2/n}$, расширив алгебру еще одним обратимым генераторомеℓ, который удовлетворяет перестановочным соотношениям

$$\ell\,L \;=\; L\,\ell, \qquad \ell\,T \;=\; q^{2/n}\,T\,\ell.$$

Зная о такой возможности, позже мы уже не будем рассматривать отдельно алгебру производных Ли над $GL_q(n)$.

Теперь давайте перейдем к обсуждению лево-инвариантных производных Ли. Несмтря на то, что лево- и право-инвариантные производные Ли независимы и были представлены в исчислении отдельно, заметим, что с помощью зеркальной(лево-право) симметрии исчисления можно единственным образом вывысти перестановочные соотношения для лево- инвариантных объктов (K, Θ, etc.) читая соотношения для право-инвариантных генераторов справо на лево (заметим, что зеркальным образом $R = R_{12}$

является $R_{op} = R_{21}$). Таким образом для лево-инвариантных производных Ли K мы получаем

$$R\,K_2 R\,K_2 \;=\; K_2 R\,K_2 R\,, \tag{1.17.35}$$

$$T_2\,R\,K_2 R \;=\; \gamma^2\,K_1 T_2\,, \tag{1.17.36}$$

$$R\,K_2 R\,\Theta_2 \;=\; \Theta_2\,R\,K_2 R\,. \tag{1.17.37}$$

Эти соотношения нужно дополнить естественными коммутативными условиями для лево- и право-инвариантных производных Ли со всеми право/лево-инвариантными объектами:

$$K_1\,X_2 \;=\; X_2\,K_1 \qquad \forall\,X \;=\; \Omega, L, \tag{1.17.38}$$

$$L_1\,Y_2 \;=\; Y_2\,L_1 \qquad \forall\,Y \;=\; \Theta, K. \tag{1.17.39}$$

Единственное новое соотношение здесь - условие коммутативности для L и K. Все другие условия коммутативности следуют из перестановочных соотношений, наложенных ранее.

$SL_q(n)$ - редукция для лево-инвариантных производных Ли K дает

$$\det\nolimits_{\mathrm{R}} K \;:=\; \mathrm{Tr}_{R_{op}\,(1,\dots,n)}\left(A^{(n)} K_{\underline{n}} \dots K_{\underline{1}}\right) \;=\; q^{-1}\,1, \tag{1.17.40}$$

где $\underline{i}$-ая копия матрицы K определяется как

$$K_{\underline{n}} := K_n\,, \quad K_{\underline{i}} := R_i\,K_{\underline{i+1}}\,R_i^{-1} \quad \forall\,1 \leqslant i < n. \tag{1.17.41}$$

Здесь снова, формулы для $\det_{\mathrm{R}} K$ получены зеркальной симметрией таких же соотношений для $\det_{\mathrm{R}} L$.

1.18 Конформная теория поля и изомонодромные деформации

Цель данных исследований – дать краткое представление об основных конструкциях в терминах свободных фермионов, которые возникают при изучении соответствия между задачами теории изомонодромных деформаций и двумерными конформными теориями поля – для некоторого класса этих теорий с расширенной конформной симметрией. Интерес к двумерным конформным теориям поля (CFT) с расширенной конформной симметрией возник с появлением теорий с так называемыми W-симметриями, которые обладают многими свойствами обычных CFT, включающими, например, представление свободными полями, которое оказывается особенно простым в случае целых вирасоровских центральных зарядов. Однако даже в этом относительно простом случае уже невозможно построить в общем случае их конформные блоки, которые представляют собой основу построения физических корреляционных функций в бутстрапном подходе.

Этот интерес был значительно поддержан уже в нашем столетии достаточно нетривиальным соответствием между двумерной CFT и четырехмерной суперсимметричной калибровочной теорией, в котором конформные блоки должны отвечать некрасовским инстантонным статсуммам, дающим в квазиклассическом пределе препотенциалы Виттена-Зайберга. Это соответствие также испытывает серьезные проблемы за рамками $SU(2)$ вирасоровского уровня: как на стороне четырехмерной калибровочной теории, так и на стороне двумерной CFT. К этим трудностям можно подходить с разных сторон, например мы показали, что точные конформные блоки для твист-полей в теориях с W-симметрией могут быть вычислены, с использованием развитой ранее техники.

Сейчас мы представляем другой подход к изучению вершинных операторов в CFT с расширенной конформной симметрией, основанный на представлении свободными фермионами. Достаточно очевидно, что эта конструкция должна работать (по крайней мере) в случае целых центральных зарядов, где она неразрывно связана с недавно установленным в этом случае CFT изомонодромным соответствием. Мы собираемся обсудить операторный состав таких теорий с нетривиальными свойствами монодромии, а потом перейти к задаче вычисления матричных элементов общих монодромных операторов. Наконец, мы собираемся продемонстрировать связь этих матричных элементов с тау-функциями двух различных задач, а именно, многокомпонентных классических иерархий тодовского типа и тау-функциями изомонодромных деформаций.

1.18.1 Абелева $U(1)$ теория

1.18.1.1 Фермионы и вершинные операторы

Введем стандартные двумерные голоморфные фермионные поля с действием

$$S = \frac{1}{\pi}\int_\Sigma d^2z\tilde{\psi}\bar{\partial}\psi,$$

так что

$$\tilde{\psi}(z)\psi(z') = \frac{1}{z-z'} + \dots\,, \tag{1.18.1}$$

или

$$\{\psi_r,\tilde{\psi}_s\} = \delta_{r+s,0}, \quad r,s \in \mathbb{Z}+\tfrac{1}{2}\,, \tag{1.18.2}$$

$$\psi(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \frac{\psi_r}{z^{r+1/2}}\,, \qquad \tilde{\psi}(z) = \sum_{s\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \frac{\tilde{\psi}_s}{z^{s+1/2}}\,,$$

с разложением по полуцелым модам. Формулы бозонизации имеют вид

$$\tilde{\psi}(z) =: e^{i\phi(z)} := e^{-\sum\limits_{n<0} \frac{J_n}{n} z^{-n}} e^{-\sum\limits_{n>0} \frac{J_n}{n} z^{-n}} e^{Q} z^{J_0}$$

$$\psi(z) =: e^{-i\phi(z)} := e^{\sum\limits_{n<0} \frac{J_n}{n} z^{-n}} e^{\sum\limits_{n>0} \frac{J_n}{n} z^{-n}} e^{-Q} z^{-J_0}\,, \tag{1.18.3}$$

где

$$J(z) =: \tilde{\psi}(z)\psi(z) := i\partial\phi(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{J_n}{z^{n+1}}\,,$$

$$[J_n,J_m] = n\delta_{n+m,0}, \quad n,m\in\mathbb{Z}, \quad [J_n, Q] = \delta_{n0}\,, \tag{1.18.4}$$

а нормальное упорядочение означает, что все отрицательные моды находятся слева от положительных, операторы Q слева от J_0.

Рассмотрим теперь общие вершинные операторы для бозонных полей

$$V_\nu(z) =: e^{i\nu\phi(z)} := e^{-\nu\sum\limits_{n<0} \frac{J_n}{n} z^{-n}} e^{-\nu\sum\limits_{n>0} \frac{J_n}{n} z^{-n}} e^{\nu Q} z^{\nu J_0} \equiv V_\nu^-(z)V_\nu^+(z)e^{\nu Q}z^{\nu J_0}\,, \tag{1.18.5}$$

которые удовлетворяют очевидным соотношениям, следующим из формулы Кэмпбелла-Хаусдорфа

$$V_\alpha^+(z)V_\beta^-(w) = \left(1-\frac{w}{z}\right)^{\alpha\beta} V_\beta^-(w)V_\alpha^+(z)\,,$$

$$V_\alpha(z)V_\beta(w) = \left(\frac{z}{w}\right)^{\alpha\beta}\left(1-\frac{w}{z}\right)^{\alpha\beta}\left(1-\frac{z}{w}\right)^{-\alpha\beta} V_\beta(w)V_\alpha(z)\,.$$

Также можно написать

$$V_\alpha(z)V_\beta(w) = (z-w)^{\alpha\beta} : V_\alpha(z)V_\beta(w) :\,, \tag{1.18.6}$$

Поскольку вершинные операторы содержат фактор $e^{\nu Q}$, они сдвигают вакуумный заряд

$$V_\nu(z) : \mathcal{H}^\sigma \to \mathcal{H}^{\sigma+\nu}$$

когда действуют на сектор гильбертова пространства

$$\mathcal{H} = \bigoplus_\sigma \mathcal{H}^\sigma\,,$$

отвечающего фиксированному значению этого заряда. Отметим, что мы не накладываем никаких ограничений на (вещественные) значения выкуумных зарядов $\sigma\in\mathbb{R}$.

Гильбертово пространство $\mathcal{H}_\sigma$ строится действием отрицательных бозонных генераторов

$$J_{-n_1}\ldots J_{-n_k}|\sigma\rangle$$

на вакуумный вектор $J_0|\sigma\rangle = \sigma|\sigma\rangle$, и эти состояния могут быть помечены диаграммами Юнга с длинами строк $n_1,\ldots,n_k$.

Можно также построить действие фермионных операторов в этом векторном пространстве. При этом формулы бозонизации в общем случае приводят к появлению дробных степеней голоморфной координаты z из-за множителей z^{J_0}, в то время как $e^{\pm Q}$ просто сдвигает вакуумный заряд ±1. Это означает, что можно определить (многократное) действие мод операторов

$$\psi^\sigma(z) = \sum_r \frac{\psi_r^\sigma}{z^{r+1/2+\sigma}}, \quad \tilde{\psi}^\sigma(z) = \sum_r \frac{\tilde{\psi}_r^\sigma}{z^{r+1/2-\sigma}}$$

в прямой сумме гильбертовых пространств

$$\mathcal{H}^\sigma = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n^\sigma$$

естественно нумеруемой некоторым дробным $\sigma \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

В каждом из пространств $\mathcal{H}_n^\sigma$ базис может быть составлен из векторов, отвечающих комбинации фермионных мод с нулевым зарядом. Как и в бозонном случае эти вектора могут быть пронумерованы диаграммами Юнга

$$|Y,\sigma\rangle = \prod_i \tilde{\psi}_{-p_i}^\sigma \psi_{-q_i}^\sigma |\sigma\rangle\,,$$

так, что p_i и q_i являются координатами Фробениуса на диаграмме Юнга. По нашему соглашению они являются полуцелыми, и могут быть легко определены графически.

Состояния в двойственном к $\mathcal{H}^\sigma$ модуле могут быть получены с помощью эрмитового сопряжения

$$\langle\sigma,Y| = \langle\sigma|\prod_i \tilde{\psi}_{q_i}^\sigma \psi_{p_i}^\sigma\,.$$

В дальнейшем нашей целью будет вычисление матричных элементов оператора $V_\nu(1) = V_\nu$ между произвольными фермионными состояниями

$$Z(\nu|Y',Y) = \langle\theta+\nu,Y'|V_\nu(1)|Y,\theta\rangle\,.$$

Наиболее прямым способом для этого является использование бозонного представления (1.18.5) вершинного оператора

$$Z(\nu|Y',Y) = \langle\sigma+\nu|\prod_j \tilde{\psi}_{q_j'}\psi_{p_j'} V_\nu^- V_\nu^+ e^{\nu Q}\prod_i \tilde{\psi}_{-p_i}\psi_{-q_i}|\sigma\rangle =$$

$$= \langle 0| \prod_j V_{-\nu}^- \tilde\psi_{q_j'} V_\nu^- \cdot V_{-\nu}^- \psi_{p_j'} V_\nu^- \prod_i V_\nu^+ \tilde\psi_{-p_i} V_{-\nu}^+ \cdot V_\nu^+ \psi_{-q_i} V_{-\nu}^+ |0\rangle =$$

$$= \langle 0| \prod_j (V_\nu^-)^{-1} \tilde\psi_{q_j'} V_\nu^- \cdot (V_\nu^-)^{-1} \psi_{p_j'} V_\nu^- \prod_i V_\nu^+ \tilde\psi_{-p_i} (V_\nu^+)^{-1} \cdot V_\nu^+ \psi_{-q_i} (V_\nu^+)^{-1} |0\rangle \,. \quad (1.18.7)$$

Из формул бозонизации легко понять, что последовательные тройные произведения операторов в этой формуле можно рассматривать как некоторое присоединенное действие, или попросту сопряжение фермионов, переходящих при таком действии в собственные линейные комбинации. На уровне производящих функций это принимает вид

$$V_\nu^+ \tilde\psi(z) (V_\nu^+)^{-1} = (1-z)^\nu \tilde\psi(z)\,, \quad V_\nu^+ \psi(z) (V_\nu^+)^{-1} = (1-z)^{-\nu} \psi(z)\,, \quad (1.18.8)$$

$$(V_\nu^-)^{-1} \tilde\psi(z) V_\nu^- = \left(1 - \frac{1}{z}\right)^\nu \tilde\psi(z)\,, \quad (V_\nu^-)^{-1} \psi(z) V_\nu^- = \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-\nu} \psi(z)\,,$$

или, в большей общности,

$$V_\nu(w)^{-1} \tilde\psi^{\sigma+\nu}(z) V_\nu(w) = \left(\frac{z}{w}\right)^\nu \exp\left(\nu {\sum_{n\in\mathbb{Z}}}' \frac{1}{n}\frac{z^n}{w^n}\right) \tilde\psi^\sigma(z)\,,$$

$$V_\nu(w)^{-1} \psi^{\sigma+\nu}(z) V_\nu(w) = \left(\frac{z}{w}\right)^{-\nu} \exp\left(-\nu {\sum_{n\in\mathbb{Z}}}' \frac{1}{n}\frac{z^n}{w^n}\right) \psi^\sigma(z)\,,$$

где формальные ряды в правой части могут быть переписаны с помощью преобразования Фурье в виде

$$\exp\left(\nu {\sum_{n\in\mathbb{Z}}}' \frac{z^n}{n}\right) = \frac{\sin\pi\nu}{\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{z^k}{k+\nu}\,. \quad (1.18.9)$$

Это частный случай преобразований из $GL(\infty)$, реализованной с помощью

$$\sum a_{rs} : \tilde\psi_{-r}\psi_s :\in \mathfrak{gl}(\infty), \quad a_{rs} \to \infty, \ |r-s| \to \infty\,, \quad (1.18.10)$$

и, более того, отвечающий случаю когда $a_{rs} = a_{r-s}$ (хорошо известный пример такого преобразования генерируется токами $J_n = \sum_r : \tilde\psi_r \psi_{n-r} :$ из (1.18.4)). Это верно и в самом общем случае: при вычислении любых матричных элементов такого оператора они всегда могут быть выражены через элементы только с двумя дополнительными вставками фермионов, а значит, нам необязательно знать явный вид оператора $V_\nu = V_\nu^- V_\nu^+$ – достаточно лишь самого факта присоединенного действия, и мы собираемся воспользоваться этим свойством ниже в более сложном неабелевом случае.

