

Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики»

УДК №  
Регистрационный №  
Инв. №

УТВЕРЖДАЮ

Проректор НИУ ВШЭ

\_\_\_\_\_ 2018 г.  
«\_\_» \_\_\_\_\_

ОТЧЁТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

«Международная лаборатория теории представлений и математической физики»

(Отчет о работе за 2018 год)

Руководитель НИР,

\_\_\_\_\_

г. Москва, 2018

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководители		
Научный руководитель лаборатории, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	А.Ю. Окуньков (общая координация работы)
Заведующий лабораторией, д.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Б.Л. Фейгин (общая координация работы)
Заместитель заведующего лабораторией, д.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	А.В. Забродин (введение, заключение, реферат)
Заместитель заведующего лабораторией, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	П.Н. Пятов (введение, заключение, реферат)
Заместитель заведующего лабораторией, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Л.Г. Рыбников (введение, заключение, реферат)
Менеджер научного проекта	_____ <small>подпись, дата</small>	Е.А. Жингель (введение, заключение, реферат)
Исполнители		
Младший научный сотрудник, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	В.Э. Ахмедова (раздел 1)
Научный сотрудник, к.ф.-м.н.	_____ <small>подпись, дата</small>	М.А. Берштейн (раздел 1)
Научный сотрудник, к.ф.-м.н.	_____ <small>подпись, дата</small>	Ю.М. Бурман (раздел 1)
Младший научный сотрудник, к.ф.-м.н.	_____ <small>подпись, дата</small>	Б.С. Бычков (раздел 1)
Стажер-исследователь	_____ <small>подпись, дата</small>	И.С. Вильковиский (раздел 1)
Младший научный сотрудник, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	П.Г. Гавриленко (раздел 1)
Стажер-исследователь	_____ <small>подпись, дата</small>	Р.В. Гейко (раздел 1)
Стажер-исследователь	_____ <small>подпись, дата</small>	Р.Р. Гонин (раздел 1)
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	В.Г. Горбунов (раздел 1)
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Е.А. Горский (раздел 1)

Стажер-исследователь	_____ <small>подпись, дата</small>	А.Н. Дятлик (раздел 1)
Стажер-исследователь	_____ <small>подпись, дата</small>	А.Ю. Жевнерчук (раздел 1)
Научный сотрудник, д.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	А.В. Зотов (раздел 1)
Стажер-исследователь	_____ <small>подпись, дата</small>	Д.И. Зубов (раздел 1)
Стажер-исследователь	_____ <small>подпись, дата</small>	А.Н. Иванов (раздел 1)
Стажер-исследователь	_____ <small>подпись, дата</small>	А.И. Ильин (раздел 1)
Стажер-исследователь	_____ <small>подпись, дата</small>	А.В. Ильина (раздел 1)
Стажер-исследователь	_____ <small>подпись, дата</small>	С.Ю. Коротких (раздел 1)
Главный научный сотрудник, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	И.В. Лосев (общая координация работы)
Младший научный сотрудник	_____ <small>подпись, дата</small>	А. Ляшик (раздел 1)
Стажер-исследователь	_____ <small>подпись, дата</small>	А.А. Матвеева (раздел 1)
Стажер-исследователь	_____ <small>подпись, дата</small>	М.Г. Матушко (раздел 1)
Научный сотрудник, к.ф.-м.н.	_____ <small>подпись, дата</small>	И.Ю. Махлин (раздел 1)
Стажер-исследователь	_____ <small>подпись, дата</small>	Я.М. Наприенко (раздел 1)
Научный сотрудник, д.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Х.С. Ниров (раздел 1)
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	А.Ю. Орлов (раздел 1)
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	В.А. Побережный (раздел 1)

Стажер-исследователь	_____ <small>подпись, дата</small>	М.В. Попов (раздел 1)
Научный сотрудник, д.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	П.А. Сапонов (раздел 1)
Младший научный сотрудник	_____ <small>подпись, дата</small>	Н.С. Семенякин (раздел 1)
Научный сотрудник, д.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	А.Н. Сергеев (раздел 1)
Стажер-исследователь	_____ <small>подпись, дата</small>	А.К. Стоян (раздел 1)
Научный сотрудник, Ph.D.	_____ <small>подпись, дата</small>	Т. Такебе (раздел 1)
Младший научный сотрудник	_____ <small>подпись, дата</small>	А.А. Трофимова (раздел 1)
Стажер-исследователь	_____ <small>подпись, дата</small>	П.А. Филиппова (раздел 1)
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	А.С. Хорошкин (раздел 1)
Стажер-исследователь	_____ <small>подпись, дата</small>	А.Л. Шейнкман (раздел 1)
Младший научный сотрудник	_____ <small>подпись, дата</small>	А.И. Щечкин (раздел 1)

## РЕФЕРАТ

Отчет на 116 страниц, 1 часть, 1 рис., 218 источников.

Перечень ключевых слов: МОДЕЛЬ РУЙСЕНААРСА-ШНАЙДЕРА, СИТЕМЫ КАЛОДЖИРО-САЗЕРЛЕНДА, ЦЕПОЧКИ ТОДЫ, ФУНКЦИЯ НЕКРАСОВА, УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ,  $\tau$ -ФУНКЦИЯ, КОНФОРМНЫЙ БЛОК, АЛГЕБРА ВИРАСОРО, ПРЕПОТЕНЦИАЛЫ, ИНСТАНТОННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ, ВЕРТЕКСНЫЕ АЛГЕБРЫ, АФФИННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ, РЕДУКЦИОННЫЕ АЛГЕБРЫ, УРАВНЕНИЕ КНИЖНИКА-ЗАМОЛОДЧИКОВА, РЕДУКЦИЯ ДРИНФЕЛЬДА-СОКОЛОВА, ТОЖДЕСТВА ГАМИЛЬТОНА-КЭЛИ, МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ, АНЗАЦ БЕТЕ, ВЕРОЯТНОСТНЫЕ Z-МЕРЫ, СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ, ФУНКЦИЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ, ПРОЦЕСС С ПРОСТЫМИ ЗАПРЕТАМИ, МНОГООБРАЗИЯ ФЛАГОВ, ОПЕРАДЫ, ЧИСЛА ГУРВИЦА, ПСЕВДОРАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, АЛГЕБРЫ ЧЕРЕДНИКА, ИНВАРИАНТЫ УЗЛОВ, ГОМОЛОГИИ ХОВАНОВА-РОЗАНСКОГО, ГОМОЛОГИИ КОШУЛЯ, ЯНГИАНЫ, ПОДАЛГЕБРЫ БЕТЕ, R-МАТРИЦЫ, КВАНТОВЫЕ ГРУППЫ

Цели работы: развитие общего подхода к разнообразным вопросам, находящимся на стыке теории интегрируемых систем с теорией представлений квантовых и бесконечномерных групп и алгебр.

Задачи: сохранение и преумножение традиций российской математико-физической школы, занимающей лидирующие позиции в современной мировой науке; развитие новых направлений и методов математики с опорой на идеи, возникающие в современной фундаментальной физике; вовлечение преподавателей, аспирантов и студентов НИУ ВШЭ в научную деятельность лаборатории, содействие их контактам с зарубежными исследователями; укрепление международных связей факультета математики НИУ ВШЭ, повышение его авторитета в ряду ведущих математико-физических вузов мира.

Объекты научного исследования: интегрируемые модели математической физики: модели Рюйсенаарса-Шнайдера, системы Калоджеро-Сазерленда, цепочки Тоды, спиновые цепочки и родственные им модели интегрируемых стохастических процессов; многомерные гипергеометрические функции и геометрическая теория представлений, эллиптические конформные блоки и эллиптические гипергеометрические функции, обобщенные Янгианы, квантовые матричные алгебры, редукционные алгебры, геометрическое соответствие Ленглендса.

Методы исследований: алгебраический и теоретико-представленческий анализ классических и квантовых теорий поля, статистической физики и случайных процессов, исследование интегрируемых структур стоящих за калибровочными киверными теориями и анализ их соответствия с двумерными конформными теориями поля, развитие комбинаторных, гомологических и геометрических методов в теории пространств модулей различных геометрических и аналитических структур с приложениями к проблемам математической физики.

Полученные результаты:

— Исследована самодуальная форма преобразований Бэклунда для непрерывной во времени  $\mathfrak{gl}_N$ -модели Руйсенаарса-Шнайдера. Она основана на уравнениях первого порядка для  $N + M$  комплексных переменных, которые включают  $N$  координат частиц и  $M$  дуальных переменных. Эти последние удовлетворяют уравнениям движения  $\mathfrak{gl}_M$ -модели Руйсенаарса-Шнайдера. Наше рассмотрение аналогично ранее полученным результатам для моделей Калоджеро-Мозера, которые воспроизводятся в нерелятивистском пределе. Показано, что самодуальное описание моделей Руйсенаарса-Шнайдера может быть выведено из комплексифицированного уравнения ILW (уравнение промежуточных длинных волн) с дискретным лапласианом с помощью простого полюсного анзаца, подобно тому, как модели Калоджеро-Мозера получаются из обычного уравнения ILW и уравнения Бенджамина-Оно.

— Определены и описаны квази-компактные структуры на  $G^{\mathbb{C}}$ -расслоениях Хиггса на сингулярных кривых, что обобщает полученный нами ранее результат для группы Ли  $SL(N)$ . Наличие квази-компактной структуры означает, что соответствующие группы автоморфизмов расслоений редуцируются в отмеченных точках к максимально компактным подгруппам из  $G^{\mathbb{C}}$ . Показано, что в некоторых частных случаях такая конструкция приводит к классическим интегрируемым системам типа Хиггина. Явные примеры таких систем аналогичны классическим моделям Калоджеро-Сазерленда, связанным с простой комплексной группой Ли  $G^{\mathbb{C}}$ , но имеющим два типа взаимодействующих между собой спиновых переменных. Такие системы были прежде описаны Фехером и Пуцтаем. Для этих систем получены представления Лакса со спектральным параметром, как поля Хиггса на сингулярной рациональной кривой. Также построена иерархия независимых интегралов движения. Используя переход к множеству фиксированных точек вещественной инволюции, связанной с одной из комплексных структур на пространстве модулей расслоений Хиггса, доказано, что количество интегралов движения в точности равно половине размерности фазового пространства. Далее, построена классическая  $r$ -матрица, гарантирующая инволютивность интегралов вживания. Тем

самым окончательно установлена полная интегрируемость данных моделей по Лиувиллю. Представлены три эквивалентных способа описания модели, каждый из которых воспроизводит ответ, после проведения симплектической редукции.

— Построено общее решение класса фуксовых систем ранга  $N$ , а также изомонодромные тау-функции в терминах полувыврожденных конформных блоков  $W_N$ -алгебры с центральным зарядом  $c = N - 1$ . Простейший пример даётся тау-функцией системы Фуджи-Сузуки-Тсуды, выраженной в виде преобразования Фурье от 4-точечного конформного блока по промежуточному весу. Попутно получено обобщение результата Боукока и Воттса о минимальном множестве матричных элементов вертексных операторов для общего центрального заряда и доказано несколько свойств полувыврожденных вертексных операторов и конформных блоков для  $c = N - 1$ .

— Мы выводим представления в виде детерминанта Фредгольма и в виде ряда для тау-функции системы Фуджи-Сузуки-Тсуды и её обобщения на много переменных, таким образом обобщая на старший ранг результаты, полученные для Пенлеве 6 и для системы Гарнье. Специальный случай этой конструкции даёт аналог в старшем ранге для непрерывного гипергеометрического ядра Бородина и Ольшанского. Мы также изучаем алгебраическую динамику полувыврожденных данных монодромии под действием группы кос и получаем в качестве побочного продукта прямое изомонодромное доказательство AGT-W соответствия для  $c = N - 1$ .

— Связь между кластерными интегрируемыми системами и  $q$ -разностными уравнениями расширена за пределы случая Пенлеве. Рассмотрен класс гиперэллиптических кривых, для которых многоугольники Ньютона имеют четыре граничные точки. Предъявлены соответствующие им кластерные интегрируемые системы Тоды. Дискретные автоморфизмы этих систем идентифицируются с определенными редукциями разностных уравнений Хироты. Построены неавтономные версии этих уравнений и найдено, что их решения выражаются через пятимерные функции Некрасова с вкладами членов Черна-Саймонса, в то время как в автономном случае эти уравнения решаются с помощью тэта-функций Римана.

— Были рассмотрены квантовые интегрируемые модели, решаемые с помощью иерархического алгебраического анзаца Бете и обладающие  $gl(N)$ -инвариантной  $R$ -матрицей. Изучены два типа векторов Бете. Первый тип отвечает обычной матрицей монодромии. Второй тип связан с матрицей близкой обратной к матрице монодромии. Показано, что оба типа векторов Бете совпадают с точностью до нормировки и сдвига параметров Бете. Это тождество дает новые комбинаторные соотношения для скалярных произведений векторов Бете. В частном случае моделей с  $gl(3)$ -инвариантной  $R$ -матрицей, изучен недавно предложенный подход к построению собственных векторов таких

моделей. Доказано, что вектора, построенные этим методом совпадают с полу-оншельными векторами Бете для общих значений параметров Бете. Они становятся собственными векторами когда уравнения Бете удовлетворены полностью.

— Получены формулы рекурсии для векторов Бете моделей с периодическими граничными условиями, которые решаются иерархическим анзацем Бете и основаны на квантовой аффинной алгебре  $U_q(gl_n)$ . Представлена формула сумм для их скалярных произведений. Это формула описывает скалярное произведение в терминах сумм по разбиениям параметров Бете, где коэффициенты зависят от двух старших коэффициентов. Доказана серия рекурсивных соотношений для этих старших коэффициентов. Доказано, что когда векторы Бете становятся собственными, их нормы принимают вид детерминанта Годена.

— Исследован класс квантовых интегрируемых моделей, которые можно решить используя иерархический алгебраический анзац Бете и обладающими  $gl(m|n)$ -инвариантной  $R$ -матрицей. Построена норма собственных векторов гамильтониана. С использованием подхода обобщенной модели выявлен набор свойств квадрата нормы, который однозначно характеризует его. Доказано, что Якобиан системы уравнений Бете удовлетворяет тем же свойствам. Таким образом, доказана обобщенная гипотеза о норме собственных векторов гамильтониана.

— Установлено соответствие между классическими тригонометрическими спиновыми цепочками и кластерными интегрируемыми системами в контексте 5-мерных суперсимметричных калибровочных теорий. Показано, что XXZ классическая спиновая цепочка  $gl_M$ -типа на  $N$  узлах описывается кластерной интегрируемой системой, прямоугольник Ньютона которой имеет стороны  $N$  и  $M$ . Двудольный граф в описании Гончарова-Кеньйона дается ромбической сеткой  $N$  на  $M$ . Зигзаги на двудольном графе соответствуют значениям твистов и неоднородностей спиновой цепочки. Спектральная двойственность, которая сопоставляет  $gl_M$  спиновую цепочку на  $N$  узлах и  $gl_N$  спиновую цепочку на  $M$  узлах, становится очевидной благодаря симметрической форме двудольного графа. Твистованные спиновые цепочки с циклическими матрицами твиста соответствуют кластерным интегрируемым системам, многоугольники Ньютона которых имеют форму параллелограмма. Спектральная двойственность в этом контексте приводит к тому, что цепочка Тоды на  $N$  узлах эквивалентна твистованной XXZ цепочке  $gl_N$  типа на одном узле.

— При изучении связи между уравнениями Пенлеве и конформной теорией поля: определены  $c = -2$  тау-функции как ряд Фурье  $SU(2)$  статсуммы Некрасова (четырехмерной и пятимерной); изучены их свойства и с помощью соотношения раздутия Накаджимы-Йошиоки найдено их соответствие с уравнением Пенлеве  $III_3$  и уравне-



нием  $q$ -Пенлеве III. В итоге получено также и доказательство формулы для  $c = 1$  тау-функции уравнения  $q$ -Пенлеве III.

— Получены рекурсивные формулы для многоточечных суперконформных блоков в секторе Неве-Шварца алгебры Вирасоро. Эти рекурсивные формулы решены в терминах глобальных  $osp(2|1)$  блоков.

— В исследованиях по квантовым матричным алгебрам: определена вторая каноническая форма производящей матрицы алгебры уравнения отражений и обобщенного Янгиана.

— В разработке новых методов вычисления корреляционных функций квантовых интегрируемых моделей: построена редуцированная матрица плотности для  $sl_3$ -инвариантной фундаментальной модели с помощью новой версии квантового уравнения Книжника-Замолотчикова. Этот результат позволяет получить важную информацию об алгебраической структуре и явной форме корреляционных функций бесконечной спиновой цепочки.

— При исследовании редуцированных алгебр: построены контравариантные формы на диагональных редуцированных алгебрах, алгебрах деформированных дифференциальных операторов, а также на некоторых стандартных модулях над этими алгебрами. Доказано, что специализация этих форм на пространстве коммутативных переменных представляет нулевые сингулярные вектора в том и только том случае, когда эти вектора принадлежат ядру форм.

— При изучении топологических носителей мер на симплексе Тома: доказано, что любое открытое подмножество симплекса Тома имеет строго положительную массу относительно любой невырожденной  $z$ -меры. Другими словами, топологический носитель любой невырожденной  $z$ -меры на симплексе Тома совпадает со всем пространством симплекса.

— При исследовании интегрируемых статистических моделей лавинообразных процессов: построены функции больших уклонений, характеризующие лавинную динамику в статистической RP-модели; рассмотрен фазовый переход от критического к некритическому режиму в лавинной динамике модели.

— Обнаружено, что замыкание  $T^{reg}/\mathbb{C}^*$ , параметризующее предельные подалгебры изоморфно компактификации Делиня-Мамофрда  $\overline{M_{0,n+2}}$ . Также показано, что все предельные подалгебры являются свободными полиномиальными алгебрами и максимальными коммутативными подалгебрами янгиана  $Y(\mathfrak{gl}_n)$ .

— Получен критерий наличия PBW-свойства у универсальной обертывающей алгебры, отвечающей  $P$ -алгебре кошулевой операды  $P$ .

— Получены формулы для производящих функций плоских разбиений "с ямой". Такие разбиения нумеруют базисные векторы в некоторых представлениях квантовой тороидальной алгебры  $gl_1$ , поэтому наши формулы являются характеристиками представлений. Полученные формулы согласуются с формулами для характеров тензорных представлений супералгебр Ли  $gl_{n|m}$ .

— Построено семейство матричных моделей, генерирующее числа Гурвица для базовых пространств с любой заданной характеристикой Эйлера.

— Классическая матричная теорема о деревьях для  $n \times n$  матрицы Лапласа обобщена на серию 3-параметрических тождеств степеней  $k = n, n + 1, n + 2, \dots$ , для полиномов Бернарди и высших аналогов детерминантов.

— Построено решение интегрируемой иерархии дифференциальных уравнений Кадомцева-Петвиашвили, использующее хопфову структуру алгебры графов.

#### Организационные результаты:

— подготовка к изданию научных докладов, статей и других публикаций, содержащих результаты научной деятельности лаборатории;

— организация и проведение международных конференций и школ, студенческих школ и научных семинаров

— организация визитов в лабораторию зарубежных специалистов

— организация курсов лекций

# СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	12
1 Основные научные результаты . . . . .	18
1.1 Самодуальная форма моделей Руйсенаарса-Шнайдера и уравнение ILW с дискретным лапласианом . . . . .	18
1.2 Квази-компактные расслоения Хиггса и системы Калоджеро-Сазерленда с двумя типами спинов . . . . .	33
1.3 Кластерные цепочки Тоды и функции Некрасова . . . . .	40
1.4 Новые симметрии $\mathfrak{gl}(N)$ -инвариантных векторов Бете . . . . .	53
1.5 Квантовые матричные алгебры и их приложение к интегрируемым мо- делям . . . . .	60
1.6 Вычисление корреляционных функций в $sl_3$ модели и уравнение Книж- ника-Замолодчикова . . . . .	68
1.7 Вычисление конформных блоков сектора Неве-Шварца алгебры Вира- соро . . . . .	71
1.8 Контравариантная форма редукционных алгебр . . . . .	72
1.9 Топологический носитель мер на симплексе Тома . . . . .	76
1.10 Большие отклонения лавин в статистической модели . . . . .	78
1.11 Вырождение подалгебр Бете в янгиане $Y(\mathfrak{gl}_n)$ . . . . .	82
1.12 Взвешенные ПБВ вырождения и тропические многообразия флагов . . . . .	87
1.13 Опералы и универсальные обертывающие алгебры . . . . .	89
1.14 Плоские вырождения с “ямой”: производящие функции и теория пред- ставлений. . . . .	89
1.15 Исследование интегрируемых иерархий псевдоразностных операторов . . . . .	93
1.16 Числа Гурвица: обобщения и приложения . . . . .	94
ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	99
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ . . . . .	102

## ВВЕДЕНИЕ

Теория представлений групп и алгебр — это одна из центральных областей математики, имеющая множество как математических, так и физических приложений. Различные аспекты этой теории проявляются и находят разнообразные приложения в таких областях математики и физики, как алгебраическая геометрия, перечислительная комбинаторика, теория нелинейных дифференциальных уравнений, квантовая механика и теория поля, статистическая физика и теория стохастических процессов, топология узлов и многие другие. С точки зрения математической физики теория представлений является ядром теории интегрируемых систем, которая в последние двадцать лет привлекает все больше исследователей, ставит новые задачи и является источником множества идей, зачастую приводящих к рождению новых направлений в современной математике и теоретической физике.

Исследования, проводившиеся в международной лаборатории теории представлений и математической физики в 2017 году, соответствовали передовым тенденциям развития вышеупомянутых областей математики и физики, и были направлены на разработку новых методов и концепций в теории представлений полупростых алгебр Ли и их деформаций; развитие комбинаторных, гомологических и геометрических методов в теории пространств модулей алгебраических кривых с приложениями к проблемам математической физики; развитие нового подхода в теории интегрируемых систем, связанного с квантовыми когомологиями пространств флагов; нахождение и исследование зеркальной симметрии для кокасательных расслоений пространств флагов; дальнейшее изучение и развитие связей между общими гипергеометрическими функциями и фробениусовыми структурами, ассоциированными с квантовыми когомологиями; изучение связей между динамическими квантовыми группами и геометрией аффинных грассманианов; вычисление характеристических классов глобальных локусов сингулярностей в пространствах модулей отображений алгебраических кривых и развитие связей с интегрируемыми иерархиями; выявление геометрической и теоретико-представленческой природы обнаруженного недавно нетривиального соответствия между квантовыми интегрируемыми системами и классическими интегрируемыми иерархиями; развитие структурной теории для алгебр обобщенных янгианов; развитие теории представлений и геометрической теории эллиптических деформаций алгебр Ли с приложениями к интегрируемым системам с эллиптическими  $R$ -матрицами; алгебраический анализ интегрируемых иерархий солитонных уравнений, интегрируемых моделей классической и квантовой теории поля и статистической физики; анализ интегрируемых структур кон-

формных теорий поля, суперсимметричных калибровочных теорий поля и их деформаций.

В соответствии с возложенными на неё задачами Лаборатория провела следующие мероприятия:

1) подготовила и опубликовала 29 статей (все с аффилиацией НИУ ВШЭ и с благодарностью Программе государственной поддержки ведущих университетов РФ "5-100"), 8 препринтов (все с аффилиацией НИУ ВШЭ и благодарностью Программе "5-100") и более 59 презентаций докладов на международных и российских научных конференциях;

2) организовала и провела международную конференцию "Классические и квантовые интегрируемые системы" (CQIS-2017, Дубна, 24-29.07.2017), международную конференцию "Квантовая информация и топологическая рекурсия" (QUATR-17, Москва, 19-23.6.2017), международную школу "Частицы, поля и струны" (Москва, 17-24.04.2017), международную школу-конференцию «Передовые методы современной теоретической физики: интегрируемые и стохастические системы» (Дубна, 06-12.08.2017), школу-конференцию по теории струн, интегрируемым моделям и теории представлений (Москва, 21-27.01.2017), а также проводила еженедельный семинар по математической физике, семинары в сотрудничестве с ведущими зарубежными специалистами и другие мероприятия, содействующие созданию творческой атмосферы в Лаборатории, и ориентированные на подготовку молодых учёных, аспирантов и студентов;

3) пригласила и организовала прием 4 ведущих зарубежных специалистов из Канады, Японии, Великобритании и США.

Ниже приводится краткое описание основных научных результатов, полученных в Лаборатории в 2017 году:

Исследовано явное выражение (введенное Гамаюном, Йорговым и Лисовым) для  $\tau$ -функции уравнения Пенлеве III ( $D_8$ ) в виде суммы по конформным блокам алгебры Вирасоро с центральным зарядом 1. Изучена группа Бэклунда второго порядка этого уравнения, в частности, в контексте вышеупомянутой явной формулы для  $\tau$ -функции. Уравнение Пенлеве имеет два типа билинейных форм, мы называем их уравнениями типа Тоды и типа Окамото. Эти уравнения связывают  $\tau$ -функции уравнений Пенлеве и их Бэклунд-преобразования. Мы получаем эти уравнения из теории представлений, используя вложение прямой суммы двух алгебр Вирасоро в некоторую супералгебру и разложение модулей, индуцированное этим вложением. Уравнения типа

Тоды и типа Окамото соответствуют секторам Невье-Шварца и Рамона этой супералгебры.

Показано, что дуальная статсумма Некрасова на самодуальном омега-фоне (а) дается детерминантом Фредгольма с обобщенным ядром Бесселя и (б) совпадает с тау-функцией, связанной с общим решением уравнения Пенлеве III ( $D_8$ ), или радиального уравнения синус-Гордона. В частности, разложение детерминанта Фредгольма по главным минорам дает Некрасовские комбинаторные суммы по парам диаграмм Юнга.

Исследованы представления W-алгебр, отвечающие твист-полям, построено обобщение соответствующих вертексных операторов для D- и В-серий. Показано, что вычисление характеров таких представлений приводит к нетривиальным соотношениям, содержащим решеточные тэта-функции. Предложена конструкция конформных блоков твист-полей, которая в случае D-серии выражает их в терминах геометрических данных соответствующего многообразия Прима.

Установлено соответствие между уравнениями Книжника-Замолотчикова ассоциированными с  $GL(N)$  и  $n$ -частичной квантовой моделью Калоджеро в случае, когда  $n$  не обязательно равно  $N$ . Это можно рассматривать как естественное “квантование” квантово-классического соответствия между квантовой моделью Годена и классической моделью Калоджеро.

Изучались разложения многократных интегралов и тау функций иерархии ВКР по характерам ортогональной и симплектической групп. В частности, построены разложения по характерам интегралов по ортогональной и симплектической группам, которые являются примерами тау функции ВКР.

Рассмотрены многоматричные модели, которые можно рассматривать как интегралы от произведений тау-функций от матричных аргументов. Иногда такие интегралы сами являются тау-функциями. Рассматриваются модели, которые генерируют числа Гурвица  $H^{E,F}$ , где  $E$  – эйлерова характеристика базовой поверхности, а  $F$  – число точек ветвления. Показано, что в случае, если подынтегральные выражения содержат произведения  $n > 2$  матриц, интеграл генерирует числа Гурвица с эйлеровой характеристикой  $E \leq 2$  и числом точек ветвления  $F \leq n + 2$ , причем оба числа  $E$  и  $F$  зависят от  $n$  и от порядка сомножителей в матричном произведении. Число  $E$  может быть четным или нечетным (соответственно описывая римановы (и некоторые клейновы) или только клейновы (неориентируемые) базовые поверхности) в зависимости от присутствия тау-функции ВКР в подынтегральном выражении.

Посредством процедуры одевания выведены непрерывные симметрии разностного уравнения Хироты, коммутирующие со сдвигами независимых переменных. Пред-

ставлено действие этих симметрий на зависимые переменные этого уравнения. Коммутативность этих симметрий позволяет интерпретировать их параметры как “времен” нелинейных интегрируемых дифференциально-разностных и дифференциальных уравнений в частных производных. Даны примеры уравнений и их пар Лакса, возникающих при такой процедуре. Помимо таких, обычных симметрий, введены дополнительные симметрии и описано их действие на данные рассеяния.

Найдены бетевские вектора для квантовых интегрируемых систем связанных с суперсимметричными янгианами  $Y(\mathfrak{gl}(m|n))$  в терминах генераторов токов дубля янгиана  $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$ . Использован метод проекций на пересечения разных типов Борелевских подалгебр в этой бесконечномерной алгебре для построения бетевских векторов. С использованием этих проекций суперсимметричные бетевские вектора могут быть выражены через элементы матрицы монодромии. С помощью двух различных, но изоморфных токовых представления дубля Янгиана  $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$ , получены два различных представления для бетевских векторов. Эти бетевские вектора также удовлетворяют некому рекуррентному соотношению, что и доказывает их эквивалентность.

Изучены скалярные произведения бетевских векторов в моделях, решаемых иерархическим алгебраическим анзацем Бете и описываемых  $\mathfrak{gl}(m|n)$ -супералгеброй. С использованием ко-произведенческих свойств бетевских векторов получена формула суммирования для их скалярных произведений. Эта формула описывает скалярное произведения бетевских векторов в терминах суммы по разбиениям бетевских параметров. Получена рекурсия для бетевских векторов. Это позволяет найти рекурсии для старших коэффициентов старших произведений.

Изучены плоские деформации некоторых факторов алгебры многочленов по мономиальным идеалам в классе градуированных коммутативных алгебр.

Исследован рост размерности неприводимых представлений полупростых алгебр Ли над  $\overline{F}_p$  в зависимости от простого  $p$ .

Построен пучок Прочези на терминализации симплектической фактор-особенности и показано, что квантования этих терминализаций являются простыми пучками алгебр. Это имеет приложения к обобщенному неравенству Бернштейна и к извращенности функторов перехода стенок.

Доказано, что замыкание пространства параметров подалгебр Бете в янгиане  $gl_n$ , параметризующее все возможные вырождения, есть компактификация Делиня-Мамфорда пространства модулей стабильных рациональных кривых с  $n + 2$  отмеченными точками.

Найдена степень бифуркационного множества полиномиального отображения общего положения.

Изучено новое семейство дискретных детерминантных точечных процессов, связанных с ортогональными полиномами на вещественной оси. Корреляционные ядра этих процессов определены посредством спектральных проекторов соответствующих матриц Якоби. Для классических весов такие ансамбли возникают как предел гипергеометрических ортогональных полиномиальных ансамблей. Доказано, что  $q$ -преобразование Лапласа весовых функций ASEP эквивалентно среднему от простого мультипликативного функционала, определенного на ансамбле Лагерра. Это позволяет получить асимптотики при больших временах для ASEP в трех предельных режимах.

Исследованы орбиты и полиномиальные инварианты некоторого аффинного действия супергруппоида Вейля супералгебры Ли  $gl(n, m)$  в зависимости от параметра действия и показано, что для общих значений параметра все орбиты конечны и различимы с помощью явно заданных инвариантов. Дано подробное описание специального множества параметров, для которых алгебра инвариантов не является конечно порождённой и не разделяет орбиты, причём некоторые из орбит бесконечны. В частности, все орбиты конечны, если и только если  $\kappa$  не является специальным параметром, меньшим нуля. В этом случае алгебра полиномиальных инвариантов конечно порождена. Кроме того, если  $\kappa$  также не является положительным специальным параметром, то эта алгебра разделяет орбиты.

Рассмотрен квазиклассический предел двух классов обобщенных Янгианов: один представляет Янгианы, связанные с алгеброй уравнения отражений (брейдинговые Янгианы), другой — обобщенные Янгианы RТТ типа. Доказано, что все такие Янгианы являются деформациями (квантованием) коммутативной алгебры  $\text{Sym}(gl(m)[t^{-1}])$ , если соответствующая  $R$ -матрица является деформацией матрицы перестановки. Для обоих случаев явно вычислены соответствующие скобки Пуассона.

Найдены степени ряда стратов в послыйной проективизации пространства Гурвица и вычислены серии двойных чисел Гурвица.

Предложена конструкция локальных характеристических чисел для наборов голоморфных дифференциальных 1-форм на особых многообразиях с изолированными особенностями.

Доказана бесконечномерность когомологий графовых комплексов в различных гомологических степенях, как в классическом комплексе Концевича, так и для волосатых граф-комплексов Ароне-Турчина



Показано что усреднение симметризованного хроматического многочлена Стенли графа  $G$  с точностью до перескалирования переменных является формальной  $\tau$ -функцией интегрируемой системы Кадомцева-Петвиашвили.

Вычислены числа Гурвица-Севери для гибких и полужёстких троек.

Получено явное решение общей одномерной, ограниченной трёхточечной двумерной и специальной двумерной проблемы Римана-Гильберта на эллиптической кривой.

Подробное изложение полученных результатов представлено в основной части отчета. Она разделена на разделы, в каждом из которых обсуждается одно из направлений исследований, проводимых Лабораторией. Каждый раздел содержит собственное введение, где определяются основные понятия, вводятся определения и ставится задача, после чего следует описание методов исследования и полученных результатов. Ссылки на литературу собраны в списке использованных источников. Полученные результаты опубликованы в статьях и препринтах.

# 1 Основные научные результаты

## 1.1 Самодуальная форма моделей Руйсенаарса-Шнайдера и уравнение ILW с дискретным лапласианом

### 1.1.1 Введение

В работе [10] было сделано наблюдение, что  $N$ -частичная классическая модель Калоджеро-Мозера [11] возникает из  $N$ -солитонного решения уравнения Бенджамина-Оно [7] на вещественной прямой

$$f_t + ff_x - \frac{1}{2} (Hf)_{xx} = 0, \quad Hf(x) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1.1)$$

где  $P.V. \int$  – интеграл в смысле главного значения. Именно, уравнение (1.1.1) удовлетворяется полюсным анзацем

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^N \left( \frac{i}{x - q_k(t)} - \frac{i}{x - \bar{q}_k(t)} \right), \quad \text{Im}(q_k) < 0,$$

когда  $\{q_j\}$  удовлетворяют уравнениям первого порядка

$$\dot{q}_j = \sum_{k \neq j}^N \frac{i}{q_j - q_k} - \sum_{k=1}^N \frac{i}{q_j - \bar{q}_k}, \quad j = 1 \dots N. \quad (1.1.2)$$

Взяв производную по времени от (1.1.2), можно показать, что уравнения второго порядка приобретают вид уравнений движения системы Калоджеро-Мозера:

$$\ddot{q}_j = \sum_{k \neq i}^N \frac{2}{(q_j - q_k)^3}, \quad j = 1 \dots N.$$

Этот трюк был обобщен Войчеховским в [34] на преобразования Бэклунда. Позднее в работе [1, 2] это было названо самодуальной формой модели Калоджеро-Мозера, включая случаи гармонического внешнего потенциала и потенциалов другого вида [20]. С точки зрения уравнения Бенджамина-Оно (1.1.1) эти модели связаны с уравнением ILW [18, 19, 4]

$$f_t + \delta^{-1} f_x + ff_x - \nu (\mathcal{T}f)_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1.3)$$

где  $\delta$  и  $\nu$  – константы, а  $\mathcal{T}$  – тригонометрический или эллиптический аналог преобразования Гильберта  $H$ , использованного в (1.1.1). Например, в эллиптическом случае [4, 22]

$$\mathcal{T}f(x) = \frac{i}{2\pi} P.V. \int_{-1/2}^{+1/2} E_1(y-x) f(y) dy,$$

где  $E_1(z)$  – первая функция Эйзенштейна (1.1.47).

Мы рассматриваем комплексифицированные интегрируемые многочастичные системы, упомянутые выше, т.е. в нашем подходе координаты частиц являются комплексными числами. Для этой цели нам нужна комплексная версия уравнения ILW (1.1.3). Она записывается в терминах пары комплексных функций  $f^\pm(z)$  следующим образом (член  $\delta^{-1}f_x$  можно уничтожить сдвигом  $f$ ) [1, 2]:

$$f_t + ff_z + \frac{\nu}{2}\tilde{f}_{zz} = 0, \quad z \in \mathbb{C} \quad (1.1.4)$$

с  $f = f^+ - f^-$  и  $\tilde{f} = f^+ + f^-$ . Редукция к вещественному случаю (1.1.3) осуществляется с помощью формул Сохоцкого-Племеля. Многополюсной анзац для (1.1.4)

$$f^+(z,t) = \nu \sum_{k=1}^N E_1(z - q_k(t)), \quad f^-(z,t) = \nu \sum_{\gamma=1}^M E_1(z - \mu_\gamma(t)) \quad (1.1.5)$$

производит  $N + M$  уравнений первого порядка (преобразований Бэклунда для самодуальной формы модели Калоджеро-Сазерленда)

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \nu \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N E_1(q_i - q_k) - \nu \sum_{\gamma=1}^M E_1(q_i - \mu_\gamma), \quad j = 1 \dots N, \\ \dot{\mu}_\alpha &= -\nu \sum_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha}}^M E_1(\mu_\alpha - \mu_\gamma) + \nu \sum_{k=1}^N E_1(\mu_\alpha - q_k), \quad \alpha = 1 \dots M. \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

В эллиптическом случае  $N = M$ ; в тригонометрическом и рациональном случаях  $N$  и  $M$  могут быть не равны друг другу. В последних случаях  $E_1(z)$  в (1.1.6) нужно заменить на  $\coth(z)$  и  $1/z$  соответственно, см. (1.1.58).

Дифференцируя (1.1.6) по времени, после тяжелого вычисления получаем, что оба множества переменных  $q$  и  $\mu$  удовлетворяют уравнениям движения Калоджеро-Мозера:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i &= \nu^2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N E_2'(q_i - q_k), \quad j = 1 \dots N, \\ \ddot{\mu}_\alpha &= \nu^2 \sum_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha}}^M E_2'(\mu_\alpha - \mu_\gamma), \quad \alpha = 1 \dots M, \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

где  $E_2(z) = -\partial_z E_1(z)$ , см. (1.1.47), (1.1.48), (1.1.58). Вывод уравнений (1.1.5)–(1.1.7) в эллиптическом случае был дан в работе [9].

Известно, что уравнения типа (1.1.6) можно вложить в дискретную временную динамику [26, 32]. Тогда два множества переменных  $\{q_i\}$  и  $\{\mu_i\}$  связаны сдвигом дискретного времени. Уравнения движения в дискретном времени включают три множества переменных (связанных двумя последовательными сдвигами времени). Мы не используем этот подход, поскольку работаем с двумя множествами переменных.

Ниже мы описываем самодуальную форму  $gl_N$ -модели Руйсенаарса-Шнайдера [28], которая имеет следующие уравнения движения:

$$\ddot{q}_i = \sum_{k \neq i}^N \dot{q}_i \dot{q}_k (2E_1(q_{ik}) - E_1(q_{ik} + \eta) - E_1(q_{ik} - \eta)), \quad i = 1 \dots N, \quad (1.1.8)$$

где  $q_{ij} = q_i - q_j$ . Гиперболический и рациональный аналоги функции  $E_1(z) = \coth(z)$  и  $1/z$  соответственно, см. (1.1.58). Наше утверждение состоит в том, что описанная выше конструкция самодуального представления модели Калоджеро-Мозера обобщается на модель Руйсенаарса-Шнайдера.

Теорема 1.1.1. Уравнения движения (1.1.8) модели Руйсенаарса-Шнайдера следуют из  $N + M$  уравнений

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \prod_{k \neq i}^N \frac{\vartheta(q_i - q_k + \eta)}{\vartheta(q_i - q_k)} \prod_{\gamma=1}^M \frac{\vartheta(q_i - \mu_\gamma - \eta)}{\vartheta(q_i - \mu_\gamma)}, \\ \dot{\mu}_\alpha &= \prod_{\gamma \neq \alpha}^M \frac{\vartheta(\mu_\alpha - \mu_\gamma - \eta)}{\vartheta(\mu_\alpha - \mu_\gamma)} \prod_{k=1}^N \frac{\vartheta(\mu_\alpha - q_k + \eta)}{\vartheta(\mu_\alpha - q_k)}, \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

где в гиперболическом и рациональном случаях  $\vartheta(z)$  нужно заменить на  $\sinh(z)$  и  $z$  соответственно. Переменные  $\{\mu_\alpha\}$  удовлетворяют уравнениям движения  $gl_M$ -модели Руйсенаарса-Шнайдера:

$$\ddot{\mu}_\alpha = \sum_{\gamma \neq \alpha}^M \dot{\mu}_\alpha \dot{\mu}_\gamma (2E_1(\mu_{\alpha\gamma}) - E_1(\mu_{\alpha\gamma} + \eta) - E_1(\mu_{\alpha\gamma} - \eta)), \quad \alpha = 1 \dots M. \quad (1.1.10)$$

В эллиптическом случае  $N = M$ , в гиперболическом и рациональном случаях  $N$  и  $M$  произвольны.

Отметим, что уравнения (1.1.9) хорошо известны в теории временной дискретизации [27] (и/или преобразований Бэклунда [21] модели Руйсенаарса-Шнайдера). Мы даем прямое доказательство (без использования дискретной во времени динамики), как это было сделано в работе [34] для модели Калоджеро-Мозера.

Пусть для определенности  $N \geq M$ . Для модели Калоджеро-Сазерленда в работе [2] было показано, что  $M$  интегралов движения совпадают, а остальные  $N - M$  равны некоторым константам. Мы даем доказательство аналогичного результата для модели Руйсенаарса-Шнайдера, используя детерминантные тождества из работ [16, 5].

Далее, мы показываем, что уравнения (1.1.9) следуют из некоторого многополюсного анзаца для пары комплексных функций, удовлетворяющих комплексной версии уравнения ILW с дискретным лапласианом. Это уравнение было предложено в

[29, 30, 31]:

$$\partial_t \log(F^+(z) - F^-(z) + f_0) = F^+(z) + F^-(z) - F^+(z + \eta) - F^-(z - \eta).$$

Оно может быть редуцировано до следующего уравнения с единственной неизвестной вещественной функцией:

$$f_t = f \mathbf{T} f,$$

где  $f = f(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  и

$$\mathbf{T} f(x) = \frac{i}{2\pi} P.V. \int_{-1/2}^{+1/2} \left( E_1(y - x + \eta) + E_1(y - x - \eta) - 2E_1(y - x) \right) f(y) dy.$$

Необходимо отметить, что соотношение между моделями Руйсенаарса-Шнайдера (и Калоджеро-Мозера) и уравнениями ILW-Бенджамина-Оно известно [3, 15] из описания с помощью коллективной теории поля для интегрируемых систем, которое справедливо в пределе  $N \rightarrow \infty$ . Связанные с этим алгебраические структуры и возможные приложения обсуждаются в работах [9, 161, 24, 25].

### 1.1.2 Самодуальная форма моделей Руйсенаарса-Шнайдера

Мы даем доказательство теоремы 1.1.1. Начнем с эллиптического случая, т.е.  $M = N$ . Удобно работать с функцией Кронекера (1.1.46). Используя (1.1.50), перепишем (1.1.8) в виде

$$\frac{\ddot{q}_i}{\dot{q}_i} = \sum_{k \neq i}^N \dot{q}_k \left( \frac{g(\eta, q_k - q_i)}{\phi(\eta, q_k - q_i)} - \frac{g(\eta, q_i - q_k)}{\phi(\eta, q_i - q_k)} \right). \quad (1.1.11)$$

Перескалируем временную переменную:

$$t \rightarrow \frac{\vartheta'(0)^{2N-1}}{\vartheta(\eta)^{N-1} \vartheta(-\eta)^N} t. \quad (1.1.12)$$

Это не влияет на уравнения (1.1.8) или (1.1.11), поскольку они однородны по  $t$ . В то же время (1.1.9) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \prod_{k \neq i}^N \phi(\eta, q_i - q_k) \prod_{\gamma=1}^N \phi(-\eta, q_i - \mu_\gamma), \\ \dot{\mu}_\alpha &= - \prod_{\beta \neq \alpha}^N \phi(-\eta, \mu_\alpha - \mu_\beta) \prod_{j=1}^N \phi(\eta, \mu_\alpha - q_j). \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

Для доказательства теоремы нам нужно следующее тождество:

$$\sum_{i=1}^N \dot{q}_i = \sum_{i=1}^N \dot{\mu}_i, \quad (1.1.14)$$

или, эквивалентно,

$$\sum_{i=1}^N \left( \prod_{k \neq i}^N \phi(\eta, q_i - q_k) \prod_{k=1}^N \phi(-\eta, q_i - \mu_k) + \prod_{k \neq i}^N \phi(-\eta, \mu_i - \mu_k) \prod_{k=1}^N \phi(\eta, \mu_i - q_k) \right) = 0. \quad (1.1.15)$$

Это частный случай (1.1.51). Действительно, положим  $n = 2N - 1$  в (1.1.51) или, что более удобно, положим индекс суммирования (и умножения)  $i$  в (1.1.51) равным  $i = 2, \dots, 2N$ . Подставим

$$y_2 = \dots = y_N = \eta, \quad y_{N+1} = \dots = y_{2N} = -\eta, \quad \sum_{k=2}^{2N} y_k = -\eta, \\ x_2 = q_1 - q_2, \dots, x_N = q_1 - q_N, \quad x_{N+1} = q_1 - \mu_1, \dots, x_{2N} = q_1 - \mu_N.$$

Тогда получим (1.1.14) из (1.1.51) в виде  $\dot{q}_1 = -\sum_{i=2}^N \dot{q}_i + \sum_{i=1}^N \dot{\mu}_i$ . Рассмотрим производную (1.1.15) по  $q_i$ :

$$\sum_{k \neq i}^N \dot{q}_i \frac{g(\eta, q_i - q_k)}{\phi(\eta, q_i - q_k)} - \sum_{k \neq i}^N \dot{q}_k \frac{g(\eta, q_k - q_i)}{\phi(\eta, q_k - q_i)} + \sum_{k=1}^N (\dot{q}_i - \dot{\mu}_k) \frac{g(-\eta, q_i - \mu_k)}{\phi(-\eta, q_i - \mu_k)} = 0. \quad (1.1.16)$$

Теперь можно доказать теорему. Вычислим  $\ddot{q}_i$  дифференцированием верхней строчки (1.1.13) по времени. Это дает

$$\frac{\ddot{q}_i}{\dot{q}_i} = \sum_{k \neq i}^N (\dot{q}_i - \dot{q}_k) \frac{g(\eta, q_i - q_k)}{\phi(\eta, q_i - q_k)} + \sum_{k=1}^N (\dot{q}_i - \dot{\mu}_k) \frac{g(-\eta, q_i - \mu_k)}{\phi(-\eta, q_i - \mu_k)}. \quad (1.1.17)$$

Уравнения движения (1.1.11) получаются подстановкой левой части (1.1.16) из правой части (1.1.17). Уравнения (1.1.10) следуют из симметрии (1.1.9) относительно одновременной замены  $q \leftrightarrow \mu$  и  $\eta \leftrightarrow -\eta$ .

Тригонометрический и рациональный случаи получаются следующим образом. Доказательство остается в силе, поскольку функции в каждой строке в (1.1.58) удовлетворяют тем же тождествам. Так что в случае  $M = N$  утверждение доказано. В случае  $M \neq N$ , скажем,  $M < N$ , применим аргумент, названный “размерной редукцией” в [2]:  $N - M$  координат  $\mu_\alpha$ ,  $\alpha = M + 1 \dots N$  могут стремиться к бесконечности в рациональном и гиперболическом случаях, т.е. существует предел  $|\mu_\alpha| \rightarrow \infty$ ,  $\alpha = M + 1 \dots N$ , в котором (1.1.9) с  $N = M$  превращается в ту же систему уравнений с  $M < N$ .