Это означает, в частности, что можно воспользоваться теоремой Вика

$$Z(\nu|Y',Y) = \langle\sigma+\nu|\tilde\psi_{q_j'}\psi_{p_j'}V_\nu|\sigma\rangle\langle\sigma+\nu|\tilde\psi_{q_j'}V_\nu\psi_{-q_i}|\sigma\rangle$$

$$-\langle\sigma+\nu|\psi_{p_j'}V_\nu\tilde\psi_{-p_i}|\sigma\rangle\langle\sigma+\nu|V_\nu\tilde\psi_{-p_i}\psi_{-q_i}|\sigma\rangle = G_\nu\,, \quad (1.18.11)$$

а потом уже вычислять матричные элементы.

1.18.1.2 Матричные элементы и функции Некрасова

Матричные элементы матрицы $G = G_\nu$ с двумя фермионными вставками (ее строки нумеруются $\{x_a\} = \{q'_j\} \cup \{-p_i\}$, а столбцы, соответственно - $\{y_b\} = \{p'_j\} \cup \{-q_i\}$, где числа p и q являются полуцелыми и положительными) имеют вид

$$G(q',p') = \langle 0|\psi_{q'}\tilde{\psi}_{p'}V_\nu^-|0\rangle = \sum_{m=0}^{q'-\frac{1}{2}} \frac{(\nu)_m}{m!}\frac{(-\nu)_{p'+q'-m}}{(p'+q'-m)!} \tag{1.18.12}$$

$$G(-p,-q) = \langle 0|V_\nu^+\psi_{-p}\tilde{\psi}_{-q}|0\rangle = \sum_{n=0}^{q-\frac{1}{2}} \frac{(-\nu)_n}{n!}\frac{(\nu)_{p+q-n}}{(p+q-n)!}$$

$$G(-p,p') = -\langle 0|\tilde{\psi}_{p'}V_\nu^-V_\nu^+\psi_{-p}|0\rangle = -\sum_{m=0}^{p'-\frac{1}{2}} \frac{(-\nu)_m}{m!}\frac{(\nu)_{m+p-p'}}{(m+p-p')!}$$

$$G(q',-q) = \langle 0|\psi_{q'}V_\nu^-V_\nu^+\tilde{\psi}_{-q}|0\rangle = \sum_{n=0}^{q-\frac{1}{2}} \frac{(-\nu)_n}{n!}\frac{(\nu)_{n+q'-q}}{(n+q'-q)!}.$$

Эти выражения легко вычислить, воспользовавшись присоединенным действием для компонент

$$V_\nu^+\psi_{-p}(V_\nu^+)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\nu)_m}{m!}\psi_{-p+m}, \quad V_\nu^+\tilde{\psi}_{-q}(V_\nu^+)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\nu)_m}{m!}\tilde{\psi}_{-q+m}\,, \tag{1.18.13}$$

$$(V_\nu^-)^{-1}\psi_q V_\nu^- = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\nu)_m}{m!}\psi_{q-m}, \quad (V_\nu^-)^{-1}\tilde{\psi}_p V_\nu^- = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\nu)_m}{m!}\tilde{\psi}_{p-m}\,,$$

где $(\nu)_m = \nu(\nu+1)\ldots(\nu+m-1)$, $(\nu)_0 = 1$, а для сумм в правых частях существуют явные формулы

$$\sum_{m=0}^{b}\frac{(\nu)_m}{m!}\frac{(-\nu)_{a-m}}{(a-m)!} = \frac{(\nu)_{b+1}(-\nu)_{a-b}}{\nu a b!(a-b-1)!}\,, \tag{1.18.14}$$

$$\sum_{m=0}^{b}\frac{(-\nu)_m}{m!}\frac{(\nu)_{a+m}}{(a+m)!} = -\frac{(-\nu)_{b+1}(\nu)_{a+b+1}}{\nu(a+\nu)b!(a+b)!}\,,$$

которые легко доказать по индукции. Это позволяет переписать матричные элементы в факторизованном виде

$$G(q',p') = \frac{1}{\nu(p'+q')}\frac{(\nu)_{q'+\frac{1}{2}}(-\nu)_{p'+\frac{1}{2}}}{(q'-\frac{1}{2})!(p'-\frac{1}{2})!}\,, \tag{1.18.15}$$

$$G(-p,-q) = -\frac{1}{\nu(p+q)}\frac{(\nu)_{p+\frac{1}{2}}(-\nu)_{q+\frac{1}{2}}}{(p-\frac{1}{2})!(q-\frac{1}{2})!}\,,$$

$$G(-p,p') = \frac{1}{\nu(p-p'+\nu)}\frac{(\nu)_{p+\frac12}(-\nu)_{p'+\frac12}}{(p-\frac12)!(q'-\frac12)!}\,,$$

$$G(q',-q) = -\frac{1}{\nu(q'-q+\nu)}\frac{(\nu)_{q'+\frac12}(-\nu)_{q+\frac12}}{(q-\frac12)!(q'-\frac12)!}\,.$$

Следовательно, определитель можно переписать в виде

$$\det{}_{a,b}G(x_a,y_b) = \prod_j \frac{(-\nu)_{p'_j+\frac12}(\nu)_{q'_j+\frac12}}{\nu(p'_j-\frac12)!(q'_j-\frac12)!}\prod_i \frac{(\nu)_{p_i+\frac12}(-\nu)_{q_i+\frac12}}{\nu(p_i-\frac12)!(q_i-\frac12)!}\cdot \det{}_{a,b}\tilde G(\tilde x_a,\tilde y_b)\,, \tag{1.18.16}$$

где теперь для двух новых наборов $\{\tilde x_a\} = \{q'_j\}\cup\{-p_i-\nu\}$, $\{\tilde y_b\} = \{-p'_j\}\cup\{q_i-\nu\}$

$$\tilde G(\tilde x_a,\tilde y_b) = \frac{\mathrm{sgn}(\tilde x_a\tilde y_b)}{\tilde x_a - \tilde y_b}\,, \tag{1.18.17}$$

а соответствующий детерминант может быть вычислен с помощью формулы Коши

$$\det{}_{a,b}\frac{1}{\tilde x_a-\tilde y_b} = \frac{\prod_{a<b}(\tilde x_a-\tilde x_b)\prod_{a>b}(\tilde y_a-\tilde y_b)}{\prod_{ab}(\tilde x_a-\tilde y_b)}\,,$$

так что окончательно получаем

$$Z(\nu|Y',Y) = \pm\prod_j \frac{(-\nu)_{p'_j+\frac12}(\nu)_{q'_j+\frac12}}{\nu(p'_j-\frac12)!(q'_j-\frac12)!}\prod_i \frac{(\nu)_{p_i+\frac12}(-\nu)_{q_i+\frac12}}{\nu(p_i-\frac12)!(q_i-\frac12)!}\times \tag{1.18.18}$$

$$\times\frac{\prod_{i>j}(p'_i-p'_j)\prod_{i<j}(p_i-p_j)\prod_{i>j}(q'_i-q'_j)\prod_{i<j}(q_i-q_j)\prod_{ij}(q'_i+p_j+\nu)\prod_{ij}(p'_i+q_j-\nu)}{\prod_{ij}(p'_i+q'_j)\prod_{ij}(p_i+q_j)\prod_{ij}(q'_i-q_j+\nu)\prod_{ij}(p_i-p'_j+\nu)}\,.$$

Легко видеть, что полученное выражение имеет структуру

$$Z(\nu|Y',Y) = \pm\frac{Z_b(\nu|Y',Y)}{Z_0^{\frac12}(Y')Z_0^{\frac12}(Y)}\,, \tag{1.18.19}$$

где

$$Z_0^{\frac12}(Y) = \prod_i \left(p_i-\tfrac12\right)!\left(q_i-\tfrac12\right)!\frac{\prod_{ij}(p_i+q_j)}{\prod_{i<j}(q_i-q_j)\prod_{i<j}(p_i-p_j)}\,, \tag{1.18.20}$$

в то время как

$$Z_b(\nu|Y',Y) = \prod_i \nu^{-1}(-\nu)_{p'_i+\frac12}(\nu)_{q'_i+\frac12}\prod_j \nu^{-1}(-\nu)_{q_j+\frac12}(\nu)_{p_j+\frac12}\times \tag{1.18.21}$$

$$\times\frac{\prod_{ij}(q'_i+p_j+\nu)\prod_{ij}(p'_i+q_j-\nu)}{\prod_{ij}(q'_i-q_j+\nu)\prod_{ij}(p'_i-p_j-\nu)}\,.$$

В этой нормировке легко проверить, что

$$Z_b(\nu|Y',Y) = \pm\prod_{t\in Y}(1+a_Y(t)+l_{Y'}(t)+\nu)\prod_{s\in Y'}(1+a_{Y'}(s)+l_Y(s)-\nu) \tag{1.18.22}$$

является буквально функцией Некрасова для бифундаментальной материи в калибровочной $U(1)$ теории при $c = 1$ или $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$. Заметим также, что

$$Z_b(0|Y,Y) = Z_0^{\frac{1}{2}}(Y) Z_0^{\frac{1}{2}}(Y) = \prod_{s\in Y}(1 + a_Y(s) + l_Y(s))^2 = Z_V(Y)^{-1} \tag{1.18.23}$$

представляет собой функцию Некрасова для чистой $U(1)$ калибровочной теории, отвечающую мере Планшереля на разбиениях.

1.18.1.3 Проблема Римана-Гильберта

Для следующих ниже обобщений крайне полезно следующее простое наблюдение. Рассмотрим коррелятор

$$\langle\theta|V_\nu(1)\tilde{\psi}^\sigma(z)\psi^\sigma(w)|\sigma\rangle = \delta_{\theta,\sigma+\nu}\frac{z^\sigma w^{-\sigma}(1-z)^\nu(1-w)^{-\nu}}{z-w}\,, \tag{1.18.24}$$

который легко вычисляется с помощью правил бозонизации. После этого находим, что

$$(z-w)\langle\theta|V_\nu(1)\tilde{\psi}^\sigma(z)\psi^\sigma(w)|\sigma\rangle = \phi(z)\phi(w)^{-1} \tag{1.18.25}$$

выражается просто через решения простой линейной системы

$$\frac{d\phi(z)}{dz} = \phi(z)\left(\frac{\sigma}{z} + \frac{\nu}{z-1}\right).$$

Это означает, что данную линейную систему можно использовать, чтобы определить все матричные элементы с двумя фермионами, например, в области $1 > |z| > |w|$:

$$\langle\theta|V_\nu(1)\tilde{\psi}^\sigma(z)\psi^\sigma(w)|\sigma\rangle = \sum_{p,q}\frac{1}{z^{p+\frac{1}{2}-\sigma}w^{q+\frac{1}{2}+\sigma}}\langle\theta|V_\nu(1)\tilde{\psi}^\sigma_p\psi^\sigma_q|\sigma\rangle\,,$$

а вместе с теоремой Вика это определяет все матричные элементы, или же сам оператор V_ν, однозначно – с точностью до численного множителя. В свою очередь линейная система определяется свойствами монодромии (в данном случае очень простыми) решения $\phi(z)$ при $z = 0$ и $z = 1$ (а также связанной с ними монодромией в $z = \infty$). Таким образом, нахождение корреляционных функций с двумя фермионами можно свести к решению задачи Римана-Гильберта.