В нерелятивистском пределе

$$\eta = \nu/c, \quad c \rightarrow \infty \quad (1.1.18)$$

уравнений Руйсенаарса-Шнайдера (1.1.8), (1.1.10) к уравнениям Калоджеро-Мозера (1.1.7) положим

$$\dot{q}_i \rightarrow c + \dot{q}_i + O(1/c), \quad \dot{\mu}_\alpha \rightarrow c + \dot{\mu}_\alpha + O(1/c), \quad (1.1.19)$$

где в правой части стоят нерелятивистские скорости. Для того, чтобы осуществить нерелятивистский предел в (1.1.13), сначала надо вернуться к (1.1.9) (с помощью обратного перескалирования временной переменной (1.1.12)) и сделать дополнительный рескейлинг  $t \rightarrow ct$  (это ведет к умножению правой части (1.1.9) на  $c$ ). Тогда предел (1.1.18), (1.1.19) уравнения (1.1.9) воспроизводит самодуальную форму эллиптической модели Калоджеро-Мозера (1.1.6).

Обсудим связь между  $\mathfrak{gl}_N$ - и  $\mathfrak{gl}_M$ -моделями Руйсенаарса-Шнайдера в переменных  $\{q\}$  (1.1.8) и  $\{\mu\}$  (1.1.10). Для этой цели введем следующую пару матриц, использованных в [16] для прямого доказательства квантово-классического соответствия между классической (рациональной) моделью Руйсенаарса-Шнайдера и обобщенной (XXX) квантовой спиновой цепочкой:

$$L_{ij} = \frac{g\eta}{q_i - q_j + \eta} \prod_{k \neq j}^N \frac{q_j - q_k + \eta}{q_j - q_k} \prod_{\gamma=1}^M \frac{q_j - \mu_\gamma - \eta}{q_j - \mu_\gamma}, \quad i, j = 1, \dots, N \quad (1.1.20)$$

и

$$\tilde{L}_{\alpha\beta} = \frac{g\eta}{\mu_\alpha - \mu_\beta + \eta} \prod_{\gamma \neq \beta}^M \frac{\mu_\beta - \mu_\gamma - \eta}{\mu_\beta - \mu_\gamma} \prod_{k=1}^N \frac{\mu_\beta - q_k + \eta}{\mu_\beta - q_k}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, M. \quad (1.1.21)$$

Для матриц (1.1.20) и (1.1.21) выполняется следующее соотношение:

$$\det_{N \times N} (L - \lambda I) = (g - \lambda)^{N-M} \det_{M \times M} (\tilde{L} - \lambda I). \quad (1.1.22)$$

Здесь  $I$  – единичная матрица. Положим  $g = 1$  и подставим произведения в (1.1.20) и (1.1.21) из (1.1.9) (в рациональном случае  $\vartheta(z)$  надо заменить на  $z$ ). Тогда  $L$  становится матрицей Лакса  $\mathfrak{gl}_N$ -модели Руйсенаарса-Шнайдера, а  $\tilde{L}$  – матрицей Лакса  $\mathfrak{gl}_M$ -модели Руйсенаарса-Шнайдера. Соотношение (1.1.22) означает, что (при  $N \geq M$ )  $M$  переменных действия (собственных значений матрицы Лакса) в обеих моделях совпадают, а оставшиеся  $N - M$  первой модели принимают вырожденные значения (они равны 1 или  $c$ , или  $\eta$  в зависимости от нормировки матрицы Лакса). Этот результат аналогичен результату, полученному в [2] в случае Калоджеро-Мозера-Сазерленда.

В тригонометрическом случае аналоги соотношений (1.1.20)–(1.1.22) были использованы в [5] для доказательства квантово-классической дуальности между классической (тригонометрической) моделью Руйсенаарса-Шнайдера и обобщенной (XXZ) квантовой спиновой цепочкой. Введем  $(N - M) \times (N - M)$  диагональную матрицу

$$S_{ij} = \delta_{ij} \exp(-(2j - 1 - (N - M))\eta), \quad i, j = 1, \dots, N - M \quad (1.1.23)$$

и пару  $N \times N$  и  $M \times M$  матриц:

$$L_{ij} = \frac{g \sinh \eta}{\sinh(q_i - q_j + \eta)} \prod_{k \neq j}^N \frac{\sinh(q_j - q_k + \eta)}{\sinh(q_j - q_k)} \prod_{\gamma=1}^M \frac{\sinh(q_j - \mu_\gamma - \eta)}{\sinh(q_j - \mu_\gamma)}, \quad i, j = 1, \dots, N \quad (1.1.24)$$

$$\tilde{L}_{\alpha\beta} = \frac{g \sinh \eta}{\sinh(\mu_\alpha - \mu_\beta + \eta)} \prod_{\gamma \neq \beta}^M \frac{\sinh(\mu_\beta - \mu_\gamma - \eta)}{\sinh(\mu_\beta - \mu_\gamma)} \prod_{k=1}^N \frac{\sinh(\mu_\beta - q_k + \eta)}{\sinh(\mu_\beta - q_k)}, \alpha, \beta = 1, \dots, M. \quad (1.1.25)$$

Тогда для (1.1.23), (1.1.24), (1.1.25) справедливо следующее тождество:

$$\det_{N \times N} (L - \lambda I) = \det_{(N-M) \times (N-M)} (gS - \lambda I) \det_{M \times M} (\tilde{L} - \lambda I).$$

Как и ранее, подставляем произведения (1.1.24), (1.1.25) из (1.1.9) (в гиперболическом случае  $\vartheta(z)$  надо заменить на  $\sinh(z)$ , см. (1.1.58)). Тогда  $L$  и  $\tilde{L}$  – матрицы Лакса  $\mathfrak{gl}_N$ - и  $\mathfrak{gl}_M$ -моделей Руйсенаарса-Шнайдера соответственно. Это означает, что  $M$  переменных действия в обеих моделях совпадают, а остальные  $N - M$  переменных первой модели имеют вырожденные значения, даваемые диагональными элементами матрицы  $S$ . Отметим, что в случае  $N = M$  аналогичный результат легко получается в контексте дискретной временной динамики [27] (он выводится непосредственно из дискретного уравнения Лакса).

### 1.1.3 Уравнение ILW и модель Руйсенаарса-Шнайдера

Здесь мы опишем конструкцию (двокопериодического) уравнения ILW с дискретным лапласианом [29] и его связь с самодуальной формой модели Руйсенаарса-Шнайдера.

#### 1.1.3.1 Уравнение ILW с дискретным лапласианом

Периодическое уравнение ILW с дискретным лапласианом предложено в работе [29]:

$$f_t = f \mathbf{T} f, \quad (1.1.26)$$

где  $f = f(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  и

$$\mathbf{T} f(x) = \frac{i}{2\pi} P.V. \int_{-1/2}^{+1/2} \left( E_1(y - x + \eta) + E_1(y - x - \eta) - 2E_1(y - x) \right) f(y) dy. \quad (1.1.27)$$

Интегральное преобразование (1.1.27) определено для периодической функции  $f(x + 1, t) = f(x, t)$  на вещественной оси, и  $0 < \text{Im}(\eta) < \text{Im}(\tau)$ . Модулярный параметр эллиптической кривой предполагается чисто мнимым:  $\text{Re}(\tau) = 0$  (и  $\text{Im}(\tau) > 0$ ). Последний член в (1.1.27) пропорционален  $\mathcal{T} = (1/2i)T$  с  $T$  даваемом (1.1.64), (1.1.65) и нормировкой вещественного полупериода  $L = 1/2$ :

$$\mathcal{T} f(x) = \frac{i}{2\pi} P.V. \int_{-1/2}^{+1/2} E_1(y - x) f(y) dy.$$



В работах [29, 30] было показано, что интегральный оператор (1.1.27)) может быть записан в следующем виде:

$$\mathbf{T}f(x) = F^+(x) + F^-(x) - F^+(x + \eta) - F^-(x - \eta). \quad (1.1.28)$$

Для того, чтобы определить  $F^\pm(x)$ , обозначим  $\check{f}(x)$  ту часть  $f(x)$ , которая имеет нулевое среднее значение, т.е.  $\check{f}(x) = f(x) - f_0$ , где  $f_0 = \int_{-1/2}^{+1/2} f(x)dx$  – нулевая Фурье-компонента, так что  $\int_{-1/2}^{+1/2} \check{f}(x)dx = 0$ . Введем также

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1/2}^{+1/2} E_1(y - z) \check{f}(y) dy, \quad 0 < \text{Im}(z) < \text{Im}(\tau).$$

Эта функция периодична,  $F(z) = F(z + 1)$ , голоморфна в полосе  $0 < \text{Im}(z) < \text{Im}(\tau)$  и непрерывна вплоть до ее границы. Ее можно продолжить с периодом  $\tau$  до кусочно-аналитической функции (скачки  $F(z)$  имеют место на линиях  $\text{Im}(z) = k, \text{Im}(\tau), k \in \mathbb{Z}$ .) на  $\mathbb{C}$  благодаря свойствам (1.1.49) и нулевому среднему  $\check{f}(x)$  (см. [22]). Тогда для

$$\begin{aligned} F^+(x) &= \lim_{z \rightarrow x+i0} F(z), \\ F^-(x) &= \lim_{z \rightarrow x-i0} F(z + \tau) \end{aligned} \quad (1.1.29)$$

( $x \in \mathbb{R}$ ) имеем, благодаря формулам Сохоцкого-Племеля:

$$F^+(x) - F^-(x) = \check{f}(x) \quad (1.1.30)$$

и

$$F^+(x) + F^-(x) = 2 \frac{1}{2\pi i} P.V. \int_{-1/2}^{+1/2} E_1(y - x) \check{f}(y) dy = -2 \mathcal{T} \check{f}(x) = -2 \mathcal{T}[F^+ - F^-](x). \quad (1.1.31)$$

Подводя итог, можно сказать, что функция  $f(x)$  из (1.1.26) представляется как  $f(x) = F^+(x) - F^-(x) + f_0$  с (1.1.29), а уравнение (1.1.26) эквивалентно уравнению

$$\partial_t \log(F^+(x) - F^-(x) + f_0) = F^+(x) + F^-(x) - F^+(x + \eta) - F^-(x - \eta), \quad (1.1.32)$$

где  $f_0 = \int_{-1/2}^{+1/2} f(x)dx$ . Функции  $F^\pm(x \pm \eta)$  являются аналитическими продолжениями  $F^\pm(x)$  (1.1.29).

Предел в уравнение ILW осуществляется следующим образом. Рассмотрим  $\mathbf{T}$  в пределе  $\eta \rightarrow 0$ . Из (1.1.28) и (1.1.30), (1.1.31) имеем

$$\mathbf{T}f(x) = -\eta(F_x^+ - F_x^-) - \frac{\eta^2}{2}(F_{xx}^+ + F_{xx}^-) + O(\eta^3) = -\eta f_x + \eta^2 \mathcal{T} f_{xx} + O(\eta^3). \quad (1.1.33)$$

Сделаем подстановку [29]:  $f(x, t) = \nu + \eta u(y, t) + O(\eta^2)$  с  $y = x - ct$ , где  $\nu$  и  $c$  – некоторые константы. Тогда (1.1.26) с (1.1.33) дает

$$\eta u_t - \eta c u_y = -\eta^2 \nu u_y + \eta^3 \nu \mathcal{T} u_{yy} - \eta^3 \nu u_y + O(\eta^4).$$

Выберем  $c = \nu\eta + a\eta^2 + O(\eta^3)$  с константой  $a$  и перескалируем  $t \rightarrow \tilde{t} = t/\eta^2$ . Тогда в пределе  $\eta \rightarrow 0$  получим

$$u_{\tilde{t}} = au_y - uu_y + \nu\mathcal{T}u_{yy}. \quad (1.1.34)$$

Это и есть уравнение (1.1.3).

### 1.1.3.2 Модели Руйсенаарса-Шнайдера и дискретное уравнение ILW

Рассмотрим комплексифицированную версию (1.1.32) с комплексной переменной  $x$ . В работе [1] самодуальная форма модели Калоджеро-Сазерленда была получена путем перехода от уравнения (1.1.34) к следующему:

$$u_t = -uu_z - \frac{\nu}{2}\tilde{u}_{zz}, \quad (1.1.35)$$

написанному для пары независимых комплексных функций  $u = u^+ - u^-$  и  $\tilde{u} = u^+ + u^-$ . Оно было названо бинаправленным уравнением Бенджамина-Оно. Соотношение типа (1.1.30) было интерпретировано как дополнительная редукция. Аналогичным образом, самодуальная форма эллиптической модели Калоджеро-Мозера была описана с помощью комплексифицированной версии периодического уравнения ILW [9].

Для того, чтобы перейти к самодуальной форме модели Руйсенаарса-Шнайдера (1.1.13), нужно изучить уравнение (1.1.26) с оператором  $\mathbf{T}$  даваемом (1.1.28):

$$\partial_t \log(F^+(z) - F^-(z) + f_0) = F^+(z) + F^-(z) - F^+(z + \eta) - F^-(z - \eta). \quad (1.1.36)$$

Уравнение (1.1.36) обобщает (1.1.32) в том же смысле, как (1.1.35) обобщает (1.1.34) ( $a = 0$ ). В дальнейшем мы работаем с (1.1.36). Оно записывается для двух независимых комплексных функций  $F^+(z)$ ,  $F^-(z)$  ( $f_0$  – константа). Мы покажем, что естественный многополюсный анзац дает модель Руйсенаарса-Шнайдера (необходимо отметить, что форма (1.1.36) аналогична полудискретной версии уравнения КП [26], но с другим смыслом переменных). Введем

$$f(z) = \prod_{i=1}^N \phi(\eta, z - q_i) \prod_{\gamma=1}^N \phi(-\eta, z - \mu_\gamma). \quad (1.1.37)$$

Функция  $\phi(\eta, z)$  имеет простой полюс при  $z = 0$  с вычетом 1. Следовательно,  $f(z)$  имеет  $2N$  простых полюсов в точках  $\{q_i, i = 1 \dots N\}$  и  $\{\mu_\alpha, \alpha = 1 \dots N\}$ . Вычеты равны

$$\operatorname{Res}_{z=q_i} f(z) = \prod_{k \neq i}^N \phi(\eta, q_i - q_k) \prod_{\gamma=1}^N \phi(-\eta, q_i - \mu_\gamma) \quad (1.1.38)$$

и

$$\operatorname{Res}_{z=\mu_\alpha} f(z) = \prod_{\beta \neq \alpha}^N \phi(-\eta, \mu_\alpha - \mu_\beta) \prod_{j=1}^N \phi(\eta, \mu_\alpha - q_j). \quad (1.1.39)$$

В качестве побочного продукта получаем альтернативное доказательство формулы (1.1.14): заметим, что  $f(z)$  двойкопериодична по  $z$  благодаря (1.1.49) (здесь необходимо условие  $M = N$ ). Следовательно, сумма вычетов равна нулю.

Благодаря структуре полюсов двойкопериодической функции  $f(z)$  (1.1.37) можно представить также как

$$f(z) = f_0 + \sum_{k=1}^N E_1(z - q_k) \operatorname{Res}_{z=q_i} f(z) + \sum_{\gamma=1}^N E_1(z - \mu_\gamma) \operatorname{Res}_{z=\mu_\gamma} f(z)$$

с некоторой константой  $f_0$ . Обозначим

$$F^+(z) = \sum_{k=1}^N E_1(z - q_k) \operatorname{Res}_{z=q_i} f(z) \quad (1.1.40)$$

и

$$F^-(z) = - \sum_{\gamma=1}^N E_1(z - \mu_\gamma) \operatorname{Res}_{z=\mu_\gamma} f(z). \quad (1.1.41)$$

Предложение 1.1.1. Функция (1.1.37)  $f(z) = F^+(z) - F^-(z) + f_0$  с определениями (1.1.40), (1.1.41) удовлетворяет (1.1.36) и дает уравнения движения моделей Руйсенаарса-Шнайдера (1.1.13).

Для доказательства продифференцируем  $f(z)$  (1.1.37) по  $t$  и, используя (1.1.50), получим

$$\frac{\partial_t f(z)}{f(z)} = - \sum_{i=1}^N \left( \dot{q}_i (E_1(z - q_i + \eta) - E_1(z - q_i)) + \dot{\mu}_i (E_1(z - \mu_i - \eta) - E_1(z - \mu_i)) \right). \quad (1.1.42)$$

В правой части (1.1.36) с  $F^\pm(z)$  даваемыми (1.1.40), (1.1.41) имеем

$$\begin{aligned} & F^+(z) - F^+(z + \eta) + F^-(z) - F^-(z - \eta) \\ &= \sum_{i=1}^N \left( - (E_1(z - q_i + \eta) - E_1(z - q_i)) \operatorname{Res}_{z=q_i} f(z) + (E_1(z - \mu_i - \eta) - E_1(z - \mu_i)) \operatorname{Res}_{z=\mu_i} f(z) \right). \end{aligned} \quad (1.1.43)$$

Сравнивая (1.1.42) и (1.1.43), получаем:

$$\operatorname{Res}_{z=q_i} f(z) = \dot{q}_i,$$

$$\operatorname{Res}_{z=\mu_\alpha} f(z) = -\dot{\mu}_\alpha.$$

Вместе с (1.1.38), (1.1.39) это уравнения (1.1.13).

Заметим, что временная переменная в (1.1.36)) перескалирована согласно (1.1.12). Можно также рассмотреть анзац (1.1.37) в несколько иной форме:

$$\tilde{f}(z) = \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(\eta)} \prod_{i=1}^N \frac{\vartheta(z - q_k + \eta)}{\vartheta(z - q_k)} \prod_{\gamma=1}^N \frac{\vartheta(z - \mu_\gamma - \eta)}{\vartheta(z - \mu_\gamma)}. \quad (1.1.44)$$

В этом случае

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}_0 + \sum_{k=1}^N E_1(z - q_k) \operatorname{Res}_{z=q_k} \tilde{f}(z) - \sum_{\gamma=1}^N E_1(z - \mu_\gamma) \operatorname{Res}_{z=\mu_\gamma} \tilde{f}(z)$$

и

$$\tilde{F}^+(z) = \sum_{k=1}^N E_1(z - q_k) \operatorname{Res}_{z=q_k} \tilde{f}(z), \quad \tilde{F}^-(z) = \sum_{\gamma=1}^N E_1(z - \mu_\gamma) \operatorname{Res}_{z=\mu_\gamma} \tilde{f}(z).$$

Анзац (1.1.44) приводит к уравнениям (1.1.9), и дополнительное перескалирование временной переменной не нужно.

#### 1.1.4 Приложение А: эллиптические функции

Мы используем нечетную тета-функцию с модулярным параметром  $\tau$ ,  $\operatorname{Im}(\tau) > 0$  [17, 33]:

$$\vartheta(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp\left(\pi i \tau \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\pi i \left(z + \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{2}\right)\right), \quad (1.1.45)$$

функцию Кронекера

$$\phi(\eta, z) = \frac{\vartheta'(0)\vartheta(\eta + z)}{\vartheta(\eta)\vartheta(z)} = \phi(z, \eta) \quad (1.1.46)$$

и функцию Эйзенштейна

$$E_1(z) = \vartheta'(z)/\vartheta(z), \quad E_2(z) = -\partial_z E_1(z). \quad (1.1.47)$$

Функции Эйзенштейна просто связаны с функциями Вейерштрасса:

$$\zeta(z) = E_1(z) - \frac{z \vartheta'''(0)}{3 \vartheta'(0)}, \quad \wp(z) = E_2(z) + \frac{1}{3} \frac{\vartheta'''(0)}{\vartheta'(0)}. \quad (1.1.48)$$

Поведение при сдвигах на периоды  $\Gamma = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$  следующее:

$$\vartheta(z + 1) = -\vartheta(z), \quad \vartheta(z + \tau) = -\exp(-\pi i \tau - 2\pi i z) \vartheta(z),$$

$$E_1(z + 1) = E_1(z), \quad E_1(z + \tau) = E_1(z) - 2\pi i, \quad (1.1.49)$$

$$E_2(z + 1) = E_2(z), \quad E_2(z + \tau) = E_2(z),$$

$$\phi(z + 1, u) = \phi(z, u), \quad \phi(z + \tau, u) = \exp(-2\pi i u) \phi(z, u).$$

Производная функции Кронекера по второму аргументу:

$$g(z,u) = \partial_u \phi(z,u) = \phi(z,u)(E_1(z+u) - E_1(u)). \quad (1.1.50)$$

Тождество Фэя для рода 1:

$$\phi(z,q)\phi(w,u) = \phi(z-w,q)\phi(w,q+u) + \phi(w-z,u)\phi(z,q+u).$$

Справедливы также аналогичные тождества высших порядков (порядка  $n$ ):

$$\prod_{i=1}^n \phi(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n \phi\left(x_i, \sum_{k=1}^n y_k\right) \prod_{j \neq i}^n \phi(x_j - x_i, y_j). \quad (1.1.51)$$

Доказательство осуществляется индукцией по  $n$ . Предположим, что (1.1.51) верно. Мы должны доказать, что

$$\prod_{i=1}^{n+1} \phi(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \phi\left(x_i, \sum_{k=1}^{n+1} y_k\right) \prod_{j \neq i}^{n+1} \phi(x_j - x_i, y_j). \quad (1.1.52)$$

В левой части имеем

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n+1} \phi(x_i, y_i) &= \sum_{i=1}^n \phi(x_{n+1}, y_{n+1}) \phi\left(x_i, \sum_{k=1}^n y_k\right) \prod_{j \neq i}^n \phi(x_j - x_i, y_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \phi(x_{n+1} - x_i, y_{n+1}) \phi\left(x_i, \sum_{k=1}^{n+1} y_k\right) \prod_{j \neq i}^n \phi(x_j - x_i, y_j) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \phi\left(x_i - x_{n+1}, \sum_{k=1}^n y_k\right) \phi\left(x_{n+1}, \sum_{k=1}^{n+1} y_k\right) \prod_{j \neq i}^n \phi(x_j - x_i, y_j). \end{aligned} \quad (1.1.53)$$

Рассмотрим правую часть (1.1.52). Выпишем первые  $n$  членов суммы отдельно:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n+1} \phi\left(x_i, \sum_{k=1}^{n+1} y_k\right) \prod_{j \neq i}^{n+1} \phi(x_j - x_i, y_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \phi\left(x_i, \sum_{k=1}^{n+1} y_k\right) \prod_{j \neq i}^{n+1} \phi(x_j - x_i, y_j) + \phi\left(x_{n+1}, \sum_{k=1}^{n+1} y_k\right) \prod_{j=1}^n \phi(x_j - x_{n+1}, y_j) \end{aligned} \quad (1.1.54)$$

Первые члены в (1.1.53) и (1.1.54) одинаковы. Следовательно, мы должны доказать, что вторые члены также совпадают, т.е.

$$\sum_{i=1}^n \phi\left(x_i - x_{n+1}, \sum_{k=1}^n y_k\right) \phi\left(x_{n+1}, \sum_{k=1}^{n+1} y_k\right) \prod_{j \neq i}^n \phi(x_j - x_i, y_j) = \phi\left(x_{n+1}, \sum_{k=1}^{n+1} y_k\right) \prod_{j=1}^n \phi(x_j - x_{n+1}, y_j).$$

После сокращения общего множителя  $\phi\left(x_{n+1}, \sum_{k=1}^{n+1} y_k\right)$  получаем (1.1.51) с  $x_i \rightarrow x_i - x_{n+1}$ .

Первая функция Эйзенштейна  $E_1(z)$  допускает следующее представление в виде ряда:

$$E_1(z|\tau) = \pi \cot(\pi z) + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{q}^{2n}}{1 - \mathbf{q}^{2n}} \sin(2\pi n z), \quad \mathbf{q} = \exp(\pi i \tau) \quad (1.1.55)$$

(здесь  $-\text{Im}(\tau) < \text{Im}(z) < \text{Im}(\tau)$ ). Первый член в (1.1.55), рассматриваемый как обобщенная функция, может быть представлен как

$$\frac{1}{2} \cot\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx).$$

Тогда (1.1.55) приобретает вид

$$E_1(z|\tau) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \mathbf{q}^{2n}}{1 - \mathbf{q}^{2n}} \sin(2\pi n z) = -i\pi \sum_{n \neq 0} \frac{1 + \mathbf{q}^{2n}}{1 - \mathbf{q}^{2n}} e^{2\pi i n z}. \quad (1.1.56)$$

Нам также нужно следующее модулярное преобразование:

$$E_1(z|\tau) = \frac{1}{\tau} E_1\left(\frac{z}{\tau} \mid -\frac{1}{\tau}\right) - 2\pi i \frac{z}{\tau}. \quad (1.1.57)$$

Рациональный и гиперболический аналоги функций (1.1.45)–(1.1.47) следующие:

	$\vartheta(z)$	$\phi(z, \eta)$	$E_1(z)$	$E_2(z)$	
rational :	$z$	$\frac{1}{z} + \frac{1}{\eta}$	$\frac{1}{z}$	$\frac{1}{z^2}$	(1.1.58)
hyperbolic :	$\sinh(z)$	$\coth(z) + \coth(\eta)$	$\coth(z)$	$\sinh^{-2}(z)$	

Они удовлетворяют свойствам (1.1.50)–(1.1.51).