1.18.1.4 Замечания

— Формулы (1.18.18), (1.18.21) дают совершенно явное представление для матричных элементов и некрасовских бифундаментальных функций через координаты Фробениуса соответствующих диаграмм Юнга (это представление, например, гораздо проще для практических вычислений, нежели формулы (1.18.22)). Однако часто достаточно сложно заметить, что эти формулы обладают рядом простых свойств: скажем, они удовлетворяют “правилам сумм” типа

$$\sum_Y t^{|Y|}\frac{Z_b(\alpha_1|\emptyset,Y)Z_b(\alpha_2|Y,\emptyset)}{Z_0(Y)} = \sum_Y t^{|Y|}Z(\alpha_1|\emptyset,Y)Z(\alpha_2|Y,\emptyset) =$$

где ответ в правой части сразу следует из разложения единицы и коррелятора двух экспонент

$$\langle 0|e^{i\alpha_1\phi(1)}e^{i\alpha_2\phi(t)}|0\rangle = (1-t)^{\alpha_1\alpha_2}.$$

— Можно также извлечь достаточно полезную информацию из частных случаев, которые включают красивое тождество

$$\frac{(1-z)^\nu(1-w)^{-\nu}}{z-w} = \frac{1}{z-w} + \sum_{a,b=0}^{\infty}\frac{(-\nu)_{a+1}(\nu)_{b+1}}{(a+b+1)\nu a!b!}z^a w^b\,,$$

содержащее некотурую часть матричных элементов.

— Рассмотрим

$$\tilde\psi(z+t/2)\psi(z-t/2) = \frac{1}{t} : \exp\left(\int_{z-t/2}^{z+t/2}J(\xi)d\xi\right) : \tag{1.18.26}$$

Разложение по степеням t даёт бесконечный ряд токов $W_{1+\infty}$ алгебры

$$:\tilde\psi(z+t/2)\psi(z-t/2) := \frac{1}{t} : \left(\exp\left(\int_{z-t/2}^{z+t/2}J(\xi)d\xi\right)-1\right) := \tag{1.18.27}$$

$$= \sum_{k>0}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}U_k(z)\,,$$

где более явно

$$U_1(z) = J(z),\quad U_2 = \tfrac{1}{2} : J(z)^2 : ,\quad U_3 = \frac{1}{3}\left(: J(z)^3 : +\frac{1}{4}\partial^2 J(z)\right),\quad \ldots \tag{1.18.28}$$

и подразумевается бозонное нормальное упорядочение для бозонов и фермионное - для фермионов. Эти формулы были использованы много раз для связи генераторов алгебры $W_{1+\infty}$ с операторами, билинейными по фермионам, и мы хотели бы напомнить о них здесь для обобщения в гораздо менее тривиальном неабелевом случае.

1.18.2 Неабелева $U(N)$ теория

1.18.2.1 Функции Некрасова

Рассмотрим теперь более общий случай функций Некрасова, отвечающей неабелевой теории с группой $U(N)$. Их можно выразить через функции $U(1)$ теории с помощью следующей формулы произведений

$$\hat{Z}_b(\theta',\nu,\theta|Y',Y) = \prod_{\alpha,\beta=1}^{N} Z_b(\nu-\theta'_\alpha+\theta_\beta|Y'_\alpha,Y_\beta)\,. \tag{1.18.1}$$

Для диагональных элементов $\hat{Z}_0(\theta|Y) = \hat{Z}_b(\theta,0,\theta|Y,Y)$ получаем

$$\hat{Z}_0(\theta|Y) = \prod_{\alpha,\beta=1}^{N} Z_b(-\theta_\alpha+\theta_\beta|Y_\alpha,Y_\beta) = \pm\prod_{i<j} Z_b^2(-\theta_\alpha+\theta_\beta|Y_\alpha,Y_\beta)\cdot\prod_\alpha Z_0(Y_\alpha)\,, \tag{1.18.2}$$

или, после взятия квадратного корня, просто

$$\hat{Z}_0^{\frac{1}{2}}(\theta|Y) = \prod_{\alpha<\beta} Z_b(-\theta_\alpha+\theta_\beta|Y_\alpha,Y_\beta)\cdot\prod_\alpha Z_0^{\frac{1}{2}}(Y_\alpha)\,.$$

Теперь для простоты лучше сделать замену $\theta'_\alpha-\nu\mapsto\theta'_\alpha$ или $\theta_\alpha+\nu\mapsto\theta_\alpha$, и тогда зависимость от ν в формулах пропадает. Рассмотрим теперь нормированный матричный элемент

$$\hat{Z}(\theta',\theta|Y',Y) = \frac{\hat{Z}_b(\theta',\theta|Y',Y)}{\hat{Z}_0^{\frac{1}{2}}(\theta'|Y')\hat{Z}_0^{\frac{1}{2}}(\theta|Y)} = \tag{1.18.3}$$

$$= \frac{\prod\limits_{\alpha,\beta=1}^{N} Z_b(-\theta'_\alpha+\theta_\beta|Y'_\alpha,Y_\beta)}{\prod_{\alpha<\beta} Z_b(-\theta_\alpha+\theta_\beta|Y_\alpha,Y_\beta)\prod\limits_\alpha Z_0^{\frac{1}{2}}(Y_\alpha)\cdot\prod_{\alpha<\beta} Z_b(-\theta'_\alpha+\theta'_\beta|Y'_\alpha,Y'_\beta)\cdot\prod\limits_\alpha Z_0^{\frac{1}{2}}(Y'_\alpha)}$$

Используя представление для $U(1)$-функций в координатах Фробениуса, можно заметить, что отношение произведений элементарных детерминантов Коши на самом деле объединяется в более сложный единый детерминант Коши

$$\hat{Z}(\theta',\theta|Y',Y) = \det_{IJ}\frac{1}{x_I-y_J}\times \tag{1.18.4}$$

$$\times\prod_{i,\alpha} f_{1,\alpha}(\theta',\theta,p'_{\alpha,i})f_{2,\alpha}(\theta',\theta,q'_{\alpha,i})f_{1,\alpha}(\theta,\theta',p_{\alpha,i})f_{2,\alpha}(\theta,\theta',q_{\alpha,i})$$

с двумя мульти-наборами переменных, входящими в определитель, вида

$$\{x_I\} = \{-q'_{\alpha,i}-\theta'_\alpha\}\cup\{p_{\alpha,i}-\theta_\alpha\}\,, \tag{1.18.5}$$

$$\{y_I\} = \{p'_{\alpha,i}-\theta'_\alpha\}\cup\{-q_{\alpha,i}-\theta_\alpha\}\,,$$

с точностью до вполне нетривиальной диагональной части, которая впрочем также извлекается из формул, приводя к следующим факторам

$$f_{1,\alpha}(\theta,\theta',p_{\alpha,i}) = \frac{1}{(p_{\alpha,i}-\frac{1}{2})!}\prod_\beta\frac{(\theta'_\beta-\theta_\alpha)_{p_{\alpha,i}+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\theta'_\beta-\theta_\alpha}}\prod_{\beta\neq\alpha}\frac{\sqrt{\theta_\beta-\theta_\alpha}}{(\theta_\beta-\theta_\alpha)_{p_{\alpha,i}+\frac{1}{2}}}\,, \tag{1.18.6}$$

$$f_{2,\alpha}(\theta,\theta',q_{\alpha,i}) = \frac{1}{(q_{\alpha,i}-\frac{1}{2})!}\prod_{\beta}\frac{(\theta_\alpha-\theta'_\beta)_{q_{\alpha,i}+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\theta_\alpha-\theta'_\beta}}\prod_{\beta\neq\alpha}\frac{\sqrt{\theta_\alpha-\theta_\beta}}{(\theta_\alpha-\theta_\beta)_{q_{\alpha,i}+\frac{1}{2}}}\,.$$

Существование детерминантной формулы чрезвычайно важно, так как из этого следует, что функции Некрасова $\hat{Z}(\theta',\theta|Y',Y)$ могут быть отождествлены с матричными элементами некоторого вершинного оператора, который характеризуется, как и в абелевом $U(1)$ случае, своим присоединенным действием, являющимся, по-прежнему, линейным преобразованием, но теперь уже N-компонентных фермионов. Ниже мы собираемся определить этот оператор, используя теорию (N-компонентных) свободных фермионов, обобщая рассмотренный выше абелев случай. В общем случае этот оператор задается решением вспомогательной линейной задачи на сфере с тремя отмеченными точками, а явные формулы этого раздела отвечают частному случаю решений гипергеометрического типа.

1.18.2.2 N-компонентные свободные фермионы

Таким образом, рассмотрим обобщение конструкции свободных фермионов со случая $U(1)$ на неабелеву теорию с группой $U(N)$. Первым делом определим алгебру

$$\{\psi_{\alpha,r},\psi_{\beta,s}\} = 0\,, \qquad \{\tilde\psi_{\alpha,r},\tilde\psi_{\beta,s}\} = 0\,, \quad \{\tilde\psi_{\alpha,r},\psi_{\beta,s}\} = \delta_{\alpha,\beta}\delta_{r+s,0} \tag{1.18.7}$$

$$r,s\in\mathbb{Z}+\tfrac{1}{2}, \quad \alpha,\beta = 1,\dots,N$$

канонических антикоммутационных соотношений для компонент фермионных полей с действием первого порядка $S = \frac{1}{\pi}\sum_{\alpha=1}^N\int_\Sigma d^2z\tilde\psi_\alpha\partial\psi_\alpha$, так что имеются операторные разложения

$$\tilde\psi_\alpha(z)\psi_\beta(w) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{z-w} + J_{\alpha\beta}(w) + O(z-w)\,, \tag{1.18.8}$$

$$\psi_\alpha(z)\psi_\beta(w) = reg. \qquad \tilde\psi_\alpha(z)\tilde\psi_\beta(w) = reg.$$

Аналогичным образом возможно и полезно определить формулы бозонизации для этих фермионных полей

$$\tilde\psi_\alpha(z) = \exp\left(-\sum_{n<0}\frac{J_{\alpha,n}}{nz^n}\right)\exp\left(-\sum_{n>0}\frac{J_{\alpha,n}}{nz^n}\right)e^{Q_\alpha}z^{J_{\alpha,0}}\epsilon_\alpha(J_0)\,,$$

$$\psi_\alpha(z) = \exp\left(\sum_{n<0}\frac{J_{\alpha,n}}{nz^n}\right)\exp\left(\sum_{n>0}\frac{J_{\alpha,n}}{nz^n}\right)e^{-Q_\alpha}z^{-J_{\alpha,0}}\epsilon_\alpha(J_0)\,. \tag{1.18.9}$$

Здесь $J_{\alpha,n}$ образуют алгебру Гейзенберга

$$[J_{\alpha,n},J_{\beta,m}] = n\delta_{\alpha\beta}\delta_{m+n,0}, \qquad [J_{0,\alpha},Q_\beta] = \delta_{\alpha\beta}\,, \tag{1.18.10}$$

а $\epsilon_\alpha(J_0) = \prod_{\beta=1}^{\alpha-1}(-1)^{J_{0,\beta}}$. Можно также заметить, что $\epsilon_\alpha(x+y) = \epsilon_\alpha(x)\epsilon_\beta(y)$. Эти дополнительные знаковые факторы выполняют роль преобразований Йордана-Вигнера: превращают коммутирующие объекты в антикоммутирующие.

Стандартное представление этой алгебры $\mathcal{H}^\sigma$ строится из вакуумного вектора $|\sigma\rangle$ с зарядами $J_0|\sigma\rangle = \sigma|\sigma\rangle$ и уничтожаемого всеми положительными модами

$$\psi^\sigma_{\alpha,r>0}|\sigma\rangle = 0\,, \qquad \tilde{\psi}^\sigma_{\alpha,r>0}|\sigma\rangle = 0\,. \tag{1.18.11}$$

Базисные вектора этого представления могут быть выбраны в виде

$$|\{p_{\alpha,i}\},\{q_{\alpha,i}\},\sigma\rangle = \prod_{\alpha=1}^{N}\left(\prod_{i=1}^{\#p_{\alpha,i}}\tilde{\psi}_{\alpha,-p_{\alpha,i}}\prod_{j=1}^{\#q_{\alpha,j}}\psi_{\alpha,-q_{\alpha,j}}\right)|\sigma\rangle\,. \tag{1.18.12}$$

Величины $p_{\alpha,i}$ и $q_{\alpha,i}$, по крайней мере, в случае когда $\#p_\alpha = \#q_\alpha$, следует интерпретировать как координаты Фробениуса набора из N диаграмм Юнга. В дальнейшем также будет полезно использовать операторы сдвига вакуума P^n_α

$$P^0_\alpha = 1, \qquad P^{n<0}_\alpha = \psi^\sigma_{\alpha,n+\frac{1}{2}}\psi^\sigma_{\alpha,n+\frac{3}{2}}\ldots\psi^\sigma_{\alpha,-\frac{1}{2}}|\sigma\rangle\,, \tag{1.18.13}$$
$$P^{n>0}_\alpha = \tilde{\psi}^\sigma_{\alpha,-n+\frac{1}{2}}\tilde{\psi}^\sigma_{\alpha,-n+\frac{3}{2}}\ldots\tilde{\psi}^\sigma_{\alpha,-\frac{1}{2}}|\sigma\rangle$$

и соответствующие состояния

$$|n,\sigma\rangle = \prod_{\alpha=1}^{N} P^{n_\alpha}_\alpha|\sigma\rangle\,. \tag{1.18.14}$$

в частности, для векторов $\mathbf{n} = \pm\mathbf{1}_\beta$ с компонентами $n_\alpha = \pm\delta_{\alpha\beta}$.