### 1.1.5 Приложение Б: уравнения Бенджамина-Оно и ILW

1. Рациональный случай. Обозначим через  $Hf$  преобразование Гильберта функции  $f$ :

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x - y} dy.$$

Уравнение Бенджамина-Оно [7] выглядит следующим образом:

$$f_t + 2ff_x - (Hf)_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.1.59)$$

2. Тригонометрический случай. Периодическое уравнение Бенджамина-Оно [19] выглядит следующим образом:

$$f_t + 2ff_x + (Tf)_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

с интегральным преобразованием

$$Tf(x) = -\frac{1}{2L} P.V. \int_{-L}^L \cot\left(\frac{\pi}{2L}(x-y)\right) f(y) dy. \quad (1.1.60)$$

Если  $L \rightarrow \infty$ , воспроизводится (1.1.59) .

3. Гиперболический случай. Уравнение ILW [18, 19]

$$f_t + \delta^{-1} f_x + 2f f_x + (Tf)_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \delta > 0 \quad (1.1.61)$$

с

$$Tf(x) = -\frac{1}{2\delta} P.V. \int_{\mathbb{R}} \coth\left(\frac{\pi}{2\delta}(x-y)\right) f(y) dy \quad (1.1.62)$$

опять воспроизводит (1.1.59) в пределе глубокой воды  $\delta \rightarrow \infty$ . В то же время в пределе  $\delta \rightarrow 0$  (1.1.61), (1.1.62) сводится к уравнению КдФ  $f_t + 2f f_x + (\delta/3) f_{xxx} + O(\delta^3) = 0$  в силу

$$[T + \delta^{-1} \partial_x^{-1}] f(x) = -\frac{1}{2\delta} P.V. \int_{\mathbb{R}} \left( \coth\left(\frac{\pi}{2\delta}(x-y)\right) - \operatorname{sgn}(x-y) \right) f(y) dy = \frac{\delta}{3} f_x + O(\delta^3). \quad (1.1.63)$$

4. Эллиптический случай. Двойкопериодическое уравнение ILW [4] (см. также [22]) – это (1.1.61), где интегральное ядро определено через первую функцию Эйзенштейна (1.1.47):

$$Tf(x) = \frac{1}{2L} P.V. \int_{-L}^L \tilde{T}(x-y, \delta, L) f(y) dy \quad (1.1.64)$$

и

$$\tilde{T}(x, \delta, L) = -\frac{1}{\pi} E_1\left(\frac{x}{2L} \mid \tau\right), \quad \tau = i \frac{\delta}{L}. \quad (1.1.65)$$

Подставив  $z = x/(2L)$  и  $\mathbf{q} = e^{-\pi\delta/L}$  в (1.1.56), получим

$$\tilde{T}(x, \delta, L) = -2 \sum_{n>0} \frac{e^{2\pi n\delta/L} + 1}{e^{2\pi n\delta/L} - 1} \sin \frac{\pi n x}{L} = i \sum_{n \neq 0} \coth \frac{\pi n \delta}{L} \exp \frac{\pi i n x}{L}. \quad (1.1.66)$$

Пусть  $f(x)$  –  $2L$ -периодическая функция,  $f(x+2L, t) = f(x, t)$ . Подстановка ее ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \exp \frac{\pi i k x}{L}, \quad \hat{f}_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \exp\left(-\frac{\pi i k x}{L}\right) dx \quad (1.1.67)$$

в (1.1.64) с  $\tilde{T}$  как в (1.1.66) дает

$$Tf(x) = i \sum_{n \neq 0} \coth\left(\frac{\pi n \delta}{L}\right) \hat{f}_n \exp\left(\frac{\pi i n x}{L}\right). \quad (1.1.68)$$

Рассмотрим несколько предельных случаев:

(а) Тригонометрический предел (1.1.60) достигается, когда  $L$  фиксировано и  $\delta \rightarrow \infty$ . Действительно, для (1.1.65) получаем  $\tilde{T}(x, \infty, L) = -\cot(\frac{x\pi}{2L})$  из (1.1.55), т.к.  $\mathbf{q} \rightarrow 0$ .

(б) Гиперболический предел (1.1.62):  $\delta$  фиксировано и  $L \rightarrow \infty$ . В этом случае  $\mathbf{q} \rightarrow 1$  и нельзя пользоваться (1.1.55) непосредственно. Вначале надо выполнить модулярное преобразование (1.1.57). Это дает

$$\frac{1}{2L}\tilde{T}(x, \delta, L) = -\frac{1}{2\pi L} E_1\left(\frac{x}{2L} \mid i \frac{\delta}{L}\right) = -\frac{1}{2\pi i \delta} E_1\left(\frac{x}{2i\delta} \mid i \frac{L}{\delta}\right) + \frac{x}{2\delta L}.$$

Теперь  $\mathbf{q}' = \exp(-\pi L/\delta) \rightarrow 0$  (если  $L \rightarrow \infty$ ) и можно использовать (1.1.55):

$$\left(\frac{1}{2L}\tilde{T}\right)(x, \delta, \infty) = -\frac{i}{2\delta} \cot\left(\frac{i\pi x}{2\delta}\right) = -\frac{1}{2\delta} \coth\left(\frac{\pi x}{2\delta}\right).$$

(с) Предел в уравнение КдФ осуществляется аналогично (1.1.63):  $L$  фиксировано и  $\delta \rightarrow 0$ . Рассмотрим (1.1.68) и используем разложение в ряд Лорана  $\coth(z) = 1/z + z/3 + O(z^3)$ . Тогда легко видеть, что  $(Tf)_{xx} = -\delta^{-1}f_x + (\delta/3)f_{xxx} + O(\delta^3)$ .

Не является совпадением тот факт, что предел в уравнение КдФ из эллиптического случая очень похож на предел из гиперболического случая (1.1.63). Преобразования (1.1.62) и (1.1.64), (1.1.65) идентичны для  $2L$ -периодических функций, поскольку  $E_1(z)$  есть усреднение функции  $\coth(z)$  по одномерной решетке. Тот же ответ (1.1.68) может быть получен из (1.1.62). Чтобы это увидеть, возьмем  $f(x) = f(x + 2L)$  и  $\hat{f}_0 = 0$  (нулевое среднее значение). Перепишем (1.1.62) в терминах преобразования Фурье  $\hat{f}(\omega) = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx$ :

$$Tf(x) = i \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \hat{T}(\omega) \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad \hat{T}(\omega) = \coth(\omega\delta). \quad (1.1.69)$$

Из периодичности  $f(x)$  следует, что представление Фурье (1.1.67), и, следовательно,  $\hat{f}(\omega)$  есть сумма дельта-функций:  $\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n \delta(n\pi/L - \omega)$ . Подставив это в (1.1.69), получим (1.1.68) (член  $n = 0$  исключается, поскольку  $\hat{f}_0 = 0$ ). То есть для периодических функций преобразования (1.1.62) и (1.1.64), (1.1.65) идентичны.



## 1.2 Квази-компактные расслоения Хиггса и системы Калоджеро-Сазерленда с двумя типами спинов

### 1.2.1 Описание систем

Цель проведенной работы [46] – описание квази-компактной структуры в расслоениях Хиггса и построение соответствующих интегрируемых систем типа Хитчина [43]. В качестве примера получены спиновые системы Калоджеро-Сазерленда и их обобщения, связанные с простыми алгебрами Ли. Ранее эти системы были описаны Фехером и Пуцтаем [38, 70], а также для случая  $SL(N, \mathbb{C})$  в [45]. Системы описываются в терминах расслоений Хиггса с квази-параболической структурой [47, 52] на сингулярной кривой [48, 54]. Основным отличием рассматриваемых случаев от моделей Калоджеро-Сазерленда является наличие специальной вещественной инволюции на пространстве модулей расслоений Хиггса, известных своими приложениями к классическим [35], а иногда и квантовым [49, 50] системам Хитчина. В итоге получен класс вещественных интегрируемых систем.

Модель Калоджеро-Сазерленда [37, 53] описывает одномерную систему попарно взаимодействующих частиц с дальнодействием. Мы имеем дело с классическими моделями, которые интегрируемы в смысле теоремы Лиувилля. Также интегрируемыми являются и их спиновые обобщения [41, 55]. Они допускают форму записи в виде волчка Эйлера-Арнольда на группе  $SL(N, \mathbb{C})$  с тензором инерции, зависящим от расстояния между частицами.

Исходно система Калоджеро-Сазерленда связана с группой Ли  $SL(N, \mathbb{C})$ , и может быть обобщена на произвольную простую комплексную алгебру Ли  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  следующим образом [51]. Пусть  $R$  – соответствующая система корней, а  $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$  – подалгебра Картана алгебры Ли  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ . Обозначим координаты частиц

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^l u_i e_i \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}},$$

где  $(e_1, \dots, e_l)$  – канонический базис в  $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$  и  $\mathbf{v}$  – вектор из импульсов. Пусть  $\mathbf{S} \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  – элемент орбиты коприсоединенного действия группы  $G^{\mathbb{C}}$  в  $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^* \sim \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ . Координаты  $S_{\alpha}$  на  $\mathbf{S}$  в корневом базисе  $E_{\alpha}$ ,  $(\alpha \in R)$  называются спиновыми переменными. Гамильтониан спиновой системы Калоджеро-Сазерленда, связанный с  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ , имеет вид:

$$H^{CS} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \sum_{\alpha \in R} \frac{1}{(\alpha, \alpha)} \frac{S_{\alpha} S_{-\alpha}}{\sinh^2(\mathbf{u}_{\alpha})}. \quad (1.2.1)$$

Пуассонова структура на  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}$  задана скобками Дарбу, а для  $\{S_{\alpha}, S_{\beta}\}$  получается из скобок Пуассона-Ли на коалгебре Ли  $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*$  гамильтоновой редукцией по коприсоеди-

ненному действию подгруппой Картана из  $G^{\mathbb{C}}$  на спиновые переменные. В то же время для  $\mathbf{S} \in \mathfrak{so}(N)$  дополнительная редукция не нужна [36]. В нашей предыдущей работе [45] мы уже описали  $\mathfrak{so}(N)$  модель с двумя типами спинов. Здесь мы используем схожий подход для произвольной группы  $G^{\mathbb{C}}$ .

Обобщение (1.2.1) устроено следующим образом. Пусть  $G^{\mathbb{R}}$  – нормальная вещественная форма группы  $G^{\mathbb{C}}$ . Она существует для произвольной комплексной группы Ли. Рассмотрим максимальную компактную подгруппу  $K \subset G^{\mathbb{C}}$ . Тогда (другая) максимально компактная подгруппа  $U \subset G^{\mathbb{R}}$  – есть пересечение  $K \cap G^{\mathbb{R}}$ . Например, если  $G^{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(N, \mathbb{C})$ , то

$$G^{\mathbb{R}} = \mathrm{SL}(N, \mathbb{R}), \quad K = \mathrm{SU}(N), \quad U = \mathrm{SO}(N).$$

Пусть  $E_{\alpha}$  – корневой базис в алгебре Ли  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ . Алгебра Ли  $\mathfrak{u} = \mathrm{Lie}(U)$  обладает базисом  $E_{\alpha} - E_{-\alpha}$ , где  $\alpha \in R^+$  – положительные корни. Определим два типа спиновых переменных  $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathfrak{u}$

$$\mathbf{S} = \sum_{\alpha \in R^+} S_{\alpha}(E_{\alpha} - E_{-\alpha}), \quad \mathbf{T} = \sum_{\alpha \in R^+} T_{\alpha}(E_{\alpha} - E_{-\alpha}), \quad S_{\alpha}, T_{\alpha} \in \mathbb{R}$$

принадлежащих одной и той же коприсоединенной орбите  $\mathcal{O} \subset \mathfrak{u}^*$ . Тогда гамильтониан принимает вид [38]:

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \sum_{\alpha \in R^+} \frac{2}{(\alpha, \alpha)} \frac{S_{\alpha}^2 + T_{\alpha}^2 - 2S_{\alpha}T_{\alpha} \cosh(\mathbf{u}_{\alpha})}{\sinh^2(\mathbf{u}_{\alpha})}, \quad (1.2.2)$$

где  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}$  – вещественные, а  $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$  – подалгебра Картана в  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ . В отличие от спиновой системы Калоджеро-Сазерленда скобки Пуассона на спиновые переменные в нашей модели такие же, как и исходные скобки Пуассона-Ли без каких-либо дополнительных связей:

$$\begin{aligned} \{T_{\alpha}, T_{\beta}\} &= N_{\alpha, \beta} T_{\alpha + \beta} - N_{\alpha, -\beta} T_{\alpha - \beta}, \\ \{S_{\alpha}, S_{\beta}\} &= -N_{\alpha, \beta} S_{\alpha + \beta} + N_{\alpha, -\beta} S_{\alpha - \beta}, \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

$$\{T_{\alpha}, S_{\beta}\} = 0$$

со структурными константами  $N_{\alpha, \beta}$

$$N_{\alpha, \beta} = -C_{\alpha, \beta} \kappa_{\alpha, \beta}, \quad \kappa_{\alpha, \beta} = \frac{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)}{4(\gamma, \gamma)}, \quad \gamma = \alpha + \beta \in R.$$

Уравнения движения генерируются каноническими скобками

$$\{v_j, \mathbf{u}_{\alpha}\} = \alpha(j) \equiv \alpha(e_j)$$

и(1.2.2), (1.2.3):

$$\dot{S}_\alpha = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C_{\beta\gamma} S_\beta \frac{S_\gamma - T_\gamma \cosh(\mathbf{u}_\gamma)}{\sinh^2(\mathbf{u}_\gamma)}, \quad \dot{T}_\alpha = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C_{\beta\gamma} T_\beta \frac{S_\gamma \cosh(\mathbf{u}_\gamma) - T_\gamma}{\sinh^2(\mathbf{u}_\gamma)}, \quad (1.2.4)$$

$$\dot{v}_j = \sum_{\gamma \in R^+} \frac{4\gamma(j)}{(\gamma, \gamma)} \left( (S_\gamma^2 + T_\gamma^2) \frac{\cosh(\mathbf{u}_\gamma)}{\sinh^3(\mathbf{u}_\gamma)} - S_\gamma T_\gamma \frac{1 + \cosh^2(\mathbf{u}_\gamma)}{\sinh^3(\mathbf{u}_\gamma)} \right). \quad (1.2.5)$$

Тем самым гамильтониан (1.2.2) описывает частицы с вещественными координатами  $\mathbf{u}$  и вещественными импульсами  $\mathbf{v}$ , а также пару волчков на компактной группе  $U$ , у которых тензор инерции и потенциал взаимодействия между ними зависит от координат частиц на  $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ . Для группы Ли  $SL(N, \mathbb{C})$  эти волчки определены на  $U = SO(N)$ .

Для  $N = 2$  алгебра  $\mathfrak{so}(2)$  коммутативна и спиновые степени свободы можно зафиксировать. В этом случае из (1.2.2) получим следующий гамильтониан с двумя константами:

$$H = \frac{v^2}{2} + \frac{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \cosh(2u)}{\sinh^2(2u)}.$$

Он воспроизводит модель Калоджеро-Сазерленда типа  $BC_1$  type [51]. Из дальнейшего будет видно, что гамильтониан (1.2.2) является первым нетривиальным в семействе коммутирующих, вещественных и независимых интегралов движения. Иерархия происходит из оператора Лакса. В базисе Шевалле алгебры  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$  он имеет вид:

$$L(x) = \sum_j v_j e_j + \sum_{\beta \in R} \frac{T_\beta \exp(-\mathbf{u}_\beta) - S_\beta}{\sinh(\mathbf{u}_\beta)} E_\beta.$$

Уравнения движения (1.2.4), (1.2.5) эквивалентны уравнениям Лакса

$$\dot{L}(x) = [L(x), M]$$

с  $M$ -оператором

$$M = \sum_{\beta \in R} \frac{S_\beta \cosh(\mathbf{u}_\beta) - T_\beta}{\sinh^2(\mathbf{u}_\beta)} E_\beta.$$

Для описания системы и вывода оператора Лакса мы используем симплектическую редукцию, стартуя с трех симплектических конечномерных пространств. Соответствующие конструкции мы называем Моделью I, Моделью II и Моделью III. В буквальном смысле уравнения (1.2.4), (1.2.5) и лаксов оператор отвечают Модели I и Модели II. Для сравнения с Моделью III получены замены переменных. В то время как спиновые переменные в Моделях I и II являются элементами орбиты коприсоединенного действия компактной подгруппы  $U$  ( $U = G^{\mathbb{R}} \cap K$ ), в Модели III они представляют собой элементы кокасательного расслоения  $T^*(\mathcal{X}^{\mathbb{R}})$  к симметрическому пространству  $\mathcal{X}^{\mathbb{R}} = G^{\mathbb{R}}/U$ .

## 1.2.2 Квази-компактные расслоения Хиггса

Для того, чтобы построить полное семейство интегралов движения, определим пару Лакса со спектральным параметром  $x \in \mathbb{R}$ . Например, оператор Лакса модели I имеет вид:

$$L(x) = \sum_j v_j e_j + \sum_{\beta \in R} \left( \frac{T_\beta \exp(-\mathbf{u}_\beta) - S_\beta}{\sinh(\mathbf{u}_\beta)} + (1 + \coth(x)) T_\beta \right) E_\beta. \quad (1.2.6)$$

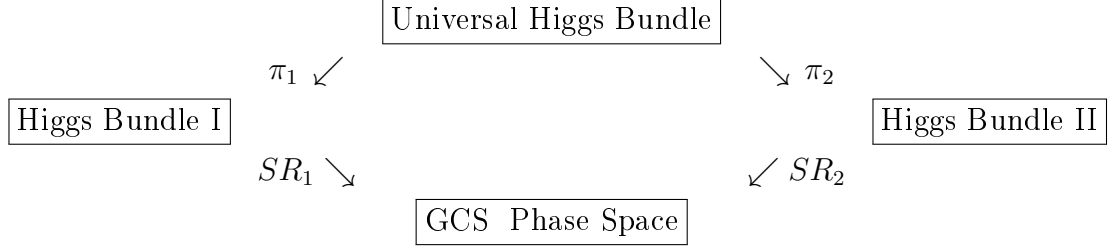
Оператор Лакса играет роль поля Хиггса в подходе Хитчина к интегрируемым системам [43]. Для построения матрицы Лакса (1.2.6) рассмотрим  $G^{\mathbb{C}}$ -расслоение Хиггса на сингулярной кривой как в [48, 54]. Для описания указанных выше систем снабдим расслоения Хиггса так называемой квази-компактной структурой. Это означает, что калибровочная группа в отмеченных точках на базовой спектральной кривой редуцируется к максимальной компактной подгруппе  $K$ . В стандартном подходе к системам Хитчина калибровочная группа может иметь квази-параболическую структуру, т.е. в отмеченных точках она редуцируется к параболическим подгруппам. В этом случае пространство модулей расслоений Хиггса  $\mathcal{M}(G^{\mathbb{C}})$  представляет собой фазовое пространство комплексной интегрируемой системы [43].

В нашем случае часть координат в локальном описании расслоений Хиггса вещественны. Как отмечалось выше, в этом случае описание гамильтоновой системы затруднительно. Поэтому для перехода к вещественной гамильтоновой системе мы рассмотрим вещественную инволюцию на пространстве модулей расслоений Хиггса, как это было определено в [35]. Тогда множество неподвижных точек инволюции и есть вещественная вполне интегрируемая система, если доказать, (что и сделано) что число интегралов движения равно половине размерности пространства модулей. Тем самым мы разрушаем комплексную структуру в два этапа. Сначала локально, вводя квази-компактную структуру. А затем глобально, переходя к вещественной инволюции.

Прежде чем использовать вещественную инволюцию определим пространство модулей расслоений Хиггса  $\mathcal{M}_A(G^{\mathbb{C}})$  Моделей ( $A = I, II, III$ ), определяющей их фазовые пространства. Расслоение Хиггса Модели I определено над кривой  $\Sigma^I$ , представляющей собой нормализацию двух рациональных кривых, склеенных в двух точках. В результате симплектической редукции по группе автоморфизмов расслоений (т.е. по калибровочной группе) получим пространство модулей  $\mathcal{M}_I(G^{\mathbb{C}})$ . Для Модели II и III базовой кривой является единственная рациональная кривая, склеенная в паре точек. Такая же сингулярная кривая используется для описания системы Калоджеро-Сазерленда. Мы доказываем, что пространства модулей расслоений  $\mathcal{M}_A(G^{\mathbb{C}})$  ( $A = I, II, III$ )

после инволюции совпадают с фазовым пространством интегрируемой системы, отвечающей Моделям I, II и III.

Между расслоениями Моделей I и II существует соответствие, которое следует из универсального расслоения Хиггса, а проекции на расслоения Хиггса I и II устроены следующим образом:



где SR означает симплектическую редукцию и переход к множеству фиксированных точек инволюции, а GCS – Generalized Calogero-Sutherland.

Квази-компактные расслоения могут быть эквивалентно определены иным способом. Вместо ограничения калибровочной группы в отмеченных точках к максимальной компактной подгруппе  $K$ , мы снабдим отмеченные точки симметрическими пространствами

$$\mathcal{X}^{\mathbb{C}} = K \setminus G^{\mathbb{C}}.$$

Для соответствующего расслоения Хиггса это означает, что в отмеченные точки добавляются  $T^*\mathcal{X}^{\mathbb{C}}$ . Это определение соответствует заданию пространства модулей  $\mathcal{M}_{III}(G^{\mathbb{C}})$ . Эквивалентность указанных описаний означает изоморфизм

$$\mathcal{M}_{II}(G^{\mathbb{C}}) \sim \mathcal{M}_{III}(G^{\mathbb{C}}). \quad (1.2.7)$$

Одной из наших целей и является определение пространств  $\mathcal{M}_A(G^{\mathbb{C}})$  и описание взаимосвязей между ними. Оказывается, изоморфизм (1.2.7) является симплектоморфизмом.

Последовательность рассуждений [46] такова. Сначала, аналогично [51] для систем Калоджеро-Сазерленда, развивается конечно-мерный подход. Исходно рассматриваются свободные системы на комплексных группах Ли. Далее выделяется три описания систем. Для модели I это свободная система, заданная на произведении двух касательных расслоений  $T^*G^{\mathbb{C}} \times T^*K$ . Она рассматривалась и в [45] для  $G^{\mathbb{C}} = \text{SL}(N, \mathbb{C})$ . Симплектическая редукция по действию группы  $K \times K$  дает редуцированное фазовое пространство в виде

$$(T^*G^{\mathbb{C}} \times T^*K) // (K \times K).$$

Для Модели II исходным фазовым пространством является  $T^*G^{\mathbb{C}}$ , а группа симметрий –  $K$ . Мы доказываем, что редуцированное фазовое пространство  $T^*G^{\mathbb{C}} // K$  симплектоморфно предыдущему, и приводит к тем же интегрируемым системам. Наконец, для

Модели III исходное фазовое пространство есть

$$T^*G^{\mathbb{C}} \times T^*\mathcal{X}^{\mathbb{C}},$$

а симметрия –  $G^{\mathbb{C}}$ . Для получения интегрируемой системы переходим к подгруппам  $G^{\mathbb{R}}$ ,  $U = G^{\mathbb{R}} \cap K$  и вещественному симметрическому пространству  $\mathcal{X}^{\mathbb{R}} = U \backslash G^{\mathbb{R}}$ . В последнем случае спиновые переменные являются элементами  $T^*\mathcal{X}^{\mathbb{R}}$ .