1.18.2.3 Алгебры Каца-Муди уровня один и W-алгебры

Рассмотрим W-алгебры для серии $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(N)$, с возможным расширением до $\mathfrak{gl}(N)$, где мы будем называть их $W_N \oplus H$. Их генераторы в токовом представлении можно отождествить с симметрическими функциями нормально упорядоченных произведений токов $J(z) \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, принимающих значение в подалгебре Картана, или, эквивалентно – как некоторые "элементы Казимира" в универсальной обертывающей $U(\widehat{\mathfrak{sl}(N)}_1)$. Для вирасоровского центрального заряда на уровне $k=1$ имеем

$$c = \frac{k\dim\mathfrak{g}}{k+C_V} = \frac{N^2-1}{1+N} = N-1\,. \tag{1.18.15}$$

Будучи погруженной в $U(\widehat{\mathfrak{gl}(N)}_1)$, эта алгебра токов имеет изящное представление в терминах многокомпонентных свободных голоморфных фермионных полей

$$J_{\alpha\beta}(z) =: \tilde{\psi}_\alpha(z)\psi_\beta(z):\,, \quad \alpha,\beta = 1,\ldots,N \tag{1.18.16}$$

Алгебра W_N может быть определена в терминах инвариантных казимировских полиномов из токов, коммутирующих с экранирующими зарядами $Q_{\alpha\beta} = \oint J_{\alpha\beta}(z)$ (достаточно потребовать коммутативности лишь с теми из них, которые отвечают простым положительным корням). Тогда W-генераторы превращаются просто в симметрические полиномы диагональных картановских токов $J_\alpha = J_{\alpha\alpha}(z) \in \mathfrak{h}$, то есть

$$W_n(z) = \sum_{\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n} :J_{\alpha_1}(z)J_{\alpha_2}(z)\ldots J_{\alpha_n}(z):, \qquad n = 1,\ldots,N\,. \tag{1.18.17}$$

Можно построить представления $U(\widehat{\mathfrak{gl}(N)}_1)$ и $W_N \oplus H$ в $\mathcal{H}^\sigma$. Для этого удобно ввести производящие функции

$$\psi^\sigma_\alpha(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \frac{\psi^\sigma_{\alpha,r}}{z^{r+\frac{1}{2}+\sigma_\alpha}}\,, \qquad \tilde{\psi}^\sigma_\alpha(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \frac{\tilde{\psi}^\sigma_{\alpha,r}}{z^{r+\frac{1}{2}-\sigma_\alpha}}\,. \tag{1.18.18}$$

где сдвиги степеней координаты z возникают естественным образом, например, из формул бозонизации. Для этих полей имеем

$$\tilde{\psi}^\sigma_\alpha(z)\psi^\sigma_\beta(w) = \delta_{\alpha\beta}\frac{z^{\sigma_\alpha}w^{-\sigma_\alpha}}{z-w} + :\tilde{\psi}^\sigma_\alpha(z)\psi^\sigma_\beta(w): = \tag{1.18.19}$$

$$= \frac{\delta_{\alpha\beta}}{z-w} + \delta_{\alpha\beta}\frac{\sigma_\alpha}{w} + :\tilde{\psi}^\sigma_\alpha(w)\psi^\sigma_\beta(w): + O(z-w)\,,$$

и тогда ясно, что моды $J^\sigma_{\alpha\beta}(w)$ принимают в этом представлении вид

$$J^\sigma_{\alpha\beta,n} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{n,0}\sigma_\alpha + \sum_{p\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} :\tilde{\psi}^\sigma_{\alpha,n-p}\psi^\sigma_{\beta,p}: \tag{1.18.20}$$

Как и в $U(1)$ случае в фермионной реализации $W_N \oplus H$, генераторы можно выбрать в билинейном по фермионам виде

$$\sum_\alpha \tilde{\psi}^\sigma_\alpha(z+\frac{t}{2})\psi^\sigma_\alpha(z-\frac{t}{2}) = \frac{N}{t} + \sum_{k=1}^\infty \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}U^\sigma_k(z)\,. \tag{1.18.21}$$

1.18.2.4 Алгебры Каца-Муди уровня один и W-алгебры

Рассмотрим W-алгебры для серии $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(N)$, с возможным расширением до $\mathfrak{gl}(N)$, где мы будем называть их $W_N \oplus H$. Их генераторы в токовом представлении можно отождествить с симметрическими функциями нормально упорядоченных произведений токов $J(z) \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, принимающих значение в подалгебре Картана, или, эквивалентно – как некоторые "элементы Казимира" в универсальной обертывающей $U(\widehat{\mathfrak{sl}(N)}_1)$. Для вирасоровского центрального заряда на уровне $k = 1$ имеем

$$c = \frac{k\dim\mathfrak{g}}{k+C_V} = \frac{N^2-1}{1+N} = N-1\,. \tag{1.18.22}$$

Будучи погруженной в $U(\widehat{\mathfrak{gl}(N)}_1)$, эта алгебра токов имеет изящное представление в терминах многокомпонентных свободных голоморфных фермионных полей

$$J_{\alpha\beta}(z) =: \tilde{\psi}_\alpha(z)\psi_\beta(z) : , \quad \alpha,\beta = 1,\ldots,N \tag{1.18.23}$$

Алгебра W_N может быть определена в терминах инвариантных казимировских полиномов из токов, коммутирующих с экранирующими зарядами $Q_{\alpha\beta} = \oint J_{\alpha\beta}(z)$ (достаточно потребовать коммутативности лишь с теми из них, которые отвечают простым положительным корням). Тогда W-генераторы превращаются просто в симметрические полиномы диагональных картановских токов $J_\alpha = J_{\alpha\alpha}(z) \in \mathfrak{h}$, то есть

$$W_n(z) = \sum_{\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n} : J_{\alpha_1}(z)J_{\alpha_2}(z)\ldots J_{\alpha_n}(z) : , \qquad n = 1,\ldots,N\,. \tag{1.18.24}$$

Можно построить представления $U(\widehat{\mathfrak{gl}(N)}_1)$ и $W_N \oplus H$ в $\mathcal{H}^\sigma$. Для этого удобно ввести производящие функции

$$\psi^\sigma_\alpha(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \frac{\psi^\sigma_{\alpha,r}}{z^{r+\frac{1}{2}+\sigma_\alpha}}\,, \qquad \tilde{\psi}^\sigma_\alpha(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \frac{\tilde{\psi}^\sigma_{\alpha,r}}{z^{r+\frac{1}{2}-\sigma_\alpha}}\,. \tag{1.18.25}$$

где сдвиги степеней координаты z возникают естественным образом, например, из формул бозонизации (1.18.9). Для этих полей вместо (1.18.8) имеем

$$\tilde{\psi}^\sigma_\alpha(z)\psi^\sigma_\beta(w) = \delta_{\alpha\beta}\frac{z^{\sigma_\alpha}w^{-\sigma_\alpha}}{z-w} + : \tilde{\psi}^\sigma_\alpha(z)\psi^\sigma_\beta(w) := \tag{1.18.26}$$

$$= \frac{\delta_{\alpha\beta}}{z-w} + \delta_{\alpha\beta}\frac{\sigma_\alpha}{w} + : \tilde{\psi}^\sigma_\alpha(w)\psi^\sigma_\beta(w) : + O(z-w)\,,$$

и тогда ясно, что моды $J^\sigma_{\alpha\beta}(w)$ из (1.18.8) принимают в этом представлении вид

$$J^\sigma_{\alpha\beta,n} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{n,0}\sigma_\alpha + \sum_{p\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} : \tilde{\psi}^\sigma_{\alpha,n-p}\psi^\sigma_{\beta,p} : \tag{1.18.27}$$

Как и в $U(1)$ случае (см. (1.18.27)) в фермионной реализации $W_N \oplus H$, генераторы можно выбрать в билинейном по фермионам виде

$$\sum_\alpha \tilde{\psi}^\sigma_\alpha(z+\frac{t}{2})\psi^\sigma_\alpha(z-\frac{t}{2}) = \frac{N}{t} + \sum_{k=1}^\infty \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}U^\sigma_k(z)\,. \tag{1.18.28}$$

Левая часть этого равенства дает

$$\tilde{\psi}^\sigma_\alpha(z+\frac{t}{2})\psi^\sigma_\alpha(z-\frac{t}{2}) = \frac{1}{t}\left(\frac{1+\frac{t}{2z}}{1-\frac{t}{2z}}\right)^{\sigma_\alpha} + \tag{1.18.29}$$

$$+\frac{1}{t}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z^m}\frac{\frac{t}{z}}{(1+\frac{t}{2z})^{m+1}} \sum_{p\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \left(\frac{1+\frac{t}{2z}}{1-\frac{t}{2z}}\right)^{p+\frac{1}{2}+\sigma_\alpha} : \tilde{\psi}^\sigma_{m-p,\alpha}\psi^\sigma_{\alpha,p} : \,.$$

Вводя два набора полиномов

$$\left(\frac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}\right)^{p} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} u_k(p)\frac{x^k}{(k-1)!}\,, \tag{1.18.30}$$

$$\frac{x}{(1+\frac{x}{2})^{m+1}}\left(\frac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}\right)^{p+\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} v_{k,m}(p)\frac{x^k}{(k-1)!}\,,$$

генераторы в правой части равенства (1.18.28) можно записать явно

$$U^{\sigma}_{k,m} = \sum_{\alpha}\left(\delta_{m,0}u_k(\sigma_\alpha) + \sum_{p\in\mathbb{Z}} v_{k,m}(p+\sigma_\alpha) :\tilde{\psi}^{\sigma}_{\alpha,m-p}\psi^{\sigma}_{p,\alpha}:\right). \tag{1.18.31}$$

Этот набор генераторов $W_N \oplus H$ содержит коммутирующие нулевые моды $U^{\sigma}_{k,0}$ которые, как хорошо известно, играют важную роль в изучании расширенной теории Виттена-Зайберга и АГТ-соответствии. Также важно отметить, что коммутационные соотношения между этими генераторами линейны, а также не сильно зависят от N, а нелинейность возникает лишь в соотношениях между самими генераторами.

Используя правила бозонизации, эти генераторы можно привести к общепринятому виду. Для того, чтобы провести явное разложение алгебры в прямую сумму $W_N \oplus H$, полезно переопределить $J_\alpha(z) \mapsto J_\alpha(z) + j(z)$, где новые токи удовлетворяют уже соотношению $\sum J_\alpha = 0$ и операторным разложениям

$$j(z)j(w) = \frac{\frac{1}{N}}{(z-w)^2} + reg. \qquad J_\alpha(z)J_\beta(w) = \frac{\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{N}}{(z-w)^2} + reg. \tag{1.18.32}$$

Рассмотрим теперь билинейное выражение

$$\sum_{\alpha}\tilde{\psi}_\alpha(z+\frac{t}{2})\psi_\alpha(z-\frac{t}{2}) = \sum_{\alpha} :e^{i\varphi(z+\frac{t}{2})+i\phi_\alpha(z+\frac{t}{2})}::e^{-i\varphi(z-\frac{t}{2})-i\phi_\alpha(z-\frac{t}{2})}: = \tag{1.18.33}$$

$$= \frac{1}{t} :e^{i\varphi(z+\frac{t}{2})-i\varphi(z-\frac{t}{2})}: \sum_{\alpha} :e^{i\phi_\alpha(z+\frac{t}{2})-i\phi_\alpha(z-\frac{t}{2})}:,$$

где $j(z) = i\partial\varphi$, $J_\alpha(z) = i\partial\phi_\alpha(z)$, и разложим его по степеням t. Получим следующие выражения:

$$U_1(z) = Nj(z), \qquad U_2(z) = T(z) + \frac{N}{2} :j^2(z):, \tag{1.18.34}$$

$$U_3(z) = W_3(z) + 2NT(z)j(z) + \frac{N}{3}\left(:j^3(z): + \frac{1}{4} :\partial^2 j(z):\right),$$

$$U_4(z) = -W_4(z) + \frac{1}{2}(TT)(z) + 3W_3(z)j(z) + 3:j^2(z):T(z): +$$

$$+\frac{N}{4}\left(:j^4(z): + :j(z)\partial^2 j(z):\right), \qquad U_5(z) = \ldots$$

где $T(z) = -W_2(z)$ представляет из себя тензор энергии-импульса, а $(AB)(z)$ обозначает нормальное упорядочение

$$(AB)(z) = \oint_z \frac{dw}{w-z} A(w)B(z)$$

"в теории со взаимодействием". Мы видим тем самым, что один базис связан с другим некоторым сложным, хотя и явным, треугольным преобразованием. Кроме того, мы видим, что генераторы $U_k(z)$ на самом деле зависимы, например если $N = 3$, то $W_4(z) = 0$ и $U_4(z)$ превращается в нелинейное выражение из младших генераторов.

Легко видеть, что для состояний

$$J^\sigma_{\alpha,0}|n,\sigma\rangle = (\sigma_\alpha + n_\alpha)|n,\sigma\rangle\,, \quad U^\sigma_{k,0}|n,\sigma\rangle = u_k(\sigma+n)|n,\sigma\rangle\,, \tag{1.18.35}$$

$$U^\sigma_{k,m>0}|n,\sigma\rangle = 0.$$

Иногда оказывается полезным разложить полное гильбертово пространство на сектора $\mathcal{H}^\sigma = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}^N} \mathcal{H}^\sigma_n$ с фиксированными зарядами $\mathfrak{h} \in \mathfrak{gl}(N)$, а также в сектора $\mathcal{H}^\sigma_l = \bigoplus_{\sum n_\alpha = l} \mathcal{H}^\sigma_n$ с фиксированным полным $u(1) = \mathfrak{gl}(1)$ зарядом. Все эти факты обобщает следующая

Теорема. Пространства $\mathcal{H}^\sigma_l$ являются представлениями $\widehat{\mathfrak{gl}(N)}_1$, и для значений σ общего положения пространства $\mathcal{H}^\sigma_n$ являются модулями Верма для алгебры $W_N \oplus H$ с векторами старшего веса $|\sigma,n\rangle$ и базисами, заданными векторами $|Y,n,\sigma\rangle$, $\forall Y$.

Доказательство очень простое: генераторы $\widehat{\mathfrak{gl}(N)}_1$ имеют нулевой заряд по $\mathfrak{gl}_1$, генераторы $W_N \oplus H$ обладают нулевыми зарядами по $\mathfrak{h}$, поэтому пространства $\mathcal{H}^\sigma_l$ и $\mathcal{H}^\sigma_n$ замкнуты относительно действия этих алгебр. Мы также знаем из (1.18.35) что $|\sigma,n\rangle$ являются векторами старшего веса для $W_N \oplus H$, а поэтому можно построить ненулевое отображение из модуля Верма в $\mathcal{H}^\sigma_n$, а поскольку модуль Вема неприводим и имеет тот же характер $\operatorname{tr} q^{L_0}$, то на самом деле это отображение является изоморфизмом.

1.19 Представления унитарной группы и марковские процессы

Данное направление исследований посвящено некоторым комбинаторным и вероятностным аспектам теории представлений бесконечномерной унитарной группы $U(\infty)$. Аналогичная теория существует и для бесконечной симметрической группы $S(\infty)$, она проще и лучше изучена. Поэтому начнем с краткого обзора некоторых важных результатов для симметрической группы.

В современной интерпретации, классическая конструкция Фробениуса для характеров неприводимых представлений симметрических групп $S(N)$ основана на изоморфизме градуированных алгебр

$$\mathrm{Rep}(S(1),S(2),\dots) \simeq \mathrm{Sym},$$

где через Sym обозначена алгебра симметрических функций, а символ $\mathrm{Rep}(S(1),S(2),\dots)$ обозначает кольцо представлений семейства $\{S(N) : N = 1,2,\dots\}$.

Алгебра $\mathrm{Rep}(S(1),S(2),\dots)$ допускает следующее описание:

$$\mathrm{Rep}(S(1),S(2),\dots) := \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathrm{Rep}_N^S. \tag{1.19.1}$$

Здесь Rep_N^S — это пространство функций, постоянных на классах сопряжённости, на $S(N)$, а умножение

$$\mathrm{Rep}_M^S \otimes \mathrm{Rep}_N^S \to \mathrm{Rep}_{M+N}^S$$

задаётся индуктивным переходом от группы $S(M) \times S(N)$ к группе $S(M + N)$. (Не следует путать это определение с определением кольца представлений одной группы, см., например, книгу Сигала).

У алгебры, $\mathrm{Rep}(S(1),S(2),\dots)$ есть выделенный базис, образованный неприводимыми характерами симметрических групп. При изоморфизме $\mathrm{Rep}(S(1),S(2),\dots) \to \mathrm{Sym}$, который называется характеристическим отображением, этот базис переходит в выделенный базис в алгебре Sym, образованный функциями Шура. Эти факты хорошо известны.

Бесконечная симметрическая группа $S(\infty)$ определяется как объединение множеств бесконечной цепочки

$$S(1) \subset S(2) \subset \cdots \subset S(N-1) \subset S(N) \subset \cdots \tag{1.19.2}$$

конечных симметрических групп. Для группы $S(\infty)$ не подходит определение неприводимых характеров, понимаемое в общепринятом смысле, однако существует подходящий аналог нормированных неприводимых характеров (то есть, неприводимых характеров, разделённых на размерность). Это — так называемые экстремальные характеры, определение которых, впервые предложенное Тома, было мотивировано теорией факторов Маррея–фон Неймана. Тома обнаружил, что экстремальные характеры группы $S(\infty)$ допускают точное описание: они параметризуются точками симплекса Тома Ω^S, то есть, выпуклого подмножества бесконечномерного куба $[0,1]^\infty$. Отметим, что пространство Ω^S компактно в топологии на $[0,1]^\infty$, заданной, как топология произведения топологических пространств.

Дуальный объект к группе $S(N)$ определяется как множество её неприводимых характеров. Его можно отождествить с множеством $\mathbb{Y}_N$ диаграмм Юнга из N клеток. Аналогичным образом, мы рассматриваем множество экстремальных характеров группы $S(\infty)$ как дуальный объект (или одну из его возможных версий) и отождествляем его с симплексом Тома Ω^S.

Вершик и Керов положили начало асимптотической теории характеров. Они объяснили, как экстремальные характеры группы $S(\infty)$ получаются из нормированных неприводимых характеров групп $S(N)$ при предельном переходе, когда N стремится к бесконечности. В асимптотической теории характеров также играет важную роль алгебра Sym. В частности, так называемая теорема о кольце, принадлежащая Вершику и Керову, утверждает, что экстремальные характеры группы $S(\infty)$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с множеством мультипликативных линейных функционалов на Sym, которые принимают неотрицательные значения на базисе из функций Шура и обращаются в ноль на главном идеале $(e_1 - 1) \subset \mathrm{Sym}$, где через e_1 обозначена первая элементарная симметрическая функция.

Перейдем теперь к вероятностным результатам. Во первых, заметим, что вложение $S(N-1) \subset S(N)$ продолжается по двойственности до канонической "связки" $\hat{S}(N) \to \hat{S}(N-1)$. Здесь под связкой $X \to Y$ между двумя пространствами я подразумеваю "обобщённое отображение", которое сопоставляет каждой точке пространства X распределение вероятностей на пространстве Y; другими словами, связка задаётся марковским ядром (в нашем случае это просто стохастическая матрица). Как было показано в работе Бородина–Ольшанского, дуальный объект $\hat{S}(\infty)$ можно рассматривать как проективный предел цепочки

$$\hat{S}(1) \leftarrow \hat{S}(2) \leftarrow \cdots \leftarrow \hat{S}(N-1) \leftarrow \hat{S}(N) \leftarrow \cdots, \tag{1.19.3}$$

взятый в подходящей категории с морфизмами, заданными марковскими ядрами. Таким образом, $S(\infty)$ — это группа, полученная индуктивным пределом, тогда как её дуальный объект $\hat{S}(\infty)$ получается как своего рода проективный предел.

В работе Бородина и Ольшанского было построено двухпараметрическое семейство марковских процессов с непрерывным временем на симплексе Тома. Поводом для нашей работы послужило изучение гармонического анализа на группе $S(\infty)$, и в ней в основном использовались канонические связки из выражения (1.19.3). Мы доказали, что марковские процессы имеют непрерывные выборочные траектории и, следовательно, являются диффузионными процессами. Доказательство основано на вычислении инфинитезимальных генераторов этих процессов: мы показали, что генераторы задаются определёнными дифференциальными операторами второго порядка, первоначально действующими на фактор-алгебре $\mathrm{Sym}/(e_1 - 1)$. Для того, чтобы установить связь этих операторов с марковскими процессами, мы использовали существование канонического вложения

$$\mathrm{Sym}/(e_1 - 1) \hookrightarrow C(\Omega^S), \tag{1.19.4}$$

где через $C(\Omega^S)$ обозначена банахова алгебра непрерывных функций на компактном пространстве Ω^S.

Перейдём к компактным унитарным группам. Они образуют цепочку, аналогичную (1.19.2),

$$U(1) \subset U(2) \subset \cdots \subset U(N-1) \subset U(N) \subset \cdots, \tag{1.19.5}$$

и мы полагаем $U(\infty) := \bigcup_{N=1}^{\infty} U(N)$. Экстремальные характеры группы $U(\infty)$ были впервые изучены Войкулеску. Они параметризуются точками бесконечномерного пространства Ω, которое может быть реализовано как выпуклое подмножество произведения счётного количества копий $\mathbb{R}_+$. Заметим, что пространство Ω локально компактно. Как и дуальный объект группы $S(\infty)$, пространство $\Omega = \hat{U}(\infty)$ можно отождествить с проективным пределом двойственной цепочки

$$\hat{U}(1) \leftarrow \hat{U}(2) \leftarrow \cdots \leftarrow \hat{U}(N-1) \leftarrow \hat{U}(N) \leftarrow \cdots \tag{1.19.6}$$

Несмотря на то, что группы $S(\infty)$ и $U(\infty)$ имеют совершенно различную структуру, в описании их характеров наблюдается удивительное сходство. Объяснение этого феномена было предложено в работе Бородина–Ольшанского.

Перечислим кратко результаты данной работы.

1. Установлено, что попытка расширить определение кольца представлений на семейство унитарных групп приводит к новому объекту — некоторой градуированной алгебре R, которая играет роль алгебры Sym.

2. Найден аналог вложения (1.19.4). Его можно рассматривать как своего рода преобразование Фурье на группе $U(\infty)$.

3. Основной результат — вычисление инфинитезимальных генераторов для четырёхпараметрического семейства марковских процессов на Ω, построенного ранее. Показано, что генераторы как раз задаются некоторыми дифференциальными операторами второго порядка, первоначально определёнными на R.

Опишем результаты более детально. Как будет видно, для всех конструкций, где проявляется сходство между группами $S(\infty)$ и $U(\infty)$, случай унитарной группы оказывается существенно более сложным.

1.19.1 Кольцо представлений для унитарных групп: алгебра R.

Прежде всего следует ответить на вопрос, есть ли хороший аналог кольца представлений для семейства $\{U(N)\}$. Сложность этого случая, по сравнению с конечной симметрической группой, состоит в том, что индуцированные характеры имеют бесконечно много неприводимых компонент. Поэтому из определения $\mathrm{Rep}(S(1),S(2),\dots)$ мы получаем, что произведения элементов базиса должны быть бесконечными суммами; что с ними делать? Предлагаемое решение состоит в том, что бы расширить пространство и допустить бесконечные суммы. Это приводит к следующему определению:

Алгебра R — предлагаемый аналог алгебры Sym — это градуированная алгебра формальных степенных рядов ограниченной степени от счётного числа переменных. Степень каждой переменной равна 1. Обозначим переменные через φ_n, где n пробегает множество $\mathbb{Z}$.

Напомним, что Sym является проективным пределом алгебр полиномов:

$$\mathrm{Sym} = \lim \mathbb{C}[e_1,\dots,e_k], \tag{1.19.7}$$

где $k \to \infty$, а $e_1,e_2,\dots$ — это элементарные симметрические функции.

Соответственно, R также может быть представлена как проективный предел алгебр полиномов:

$$R = \lim \mathbb{C}[\varphi_{-l},\dots,\varphi_k], \tag{1.19.8}$$

где $k,l \to +\infty$.

Существенное различие состоит в том, что $\deg e_k = k$, в то время как $\deg \varphi_n = 1$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому однородные компоненты Sym имеют конечную размерность, в то время как однородные компоненты R бесконечномерны. Тем не менее, оказывается, что реализация (1.19.8) через проективный предел играет роль свойства конечности, и это можно эффективно использовать.

Как и в случае алгебры Sym, для алгебры R существуют различные интересные базисы, только это топологические базисы. Два базиса особенно важны для нашей работы. Они обозначены как $\{\varphi_\lambda\}$ и $\{\sigma_\lambda\}$, где индекс λ пробегает множество старших весов всех унитарных групп. Базис $\{\varphi_\lambda\}$ образован мономами от символов φ_n. Он подобен мультипликативному базису в Sym, порождённому элементарными симметрическими функциями. Базис $\{\sigma_\lambda\}$ — это аналог функций Шура. Связь между этими двумя базисами играет важную роль в получении основного результата.

Из двойственности Шура–Вейля следует, что кольцо представлений семейства $\{S(N)\}$ изоморфно некоторому кольцу представлений отдельного объекта — алгебры

Ли $\mathfrak{gl}(\infty)$. Аналогично, используя фермионную версию двойственности Хау, можно отождествить кольцо представлений семейства $\{U(N)\}$ с определённым кольцом представлений алгебры Ли $\mathfrak{gl}(2\infty)$.

1.19.2 Что такое преобразование Фурье на группе $U(\infty)$?

Рассмотрим вначале конечную группу G и обозначим через $M_{\mathrm{inv}}(G)$ пространство комплексных мер на G, иварианитных относительно внутренних автоморфизмов. Через $\hat{G}$ обозначим множество нормированных неприводимых характеров, а через $\mathrm{Fun}(\hat{G})$ — пространство функций на $\hat{G}$. Интегрируя характер $\chi \in \hat{G}$ по мере $m \in M_{\mathrm{inv}}(G)$, мы получаем линейное отображение

$$F : M_{\mathrm{inv}}(G) \to \mathrm{Fun}(\hat{G}).$$

Используя функциональное уравнение для нормированных неприводимых характеров, мы получаем, что F переводит свёртку мер в поточечное произведение функций. Значит, F — подходящая версия преобразования Фурье.