Недостатком конечномерного подхода является отсутствие спектрального параметра. Для того, чтобы этот параметр ввести, следует заменить касательные расслоения  $T^*G^{\mathbb{C}}$  на расслоения Хиггса над сингулярной кривой, снабженные квази-компактными структурами.

### 1.2.3 Представление Лакса и классическая $r$ -матрица

Используя корневой базис для спиновых переменных  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\mathfrak{h}_K} + \sum_{\alpha \in R^+} (T_{\alpha} E_{\alpha} - \bar{T}_{\alpha} E_{-\alpha}), \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_{\mathfrak{h}_K} + \sum_{\alpha \in R^+} (S_{\alpha} E_{\alpha} - \bar{S}_{\alpha} E_{-\alpha}),$$

$$\mathbf{T}_{\mathfrak{h}_K} = \iota \sum_{j=1}^l T_j e_j, \quad \mathbf{S}_{\mathfrak{h}_K} = \iota \sum_{j=1}^l S_j e_j$$

запишем уравнения моментов

$$\eta|_{\mathfrak{k}} = -\mathbf{T},$$

(1.2.8)

$$\text{Ad}_{e(\mathbf{u})} \eta|_{\mathfrak{k}} = -\mathbf{S}.$$

Рассмотрим решения (1.2.8) в виде

$$\eta = P + X, \quad P \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}, \quad X = \sum_{\alpha \in R} X_{\alpha} E_{\alpha}.$$

Тогда единственное решение принимает вид:

$$X = \sum_{\alpha \in R^+} (X_{\alpha} E_{\alpha} + X_{-\alpha} E_{-\alpha}),$$

$$X_{\alpha} = \frac{T_{\alpha} e(-\mathbf{u}_{\alpha}) - S_{\alpha}}{\sinh(\mathbf{u}_{\alpha})}, \quad X_{-\alpha} = \frac{\bar{T}_{\alpha} e(\mathbf{u}_{\alpha}) - \bar{S}_{\alpha}}{\sinh(\mathbf{u}_{\alpha})}.$$

Матрица Лакса задается следующим образом. Множество неподвижных точек инволюции

$$i(L_{\alpha}(z_{\alpha})) = (\sigma L_{\alpha}(\bar{z}_{\alpha})).$$

переводит, например,  $\mathcal{M}_I(G^{\mathbb{C}})$  в  $\mathcal{M}_I(G^{\mathbb{R}})$ . В итоге

$$L_1(x_1) = \frac{\mathbf{T}}{x_1} + \frac{\mathbf{T} + \eta}{1 - x_1}, \quad L_2(x_2) = \frac{\mathbf{S}}{x_2} + \frac{\mathbf{S} + Ad_{\exp(\mathbf{u})}(\eta)}{1 - x_2}, \quad (1.2.9)$$

где  $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathfrak{u}$ ,  $\mathbf{u}_\alpha \in \mathbb{R}$ , а  $x_1, x_2$  – координаты на вещественной кривой  $\Sigma_0$ . При этом

$$\mathcal{M}_I(G^{\mathbb{R}}) = T^*H^{\mathbb{R}} \times (\mathcal{O}_U \times \mathcal{O}_U).$$

Производя замену переменной от  $x_1$  в (1.2.9)) к  $y$

$$\coth(y) = (1 - x_1)/x_1$$

получим матрицу Лакса в виде

$$\tilde{L}(y) = (1 - x_1)L_1(x_1) \stackrel{(1.2.9)}{=} \mathbf{T} \coth(y) - \mathcal{Q} \quad (1.2.10)$$

с

$$\mathcal{Q} = \sum_{\alpha \in R} \mathcal{Q}_\alpha E_\alpha, \quad \mathcal{Q}_{\pm\alpha} = \pm T_\alpha + X_{\pm\alpha}.$$

Так как  $M$ -матрица не зависит от спектрального параметра, то она сохраняет свой вид, полученный из конечномерной конструкции:

$$M = \sum_{\alpha \in R^+} Y_\alpha (E_\alpha - E_{-\alpha}), \quad Y_\alpha = \frac{T_\alpha - S_\alpha \cosh(\mathbf{u}_\alpha)}{\sinh^2(\mathbf{u}_\alpha)}. \quad (1.2.11)$$

Уравнения Лакса

$$\dot{L}(x) := \{H, L(x)\} = [L(x), M]$$

с парой Лакса (1.2.10), (1.2.11) задают описанные ранее уравнения движения. Действительно, эти уравнения Лакса эквивалентны

$$\dot{\eta} = [\eta, M],$$

и

$$\dot{\mathbf{T}} = [\mathbf{T}, M].$$

Классическая  $r$ -матричная структура задается в виде

$$\{L_1(x), L_2(y)\} = [L_1(x), r_{12}(x, y)] - [L_2(y), r_{21}(y, x)]$$

где

$$\begin{aligned}
r_{12}(x,y) &= \frac{1}{2} (\coth(x-y) + \coth(x+y)) \sum_{i=1}^l e_i \otimes e_i + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \frac{(\alpha, \alpha)}{2} E_\alpha \otimes E_{-\alpha} (\coth(x-y) + \coth(\mathbf{u}_\alpha)) + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \frac{(\alpha, \alpha)}{2} E_\alpha \otimes E_\alpha (\coth(x+y) + \coth(\mathbf{u}_\alpha)).
\end{aligned}$$

Аналогичный результат, но без спектрального параметра, был получен в [39].

Размерность редуцированного фазового пространства совпадает с удвоенным количеством интегралов движения:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{R}_I^{red}(G^{\mathbb{R}}) = 2 \sum_{j=1}^l d_j - 2 \operatorname{rank}(U),$$

где  $d_j$  ( $j = 1, \dots, l$ ) – порядки инвариантов алгебры Ли  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ , а  $l$  – количество Казимиров. Для вычисления нужно воспользоваться формулой

$$\sum_{j=1}^l d_j = \frac{1}{2} (\dim K + l).$$

### 1.3 Кластерные цепочки Тоды и функции Некрасова

#### 1.3.1 Введение

Наше исследование является развитием [56], мы продолжаем изучение связи между кластерными интегрируемыми системами,  $q$ -разностными уравнениями и некрассовскими статсуммами для пятимерных калибровочных теорий. Здесь данные связи изучаются для определенного класса теорий с калибровочными группами старших рангов.

Напомним основную гипотезу работы [56]. Во-первых, каждому многоугольнику Ньютона  $\Delta$  можно сопоставить кластерную интегрируемую систему [82], [71]. Фазовое пространство этой системы является  $X$ -кластерным многообразием  $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$  со скобкой Пуассона, определённой колчаном  $\mathcal{Q}$ . Группа  $\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}$  дискретных автоморфизмов действует на  $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$ , сохраняя интегралы движения кластерной интегрируемой системы. После деавтоматизации действие  $\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}$  приводит к  $q$ -разностным уравнениям, являющимися уравнениями  $q$ -изомонодромных деформаций. Наконец, эти уравнения могут быть явно решены с помощью функций Некрасова в пятимерной суперсимметричной калибровочной



теории, или же с помощью амплитуд топологических струн на многообразии Калаби-Яу  $СУ_{\Delta}$ . Кривая Виттена-Зайберга для суперсимметричной калибровочной теории и соответствующее многообразие Калаби-Яу строятся по тому же самому многоугольнику Ньютона  $\Delta$ .

Утверждение о решениях  $q$ -разностных уравнений является, на самом деле, обобщением ( $q$ -деформированного) соответствия между СFT и изомонодромными деформациями [77], [79]. Более того, в [56] было показано, что после квантования пуассонова многообразия  $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$  соответствующие квантовые  $q$ -разностные уравнения решаются с помощью статсумм рафинированных топологических струн, зависящих ещё и от мультипликативного параметра квантовой деформации, в дополнение к параметру  $q$ -деформации. В терминах соответствия между СFT и изомонодромными деформациями это квантование приводит к обобщению на случай произвольного центрального заряда.

Это предложение было проверено в [56] для класса многоугольников  $\Delta$  с одной внутренней целой точкой. Соответствующие  $q$ -разностные уравнения являются хорошо известными дискретными уравнениями Пенлеве [91]. Заметим, что в этом случае скобка Пуассона на  $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$  имеет ранг два, и интегрируемая система почти тривиальна (любой интеграл движения является функцией гамильтониана), но тем не менее, группа  $\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}$  может быть весьма нетривиальной. В терминах комбинаторики многоугольника  $\Delta$  ранг скобки Пуассона на  $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$  равен удвоенному количеству внутренних целых точек в  $\Delta$  (совпадает с количеством независимых интегралов движения), в то время как количество коммутирующих дискретных потоков (или же ранг соответствующей абелевой подгруппы в  $\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}$ ) связан с количеством  $B$  целых точек на границе  $\Delta$  (буквально равно  $B - 3$ ).

Здесь мы рассматриваем “противоположный” случай, когда многоугольник  $\Delta$  имеет лишь четыре целые точки на границе, а значит  $\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}$  содержит целочисленную решётку лишь единичного ранга. Генератор этой решётки сдвигает переменную Казимира  $z \mapsto qz$ . Более того, мы ограничиваемся подклассом многоугольников, в которых все внутренние целые точки  $\Delta$  лежат на одной прямой линии, их количество обозначено далее  $N - 1$ . Спектральные кривые, соответствующие таким многоугольникам Ньютона, всегда гиперэллиптические. Соответствующие многоугольники Ньютона принадлежат к одному из двух семейств: либо к  $Y^{N,k}$  с  $0 \leq k \leq N$ , либо к  $L^{1,2N-1,2}$  (здесь мы придерживаемся обозначений из [73], [74]). Интегрируемые системы, отвечающие многоугольникам  $Y^{N,k}$ , были изучены, например, в [62], [64]. В случае  $Y^{N,0}$  это стандартная аффинная релятивистская цепочка Тоды с  $N$  частицами (см. подробности, например,

в [88]), для остальных  $Y^{N,k}$  их можно рассматривать как другие аффинизации той же самой открытой цепочки Тоды.

Ниже показано, что деавтономизация дискретных потоков этих интегрируемых систем может быть записана в виде билинейных уравнений Хироты. Для случая  $Y^{N,k}$  эти уравнения имеют вид:

$$\tau_{(n,m+1)}\tau_{(n,m-1)} = \tau_{(n,m)}^2 + z_0^{1/N} q^{\frac{kn-Nm}{N^2}} \tau_{(n+1,m)}\tau_{(n-1,m)} \quad (1.3.1)$$

с граничными условиями  $\tau_{(n+k,m+N)} = \tau_{(n,m)}$ . Также можно переписать уравнения (1.3.1) как разностные уравнения по переменной  $z = z_0 q^{\frac{kn-Nm}{N}}$

$$\tau_j(qz)\tau_j(q^{-1}z) = \tau_j(z)^2 + z^{1/N}\tau_{j+1}(q^{k/N}z)\tau_{j-1}(q^{-k/N}z), \quad (1.3.2)$$

на  $N$  тау-функций  $\{\tau_j(z)|j \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\}$ . Похожее разностное уравнение получено и для случая  $L^{1,2N-1,2}$ .

Общее решение разностных уравнений (1.3.2) описано в гипотезе (3.1). Результат сформулирован через амплитуды топологических струн для геометрии  $Y^{N,k}$ , которые в данном случае равны статсуммам Некрасова для чистой пятимерной суперсимметричной  $SU(N)$  калибровочной теории с членом Черна-Саймонса на уровне  $k$ , [85], [65], [93]. Подстановка найденного решения в уравнения (1.3.2) сводит их к билинейным соотношениям на статсуммы Некрасова, похожие на уравнения раздутия из [83] (но для другой геометрии — раздутия  $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ ).

В работе также приведены решения автономной ( $q = 1$ ) версии уравнений (1.3.1) и их аналоги для геометрии  $L^{1,2N-1,2}$ . Соответствующие тау-функции задаются тэта-функциями Римана на якобианах гиперэллиптических кривых с многогранниками Ньютона  $Y^{N,k}$ : при этом билинейные соотношения (1.3.1) сводятся в тождеству Фэя. В заключение мы обсуждаем некоторые вопросы, связанные с четырёхмерным пределом и приводим ряд соображений относительно квантования.

## 1.3.2 Кластерные интегрируемые системы и цепочки Тоды

### 1.3.2.1 Многоугольники Ньютона

По каждому выпуклому многоугольнику  $\Delta$  в плоскости  $\mathbb{R}^2$  с вершинами в  $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ , можно записать многочлен Лорана  $f_\Delta(\lambda, \mu)$ , так что уравнение

$$f_\Delta(\lambda, \mu) = \sum_{(a,b) \in \Delta} \lambda^a \mu^b f_{a,b} = 0. \quad (1.3.3)$$

определяет плоскую (некомпактную) спектральную кривую в  $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ . Многоугольники, связанные действием группы  $SA(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ , будут приводить к одинаковым интегрируемым системам.

Кривыми из тодовского семейства мы называем гиперэллиптические кривые (1.3.3), многоугольники Ньютона которых содержат 4 целые точки на границе. Оказывается, что все такие кривые можно расклассифицировать. Во-первых, хорошо известно, что имеется только три кривые из тодовского семейства при  $N = 2$ , то есть с одной внутренней целой точкой (см.  $4_a, 4_b, 4_c$  в [56]). Здесь мы приводим классификацию для общего случая  $N > 2$ .

**Лемма 1.3.1.** Все внутренние точки многоугольника Ньютона  $\Delta$  гиперэллиптической кривой лежат на одной прямой линии.

*Доказательство.* Предположим, что внутри многоугольника Ньютона  $\Delta$  есть три точки с координатами  $(a, b), (a+1, b), (a, b+1)$ . Тогда отношения соответствующих голоморфных 1-форм  $dv_{a,b} = \frac{\lambda^{a-1} \mu^{b-1} d\mu}{\partial f_{\Delta} / \partial \lambda}$

$$\frac{dv_{(a+1,b)}}{dv_{(a,b)}} = \lambda, \quad \frac{dv_{(a,b+1)}}{dv_{(a,b)}} = \mu$$

дают две координатные функции  $(\lambda, \mu)$ . Это значит, что каноническое отображение:  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}(H^{1,0}(\mathcal{C}, \mathbb{C}))$  не вырождено, что противоречит тому, что каноническое отображение вырождено тогда и только тогда, когда кривая гиперэллиптическая.

**Лемма 1.3.2.** Все точки многоугольника Ньютона  $\Delta$  для кривой из тодовского семейства могут быть расположены на трёх последовательных горизонтальных линиях.

*Доказательство.* Используя действие  $SA(2, \mathbb{Z})$ , мы можем передвинуть все целые внутренние точки в  $(1, 0) \dots (N-1, 0)$ . Предположим, что в  $\Delta$  есть хотя бы одна точка с координатами  $(a, 2)$ . Тогда оказывается, что в  $\Delta$  лежит треугольник с вершинами  $\{(a, 2), (1, 0), (2, 0)\}$ , этот треугольник содержит целую граничную точку  $(\frac{a+1}{2}, 1)$  или  $(\frac{a+2}{2}, 1)$ , в зависимости от четности  $a$ . Данная точка должна быть внутренней, т.к.  $(1, 0)$  и  $(2, 0)$  внутренние, но этот противоречит лемме 1.3.1. Следовательно, все точки многоугольника  $\Delta$  лежат на трех горизонтальных линиях с  $y = 1, y = 0$  и  $y = -1$ .

Иногда для удобства мы будем поворачивать многоугольник из тодовского семейства, так что он будет лежать на трех последовательных вертикальных линиях.

**Теорема 1.3.1.** Многоугольник Ньютона для кривой из тодовского семейства  $SA(2, \mathbb{Z})$  эквивалентен одному из следующих многоугольников:

$$\begin{aligned} Y^{N,k} &= \{(0,0), (0, -1), (N-k, 1), (N, 0)\}, \quad k = 0, \dots, N \\ L^{1, 2N-1, 2} &= \{(-1, -1), (0, -1), (0, 1), (N-1, 0)\}. \end{aligned}$$

Здесь мы задаём выпуклые многоугольники перечисляя целые точки на границе.

Доказательство. Заметим сначала, что поскольку все четыре целые точки на границе должны расположиться на трех линиях, две из них лежат на одной линии. Если это линия внутренних целых точек, то две оставшиеся точки должны лежать сверху и снизу – это приводит к классу  $Y^{N,k}$ . Если это нижняя (или верхняя) линия, расстояние между этими двумя точками должно быть единичным (иначе возникнут лишние граничные точки), что приводит к классу  $L^{1,2N-1,2}$ .

В соответствии с [82], [71], любой многоугольник Ньютона  $\Delta$  определяет кластерную интегрируемую систему на пуассоновом  $X$ -кластерном многообразии  $\mathcal{X}$  размерности  $\dim \mathcal{X} = 2S$ , где  $S$  это площадь многоугольника  $\Delta$ . Пуассонова структура может быть закодирована колчаном (ориентированным графом)  $\mathcal{Q}$  с  $2S$  вершинами и кососимметричной матрицей смежности  $\epsilon$ , где  $\epsilon_{ij}$  равно количеству стрелок из  $i$ -й в  $j$ -ю вершину  $\mathcal{Q}$  минус количество стрелок из  $j$ -й в  $i$ -ю вершину  $\mathcal{Q}$ .

Ниже мы строим эти колчаны для всех многоугольников Ньютона для кривых из тодовского семейства, следуя общему алгоритму из [82], то есть, для каждого многоугольника получаем диаграмму Терстона, двудольный граф на торе и колчан.

### 1.3.2.2 Диаграммы Терстона и колчаны для систем $Y^{N,k}$

В соответствии с алгоритмом Гончарова-Кеньона, сначала мы ориентируем все стороны многоугольника Ньютона против часовой стрелки и рассматриваем их как замкнутые петли на торе  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . Затем нужно деформировать эти петли так, чтобы получились только тройные пересечения с чередующейся ориентацией входящих кривых.

Лемма 1.3.3. Диаграмма Терстона на торе для многоугольника  $Y^{N,k}$  может быть построена из  $N_0$  блоков типа 0,  $N_1$  блоков типа I и  $N_{-1}$  блоков типа  $-I$ , показанных на рис. 2, при этом  $N = N_0 + N_1 + N_{-1}$ ,  $k = N_1 - N_{-1}$ . Высоты этих блоков равны 1, в то время как ширины равны  $1/N$ . Порядок блоков может быть произвольным.

Доказательство. Сначала перечислим классы гомологий замкнутых циклов:

$$C^{N,k} = \{(-1, N), (-1, -k), (1, k - N), (1, 0)\}$$

и сравним их с классами гомологий, соответствующими строительным блокам,  $c^0$ ,  $c^I$  и  $c^{-I}$ :

$$\begin{aligned} c^0 &= \{(-\frac{1}{N}, 1), (-\frac{1}{N}, 0), (\frac{1}{N}, -1), (\frac{1}{N}, 0)\}, \\ c^I &= \{(-\frac{1}{N}, 1), (-\frac{1}{N}, -1), (\frac{1}{N}, 0), (\frac{1}{N}, 0)\}, \\ c^{-I} &= \{(-\frac{1}{N}, 1), (-\frac{1}{N}, 1), (\frac{1}{N}, -2), (\frac{1}{N}, 0)\}. \end{aligned}$$

Очевидным образом мы получаем  $N_0c^0 + N_1c^1 + N_{-1}c^{-1} = C^{N,k}$ . Поскольку каждый из этих блоков удовлетворяет всем требованиям к диаграмме Терстона, достаточно только проверить равенство в гомологиях.

Если  $N_{-1} > N_1$ , получается диаграмма Тёрстона для  $Y^{N,k}$  с отрицательным  $k$ . Но многоугольник  $Y^{N,k}$  является  $SA(2, \mathbb{Z})$  эквивалентным многоугольнику  $Y^{N,-k}$ , поэтому далее мы ограничиваемся случаем неотрицательных  $k$ .

Следующий шаг это построение двудольного графа. Он может быть нарисован следующим образом: белые вершины размещаются в белых гранях (ориентированы по часовой стрелке), черные вершины размещаются в тройных пересечениях, а ребра соединяют соседние (относящиеся к одной и той же белой грани) черные и белые вершины. После того, как граф нарисован, можно стянуть вершины степени два вместе с исходящими из них ребрами.

Как и диаграммы Терстона, двудольные графы собираются из строительных блоков. Стрелки кодируют пуассонову структуру на кластерных переменных, отвечающих граням двудольного графа на торе. Соответствующий колчан строится следующим образом: сначала рисуется по  $n$  стрелок по часовой стрелке вокруг каждой черной вершины степени  $n$ , затем считается общее количество стрелок, соединяющих пару разных граней.

Обозначим через  $\mathcal{Q}^{N,k}$  колчан, соответствующий  $Y^{N,k}$ . Этот колчан определен неоднозначно и зависит от выбора чисел  $N_0, N_1, N_{-1}$ , а также от порядка блоков. Итого мы получаем:

Лемма 1.3.4. Вершины колчана  $\mathcal{Q}^{N,k}$  образуют полосу в форме ломанной на решётке  $\mathbb{Z}^2$ , имеющую высоту 1 и период  $(N, k)$ .

Отметим, что эти же двудольные графы на торе и колчаны, соответствующие многоугольникам  $Y^{N,k}$ , были получены в [73] другим способом.

В подходе [71] пуассоновы  $X$ -кластерные многообразия реализованы как двойные клетки Брюа в группе петель  $\widehat{SL}(M)$ . Эти клетки нумеруются элементами корасширенной двойной аффинной группы Вейля  $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}) \times \widehat{W}_M \times \widehat{W}_M$ . Оказывается, что  $X$ -кластерные пуассоновы многообразия, соответствующие колчанам из леммы 1.3.4, могут быть реализованы в группе петель  $\widehat{SL}(2)$ , потому ниже мы рассматриваем только случай  $M = 2$ . Это восходит к подходу Фаддеева-Тахтаджяна для цепочек Тоды [66]. Другая естественная реализация отвечает выбору  $M = N$ .

Как в [71], мы обозначаем с помощью  $s_0, s_1, s_{\bar{0}}, s_{\bar{1}}$  генераторы  $\widehat{W}_2 \times \widehat{W}_2$ , а с помощью  $\lambda$  – генератор  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Они удовлетворяют соотношениям

$$s_i s_{\bar{j}} = s_{\bar{j}} s_i, \quad \lambda s_i = s_{i+1} \lambda, \quad \lambda s_{\bar{i}} = s_{\bar{i}+1} \lambda, \quad \lambda^2 = s_i^2 = s_{\bar{i}}^2 = 1.$$

Существует способ, явно восстанавливающий  $X$ -кластерное пуассоново многообразие по элементу корасширенной двойной аффинной группы Вейля. Вершины соответствующего колчана рисуются на двух параллельных линиях на цилиндре. Каждому генератору  $s_i$  сопоставляется треугольник, в то время как генератору  $\lambda$  соответствует обмен нитей.

### 1.3.2.3 Мутации колчана

В лемме 1.3.3 была свобода в выборе чисел  $N_0, N_1, N_{-1}$  и порядка блоков. Эта свобода остаётся в следующих далее конструкциях двудольных графов и колчанов, но как доказано в [82], итоговое кластерное многообразие  $\mathcal{X}$  не зависит от этого выбора. Диаграммы Терстона, соответствующие разным выборам, связаны движениями Терстона; соответствующие двудольные графы связаны квадратными преобразованиями и стягиванием вершин степени 2.

Поскольку имеются блоки трёх видов, мы получаем  $3^N$  колчанов (для данного  $N$ ), что можно сравнить с  $3^N$  открытыми релятивистскими цепочками Тоды, которые возникли в [81], см. [69, Sect. 11.7] для квантового случая. Отметим, что в случае открытых цепочек Тоды их интегралы движения, на самом деле, эквивалентны и переводятся друг в друга некоторыми рациональными преобразованиями (преобразованиями Бэклунда-Дарбу), см. [81, Theorem 6.1]. В терминах  $X$ -кластерных многообразий эти рациональные преобразования являются композициями мутаций. В отличие от случая открытых цепочек Тоды, интегрируемые системы  $Y^{N,k}$  отвечают аффинным цепочкам, в которых есть дополнительный параметр  $k$ , сохраняемый мутациями. Соответствующие интегралы движения не эквивалентны, например в выражениях для двух  $N = 3$  и  $k = 1$  гамильтонианов

$$H_1^{(k=1)} = \frac{1 + y_1 + y_1 x_1 + y_1 x_1 y_2 + y_1 x_1 y_2 x_2 + z^{-2/3} y_1^{1/3} x_1^{4/3} y_2^{2/3} x_2^{2/3} (1 + x_2)}{(x_1 y_1)^{2/3} (x_2 y_2)^{1/3}},$$

$$H_2^{(k=1)} = \frac{1 + y_2 + y_2 x_2 + y_2 x_2 y_1 + y_2 x_2 y_1 x_1 + z^{-2/3} y_1^{1/3} x_1^{4/3} y_2^{2/3} x_2^{5/3}}{(x_1 y_1)^{1/3} (x_2 y_2)^{2/3}}$$

можно легко найти отличие в “аффинных” ( $z$ -зависимых) слагаемых по сравнению с обычными  $N = 3$  и  $k = 0$  выражениями для релятивистской Тоды

$$H_1^{(k=0)} = \frac{1 + y_1 + y_1 x_1 + y_1 x_1 y_2 + y_1 x_1 y_2 x_2 + z^{-1} x_1 x_2}{(x_1 y_1)^{2/3} (x_2 y_2)^{1/3}},$$

$$H_2^{(k=0)} = \frac{1 + y_2 + y_2x_2 + y_2x_2y_1 + y_2x_2y_1x_1 + z^{-1}x_1x_2}{(x_1y_1)^{1/3}(x_2y_2)^{2/3}}.$$

Обе пары находятся в инволюции  $\{H_1^{(k)}, H_2^{(k)}\} = 0$  относительно стандартной скобки Пуассона, для которой единственные нетривиальные соотношения это  $\{y_i, x_j\} = C_{ij}y_ix_j$  для  $i, j = 1, \dots, 2$ . Здесь  $C_{ij}$  это матрица Картана для  $SL(3)$ , единственная нетривиальная функция Казимира обозначена как  $z$ .

Мутация колчана  $\mathcal{Q}$  определяется следующим образом. Пусть  $\epsilon_{ij}$  это количество стрелок из  $i$ -й в  $j$ -ю вершину ( $\epsilon_{ji} = -\epsilon_{ij}$ ) колчана  $\mathcal{Q}$ . Мутация в вершине  $j$  действует как

$$\mu_j: \epsilon_{ik} \mapsto -\epsilon_{ik}, \text{ если } i = j \text{ или } k = j, \quad \epsilon_{ik} \mapsto \epsilon_{ik} + \frac{\epsilon_{ij}|\epsilon_{jk}| + \epsilon_{jk}|\epsilon_{ij}|}{2} \text{ иначе.} \quad (1.3.4)$$

Лемма 1.3.5. Мутации могут преобразовывать последовательности блоков следующим образом:  $(0,0) \leftrightarrow (-I,I)$ ;  $(I, -I) \leftrightarrow (0,0)$ ;  $(0, -I) \leftrightarrow (-I,0)$ ;  $(I,0) \leftrightarrow (0,I)$ .

Сделаем два замечания. Во-первых, отметим, что мутации переводят соответствующую вершину колчана в другую целую точку на той же вертикальной линии. Очевидно, что используя такие движения можно преобразовать последовательность блоков  $0, I, -I$  в любую другую последовательность с теми же  $N = N_0 + N_1 + N_{-1}$  и  $k = N_1 - N_{-1}$ . Другими словами, можно преобразовать большой путь Моцкина любой формы в путь любой другой формы (но с теми же самыми  $N, k$ ). Во-вторых, вообще говоря, не любая мутация колчана соответствует квадратному преобразованию двудольного графа (или движению Тёрстона соответствующей диаграммы Тёрстона).

#### 1.3.2.4 $X$ -кластерные многообразия и $Y$ -система

Скобка Пуассона на  $X$ -кластерном многообразии определена в терминах  $X$ -кластерных переменных, обозначенных  $\{x_i\}$ . Скобка является логарифмически постоянной и имеет вид

$$\{x_i, x_j\} = \epsilon_{ij}x_ix_j \quad (1.3.5)$$

определяемый матрицей смежности колчана. Мутации  $\mu_j$  действуют на таких переменных по формуле

$$\mu_j: x_j \mapsto x_j^{-1}, \quad x_i \mapsto x_i \left(1 + x_j^{\text{sgn}\epsilon_{ij}}\right)^{\epsilon_{ij}}, \quad i \neq j \quad (1.3.6)$$

Формулы (1.3.6) и (1.3.4) определяют одновременное преобразование  $\{x_i\}$  и  $\epsilon_{ij}$ , которое сохраняет вид скобки (1.3.5).

С этого момента будем считать, что  $0 \leq k < N$ , случай  $k = N$  будет рассмотрен отдельно. Мы рисуем колчаны  $\mathcal{Q}^{N,k}$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , потому естественно приписать

$X$ -переменные к целым точкам  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ . Тем не менее, поскольку каждая точка может относиться к нескольким разным большим путям Моцкина (что то же самое, к разным колчанам), можно приписать к одной точке несколько разных  $X$ -переменных. Ниже мы рассматриваем это соответствие.

Во-первых, рассмотрим  $\{x_{(n,m)}\}$ , соответствующие целым точкам  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$  и удовлетворяющие некоторой  $Y$ -системе

$$\frac{x_{(n,m+1)}x_{(n,m-1)}}{x_{(n,m)}^2} = \frac{(1+x_{(n+1,m)})(1+x_{(n-1,m)})}{(1+x_{(n,m)})^2} \quad (1.3.7)$$

с граничными условиями

$$x_{(n,m)} = x_{(n+N,m+k)}. \quad (1.3.8)$$

В качестве начальных данных можно взять  $x_{(n,m)}$  во всех точках полосы в форме ломанной из леммы 1.3.4 (с периодичностью (1.3.8)), а затем однозначно доопределить  $x_{(n,m)}$  для всех целых точек плоскости, используя уравнение (1.3.7). Здесь мы, на самом деле, пользуемся ограничением  $0 \leq k < N$  – в этом случае всегда есть как минимум одна из последовательностей близлежащих блоков:  $(0,0)$ ,  $(I,-I)$ ,  $(0,-I)$  или  $(I,0)$ . Следовательно, используя мутацию, мы можем определить одну  $x_{(n,m)}$  под полоской, а затем продолжить по индукции. Аналогично, всегда можно восстановить  $x_{(n,m)}$  над начальной полоской в форме ломанной.

Теперь для каждой данной полосы в форме ломанной, в каждой целой точке  $(n, m)$  этой полосы мы определяем соответствующую кластерную переменную  $x_{(n,m)}^{***}$  по следующему правилу (которое зависит от формы ломаной и от вида точки,  $+$  или  $\times$ ):

- $x_{(n,m)}^{+00} = x_{(n,m)}$  если ломаная имеет вид  $-+-$  или  $-+\backslash$  или  $/+-$  или  $/+\backslash$
- $x_{(n,m)}^{+10} = \frac{x_{(n,m)}}{1+x_{(n-1,m+1)}}$  если ломаная имеет вид  $\backslash+\backslash$  или  $\backslash+-$
- $x_{(n,m)}^{+01} = \frac{x_{(n,m)}}{1+x_{(n+1,m+1)}}$  если ломаная имеет вид  $/+/'$  или  $-+/'$
- $x_{(n,m)}^{+11} = \frac{x_{(n,m)}}{(1+x_{(n-1,m+1)})(1+x_{(n+1,m+1)})}$  если ломаная имеет вид  $\backslash+/'$
- $x_{(n,m)}^{\times 00} = \frac{1}{x_{(n,m+2)}}$  если ломаная имеет вид  $- \times -$  или  $- \times /$  или  $\backslash \times -$  или  $\backslash \times /$
- $x_{(n,m)}^{\times 10} = \frac{1+x_{(n-1,m+1)}}{x_{(n,m+2)}}$  если ломаная имеет вид  $/ \times -$  или  $/ \times /$
- $x_{(n,m)}^{\times 01} = \frac{1+x_{(n+1,m+1)}}{x_{(n,m+2)}}$  если ломаная имеет вид  $- \times \backslash$  или  $\backslash \times \backslash$
- $x_{(n,m)}^{\times 11} = \frac{(1+x_{(n-1,m+1)})(1+x_{(n+1,m+1)})}{x_{(n,m+2)}}$  если ломаная имеет вид  $/ \times \backslash$



Все эти выражения могут быть написаны единообразно в виде

$$x_{(n,m)}^{+\alpha\beta} = \frac{x_{(n,m)}}{(1+x_{(n-1,m+1)})^\alpha(1+x_{(n+1,m+1)})^\beta}, \quad x_{(n,m)}^{\times\alpha\beta} = \frac{(1+x_{(n-1,m+1)})^\alpha(1+x_{(n+1,m+1)})^\beta}{x_{(n,m+2)}}. \quad (1.3.9)$$

Теорема 1.3.2. Если колчан  $\mathcal{Q}^{N,k}$  преобразуется в  $\tilde{\mathcal{Q}}^{N,k}$  с помощью мутации соответствующие кластерные переменные  $x_{(n,m)}^{***}$ , определённые формулами выше, преобразуются в кластерные переменные  $\tilde{x}_{(n,m)}^{***}$ .

Доказательство. Доказательство следует из непосредственной проверки набора соотношений, которым должны удовлетворять  $x_{(n,m)}^{***}$  для того, чтобы выполнены условия теоремы:

$$\begin{aligned} x_{(n,m)}^{+*0} &= x_{(n,m)}^{+*1}(1+x_{(n+1,m+1)}), & x_{(n,m)}^{+0*} &= x_{(n,m)}^{+1*}(1+x_{(n-1,m+1)}), \\ x_{(n,m)}^{\times*1} &= x_{(n,m)}^{\times*0}(1+x_{(n+1,m+1)}), & x_{(n,m)}^{\times1*} &= x_{(n,m)}^{\times0*}(1+x_{(n-1,m+1)}), \\ x_{(n,m)}^{+\alpha\beta} &= x_{(n,m)}^{\times\alpha'\beta'}(1+x_{(n,m)}^{-1})^{-2}, \end{aligned}$$

где  $\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = 1$ . Эти соотношения непосредственно следуют из (1.3.9) и (1.3.7).

### 1.3.2.5 Уравнение Хироты из кластерных мутаций

Здесь и далее мы обозначаем  $l_{n,m} = kn - Nm$ , эта линейная функция инвариантна относительно нашего периодического сдвига  $(n,m) \rightarrow (n+N, m+k)$ .

Лемма 1.3.6. Пусть  $\tau_{(n,m)}$  удовлетворяют неавтономной версии дискретного уравнения Хироты

$$\tau_{(n,m+1)}\tau_{(n,m-1)} = \tau_{(n,m)}^2 + z_0^{1/N} q^{l_{n,m}/N^2} \tau_{(n+1,m)}\tau_{(n-1,m)}, \quad (1.3.10)$$

вместе с граничными условиями  $\tau_{(n,m)} = \tau_{(n+N, m+k)}$ . Тогда  $x_{(n,m)}$ , определённые формулами

$$x_{(n,m)} = z_0^{1/N} q^{(l_{n,m+N})/N^2} \tau_{(n-1, m-1)}\tau_{(n+1, m-1)}\tau_{(n, m-1)}^{-2},$$

удовлетворяют (1.3.7) и (1.3.8).

Доказательство заключается в проверке прямым вычислением.

С другой стороны, можно было вывести уравнения Хироты (1.3.10) из правил мутации для  $\tau$ -переменных на  $A$ -кластерном многообразии. Каждой вершине колчана  $i \in \mathcal{Q}$  сопоставим переменную  $\tau_i$ , при этом мутация  $\mu_j$  в  $j$ -й вершине имеет вид

$$\mu_j : \quad \tau_j \mapsto \frac{\prod_{\epsilon_{ij} > 0} \tau_i^{\epsilon_{ij}} + \prod_{\epsilon_{ij} < 0} \tau_i^{-\epsilon_{ij}}}{\tau_j}, \quad \tau_i \mapsto \tau_i, \quad i \neq j \quad (1.3.11)$$

и также сопровождается преобразованием колчана (1.3.4). Замечаем, что формула (1.3.11) представляет собой простейший случай мутации, а именно мутации без коэффициентов.

Так как колчаны  $\mathcal{Q}^{N,k}$  нарисованы на плоскости, естественно сопоставить  $\tau$ -переменные всем целым точкам  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ . Сразу заметим, что поскольку  $A$ -кластерная мутация (1.3.11) меняет только переменную в мутируемой вершине (в отличие от (1.3.6), все переменные в других вершинах остаются неизменными), переменные  $\tau_{(n,m)}$  будут однозначно определяться из (1.3.10), независимо от формы полосы в виде ломаной (в отличие от различных вариантов для  $x_{(n,m)}^{***}$ ).

Эти  $\tau$ -переменные могут быть построены следующим образом: для колчана  $\mathcal{Q}^{N,k}$ , описанного в лемме 1.3.4 и нарисованного на плоскости, сначала мы приписываем переменные  $\tau_{(n,m)}$  целым точкам  $(n, m)$  в полоске в виде ломаной (учитывая периодичность). Для любого выбора колчана  $\mathcal{Q}^{N,k}$  (с  $0 \leq k < N$ ) всегда можно сделать одну из мутаций на рис. 9, как мы уже обсуждали выше в конструкции для  $X$ -переменных. Всегда имеется хотя бы одна мутация с рис. 9, которая двигает вершину посередине вниз, и хотя бы одна, которая двигает вершину вверх.

Рассмотрим мутацию в точке  $(n, m + 1)$ , которая двигает вершину вниз, тогда новая полоска получается удалением точки  $(n, m + 1)$  и добавлением  $(n, m - 1)$ . Для любой мутации с рис. 9 новые  $\tau$ -переменные даются формулой

$$\tau_{(n,m-1)} = \mu_{(n,m+1)}(\tau_{(n,m+1)}) = \frac{\tau_{(n,m)}^2 + \tau_{(n+1,m)}\tau_{(n-1,m)}}{\tau_{(n,m+1)}}. \quad (1.3.12)$$

Делая эти мутации, мы сопоставляем  $\tau$ -переменные новым целым точкам плоскости. Поскольку уравнение (1.3.12) не зависит от конкретного вида мутации, это сопоставление определено корректно. Другими словами, таким образом мы получаем решения билинейных уравнений типа Хироты (см, например, обзор [95] и ссылки в нем)

$$\tau_{(n,m+1)}\tau_{(n,m-1)} = \tau_{(n,m)}^2 + \tau_{(n+1,m)}\tau_{(n-1,m)} \quad (1.3.13)$$

с условием периодичности

$$\tau_{(n+N,m+k)} = \tau_{(n,m)}.$$

Значения  $\tau$ -переменных на начальной полоске в виде ломаной соответствуют начальным данным для дискретного уравнения Хироты (1.3.13).

Таким образом, мы получили уравнение (1.3.13), которое является частным случаем уравнения (1.3.10) с постоянными коэффициентами, или  $q = z_0 = 1$ . В этом простейшем случае соотношение между  $\tau$ -переменными и  $x$ -переменным, удовлетворяющими (1.3.7), даётся формулой  $x_i = \prod_j \tau_j^{\epsilon_j^i}$ , которая вместе с формулой для мутаций

(1.3.11) воспроизводит правила мутации (1.3.6). Посмотрим, тем не менее, на элементы Казимира, или центральные элементы пуассоновой алгебры (1.3.5): легко видеть, что они соответствуют ядру матрицы  $\epsilon$ . Выражая их по формулам  $x_i = \prod_j \tau_j^{\epsilon_{ji}}$  через  $\tau$ -переменные, мы получаем очень специальные значения элементов Казимира (например, для мономиальных выражений — просто единицы), то есть, получается очень специальный симплектический лист в пуассоновом  $X$ -кластерном многообразии.

Для того, чтобы рассмотреть общую ситуацию, нужно модифицировать соотношение между  $x$ - и  $\tau$ -переменными и написать  $x_i = y_i \prod_j \tau_j^{\epsilon_{ji}}$ , где  $\{y_i\}$  называются коэффициентами. В нашем случае  $\text{corank}(\epsilon) = 2$ , следовательно у скобки (1.3.5) есть два независимых элемента Казимира, которые могут быть выбраны как

$$q = \prod x_{(n,m)}^{***} = \prod y_{(n,m)}^{***}, \quad z = \prod \left( x_{(n,m)}^{***} \right)^{l_{n,m}} = \prod \left( y_{(n,m)}^{***} \right)^{l_{n,m}}.$$

Произведение берётся по всем вершинам в фундаментальной области (относительно  $(N, k)$ -сдвига) полоски в виде ломаной. Без коэффициентов  $y_{(n,m)}$  эти элементы Казимира превращаются в единицы. Таким образом естественно выразить коэффициенты  $\{y_i\}$  через две переменные Казимира.

Можно начать с общих коэффициентов  $\{y_i\}$ , лежащих в тропическом полуполе [72]:  $y_{(n,m)} \in \text{Trop}(z_0, q)$ , определив тропические операции на  $\text{Trop}(z_0, q)$  с помощью формул

$$z_0^a q^b \odot z_0^c q^d = z_0^{a+c} q^{b+d}, \quad z_0^a q^b \oplus z_0^c q^d = z_0^{\min(a,c)} q^{\min(b,d)}. \quad (1.3.14)$$

В этом случае мутации (1.3.11) модифицируются коэффициентами

$$\begin{aligned} \mu_j(\tau_j) &= \frac{y_j \prod_{\epsilon_{ij} > 0} \tau_i + \prod_{\epsilon_{ij} < 0} \tau_i}{(1 \oplus y_j) \tau_j}, & \mu_j(\tau_i) &= \tau_i, \quad i \neq j, \\ \mu_j(y_j) &= y_j^{-1}, & \mu_j(y_i) &= y_i (1 \oplus y_j^{\text{sgn} \epsilon_{ij}})^{\epsilon_{ij}}, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

Кроме того, сами переменные  $\{y_j\}$  тоже преобразуются при мутации по формулам, похожим на мутации  $x$ -переменных (1.3.6) с точностью до замены  $+$  на тропический  $\oplus$  из (1.3.14). Это сопоставление коэффициентов должно быть согласовано с тропической версией (1.3.7).

Положим, например,  $y_{(n,m)} = z_0^{1/N} q^{(l_{n,m} + N)/N^2}$ , тогда в области  $l_{n,m} > 0$  мы получим очевидное равенство

$$\frac{y_{(n,m+1)} y_{(n,m-1)}}{y_{(n,m)}^2} = \frac{(1 \oplus y_{(n+1,m)}) (1 \oplus y_{(n-1,m)})}{(1 \oplus y_{(n,m)})^2}. \quad (1.3.16)$$

Благодаря тропическому сложению (1.3.14), соответствующие  $y_{(n,m)}^{***}$  зависят только от типа вершины и не зависят от формы ломаной, то есть,

$$y_{(n,m)}^{+**} = z_0^{1/N} q^{(l_{n,m} + N)/N^2}, \quad y_{(n,m)}^{\times**} = z_0^{-1/N} q^{(-l_{n,m} + N)/N^2}.$$

Для мутации из (1.3.15) мы теперь имеем

$$\tau_{(n,m-1)} = \mu_{(n,m+1)}(\tau_{(n,m+1)}) = \frac{\tau_{(n,m)}^2 + z_0^{1/N} q^{l_{n,m}/N^2} \tau_{(n+1,m)} \tau_{(n-1,m)}}{\tau_{(n,m+1)}}, \quad (1.3.17)$$

и таким образом из кластерных преобразований мы получаем общее уравнение Хироты (1.3.10).

Строго говоря, мы получили уравнение (1.3.17) только в области  $l_{n,m} > 0$ . Конечно, эта асимметрия приходит из тропического сложения  $\oplus$  в (1.3.14). Тем не менее, для любых данных  $(n,m)$  можно переопределить  $z_0 \rightarrow z_0 q^{-c}$  для достаточно больших  $c$  и получить положительную степень  $q$  в  $y_{(n,m)}$ , тогда мы получим (1.3.17). Это можно рассматривать как объяснение того, почему лемма 1.3.6 не имеет никаких ограничений на  $(n,m)$ .

С другой стороны, мы также можем спросить, что происходит с продолжением решения  $y_{(n,m)} = z_0^{1/N} q^{(l_{n,m}+N)/N^2}$  уравнения (1.3.16) в область  $l_{n,m} < 0$ . Оказывается, что после пересечения линии, на которой  $l_{n,m} = 0$ , поведение решения кардинально меняется.

Также удобно переписать уравнение (1.3.10) используя переменные  $j = n \bmod N$  и  $l = l_{n,m} = kn - Nm$ , оно принимает вид:

$$\tau_{j,l+N} \tau_{j,l-N} = \tau_{j,l}^2 + z_0^{1/N} q^{l/N^2} \tau_{j+1,l+k} \tau_{j-1,l-k}. \quad (1.3.18)$$

Тогда в случае  $\gcd(N,k) = 1$   $\tau$ -переменные можно считать зависящими только от  $l$ , индекс  $j$  определяется по  $l$  и может быть опущен. Для общего случая эффективно будет  $d = \gcd(N,k)$  вспомогательных индексов из  $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ , например, для  $k = 0$  получается  $i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ . Тем не менее, удобно (для любых  $N,k$ ) упаковать  $\tau$ -переменные в  $N$  тау-функций по формуле  $\tau_{j,l} = \tau_j(z_0 q^{l/N})$ . Тогда уравнение (1.3.18) переписывается как  $q$ -разностное уравнение по переменной  $z = z_0 q^{l/N}$ :

$$\tau_j(qz) \tau_j(q^{-1}z) = \tau_j(z)^2 + z^{1/N} \tau_{j+1}(q^{k/N}z) \tau_{j-1}(q^{-k/N}z). \quad (1.3.19)$$

Уравнения (1.3.7), (1.3.10) и (1.3.19) являются главными результатами раздела 1.3.2. Напомним, что эти уравнения были получены для  $k = 0, \dots, N-1$ . Оказывается, тем не менее, что в случае  $Y^{N,N}$  получаются те же самые уравнения.

### 1.3.2.6 “Однородный” колчан

Основным объектом статьи [56] была группа  $\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}$ . Для данного колчана  $\mathcal{Q}$  эта группа состоит из композиций мутаций и перестановок вершин, которые сохраняют колчан  $\mathcal{Q}$ . Элемент бесконечного порядка  $T \in \mathcal{G}_{\mathcal{Q}}$  генерирует дискретный поток.

Как объяснялось выше, мутации соответствуют изменению формы полосы в виде ломаной (см. лемму 1.3.4 и лемму 1.3.5, группа  $\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}$  состоит из элементов, преобразующих полосу в другую полосу той же формы. Такие преобразования существуют для любой начальной формы полосы в виде ломаной при  $0 < k < N$ , но при этом есть “самая лучшая” (или “однородная”) форма такой полосы и соответствующий “однородный” колчан  $\mathcal{Q}_{\mathfrak{u}}^{N,k}$ . Для “однородного” колчана  $\mathcal{Q}_{\mathfrak{u}}^{N,k}$  генератор дискретного потока  $T \in \mathcal{G}_{\mathcal{Q}_{N,k}}$  может быть записан как композиция  $d = \gcd(N,k)$  мутаций и перестановки. Конструкция такого “однородного”  $\mathcal{Q}_{\mathfrak{u}}^{N,k}$  не используется далее и может рассматриваться как элементарная олимпиадная задача, эта конструкция возникала, например, в [86].

Конструкция заключается в следующем. Нарисуем две наклонные линии с наклоном  $k/N$ :  $(x,y) \in \{(0,\epsilon + n) + t(N,k) | t \in \mathbb{R}, n = 0,2\}$ , где  $\epsilon$  это достаточно маленькое действительное число. Целые точки между этими линиями образуют полосу ширины 2, эта полоска может быть заполнена блоками типов 0 и I. Таким образом, по лемме 1.3.4, эти целые точки могут рассматриваться как вершины колчана  $\mathcal{Q}_{\mathfrak{u}}^{N,k}$ .