В более общем смысле, данное выше определение преобразования Фурье F лучше всего работает, когда группа G компактна. В этом случае в качестве пространства $M_{\mathrm{inv}}(G)$ можно взять пространство инвариантных комплексных мер на группе G, или, если G — это группа Ли, большее пространство инвариантных распределений или подходящее подпространство в нём, в зависимости от ситуации.

Но что происходит, если $G = S(\infty)$ или $G = U(\infty)$? Дуальный объект $\hat{G}$ был определён выше; известно также, что он достаточно велик в том смысле, что экстремальные характеры этих групп различают классы сопряжённости. Проблема в том, что данное выше определение множества $M_{\mathrm{inv}}(G)$ больше не работает. Например, единственная инвариантная конечная мера на $S(\infty)$ — это дельта-мера, сконцентрированная в единице.

С этой трудностью можно справиться следующим образом. Для группы G, которая является индуктивным пределом компактных групп $G(N)$, определим

$$M_{\mathrm{inv}}(G) := \lim M_{\mathrm{inv}}(G(N)),$$

где отображение $M_{\mathrm{inv}}(G(N-1)) \to M_{\mathrm{inv}}(G(N))$ задано усреднением по действию группы внутренних автоморфизмов $G(N)$. Более подробно, образ меры $M \in M_{\mathrm{inv}}(G(N-1))$ в $M_{\mathrm{inv}}(G(N))$ определяется как

$$\int_{g \in G(N)} M^g dg,$$

где через M^g обозначено преобразование меры M (которую мы переносим с $G(N-1)$ на $G(N)$) посредством сопряжения элементом $g \in G(N)$, а через dg — нормированная мера Хаара на $G(N)$.

В случае, если $G = S(\infty)$, нетрудно проверить, что $M_{\mathrm{inv}}(S(\infty))$ можно естественным образом отождествить с фактор-алгеброй $\mathrm{Sym}/(e_1 - 1)$, и тогда только что определённое преобразование Фурье совпадает с отображением (1.19.4).

В случае $G = U(\infty)$ ситуация более тонкая. В первом приближении аналогом алгебры $\mathrm{Sym}/(e_1-1)$ будет фактор-алгебра R/J, где J — это главный идеал следующего вида:

$$J := (\varphi - 1), \qquad \varphi := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_n. \tag{1.19.9}$$

Однако эта алгебра слишком велика, и её следует сузить для того, чтобы преобразование Фурье было корректно определено. Мы рассматриваем два способа это сделать, оба из них выглядят достаточно естествеными. Отметим, что есть и много других возможностей: это зависит от выбора конкретных пространств $M_{\mathrm{inv}}(U(N))$. Мы не будем слишком углубляться в это, поскольку для получения основного результата достаточно располагать простейшим способом связать алгебру R с пространством $\hat{U}(\infty) = \Omega$.

Отметим, что в некоторых случаях, в том числе, когда $G = S(\infty)$ или $G = U(\infty)$, множество классов сопряжённости на G может быть снабжено естественной структурой полугруппы. Тогда можно снабдить пространство $M_{\mathrm{inv}}(G)$ операцией умножения, которая является аналогом свёртки и переходит в поточечное умножение на $\hat{G}$ при подходящей версии преобразования Фурье.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате работы по проекту получены следующие научные результаты:

Показано, что однокомпонентные редукции иерархии Пфафф-Тоды в бездисперсионном пределе описываются системой из двух эллиптических уравнений Левнера (Голузина-Комацу).

Найдены новые редукции уравнений двумеризованной цепочки Тода, ассоциированные с нижнетреугольными разностными операторами. Получено их гамильтоново описание.

Дано прямое определение функции Коши–Йоста (известной также как функция Коши–Бейкера–Ахиезера) для случая чисто солитонного решения и подробно рассмотрены свойства этой функции на основе использования уравнения Кадомцева–Петвиашвили II в качестве примера.

Построен Q-оператор удовлетворяющий TQ-соотношению и коммутирующий с собой для обобщённых восемивершинных моделей определённых через представления алгебры Склянина со старшими спинами.

Расширено квантово-классическое соответствие до тригонометрического (гиперболического) случая.

Изучены интегрируемые модели с $\mathfrak{gl}(2|1)$ симметрией, которые решаются с помощью иерархического алгебраического анзаца Бете. Получено действие элементов матрицы монодромии на эти вектора.

Получено представление для скалярных произведений векторов Бетев самом общем случае.

Получено детерминантное представление для скалярного произведение векторов Бете, когда параметры Бете подчиняются некоторым условиям, которые слабее чем уравнения Бете.

Введены новые формулы для степеней стратов пространств Гурвица рода 0, отвечающих функциям с двумя непростыми критическими значениями с предписанными разбиениями кратностей прообразов.

Найдено обобщение теоремы Бриона, в котором экспоненты точек суммируются с весами, зависящими от минимальной грани, содержащей точку.

Развито "рациональное"обобщение соответствия между двумя различными способами нумерации парковочными функциями альковов в D_n^{n+1}.

Развита теория представлений полиномиального роста фейгинской алгебры Ли gl_t. Получены первые результаты, обобщающие двойственность Шура-Вейля.

Описанаq-деформацию формул для τ-функций. Более точно, здесь мы проделываем это для простейшого случая уравнения Пенлеве III(D_8).

Предложена конструкция коммутативных подалгебр в конечных W-алгебрах типа A. Показано, что в ряде случаев данные подалгебры максимальны, т.е. задают квантовую интегрируемую систему.

Показано, что формы Якоби чётного индекса, ассоциированные с системой корней B_n, образуют свободную алгебру с $n+1$ образующей над кольцом модулярных форм. Это же свойство подтверждено для рассматриваемых относительно конгруэнц-подгруппы $\Gamma(2)$ форм Якоби произвольного индекса, ассоциированных с системой корней A_n.

Получен способ вычисления чисел Гурвица-Севери с помощью классических чисел Гурвица в гибком и полужёстком случаях.

Показано, что для любого подмножества нумерованных вершин I ориентрованного графа Γ действие оператора Лапласа на ориентированную сумму всех сильно полусвязных графов, в которых набор изолированных вершин совпадает с I, даёт сумму всех ациклических графов в которых множество стоков совпадает с I.

Для бесконечных детерминантных мер, полученных как возмущения конечного ранга, установлена сходимость семейства детерминантных процессов, полученных индуцированием с исчерпывающего семейства подмножеств фазового пространства, к изначальному, невозмущенному детерминантному процессу.

Доказано совпадание спектральных последовательностей типа Васильева, вычисляющих когомологии полупростой группы Ли G и множества неособых сечений линейных G-однородных расслоений при отображении орбит.

Получено точное решение одномерной проблемы Римана-Гильберта на эллиптической кривой, изучены единственность решения и критерии разрешимости. Для двумерной трёхточечной проблемы Римана-Гильберта с неприводимым индуцированным представлением на эллиптической кривой получен в явном вид класс решений для индуцированной задачи.

Построены операторы частных производных в некоммутативных матричных алгебрах уравнения отражений и разработан аналог дифференциального комплекса де Рама. Для значения параметра деформации $|q| = 1$ найдена конструкция анти-инволюции унитарного типа для квантового дифференциального исчисления над$GL_q(n)$.

Построены представления W-алгебры с целыми вирасоровскими центральными зарядами на основе теории многокомпонентных свободных безмассовых фермионов в двух измерениях. С помощью вершинных операторов этой теории получены новые данные о тау-функциях многокомпонентных иерархий тодовского типа.

Показано, что попытка расширить определение кольца представлений на семейство унитарных групп приводит к новому объекту — некоторой градуированной алгебре R, которая играет роль алгебры симметрических функций. Проведено явное вычисление инфинитезимальных генераторов для четырёхпараметрического семейства марковских процессов на дуальном объекте к $U(\infty)$.

Полученные результаты составили содержание 34 опубликованных и принятых к печати статей и 16 препринтов, а также послужили осовой для подготовки более 40 докладов на международных научных конференциях. При участии Лаборатории было организовано три международных конференции и две школы-конференции. Кроме того были организованы визиты в Лабораторию иностранных ученых, которые провели четыре курса лекций для студентов и специалистов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. A.Khoroshkin, S.Merkulov, T.Willwacher, On Quantizable Lie Bialgebras Lett.Math.Phys. (2016) 106:1199–1215 DOI 10.1007/s11005-016-0873-3

2. A.S.Khoroshkin, Characteristic classes of flags of foliations and lie algebra cohomology Transformation Groups (2016) vol.21, no.2, pp. 479–518 DOI: 10.1007/s00031-015-9354-5

3. M. Bershtein, B. Feigin, A. Litvinov, Coupling of two conformal field theories and Nakajima-Yoshioka blow-up equations Lett. Math. Phys. (2016) vol.106, no.1, pp. 29-56

4. S.Natanzon, A.Zabrodin, Formal solution to the KP hierarchy Journal of Physics A: Math. Theor. 49 (2016) 145206

5. S.Kharchev, A.Zabrodin, Theta vocabulary II. Multidimensional case Journal of Geometry and Physics, 104 (2016) 112-120

6. M.Beketov, A.Liashyk, A.Zabrodin, A.Zotov, Trigonometric version of quantum-classical duality in integrable systems Nuclear Physics B, 903 (2016) 150-163

7. V.Akhmedova, A.Zabrodin, Dispersionless Pfaff-Toda hierarchy and elliptic Lowner equation Journal of Mathematical Physics 57 (2016) 093507

8. A. Hutsalyuk, A. Liashyk, S.Z. Pakuliak, E. Ragoucy, N.A. Slavnov, Form factors of the monodromy matrix entries in gl(2|1)-invariant integrable models Nuclear Physics B 911 (2016) 902-927

9. A. Hutsalyuk, A. Liashyk, S.Z. Pakuliak, E. Ragoucy, N.A. Slavnov, Multiple Actions of the Monodromy Matrix in gl(2|1)-Invariant Integrable Models SIGMA 12 (2016), 099

10. A. Hutsalyuk, A. Liashyk, S.Z. Pakuliak, E. Ragoucy, N.A. Slavnov, Scalar products of Bethe vectors in models with gl(2|1) symmetry 1. Super-analog of Reshetikhin formula J. Phys. A: Math. Teor. A49 (2016) 454005

11. Gavrylenko P., Marshakov A., Exact conformal blocks for the W-algebras, twist fields and isomonodromic deformations Journal of High Energy Physics, (2016), no. 2, 181, front matter+31 pp.

12. Gavrylenko P., Marshakov A., Free fermions, W-algebras, and isomonodromic deformations Теоретическая и математическая физика, том 187 (2016), no. 2, стр. 232—262 Англ. перевод: Theoretical and Mathematical Physics, vol. 187 (2016), no. 2, pp. 649–677

13. Pyatov P., On the construction of unitary quantum group differential calculus Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, vol. 49 (2016) no. 41, pp. 415202-(25pp)

14. Dimitri Gurevich, Pavel Saponov Quantum geometry and quantization on U(u(2)) background. Noncommutative Dirac monopole Journal of Geometry and Physics, vol. 106 (2016) pp. 87–97

15. Dimitri Gurevich, Pavel Saponov Derivatives in noncommutative calculus and deformation property of quantum algebras Journal of Noncommutative Geometry, vol. 10 (2016) Accepted, to be published in December 2016

16. Akhmedov E., Popov F., Kalinov D. Method for distinguishing very compact stellar objects from black holes Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology. 2016. Vol. D93. No. 6. P. 064006

17. Akhmedov E., Popov F., Godazgar H., Hawking radiation and secularly growing loop corrections Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology. 2016. Vol.93. P.024029

18. Матвеева А.А., Побережный В.А., Одномерная проблема Римана на эллиптической кривой Математические заметки. 2016. 101(1) Принято в печать, будет опубликовано в январе 2017

19. Буфетов А.И., Бесконечные детерминантные меры и эргодическое разложение бесконечных мер Пикрелла. II. Сходимость бесконечных детерминантных мер Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2016. Т. 80. № 2. С. 16-32

20. Bufetov A.I., Rigidity of determinantal point processes with the Airy, the Bessel and the Gamma kernel Bulletin of Mathematical Sciences. 2016. Vol. 6. No. 1. P. 163-172

21. Araujo V., Bufetov A.I., Filip S., On Hoelder-continuity of Oseledets subspaces Journal of the London Mathematical Society. 2016. Vol. 96. No. 1. P. 194-218

22. Bufetov A.I., Infinite determinantal measures and the ergodic decomposition of infinite Pickrell measures III. The infinite Bessel process as the limit of radial parts of finite-dimensional projections of infinite Pickrell measures Izvestiya: Mathematics. Volume 80 (2016) Number 6, pp.43-64 in press

23. E. Gorsky, J. Hom, Cable links and L-space surgeries Quantum Topology, accepted for publication.

24. Bufetov A.I., Qiu Y., The explicit formulae for scaling limits in the ergodic decomposition of infinite Pickrell measures Arkiv for Matematik. 2016. P. 1-33

25. Bufetov A.I., Ромаскевич О.Л., Bowen L., Mean convergence of Markovian spherical averages for measure-preserving actions of the free group Geometriae Dedicata. 2016. Vol. 181. No. 1. P. 293-306

26. Sergeev A.N., Veselov A.P., Jack-Laurent symmetric functions for special values of parameters Glasgow Mathematical Journal, vol. 58 (2016), no. 3, pp. 599–616

27. Belavin A., Gepner D., Kononov Y., Flat coordinates of topological conformal field theory and solutions of the Gauss–Manin system Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters (JETP Letters). 2016. Vol. 103. No. 3. P. 152-156

28. Kononov Y., Morozov A. On factorization of generalized Macdonald polynomials The European Physical Journal C - Particles and Fields. 2016. No. August

29. E. Gorsky, M. Mazin, M. Vazirani, Affine permutations and rational slope parking functions Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016), 8403-8445

30. E. Gorsky A. Nemethi Links of plane curve singularities are L-space links Algebraic and Geometric Topology 16 (2016) 1905–1912

31. Gorsky E., Mazin M., Rational Parking Functions and LLT Polynomials Journal of Combinatorial Theory, Series A. 2016. Vol. 140. P. 123-140

32. Bezrukavnikov R., On two geometric realizations of an affine Hecke algebra Publications Mathematiques de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 2016. Vol. 123. No. 1. P. 1-67.