Преобразование  $T \in \mathcal{G}_{\mathcal{Q}_{N,k}}$  может быть реализовано как сдвиг наклонных линий вниз на  $\gcd(N,k)/N$ . Во время такого сдвига эти линии проходят через  $d = \gcd(N,k)$  целых точек (с точностью до  $(N,k)$  периодичности), которые отмечены кружками на рисунке ниже. Преобразование колчана из леммы 1.3.5 даётся мутациями  $(I,0) \leftrightarrow (0,I)$  в этих целых точках. Мы видим, что целые точки между сдвинутыми линиями образуют полосу той же самой формы, что и начальные. Следовательно, итоговый колчан совпадает с  $\mathcal{Q}_{\mathfrak{u}}^{N,k}$  с точностью до перестановки вершин.

## 1.4 Новые симметрии $\mathfrak{gl}(N)$ -инвариантных векторов Бете

### 1.4.1 Введение

Алгебраический анзац Бете, разработанный Ленинградской школой [96, 97, 98], это мощный метод исследования квантовых интегрируемых систем. Можно использовать этот метод для нахождения спектра квантовых Гамильтонианов. Кроме того, этот метод можно использовать для расчета корреляционных функций квантовых интегрируемых моделей [99, 100, 101, 102]. В рамках подхода алгебраического анзаца Бете эта проблема сводится к расчету скалярных произведений векторов Бете.

Понятие вектора Бете одно из самых важных понятий алгебраического анзаца Бете. Эти вектора принадлежат к физическому пространству состояний рассматриваемой квантовой модели. Они зависят от набора комплексных чисел, которые называются параметрами Бете. Если на параметры Бете наложить определенные связи, то вектор

Бете станет собственным для квантового Гамильтониана. В этом случае он обычно называется он-шельным вектором Бете. В противном случае, когда параметры Бете - общие комплексные числа, соответствующий вектор иногда называют офф-шельным вектором Бете.

В моделях основанных на  $\mathfrak{gl}(2)$  симметрии, вид векторов Бете предельно прост [96, 97, 98, 99]. Но в квантовых интегрируемых моделях с симметрией старшего ранга конструкция векторов Бете становится сильно сложнее. Существует несколько способов определить эти вектора. Рекурсивная процедура построения офф-шельных векторов была предложена в работах [103, 104, 105]. Точная формула для этих векторов (формула следа) содержащая тензорное произведение матриц монодромии и  $R$ -матриц была предложена в [106, 107, 108]. Другой подход к этой проблеме, основанный на проекциях в алгебре токов, был сформулирован в [109, 110, 111, 112]. Точная формула для векторов Бете в терминах элементов матрицы монодромии действующих на вакуумное состояние была получена в [113, 114].

Мы нашли новую симметрию векторов Бете в моделях с  $\mathfrak{gl}(N)$ -инвариантной  $R$ -матрицей. Естественно ожидать, что симметрия матрицы монодромии должна порождать соответствующую симметрию вектор Бете [105, 106, 113, 114]. Мы рассматриваем отображение матрицы монодромии  $T$  в новую матрицу  $\hat{T}$ , тесно связанную с обратной матрицей монодромии. Мы изучаем свойства векторов Бете ассоциированных с обеими этими матрицами. Мы показываем, как эти два типа векторов Бете связаны друг с другом. Как прямое приложение этой связи находим новые симметрии скалярных произведений векторов Бете.

#### 1.4.2 RТТ-алгебра и определения

Мы рассматриваем квантовые интегрируемые модели, которые можно решить используя алгебраический анзац Бете и обладающими  $\mathfrak{gl}(N)$ -инвариантной  $R$ -матрицей

$$R(u,v) = \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + g(u,v)\mathbf{P}, \quad g(u,v) = \frac{c}{u-v}. \quad (1.4.1)$$

Здесь  $\mathbf{I} = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_{ii}$  - это единичный оператор, действующий в пространстве  $\mathbf{C}^N$ ,  $\mathcal{E}_{ij}$  - это  $N \times N$  матрицы с одним ненулевым элементом равным 1 на пересечении  $i$ -ой и строки и  $j$ -го столбца,  $\mathbf{P} = \sum_{i,j=1}^N \mathcal{E}_{ij} \otimes \mathcal{E}_{ji}$  - оператор перестановки, действующий в  $\mathbf{C}^N \otimes \mathbf{C}^N$ ,  $c$  - постоянная, а  $u, v$  - комплексные числа, называемые спектральными параметрами.

Ключевым объектом алгебраического анзаца Бете является матрица монодромии  $T(u)$  с операторозначными элементами  $T_{ij}(u)$ , действующими в Гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  (физическое пространство квантовой модели). Они удовлетворяют  $RTT$ -ал-

гребре:

$$R(u,v) (T(u) \otimes \mathbf{I}) (\mathbf{I} \otimes T(v)) = (\mathbf{I} \otimes T(v)) (T(u) \otimes \mathbf{I}) R(u,v). \quad (1.4.2)$$

Уравнение (1.4.2) дает коммутационные соотношения для элементов матрицы монодромии

$$[T_{ij}(u), T_{kl}(v)] = g(u,v) (T_{il}(u)T_{kj}(v) - T_{il}(v)T_{kj}(u)). \quad (1.4.3)$$

Используя (1.4.2), легко доказать, что

$$[\mathcal{T}(u), \mathcal{T}(v)] = 0,$$

где  $\mathcal{T}(u) = \sum_i T_{ii}(u)$  - это трансфер-матрица. Таким образом, трансфер-матрица - это производящая функция для интегралов движения рассматриваемой модели.

Мы предполагаем следующую зависимость элементов матрицы монодромии  $T_{ij}(u)$  от параметра  $u$ :

$$T_{ij}(u) = \delta_{ij} \mathbf{1} + \sum_{\ell \geq 0} T_{ij}[\ell] u^{-\ell-1}, \quad (1.4.4)$$

где  $\mathbf{1}$  и  $T_{ij}[\ell]$  - соответственно единичный и нетривиальный оператор, действующий в Гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ .

Примечание. Фактически, для наших целей, условие (1.4.4) является необязательным. Мы предполагаем это условие только для облегчения подачи. В квантовых моделях, которыми интересуются физики, матрица монодромии может иметь различные асимптотические разложения, тем не менее, их легко можно свести к разложению (1.4.4).

Мы так же предполагаем, что пространство  $\mathcal{H}$  содержит псевдовакуумный вектор  $|0\rangle$  такой, что

$$\begin{aligned} T_{ii}(u)|0\rangle &= \lambda_i(u)|0\rangle, \\ T_{ij}(u)|0\rangle &= 0, \quad i > j, \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

где  $\lambda_i(u)$  - это некоторые функции зависящие от конкретной квантовой интегрируемой модели. Действия  $T_{ij}(u)$  с  $i < j$  на псевдовакуум не тривиальны. В физический моделях повторные действия таких операторов на  $|0\rangle$  порождает базис в пространстве  $\mathcal{H}$ .

Так как матрица монодромии определена с точностью до общего скалярного множителя, удобно иметь дело с

$$\alpha_i(u) = \frac{\lambda_i(u)}{\lambda_{i+1}(u)}, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (1.4.6)$$

Мы полагаем функции  $\alpha_i(u)$  произвольными функциональными параметрами (обобщенная модель) с ограничениями, диктуемыми (1.4.4).

Кроме изначальной матрицы монодромии  $T(u)$  мы так же рассматриваем обратную к ней. Для этого сначала введем понятие квантового детерминанта матрицы монодромии  $\text{qdet}(T(u))$  [115, 116, 117, 118]

$$\text{qdet}(T(u)) = \sum_p \text{sgn}(p) T_{1,p(1)}(u) T_{2,p(2)}(u-c) \dots T_{N,p(N)}(u-(N-1)c).$$

Здесь сумма взята по всем перестановкам  $p$  множества  $\{1, 2, \dots, N\}$ ,  $p(i)$  – это  $i$ -ый элемент перестановки  $p$  множества  $\{1, 2, \dots, N\}$ . Квантовый детерминант порождает центр  $RTT$ -алгебры

$$[\text{qdet}(T(u)), T_{ij}(v)] = 0.$$

Легко увидеть, что согласно (1.4.5)

$$\text{qdet}(T(u)|0) = \lambda_1(u)\lambda_2(u-c) \dots \lambda_N(u-(N-1)c)|0).$$

Так же как и квантовый детерминант, мы можем ввести понятие квантового минора размера  $m \times m$  ( $1 \leq m < N$ )

$$t_{b_1, b_2, \dots, b_m}^{a_1, a_2, \dots, a_m}(u) = \sum_p \text{sgn}(p) T_{a_1, b_{p(1)}}(u) T_{a_2, b_{p(2)}}(u-c) \dots T_{a_m, b_{p(m)}}(u-(m-1)c). \quad (1.4.7)$$

Здесь сумма взята по всем перестановкам  $p$  множества  $\{1, 2, \dots, m\}$ ,  $p(i)$  – это  $i$ -ый элемент перестановки  $p$  множества  $\{1, 2, \dots, m\}$ .

Теперь мы можем ввести обратную матрицу монодромии  $\tilde{T}(u)$

$$\tilde{T}(u)T(u) = \mathbf{I},$$

где элементы матрицы  $\tilde{T}_{ij}(u)$  даны квантовыми минорами поделенными на квантовый детерминант

$$\tilde{T}_{ij}(u) = (-1)^{i+j} t_{1 \dots \hat{i} \dots \hat{j} \dots N}^{1 \dots \hat{j} \dots \hat{i} \dots N}(u-c) \text{qdet}(T(u))^{-1}. \quad (1.4.8)$$

Здесь  $\hat{i}$  и  $\hat{j}$  значит, что соответствующие индексы пропущены.

Известно [118], что обратная матрица монодромии удовлетворяет  $RTT$ -соотношению с другим знаком постоянной  $c$ , то есть

$$[\tilde{T}_{ij}(u), \tilde{T}_{kl}(v)] = g(v, u) \left( \tilde{T}_{il}(u)\tilde{T}_{kj}(v) - \tilde{T}_{il}(v)\tilde{T}_{kj}(u) \right).$$

Тогда определим  $\hat{T}_{ij}(u)$  как

$$\hat{T}_{ij}(u) = \tilde{T}_{N+1-j, N+1-i}(u), \quad (1.4.9)$$



и находим, что элементы  $\widehat{T}_{ij}(u)$  удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\widehat{T}_{ij}(u), \widehat{T}_{kl}(v)] = g(u, v) \left( \widehat{T}_{il}(u) \widehat{T}_{kj}(v) - \widehat{T}_{il}(v) \widehat{T}_{kj}(u) \right).$$

Так как эти коммутационные соотношения совпадают с (1.4.3), мы заключаем, что  $\widehat{T}(u)$  удовлетворяет  $RTT$ -алгебре (1.4.2) с той самой  $R$ -матрицей (1.4.1).

Таким образом, отображение

$$T_{ij}(u) \rightarrow \widehat{T}_{ij}(u)$$

это автоморфизм  $RTT$ -алгебры. Мы собираемся исследовать симметрии офф-шельных векторов Бете, связанные с этим автоморфизмом.

### 1.4.3 Обозначения

Опишем обозначения, которые используем ниже. Во-первых, мы вводим специальное обозначение для комбинации  $1 + g(u, v)$

$$f(u, v) = 1 + g(u, v) = \frac{u - v + c}{u - v}. \quad (1.4.10)$$

Во-вторых, формулируем соглашение для обозначения множества переменных. Обозначаем их чертой:  $\bar{t}^i$ ,  $\bar{x}^s$ , и т. д. Верхние индексы нумеруют разные множества. Отдельные элементы множеств нумеруются нижними индексами:  $t_j^i$ ,  $x_k^s$ , и т. д. Таким образом, например,  $\bar{t} = \{\bar{t}^1, \bar{t}^2\}$  значит, что множество  $\bar{t}$  – это объединение множеств  $\bar{t}^1$  и  $\bar{t}^2$ . В тоже время каждое из двух множеств состоит из элементов  $\bar{t}^s = \{t_1^s, t_2^s, \dots, t_{a_s}^s\}$ , где  $s = 1, 2$ .

Обозначение  $\bar{t}^i + \epsilon$  значит, что постоянная  $\epsilon$  прибавлена ко всем элементам множества  $\bar{t}^i$ . Подмножества переменных обозначаются римскими цифрами:  $\bar{t}_I^s$ ,  $\bar{x}_{II}^s$ , и т. д. В частности, мы рассматриваем разбиение множества в подмножества. Тогда обозначение  $\{\bar{t}_I^s, \bar{t}_{II}^s\} \vdash \bar{t}^s$  значит, что множество  $\bar{t}^s$  поделено в два непересекающихся подмножества  $\bar{t}_I^s$  и  $\bar{t}_{II}^s$ . Порядок элементов в каждом из подмножеств не важен.

Чтобы сделать формулы более компактными, используем сокращенные обозначения для произведений функций зависящих от одной или двух переменных. А именно, если функция (1.4.10) зависит от множества переменных (или от двух множеств переменных), это значит, что нужно взять произведение по соответствующему множеству (или двойное произведение по двум множествам). Например,

$$f(u, \bar{t}^i) = \prod_{t_j^i \in \bar{t}^i} f(u, t_j^i), \quad f(\bar{t}^s, \bar{x}^p) = \prod_{t_j^s \in \bar{t}^s} \prod_{x_k^p \in \bar{x}^p} f(t_j^s, x_k^p). \quad (1.4.11)$$

Мы используем такие же обозначения для произведения коммутирующих операторов, их вакуумных значений  $\lambda_i$  (1.4.5) и отношений этих собственных значений  $\alpha_i$  (1.4.6)

$$\lambda_i(\bar{t}^i) = \prod_{t_j^i \in \bar{t}^i} \lambda_i(t_j^i), \quad \alpha_i(\bar{t}^i) = \prod_{t_j^i \in \bar{t}^i} \alpha_i(t_j^i), \quad T_{ij}(\bar{t}_1^s) = \prod_{t_k^s \in \bar{t}_1^s} T_{ij}(t_k^s). \quad (1.4.12)$$

Мы расширим это соглашение для новых функций, которые появятся позже. В заключении, для определенности, любое произведение по пустому множеству равно 1. Двойное произведение равно 1 если хотя бы одно из множеств пусто.

#### 1.4.4 Вектора Бете

Одной из главных задач алгебраического анзаца Бете является поиск собственных векторов трансфер-матрицы, которые также называются он-шельными векторами Бете. Чтобы это сделать, нужно сначала построить офф-шельные вектора Бете (или просто вектора Бете), которые принадлежат к Гильбертовому пространству  $\mathcal{H}$ . Последние являются специальными полиномами от  $T_{ij}(u)$  с  $i < j$ , действующими на  $|0\rangle$ . В простейшем  $\mathfrak{gl}(2)$  случае вектора Бете имеют вид  $T_{12}(\bar{u})|0\rangle$ , где  $\bar{u} = \{u_1, \dots, u_n\}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Тем не менее, в общем  $\mathfrak{gl}(N)$  случае форма векторов Бете намного сложнее (см. [114]).

В моделях, основанных на  $\mathfrak{gl}(N)$  симметрии, офф-шельный вектор Бете  $\mathbb{B}(\bar{t})$  зависит от  $N - 1$  наборов комплексных чисел  $\bar{t} = \{\bar{t}^1, \bar{t}^2, \dots, \bar{t}^{N-1}\}$ , которые называются параметры Бете. Вектор Бете  $\mathbb{B}(\bar{t})$  симметричен относительно перестановки параметров Бете из каждого множества  $\bar{t}^i$ . Тем не менее он не симметричен относительно перестановки параметров Бете из разных множеств  $t_j^i \leftrightarrow t_i^k$ . Если параметры Бете удовлетворяют специальной системе уравнений (уравнений Бете), тогда офф-шельный вектор Бете становится собственным для трансферматрицы. Тем не менее в общем положении нет никаких ограничений на параметры Бете  $t_k^i$ .

Используя матрицу монодромии  $T(u)$ , различные процедуры построения офф-шельных векторов Бете дают, с точностью до общего нормировочного множителя, одинаковые вектора, хотя различные явные формулы могут существовать в соответствии с коммутационными соотношениями (1.4.3). Тогда остается зафиксировать однозначно этот нормировочный фактор. Мы используем ту же нормировку, что и в [119]. Общий вектор Бете имеет форму полинома от  $T_{ij}$  с  $i < j$ , примененного к псевдовакууму  $|0\rangle$ . Среди всех членов этого полинома только один моном содержит только операторы  $T_{ij}$  с  $j - i = 1$ . Этот член мы будем называть главный член и обозначать  $\widetilde{\mathbb{B}}(\bar{t})$ . Мы фиксируем нормировку вектора Бете фиксируя числовой коэффициент главного члена

$$\widetilde{\mathbb{B}}(\bar{t}) = \frac{T_{N-1,N}(\bar{t}^{N-1})T_{N-2,N-1}(\bar{t}^{N-2}) \cdots T_{23}(\bar{t}^2)T_{12}(\bar{t}^1)|0\rangle}{\prod_{i=1}^{N-1} \lambda_{i+1}(\bar{t}^i) \prod_{i=1}^{N-2} f(\bar{t}^{i+1}, \bar{t}^i)}. \quad (1.4.13)$$

Напомним, что здесь мы используем сокращенные обозначения (1.4.11), (1.4.12) для произведения операторов  $T_{i,i+1}$ , вакуумных собственных значений  $\lambda_{i+1}$  и  $f$ -функций.

#### 1.4.4.1 Вектора Бете для матрицы $\widehat{T}(u)$

Мы видели в предыдущем разделе, что матрица  $\widehat{T}(u)$  удовлетворяет  $RTT$ -соотношению (1.4.2). Используя определение  $\widehat{T}_{ij}$  (см. (1.4.8), (1.4.9) и (1.4.7) можно найти действие операторов  $\widehat{T}_{ij}$  на псевдовакуум. Прямые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}\widehat{T}_{ij}(u)|0\rangle &= 0, & i > j, \\ \widehat{T}_{ii}(u)|0\rangle &= \hat{\lambda}_i(u)|0\rangle,\end{aligned}$$

где

$$\hat{\lambda}_i(u) = \frac{1}{\lambda_{N-i+1}(u - (N-i)c)} \prod_{\ell=1}^{N-i} \frac{\lambda_\ell(u - \ell c)}{\lambda_\ell(u - (\ell-1)c)}. \quad (1.4.14)$$

Из (1.4.14) следует, что отношения вакуумных собственных значений имеют следующую форму:

$$\hat{\alpha}_i(u) = \frac{\hat{\lambda}_i(u)}{\hat{\lambda}_{i+1}(u)} = \alpha_{N-i}(u - (N-i)c).$$

Окончательно, операторы  $\widehat{T}_{ij}$  с  $i < j$  действуют на  $|0\rangle$  как операторы рождения.

Таким образом, мы можем построить офф-шельные вектора Бете  $\widehat{\mathbb{B}}(\bar{t})$  связанные с матрицей монодромии  $\widehat{T}(u)$ . Эти вектора однозначно определены, если их нормировка зафиксирована. Мы делаем это в (1.4.13). А именно, главный член  $\widehat{\mathbb{B}}(\bar{t})$  офф-шельного вектора Бете  $\widehat{\mathbb{B}}(\bar{t})$  имеет вид

$$\widehat{\mathbb{B}}(\bar{t}) = \frac{\widehat{T}_{N-1,N}(\bar{t}^{N-1})\widehat{T}_{N-2,N-1}(\bar{t}^{N-2})\cdots\widehat{T}_{23}(\bar{t}^2)\widehat{T}_{12}(\bar{t}^1)|0\rangle}{\prod_{i=1}^{N-1} \hat{\lambda}_{i+1}(\bar{t}^i) \prod_{i=1}^{N-2} f(\bar{t}^{i+1}, \bar{t}^i)}.$$

Здесь мы расширили сокращенные обозначения (1.4.11), (1.4.12) на произведения операторов  $\widehat{T}_{i,i+1}$  и вакуумных собственных значений  $\hat{\lambda}_{i+1}$ .

Наш главный результат – связь между  $\mathbb{B}(\bar{t})$  и  $\widehat{\mathbb{B}}(\bar{t})$ .

#### 1.4.5 Соответствие между двумя типами векторов Бете

Чтобы сформулировать главный результат, мы вводим отображение множеств параметров Бете:

$$\mu(\bar{t}) \equiv \mu(\{\bar{t}^1, \bar{t}^2, \dots, \bar{t}^{N-1}\}) = \{\bar{t}^{N-1} - c, \bar{t}^{N-2} - 2c, \dots, \bar{t}^1 - (N-1)c\}. \quad (1.4.15)$$

Таким образом, это отображение переупорядочивает множества  $\bar{t}^i$  и сдвигает каждое множество  $\bar{t}^i$  на  $(i - N)c$ .

Теорема 1.4.1. Офф-шельные вектора Бете  $\mathbb{B}$  и  $\hat{\mathbb{B}}$  интегрируемых моделей с  $\mathfrak{gl}(N)$ -инвариантной  $R$ -матрицей связаны соотношением

$$\hat{\mathbb{B}}(\bar{t}) = (-1)^{\#\bar{t}} \left( \prod_{s=1}^{N-2} f(\bar{t}^{s+1}, \bar{t}^s) \right)^{-1} \mathbb{B}(\mu(\bar{t})).$$

Здесь  $\#\bar{t}$  – это полное количество элементов всех множеств  $\bar{t}^i$ , и согласно (1.4.15)

$$\mathbb{B}(\mu(\bar{t})) = \mathbb{B}(\bar{t}^{N-1} - c, \bar{t}^{N-2} - 2c, \dots, \bar{t}^1 - (N-1)c).$$

Эту теорему можно доказать, используя отождествление офф-шельного вектора Бете с определенными комбинациями производящих рядов генераторов Янгианного дубля (см. [114]). Главным инструментом этого подхода является использование гауссовых координат матрицы монодромии вместо использования ее матричных элементов  $T_{ij}(u)$ .

## 1.5 Квантовые матричные алгебры и их приложение к интегрируемым моделям

В широко известной работе [127] авторы доказали, что любой оператор связности  $\partial_u - M(u)$ , где  $\partial_u = \frac{d}{du}$  и  $M(u)$  есть  $N \times N$  матрица, гладко зависящая от параметра  $u$ , может быть калибровочным преобразованием

$$\partial_u - M(u) \mapsto g(u)(\partial_u - M(u))g(u)^{-1} = \partial_u - g(u)M(u)g(u)^{-1} + g(u)\partial_u(g(u)^{-1})$$

приведен к стандартному виду  $\partial_u - M_{can}(u)$ , где  $M_{can}(u)$  имеет следующий вид:

$$M_{can} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, авторы работы [127] нашли, что редуцированная Пуассонова структура может быть отождествлена со второй структурой Гельфанда-Дикого. В дальнейшем форма матрицы вида  $M_{can}$  будет называться канонической или, более точно, второй канонической формой. Основным числовым полем будет поле комплексных чисел  $\mathbb{C}$ .

Квантовая  $q$ -версия редукции Дринфельда-Соколова была определена в работах [129, 128]. В этих работах вместо частной производной  $\partial_u$  был рассмотрен оператор  $D_q f(x) = f(qx)$ ,  $q \neq 1$  и вышеприведенное калибровочное преобразование заменяется на следующее выражение

$$D_q - M(u) \mapsto g(qu)(D_q - M(u))g(u)^{-1}.$$

Было доказано, что оператор  $D_q - M(u)$  может быть редуцирован к аналогичному виду  $D_q - M_{can}(u)$ , где  $M_{can}(u)$  подобен вышеприведенной формуле.

Подчеркнем, что все эти результаты есть операторные аналоги редукционной процедуры для числовых матриц (независимых от параметров). В соответствии с теоремой Фробениуса любая такая матрица  $M$  может быть приведена ко второй канонической форме преобразованием подобия  $M \mapsto g M g^{-1}$ .