33. Andrey Okounkov, Limit shapes, real and imagined Bulletin (nEW sERIES) of the american mathematical society, Volume 53, Number 2, April 2016, Pages 187–216

34. Nikita Nekrasov , Andrei Okounkov, Membranes and sheaves Algebraic Geometry 3 (3) (2016) 320-369 doi:10.14231/AG-2016-015

35. A. Liashyk, D. Rudneva, A. Zabrodin, A. Zotov, Asymmetric 6-vertex model and classical Ruijsenaars-Schneider system of particles arXiv:1611.02497

36. A. Orlov, T. Shiota, K. Takasaki, Pfaffian structures and certain solutions to BKP hierarchies II. Multiple integrals arXiv:1611.02244

37. E.N.Antonov, A.Yu.Orlov, Instantons in sigma model and tau functions arXiv:1611.02248

38. I.Krichever, A.Ilyina, Triangular reductions of 2D Toda hierarchy arXiv:1609.05120

39. M. Boiti, F. Pempinelli, A.K.Pogrebkov, KPII: Cauchy-Jost function, Darboux transformations and totally nonnegative matrices arXiv:1611.04198

40. J.W.van de Leur, A.Yu. Orlov, Character expansion of matrix integrals arXiv:1611.04577

41. B.Bychkov, Degrees of cohomological classes of multisinguliarities in Hurwitz spaces of rational functions arxiv:1611.00504

42. A.N. Sergeev, On rings of supersymmetric polynomials arXiv:1608.00342 Igor Makhlin, FFLV-type monomial bases for type B arXiv:1610.07984

43. M. Bershtein, A. Shchechkin, Bäcklund transformation of Painlevé III(D_8) τ functions arXiv:1608.02568

44. M. Bershtein, A. Shchechkin, q-deformed Painlevé τ function and q-deformed conformal blocks arXiv:1608.02566

45. B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin, Finite type modules and Bethe Ansatz for quantum toroidal gl(1) arXiv:1603.02765

46. A. Hutsalyuk, A. Liashyk, S.Z. Pakuliak, E. Ragoucy, N.A. Slavnov, Bethe vectors in integrable models based on the super-Yangian Y(gl(m|n)) arXiv:1611.09620

47. P.E. Pushkar, Chekanov-type theorem for spherized cotangent bundles arXiv:1602.08743

48. P.E. Pushkar, On Hamiltonian and contact isotopy liftings arXiv:1602.07948

49. Roman Bezrukavnikov, Roman Travkin, Tsao-Hsien Chen, Xinwen Zhu, Quantization of Hitchin integrable system via positive characteristic arXiv:1603.01327

50. V. Akhmedova and A. Zabrodin, Dispersionless DKP hierarchy and elliptic Lowner equation, J. Phys. A: Math. Theor. 47 (2014) 392001 (13pp), arXiv:1404.5135.

51. V. Akhmedova and A. Zabrodin, Elliptic parametrization of Pfaff integrable hierarhies in the zero dispersion limit, Teor. Math. Phys. 185 (2015) 410-422 (English translation: Theor. Math. Phys. 185 (2015) 1718-1728), arXiv:1412.8435.

52. I.A. Alexandrov, Parametric Continuations in the Theory of Univalent Functions, Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).

53. R. Bauer and R. Friedrich, Stochastic Loewner evolution in multiply connected domains, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 339 (2004) 579–584.

54. F. Bracci, M.D. Contreras, S. Diaz-Madrigal and A. Vasil'ev, Classical and stochastic Löwner-Kufarev equations, Harmonic and Complex Analysis and Applications, Birkhäuser-Verlag, 2013, pp. 39-134.

55. M.D. Contreras, S. Diaz-Madrigal and P. Gumenyuk, Loewner Theory in annulus I: evolution families and differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 365 (2013) 2505–2543.

56. M.D. Contreras, S. Diaz-Madrigal and P. Gumenyuk, Loewner Theory in annulus II: Loewner chains, Anal. Math. Phys. 1 (2011) 351-385.

57. J. Gibbons and S. Tsarev, Conformal maps and reductions of the Benney equations, Phys. Lett. A258 (1999) 263-271.

58. J. Gibbons and S. Tsarev, Reductions of the Benney equations, Phys. Lett. A211 (1996) 19-24.

59. G. Goluzin, On parametric representation of functions univalent in an annulus, Matem. Sbornik 29 (1951) 469-476 (in Russian).

60. S. Kharchev and A. Zabrodin, Theta Vocabulary I, Journal of Geometry and Physics, 94 (2015) 19-31, arXiv:1502.04603 .

61. Y. Komatu, Untersuchungen über konforme Abbildung von zweifach zusammenhängenden Gebieten, Proc. Phys. Math. Soc. Japan 25 (1943) 1-42 (Avaliable via Journal@rchive, http://www.journalarchive.jst.go.jp).

62. M. Mañas, S-functions, reductions and hodograph solutions of the rth dispersionless modified KP and Dym hierarchies, J. Phys. A: Math. Gen. 37 (2004) 11191-11221.

63. M. Mañas, L. Martínez-Alonso, E. Medina, Reductions and hodograph solutions of the dispersionless KP hierarchy , J. Phys. A: Math. Gen. 35 (2002) 401-417.

64. C. Pommerenke, Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

65. K. Takasaki, Auxiliary linear problem, difference Fay identities and dispersionless limit of Pfaff-Toda hierarchy, SIGMA 5 (2009) 109.

66. K. Takasaki and T. Takebe, Radial Löwner equation and dispersionless cmKP hierarchy, arXiv:nlin.SI/0601063.

67. T. Takebe, Dispersionless BKP hierarchy and quadrant Löwner equation, SIGMA 10 (2014) 023 (13 pp.).

68. T. Takebe, Lectures on Dispersionless Integrable Hierarchies, Rikkyo Center of Mathematical Physics, Lecture Notes 2 (2014), 1-95, http://id.nii.ac.jp/1062/00009024/.

69. T. Takebe, L.-P. Teo and A. Zabrodin, Löwner equation and dispersionless hierarchies, J. Phys. A: Math. Gen. 39 (2006) 11479-11501.

70. R. Willox, On a generalized Tzitzeica equation, Glasgow Math. J. 47A (2005) 221-231.

71. D. Zhan, Stochastic Loewner evolution in doubly connected domains, Probability Theory and Related Fields 129 (2004) 340-380.

72. O. Babelon, D. Bernard, M. Talon Introduction to classical integrable systems

73. I. Krichever, Algebraic curves and non-linear difference equations, Uspekhi Mat. Nauk 33 (1978), n 4, 215-216.

74. I.Krichever, The periodic nonabelian Toda lattice and two-dimensional generalization Uspekhi Mat. Nauk 36 (1981), n 2, 72-77.

75. I.Krichever, Algebraic curves and non-linear difference equation, Uspekhi Mat. Nauk 33 (1978), n 4, 215-216.

76. I.Krichever, The averaging method for two-dimensional "integrable"equations. Funktsional. Anal. i Prilozhen. 22:3 (1988), 37–52

77. I.Krichever, Commuting difference operators and the combinatorial Gale transform, Functional analysis and its applications, 49:3 (2015) Pages: 175-188

78. I.M. Krichever, Elliptic solutions to difference non-linear equations and nested Bethe ansatz,in “Calogero-Moser-Sutherland models, Springer-Verlag, New-York, 1999, preprint solv-int 9804016.

79. I. Krichever and D.H. Phong, On the integrable geometry of $N = 2$ supersymmetric gauge theories and soliton equations, J. Differential Geometry 45 (1997) 445-485, hep-th/9604199.

80. I.Krichever, D. Phong, Symplectic forms in the theory of solitons, Surv. Differ. Geometry (1998), 239-313.

81. I.Krichever, D.H.Phong, Spin Chain Models with Spectral Curves from M Theory, Comm.Math.Phys. 213 (2000), 539-574.

82. I.Krichever, T.Shiota, Soliton equations and the Riemann-Schottky problem - in Advanced lectures in Mathematic, v. 26, Handbook of Moduli, v.II (eds. G.Farcas,I. Morrison), International Press, 2013

83. S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, R. Schwartz, S. Tabachnikov, Linear difference equations, frieze patterns and combinatorial gale transform

84. V. Ovsienko, R. Schwartz, S. Tabachnikov, The pentagram map A discrete integrable system. Math. Phys., 299 (2010), no.2, 409-446.

85. F. Soloviev, Integrability of the Pentagram Map. Duke. Math.J. 162 (2013), 2815–2853

86. V. B. Matveev and M. A. Salle, Darboux Transformations and Solitons, Springer, Berlin (1991)

87. P. G. Grinevich and A. Yu. Orlov, “Flag Spaces in KP Theory and Virasoro Action on $\det D_j$ and Segal-Wilson τ-Function,” in Research Reports in Physics. Problems of Modern Quantum Field Theory, eds. A. A. Belavin, A. U. Klimyk, A. B. Zamolodchikov, Springer-Verlag, pp. 86–106 (1989)

88. L. V. Bogdanov and B. G. Konopelchenko, “Analytic-bilinear approach to integrable hierarchies. I. Generalized KP hierarchy,” Journ. Math. Phys. 39 4683–4700 (1998)

89. M. Boiti, F. Pempinelli and A. Pogrebkov, “Коши–Йост function and hierarchy of integrable equations,” Theor. Math. Phys. 159:2 (2015) 1599–1613

90. B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili, “On the stability of solitary waves in weakly dispersive media,” Sov. Phys. Dokl. 192 (1970) 539–541

91. V. S. Dryuma, “Analytic solution of the two-dimensional Korteweg–de Vries (KdV) equation,” Sov. JETP Lett. 19 (1974) 387–388

92. V. E. Zakharov and A. B. Shabat, “A scheme for integrating the non-linear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem,” Func. Anal. Appl. 8 (1974) 226–235

93. M. Boiti, F. Pempinelli, A. Pogrebkov and B. Prinari, “Towards an Inverse Scattering theory for non decaying potentials of the heat equation,” Inverse Problems 17 (2001) 937–957

94. M. Boiti, F. Pempinelli and A. Pogrebkov, “Properties of the solitonic potentials of the heat operators,” Theor. Math. Phys. 168 (2011) 865–874

95. S. Chakravarty and Y. Kodama, “Soliton solutions of the KP equation and application to shallow water waves,” Stud. App. Math. 123 (2009) 83–151

96. Y. Kodama, “KP solitons in shallow water,” J. Phys. A: Math. Theor. 43 (2010) 434004 (54pp)

97. B. A. Dubrovin, T. M. Malanyuk, I. M. Krichever, and V. G. Makhankov Sov. J. Part. Nucl. 19 (1988) 252.

98. Yuji Kodama and Lauren K. Williams, “KP solitons, total positivity, and cluster algebras”, PNAS 108:(22) (2011) 8984–8989

99. R. Cavalieri, P. Johnson, H. Markwig Chamber structure of double Hurwitz numbers, DMTCS proc. AN, P.227-238 (2010)

100. T. Ekedahl, S. K. Lando, M. Shapiro, A. Vainshtein Hurwitz numbers and intersections on moduli spaces of curves, Invent. Math., V.146, P.297-327 (2001)

101. В. Фултон Теория пересечений, М.: Мир (1994)

102. I. Goulden, D. Jackson, R. Vakil Towards the geometry of double Hurwitz numbers, Advances in Math., V.198, P.43-92 (2005)

103. М. Э. Казарян Относительная теория Морса одномерных слоений и циклические гомологии, Функцион. анализ и его прил., Т.31, №1, С.20-31 (1997)

104. М. Э. Казарян, С. К. Ландо К теории пересечений на пространствах Гурвица, Изв. Ран.,Сер. Матем., Т.68, №5, С.91-122 (2004)

105. С. К. Ландо Разветвленные накрытия двумерной сферы и теория пересечений в пространствах мероморфных функций на алгебраических кривых, УМН, Т.57, №3, С.463-533 (2002)

106. M. Mulase, S. Shadrin, L. Spitz The spectral curve and the Schrödinger equation of double Hurwitz numbers and higher spin structures, Commun. Number Theory Phys., vol. 7, no. 1, 125–143 (2013)

107. A. Okounkov Toda equations for Hurwitz numbers, Math. Res. Lett., N.7, P.447-453 (2000)

108. S. Shadrin, M. Shapiro, A. Vainshtein Chamber behavior of double Hurwitz numbers in genus 0, Advances in Math., V.217, I.1, P. 79-96 (2007)

109. G. Wiseman Set maps, umbral calculus, and the chromatic polynomial, Discrete Math. 308, no. 16, 3551–3564 (2008)

110. E. Witten Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli spaces, Surveys in Differential Geometry, V.1, P.243-269 (1991)

111. M. Finkelberg, L. Rybnikov, Quantization of Drinfeld Zastava, Preprint arXiv:1009.0676.

112. I. Biswas, Parabolic bundles as orbifold bundles, Duke Math. Jour. 88 (1997), 305–325.

113. F. Bottacin, Poisson structures on moduli spaces of parabolic bundles on surfaces, Manuscripta Math. 103 (2000), 31–46.

114. A. Braverman, M. Finkelberg, Finite difference quantum Toda lattice via equivariant K-theory, Transformation Groups 10 (2005), 363–386.

115. A. Braverman, M. Finkelberg, Pursuing the double affine Grassmannian II: Convolution, preprint arXiv:0908.3390.

116. A. Braverman, M. Finkelberg, D. Gaitsgory, Uhlenbeck spaces via affine Lie algebras, Progress in Mathematics 244 (2006), 17–135.

117. R. Bezrukavnikov, M. Finkelberg, V. Ginzburg, Cherednik algebras and Hilbert schemes in characteristic p, Representation Theory 10 (2006), 245–298.

118. R. Bielawski, V. Pidstrigach, Gelfand-Tsetlin actions and rational maps, Math. Z. 260 (2008), 779–803.

119. W. Crawley-Boevey, Normality of Marsden-Weinstein reductions for representations of quivers, Math. Ann. 325 (2003), 55–79.

120. B. Feigin, M. Finkelberg, I. Frenkel, L. Rybnikov, Gelfand-Tsetlin algebras and cohomology rings of Laumon spaces, preprint, arXiv math/0806.0072.

121. M. Finkelberg, D. Gaitsgory, A. Kuznetsov, Uhlenbeck spaces for $\mathbb{A}^2$ and affine Lie algebra $\widehat{sl}_n$, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 39 (2003), 721–766.

122. M. Finkelberg, A. Kuznetsov, N. Markarian, I. Mirković, A note on a symplectic structure on the Space of G-monopoles, Commun. Math. Phys. 201 (1999), 411–421.

123. A. Grothendieck, J. Dieudonné, Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 24 (1965).

124. A. Gerasimov, S. Kharchev, D. Lebedev, S. Oblezin, On a class of representations of the Yangian and moduli space of monopoles, Comm. Math. Phys.

260 (2005), 511–525.

125. N. Guay, Affine Yangians and deformed double current algebras in type A, Advances in Math. 211 (2007), 436–484.

126. A. I. Molev, Yangians and classical Lie algebras, Math. Surveys and Monographs 143 AMS, Providence, RI (2007).

127. H. Nakajima, Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces, University Lecture Series 18 AMS, Providence, RI (1999).

128. H. Nakajima, Quiver varieties and branching, SIGMA 5 (2009), 003, 37 pages; also arXiv:0809.2605.

129. A. Negut, Laumon spaces and many-body systems, thesis, Princeton University (2008).

130. S. A. Strømme, On parametrized rational curves in Grassmann varieties, Lecture notes in Math. 1266 (1987), 251–272.

131. R. Travkin, Mirabolic Robinson-Shensted-Knuth correspondence, Selecta Math. (N.S.) 14 (2009), 727–758.

132. G. Wilson, Collisions of Calogero-Moser particles and an Adelic Grassmannian, Invent. Math. 133 (1998), 1–41.

133. G. Andrews, R. Askey, R. Roy, Special functions, Cambridge University Press, (1999)

134. H. Awata, Y. Yamada, Five-dimensional AGT Conjecture and the Deformed Virasoro Algebra, JHEP 1001 (2010), 125 [arXiv:0910.4431]

135. A. Belavin, M. Bershtein, B. Feigin, A. Litvinov, G. Tarnopolsky, Instanton moduli spaces and bases in coset conformal field theory, Comm. Math. Phys. 319 1, 269-301 (2013), [arXiv:1111.2803]

136. M. Bershtein, A. Shchechkin, Bilinear equations on Painlevé tau functions from CFT, Comm. Math. Phys. 339, (2015), 1021-1061; [arXiv:1406.3008].

137. M. Bershtein, A. Shchechkin, Bäcklund transformation of Painlevé III(D_8) tau function, [arXiv:1608.02568].

138. G. Bonelli, A. Grassi, A. Tanzini, Seiberg-Witten theory as a Fermi gas, [arXiv:1603.01174].

139. O. Gamayun, N. Iorgov, O. Lisovyy, Conformal field theory of Painlevé VI, JHEP 1210, (2012), 38; [arXiv:1207.0787].

140. O. Gamayun, N. Iorgov, O. Lisovyy, How instanton combinatorics solves Painlevé VI,V and III's, J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013) 335203 [arXiv:1302.1832].

141. V. Gromak, N. Lukashevich, Special classes of solutions of Painlevé equations, Differential Equations 18 (1980), 317–326.

142. N.Iorgov, O.Lisovyy, J.Teschner, Isomonodromic τ functions from Liouville conformal blocks, Commun. Math.Phys. 336(2) (2015) 671-694. [arXiv:1401.6104]

143. A. Its, O. Lisovyy, Yu. Tykhyy, Connection problem for the sine-Gordon/Painleve III tau function and irregular conformal blocks IMRN (2015) 18 8903-8924. [arXiv:1403.1235].

144. K. Kajiwara, M. Noumi, Y. Yamada, Geometric Aspects of Painlevé Equations [arXiv:1509.08186].

145. N. Nekrasov, A. Okounkov, Seiberg-Witten Theory and Random Partitions, The unity of mathematics, 525–596, Progr. Math., 244, Birkhäuser, Boston; [arXiv:hep-th/0306238].
%bibitemOhkava R. Ohkawa, Wall-crossing between stable and co-stable ADHM data [arXiv:1506.06434].

146. Y. Ohyama, H. Kawamuko, H. Sakai, K. Okamoto, Studies on the Painlevé Equations, V, Third Painlevé Equations of Special Type PIII(D_7) and PIII(D_8),J. Math. Sci. Univ. Tokyo 13 (2006), 145–204 [http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/journal/pdf/jms130204.pdf].

147. K. Okamoto, Sur les feuilletages associes aux équations du second ordre a points critiques fixés de P. Painlevé, Japan. J. Math. (N.S.) 5 (1979) 1–79.

148. N. Okubo, Bilinear equations and q-discrete Painlevé equations satisfied by variables and coefficients in cluster algebras, J. Phys. A: Math. Theor. 48 355201 [arXiv:1505.03067].

149. H. Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations Comm. Math.Phys. 220(2) (2001) 165-229.

150. V. Spiridonov, Elliptic hypergeometric functions Appendix to the Russian edition of the book [133] Russian edition: Moscow, MCCME (2013), 577–606; [arXiv:0704.3099].

151. T. Tsuda, Tau Functions of q-Painlevé III and IV Equations Lett. Math. Phys. 75 (2006) 39–47

152. J. Anderson. Partitions which are simultaneously t_1- and t_2-core. Discrete Math. 248 (2002), no. 1-3, 237–243.

153. D. Armstrong. Hyperplane arrangements and diagonal harmonics. 23rd International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2011), 39–50, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AO, Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2011.

154. D. Armstrong. Hyperplane arrangements and diagonal harmonics. J. Comb. 4 (2013), no. 2, 157–190.

155. D. Armstrong, B. Rhoades. The Shi arrangement and the Ish arrangement. Trans. Amer. Math. Soc. 364 (2012), no. 3, 1509–1528.

156. C. Athanasiadis, S. Linusson. A simple bijection for the regions of the Shi arrangement of hyperplanes. Discrete Math. 204 (1999), no. 1–3, 27–39.

157. I. Cherednik. Double affine Hecke algebras. London Mathematical Society Lecture Note Series, 319. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

158. I. Cherednik. Double affine Hecke algebras and difference Fourier transforms. Invent. Math., 152(2):213–303, 2003.

159. I. Cherednik. Diagonal coinvariants and double affine Hecke algebras. Int. Math. Res. Not., (16):769–791, 2004.

160. I. Cherednik. Irreducibility of perfect representations of double affine Hecke algebras. In Studies in Lie theory, volume 243 of Progr. Math., pages 79–95. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.

161. C. K. Fan. Euler characteristic of certain affine flag varieties. Transform. Groups 1 (1996), no. 1–2, 35–39.

162. S. Fishel, M. Vazirani. A bijection between dominant Shi regions and core partitions. European J. Combin. 31 (2010), no. 8, 2087–2101.

163. S. Fishel, M. Vazirani. A bijection between (bounded) dominant Shi regions and core partitions, DMTCS Proceedings, 283–294, 2010.

164. M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson. Purity of equivalued affine Springer fibers. Represent. Theory 10 (2006), 130–146.

165. E. Gorsky, M. Mazin. Compactified Jacobians and q,t-Catalan Numbers, I. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 120 (2013) 49–63.

166. E. Gorsky, M. Mazin. Compactified Jacobians and q,t-Catalan Numbers, II. Journal of Algebraic Combinatorics, 39 (2014), no. 1, 153–186.

167. E. Gorsky, A. Negut. Refined knot invariants and Hilbert schemes. arXiv:1304.3328

168. E. Gorsky, A. Oblomkov, J. Rasmussen, V. Shende. Torus knots and the rational DAHA. arXiv:1207.4523

169. J. Haglund. The q,t-Catalan Numbers and the Space of Diagonal Harmonics: With an Appendix on the Combinatorics of Macdonald Polynomials. AMS University lecture series, 2008.

170. J. Haglund, M. Haiman, N. Loehr, J. Remmel, A. Ulyanov. A combinatorial formula for the character of the diagonal coinvariants. Duke Math. J. , 126 (2005), 195–232.

171. T. Hikita. Affine Springer fibers of type A and combinatorics of diagonal coinvariants. arXiv:1203.5878

172. K. Lee, L. Li, N. Loehr. Combinatorics of certain higher q,t-Catalan polynomials: chains, joint symmetry, and the Garsia-Haiman formula. arXiv:1211.2191

173. E. Leven, B. Rhoades, A. T. Wilson. Bijections for the Shi and Ish arrangements. arXiv:1307.6523

174. G. Lusztig, J. M. Smelt. Fixed point varieties on the space of lattices. Bull. London Math. Soc. 23 (1991), no. 3, 213–218.

175. J.-Y. Shi. The Kazhdan-Lusztig cells in certain affine Weyl groups. Lecture Notes in Mathematics, no. 1179, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York (1986).

176. N. Shimomura. A theorem on the fixed point set of a unipotent transformation on the flag manifold. J. Math. Soc. Japan 32 (1980), no. 1, 55–64.

177. E. Sommers. B-stable ideals in the nilradical of a Borel subalgebra. Canad. Math. Bull., 48(3):460–472, 2005.

178. T. A. Springer. A construction of representations of Weyl groups. Invent. Math. 44 (1978), no. 3, 279–293.

179. R. P. Stanley. Hyperplane arrangements, parking functions and tree inversions. Mathematical essays in honor of Gian-Carlo Rota (Cambridge, MA, 1996), 359–375, Progr. Math., 161, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998.

180. T. Suzuki, M. Vazirani. Tableaux on periodic skew diagrams and irreducible representations of the double affine Hecke algebra of type A. Int. Math. Res. Not. 2005, no. 27, 1621–1656.

181. H. Thomas, N. Williams. Cyclic symmetry of the scaled simplex. J. Algebraic Combin. 39 (2014), no. 2, 225–246.

182. M. Varagnolo, E. Vasserot. Finite-dimensional representations of DAHA and affine Springer fibers: the spherical case. Duke Math. J. 147 (2009), no. 3, 439–540.

183. Z. Yun. Global Springer theory. Adv. Math. 228 (2011), no. 1, 266–328.

184. Braverman, Alexander; Feigin, Boris; Finkelberg, Michael; Rybnikov, Leonid. A finite analog of the AGT relation I: finite W-algebras and quasimaps' spaces, https://arxiv.org/abs/1008.3655v3

185. Brundan, Jonathan; Kleshchev, Alexander. Shifted yangians and finite W–algebras, http://arxiv.org/pdf/math/0407012

186. Chriss; Ginzburg, Victor. Representation Theory and Complex Geometry, http://www.springer.com/us/book/9780817637927

187. Gan, Wee Liang; Ginzburg, Victor. Quantization of Slodowy slices, http://arxiv.org/pdf/math/0105225v3

188. Losev, Ivan. Quantized symplectic actions and W–algebras, http://arxiv.org/pdf/0707.3108

189. Molev A. I. Yangians and their applications, http://arxiv.org/pdf/math/0211288v1.pdf

190. Premet, Alexander. Special transverse slices and their enveloping algebras, preprint.

191. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. — 1979. — № 19. — С. 3–94.

192. Рыбников Л.Г. Централизаторы некоторых квадратичных элементов в алгебрах Пуассона-Ли и метод сдвига инвариантов., http://www.mathnet.ru/links/9fc64a04e45a8885c41068c86772a4ed/rm1421.pdf

193. Тарасов А. А. Максимальность некоторых коммутативных подалгебр в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли, http://www.mathnet.ru/links/09a44c47f28f91aba2344308d6dc0aec/rm567.pdf