Однако, если матричные элементы матрицы  $M \in \text{Mat}(A)$  принадлежат некоторой некоммутативной алгебре  $A$  (например, универсальной обертывающей алгебре  $U(\mathfrak{gl}(N))$ ), то такая редукция, вообще говоря, невозможна. Тем не менее, если  $M \in \text{Mat}(U(\mathfrak{gl}(N)))$  представляет собой специально выбранную матрицу (в частности, генерирующую матрицу этой алгебры), то ее редукция ко второй канонической форме возможна в смысле работы [122]. Эта редукция заключается в следующем: для данной матрицы  $M \in \text{Mat}(A)$  можно определить другую матрицу  $M_{can}$ , матричные элементы которой есть некоторые полиномы от матричных элементов исходной матрицы с последующим доказательством взаимного подобия этих матриц. Подобие означает, что существует нетривиальная матрица  $C \in \text{Mat}(A)$ , такая, что  $MC = CM_{can}$ .

Редукция операторов в смысле работы [122] определяется таким же образом. Именно в этом смысле оператор  $\partial_u - M(u)$ , где  $M(u)$  есть матрица Лакса для модели Годена, был редуцирован к оператору вида  $\partial_u - M_{can}(u)$  в статье [122].

В настоящей работе мы обобщаем этот результат на производящую матрицу некоторых квантовых алгебр, в частности, на алгебры уравнения отражений, связанные с косообратимыми инволютивными или Геккевскими симметриями, а также на твистованные Янгианы, введенные недавно в работе [125]. В качестве сопутствующего результата мы получаем аналогичную редукцию для производящих матриц обертывающей алгебры  $U(\mathfrak{gl}(N))$ .

В основе нашего подхода лежит тождество Гамильтона-Кэли, справедливое для производящей матрицы алгебры уравнения отражений или твистованного Янгиана, установленное в работах [123] и [125] соответственно. Подчеркнем, что это тождество позволяет нам связать квантовые аналоги симметрических элементов — степенные сум-

мы и элементарные симметрические полиномы. Заметим, что степенные суммы в случае алгебры уравнения отражений определяются формулой  $\text{Tr}_R L^k$ , где операция  $\text{Tr}_R$  представляет собой так называемый  $R$ -след, связанный с заданной инволютивной или Геккевской симметрией  $R$ . В случае обобщенных Янгианов квантовые степенные суммы определяются аналогичными формулами, но со сдвинутыми значениями аргумента  $u$ . Обратим внимание читателя на тот факт, что использование  $R$ -следа вместо обычного следа есть специфическая особенность этих алгебр. Другая особенность состоит в том, что форма тождества Гамильтона-Кэли в этих алгебрах аналогична форме тождества в классическом случае.

Упомянутые выше квантовые симметрические элементы порождают коммутативную подалгебру в обобщенном Янгиане. Эта подалгебра называется подалгеброй Бете. Следовательно, появляется возможность конструировать квантовые интегрируемые системы, интегралы движения которых выражались бы в виде элементов подалгебры Бете.

Опишем коротко квантовые матричные алгебры, которые рассматриваются в данной работе. Напомним, прежде всего, что под токовой  $R$ -матрицей обычно понимается оператор  $R(u, v)$ , зависящий от параметров  $u$  и  $v$  и удовлетворяющий так называемому квантовому уравнению Янга-Бакстера

$$R_{12}(u, v)R_{23}(u, w)R_{12}(v, w) = R_{23}(v, w)R_{12}(u, w)R_{23}(u, v),$$

где  $R_{12}(u, v) = R(u, v) \otimes I$  и  $R_{23}(u, v) = I \otimes R(u, v)$ .

В случае, когда матрица  $R$  не зависит от параметров, мы будем называть ее твистом. В этом случае всегда предполагается, что оператор  $R : V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$  либо инволютивный (то есть,  $R^2 = I$ ), либо удовлетворяет условию Гекке

$$(qI - R)(q^{-1}I + R) = 0, \quad q^2 \neq 1.$$

Здесь  $V$  — конечномерное комплексное линейное пространство размерности  $N$ . Такие твисты мы будем называть соответственно инволютивными или Геккевскими симметриями.

Пусть  $R$  представляет собой кособратимую инволютивную или Геккевскую симметрию би-ранга  $(m|0)$ . Обозначим алгебру уравнения отражений символом  $\mathcal{L}(R)$ . В работе [123] было показано, что генерирующая матрица  $L$  этой алгебры удовлетворяет квантовому тождеству Гамильтона-Кэли  $Q(L) = 0$ , где характеристический полином  $Q(t)$  имеет вид:

$$Q(t) = t^m - qt^{m-1}e_1(L) + q^2t^{m-2}e_2(L) + \cdots + (-q)^{m-1}te_{m-1}(L) + (-q)^me_m(L) = 0.$$

Здесь множители  $e_k(L)$  являются квантовыми элементарными симметрическими полиномами.

Отметим очень важное свойство полиномов  $e_k(L)$ : они принадлежат центру алгебры уравнения отражений  $Z(\mathcal{L}(R))$ . Введем собственные значения  $\{\mu_i\}_{1 \leq i \leq m}$  матрицы  $L$  по аналогии с классическим случаем:

$$e_1(L) = \mu_1 + \dots + \mu_m \quad \dots \quad e_m(L) = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_m.$$

Эти собственные значения являются элементами алгебраического расширения центра  $Z(\mathcal{L}(R))$ . Рассмотрим фактор-алгебру

$$\mathcal{L}(R) / \langle e_1(L) - \alpha_1, \dots, e_m(L) - \alpha_m \rangle, \quad \alpha_i \in \mathbf{C},$$

где символ  $\langle I \rangle$  обозначает идеал, порожденный подмножеством  $I \subset \mathcal{L}(R)$ . Эта фактор-алгебра является квантовым аналогом орбиты (или объединения орбит) коприсоединенного действия группы  $GL(N)$ . В работе [124] рассматривалась такая задача: для каких значений параметров  $\alpha_i$  фактор-алгебра дает аналог регулярной орбиты? Если это верно, то мы вводим диагональную матрицу  $diag(\mu_1, \dots, \mu_m)$ , где элементы  $\mu_i$  находятся из следующей системы уравнений:

$$e_1(L) = \alpha_1 \quad \dots \quad e_m(L) = \alpha_m.$$

Приведенная выше диагональная матрица представляет собой первую каноническую форму производящей матрицы  $L$ .

Введем теперь вторую каноническую форму матрицы  $L$ :

$$L_{can} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \dots & a_1 \end{pmatrix},$$

где элементы  $a_k$  пропорциональны элементарным симметрическим полиномам

$$a_k = -(-q)^k e_k(L).$$

Нетрудно показать, что матрицы  $L$  и  $L_{can}$  связаны аналогом преобразованием подобия. Пусть  $v \in V$  — произвольный нетривиальный вектор, записанный в виде

однострочной матрицы. Рассмотрим следующую  $N \times N$  матрицу

$$C = \begin{pmatrix} v \\ vL \\ \dots \\ vL^{m-1} \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $L$  и  $L_{can}$  подобны в следующем смысле:

$$CL = L_{can}C.$$

Для оправдания термина “подобие матриц” было бы желательно показать, что хотя бы для некоторых векторов  $v$  матрица  $C$  обратима в поле частных алгебры  $\mathcal{L}(R)$ . Аналогичная проблема возникает также и для обобщенного Янгиана, рассматриваемого ниже.

Определим также квадратично-линейную деформацию алгебры уравнения отражений  $\hat{\mathcal{L}}(R)$  следующей системой соотношений

$$RL_1 RL_1 - L_1 RL_1 R = RL_1 - L_1 R, \quad L = \|\hat{l}_i^j\|_{1 \leq i, j \leq N}.$$

Алгебра  $\mathcal{L}(R)$  представляет собой твистованный аналог алгебры  $\text{Sym}(gl(N))$ , тогда как  $\hat{\mathcal{L}}(R)$  есть твистованный аналог универсальной обертывающей алгебры  $U(gl(N))$ . Более точно, если матрица  $R$  является Геккевской симметрией (деформацией обычной перестановки, например,  $R$ -матрица связанная с квантовой группой  $U_q(sl(N))$ ), то в пределе  $q \rightarrow 1$  алгебры  $\mathcal{L}(R)$  и  $\hat{\mathcal{L}}(R)$  превращаются в  $\text{Sym}(gl(N))$  и  $U(gl(N))$  соответственно.

Воспользуемся тем, что алгебры  $\mathcal{L}(R)$  и  $\hat{\mathcal{L}}(R)$  изоморфны друг другу при условии, что  $q \neq \pm 1$ . Опираясь на этот факт, мы можем получить характеристический полином  $\hat{Q}(t)$  для производящей матрицы  $\hat{L}$  алгебры  $\hat{\mathcal{L}}(R)$ . В результате мы получаем следующее (см. работу [126])

$$\hat{Q}(t) = q^m \text{Tr}_{R(1\dots m)} \left( A^{(m)}(tI - \hat{L}_{\overline{1}})((q^2 t - q)I - \hat{L}_{\overline{2}}) \dots ((q^{2(m-1)} t - q^{m-1}(m-1)_q)I - \hat{L}_{\overline{m}}) \right).$$

Соответствующее тождество Гамильтона-Кэли выглядит так:  $\hat{Q}(\hat{L}) = 0$ .

Переходя к пределу  $q \rightarrow 1$  мы получим характеристический полином для производящей матрицы  $M$  алгебры  $U(gl(N))$ . Заметим, что перестановочные соотношения для генераторов  $U(gl(N))$

$$m_i^j m_k^l - m_k^l m_i^j = m_i^l \delta_k^j - m_k^j \delta_i^l,$$



могут быть записаны в матричном виде для производящей  $N \times N$  матрицы  $M = \|m_i^j\|$ :

$$PM_1PM_1 - M_1PM_1P = PM_1 - M_1P.$$

Соответствующее предельное тождество Гамильтона-Кэли имеет вид:

$$\mathcal{Q}(t) = \text{Tr}_{(1\dots N)} (\mathcal{A}^{(N)}(tI - M_1)((t-1)I - M_2) \dots ((t-N+1)I - M_N)),$$

где  $\mathcal{A}^{(N)}$  есть обычный оператор антисимметризации в пространстве  $V^{\otimes N}$ , а операция  $\text{Tr}$  представляет собой обычный матричный след. В алгебре  $U(\mathfrak{gl}(N))$  выполнено тождество  $\mathcal{Q}(M) = 0$ .

Отметим, что широко известный детерминант Капелли задается аналогичной формулой. Такое же утверждение справедливо для любой алгебры  $\hat{\mathcal{L}}(R)$ , при условии, что  $R$  — инволютивная симметрия.

Кроме того, оказывается возможным ввести вторые канонические формы  $\hat{L}_{can}$  и  $M_{can}$  для матриц  $\hat{L}$  и  $M$  соответственно, которые порождают алгебры  $\hat{\mathcal{L}}(R)$  и  $U(\mathfrak{gl}(N))$ .

Отметим, что имеются и другие матрицы с элементами из некоммутативной алгебры, для которых существует квантовый аналог тождества Гамильтона-Кэли. Во-первых, рассмотрим универсальную обертывающую алгебру  $U(\mathfrak{gl}(N))$ . Ее производящая матрица принадлежит так называемому квантовому семейству алгебр, введенному Кирилловым:

$$(U(\mathfrak{gl}(N)) \otimes \text{End}(V))^{gl(N)}.$$

Заменяя пространство  $V$  пространством другого неприводимого  $U(\mathfrak{gl}(N))$ -модуля, мы получим другие квантовые семейства алгебр. Для их порождающих матриц также можно написать тождества Гамильтона-Кэли.

Наиболее известными примерами симметрий Гекке являются матрицы, происходящие из квантовой группы  $U_q(\mathfrak{sl}(N))$ . Однако, имеются многочисленные примеры инволютивных и Геккевских симметрий, которые не представляют собой деформаций обычных или суперперестановок (см. работу [125] и приведенные там ссылки).

Все симметрии  $R$ , с которыми мы будем иметь дело, предполагаются четными и косообратимыми. Термин “четный” означает, что существует натуральное число  $m > 0$ , такое, что матрица  $R$  имеет би-ранг  $(m|0)$ . Для всякой косообратимой  $R$ -матрицы можно ввести важное понятие  $R$ -следа, как отображения вида

$$\text{Tr}_R : \text{End}(V) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Более того, это отображение хорошо определено для любой матрицы  $A$ .

Введем в рассмотрение два типа квантовых матричных алгебр следующими системами соотношений на их генераторы:

$$RT_1T_2 - T_1T_2R = 0, \quad T = \|t_i^j\|_{1 \leq i, j \leq N}$$

$$RL_1RL_1 - L_1RL_1R = 0, \quad L = \|l_i^j\|_{1 \leq i, j \leq N},$$

где  $R$  предполагается инволютивной или Геккевской косообратимой симметрией. Первая алгебра носит название РТТ алгебры, вторая называется алгеброй уравнения отражений. Если матрица  $R$  является деформацией обычной перестановки  $P$ , то размерности однородных компонент обеих алгебр являются классическими, то есть, равными размерностям однородных компонент алгебры  $\text{Sym}(gl(N))$  (для случая Геккевской симметрии значение параметра  $q$  предполагается в общем положении).

Перейдем теперь к определению янгианоподобных алгебр, связанных с токовыми  $R$ -матрицами. Заметим прежде всего, что токовые  $R$ -матрицы, с которыми мы работаем, строятся по инволютивным или Геккевским симметриям посредством так называемой процедуры бакстеризации. Данная процедура приводит к следующему виду токовых  $R$ -матриц:

$$R(u, v) = R - g(u, v)I,$$

где  $g(u, v) = \frac{1}{u-v}$ , если  $R$  — инволютивная симметрия, или  $g(u, v) = \frac{(q-q^{-1})u}{u-v}$  для случая Геккевской симметрии.

Соответствующие алгебры янгианного типа также делятся на два семейства (см. работу [125]). Они задаются соответственно двумя системами соотношений на производящие матрицы своих генераторов:

$$R(u, v) T_1(u) T_2(v) = T_1(v) T_2(u) R(u, v),$$

$$R(u, v) L_1(u) R L_1(v) = L_1(v) R L_1(u) R(u, v),$$

где производящие матрицы  $T(u)$  и  $L(u)$  представляют собой формальные ряды по параметру  $u$

$$T(u) = \sum_{k \geq 0} \frac{T[k]}{u^k}, \quad L(u) = I + \sum_{k > 0} \frac{L[k]}{u^k}.$$

Эти алгебры будут называться соответственно обобщенными Янгианами РТТ-типа и брейдинговыми Янгианами. Заметим, что брейдинговый Янгиан определяется аналогично алгебре уравнения отражений, но в крайних позициях стоят токовые  $R$ -матрицы взамен постоянных. Введем удобные обозначения

$$L_{\bar{1}}(u) = L_1(u), \quad L_{\bar{k}}(u) = R_{k-1} L_{k-1}^{-1}(u) R_{k-1}^{-1}, \quad k \geq 2,$$

и будем в дальнейшем писать  $R_i$  вместо  $R_{i+1}$  (напомним, что  $R_{i+1}$  обозначает оператор  $R$ , действующий в  $i$ -й и  $(i+1)$ -й позициях тензорного произведения  $V^{\otimes k}$ ,  $i+1 \leq k$ ). Для алгебры уравнения отражений мы будем применять те же самые обозначения для производящей матрицы  $L$ , не зависящей от параметров.

Пользуясь этими обозначениями, запишем определяющие соотношения алгебры уравнения отражений в виде:

$$R_1 L_{\bar{1}} L_{\bar{2}} - L_{\bar{1}} L_{\bar{2}} R_1 = 0.$$

Кроме того, эти соотношения могут быть транслированы на любые копии производящей матрицы

$$R_k L_{\bar{k}} L_{\overline{k+1}} - L_{\bar{k}} L_{\overline{k+1}} R_k = 0, \quad \forall k \geq 1.$$

Эти обозначения позволяют нам определить аналоги симметрических полиномов в РТТ алгебре и алгебре уравнения отражений единым образом. Например, степенные суммы задаются следующими формулами:

$$p_k(T) = \text{Tr}_{R(12\dots k)} R_{k-1} R_{k-2} \dots R_2 R_1 T_1 T_2 \dots T_k,$$

для РТТ алгебры и

$$p_k(L) = \text{Tr}_{R(12\dots k)} R_{k-1} R_{k-2} \dots R_2 R_1 L_{\bar{1}} L_{\bar{2}} \dots L_{\bar{k}}.$$

для алгебры уравнения отражений. Здесь символ  $\text{Tr}_{R(12\dots k)}$  означает, что  $R$ -след применяется в позициях  $1, 2, \dots, k$ . В алгебре уравнения отражений формула для степенных сумм может быть существенно упрощена до выражения  $p_k(L) = \text{Tr}_R L^k$ , тогда как в РТТ алгебре такое упрощение невозможно.

Похожими формулами задаются квантовые степени матриц  $T$  и  $L$ :

$$T^{[k]} := \text{Tr}_{R(2\dots k)} R_{k-1} R_{k-2} R_2 \dots R_1 T_1 T_2 \dots T_k,$$

$$L^{[k]} := \text{Tr}_{R(2\dots k)} R_{k-1} R_{k-2} \dots R_2 R_1 L_{\bar{1}} L_{\bar{2}} \dots L_{\bar{k}}.$$

Выпишем еще аналоги элементарных симметрических полиномов в обеих алгебрах:

$$e_0(T) = 1, \quad e_k(T) := \text{Tr}_{R(1\dots k)} (A^{(k)} T_1 T_2 \dots T_k), \quad k \geq 1,$$

$$e_0(L) = 1, \quad e_k(L) := \text{Tr}_{R(1\dots k)} (A^{(k)} L_{\bar{1}} L_{\bar{2}} \dots L_{\bar{k}}), \quad k \geq 1.$$

В этих формулах  $A^{(k)} : V^{\otimes k} \rightarrow V^{\otimes k}$ ,  $k \geq 1$  являются антисимметризаторами со следующим рекурсивным определением:

$$A^{(1)} = I, \quad A^{(k)} = \frac{1}{k_q} A^{(k-1)} (q^{k-1} I - (k-1)_q R_{k-1}) A^{(k-1)}, \quad k \geq 2.$$

В приведенной выше формуле использовано стандартное обозначения для  $q$ -числа:  $k_q = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}}$ . Для четной симметрии  $R$  биранга  $(m|0)$ ,  $m \geq 2$ , антисимметризаторы  $A^{(k)}$  тривиальны для  $k > m$  и ранг старшего ненулевого антисимметризатора  $A^{(m)}$  равен 1.

Матричные степени, степенные суммы и элементарные симметрические полиномы могут быть определены и для обобщенных Янгианов обоих классов [125]. Также в этих алгебрах существуют квантовые аналоги тождества Гамильтона-Кэли. Однако в РТТ-алгебре и в обобщенном Янгиане РТТ типа форма тождества Гамильтона-Кэли сильно отличается от классической, что препятствует проведению редукции производящей матрицы методами работы [122].

### 1.6 Вычисление корреляционных функций в $sl_3$ модели и уравнение Книжника-Замолодчикова

В течение последних тридцати лет был достигнут значительный прогресс в изучении корреляционных функций интегрируемых моделей, в частности, интегрируемой модели Гейзенберга-Изинга со спином  $1/2$  (или XXZ модели) ассоциированной с квантовой группой  $U_q(\hat{sl}_2)$ . В частности, в настоящее время известны методы вычисления статических корреляционных функций данной модели при весьма общих условиях равновесия на коротких и длинных дистанциях с произвольной заданной точностью. Еще значительнее тот факт, что возможно удалось открыть часть математических структур, позволяющих отличать корреляционные функции интегрируемых систем от функций неинтегрируемого случая. Для изучения этих структур и корреляционных функций на коротких расстояниях оказалось плодотворным рассмотрение редуцированной матрицы плотности конечных связных фрагментов XXZ-цепочки и ее неоднородных многопараметрических версий. Эти варианты модели ассоциированы с шестивершинной моделью статистической физики. Начиная с пионерских работ “Киотской школы” был разработан целый ряд разнообразных методов для получения представлений редуцированной матрицы плотности, а также доказаны общие теоремы о ее структуре. В работе [130] было получено представление корреляционной функции основного состояния XXZ цепочки в массивном режиме в виде кратного интеграла. При этом использовался подход  $q$ -вертексных операторов, основанный на теории представлений алгебры  $U_q(\hat{sl}_2)$ , являющийся развитием метода угловой трансфер-матрицы Бакстера и методов конформной теории поля.

В дальнейшем эти результаты были обобщены на безмассовый режим с использованием техники функциональных уравнений со спектральным параметром типа модели  $qKZ$ . Потом последовали дальнейшие обобщения на основе анзаца Бете, что позво-

лило включить в рассмотрение продольное магнитное поле и произвольные конечные температуры.

В работе [121] было обнаружено, что кратные интегралы, представляющие корреляционные функции основного состояния в пределе зануляющегося магнитного поля факторизуются в произведение одномерных интегралов. Этот факт объяснил загадочный сингулярный результат, полученный в работах Такаши еще в 70-х годах. Затем, в коллаборации с японскими коллегами авторы работы открыли алгебраические структуры, отвечающие за факторизацию кратных интегралов. Были построены операторы рождения и уничтожения в пространстве квазилокальных операторов таким образом, что операторы рождения порождали специальный фермионный базис последовательным действием на вакуум пространства Фока. Впоследствии Джимбо с соавторами доказал важную теорему, в которой утверждалось, что при самых общих условиях корреляционные функции, отвечающие любому квазилокальному оператору, выражаются только через две основные функции  $\rho$  и  $\omega$  посредством детерминантной формулы.

Функция  $\rho$  является одноточечной корреляционной функцией, зависящей от спектрального параметра, в основных случаях она описывает намагниченность. Двухточечная корреляционная функция  $\omega$  зависит, соответственно, от двух спектральных параметров. Она может быть интерпретирована в терминах среднего значения спектрального оператора длины 2 или специальной корреляционной функции, описывающей парное взаимодействие ближайших узлов цепочки. С этой точки зрения функция  $\omega$  очень похожа на плотность энергии.

Таким образом, теорема Джимбо утверждает, что две независимые локальные нетривиальные корреляционные функции определяют все остальные корреляционные функции модели посредством алгебраических соотношений. Более того, все физические параметры, такие как длина системы, температура, магнитное поле и так далее, входят в ответы только через зависимость от них этих двух выделенных корреляционных функций, которые допускают эффективное описание в терминах решений линейных и нелинейных интегральных уравнений.

Представляется вполне естественным, если бы аналогичная структура, допускающая алгебраическое выражение всех статических корреляционных функций через несколько корреляционных функций малого радиуса, существовала бы и для других, более сложных интегрируемых систем. Следующими по сложности после основных моделей, связанных с  $U_q(\hat{sl}_2)$ , являются их обобщения на квантовые группы более высоких рангов, а также рациональные пределы этих моделей. Мы развили и обобщили известные результаты по функциональным уравнениям и их спектру с помощью мето-

дов теории представлений и получили их полное доказательство в совместной работе с F.Göhrman и другими [120].

Исследование спектральной задачи для этих моделей старшего ранга (особенно в их рациональной  $sl(N)$ -симметрической версии) имеет длинную историю, начинающуюся с пионерских работ Янга и Сазерленда по многокомпонентным моделям Бозе и Ферми газов. В частности, рассматривалась проблема диагонализации Гамильтониана

$$H = \pm \sum_{j=1}^L P_{j,j+1} \quad (1.6.1)$$

с периодическими граничными условиями, где оператор  $P$  перемешивает локальные состояния  $N$  бозонов и  $M$  фермионов. В настоящее время этот Гамильтониан называется  $sl(N|M)$ -инвариантным обменным Гамильтонианом. Сазерленд был первым, кто сумел его диагонализировать методом вложенного анзаца Бете. Вложенный алгебраический анзац Бете впоследствии был детально развит в работах Кулиша и Решетихина. Соответствующая  $sl(N)$   $R$ -матрица пропорциональна  $S$ -матрице  $SU(N)$  модели Гросса-Невье, интересной квантовополевой модели, связанной с квантовой группой старшего ранга.

Корреляционные функции релятивистских квантовополевых моделей можно изучать, опираясь на решения набора функциональных уравнений, известных как аксиомы форм фактора. Форм факторы дают возможность изучать корреляционные функции посредством определенных спектральных представлений под видом суммирования кратных интегралов, что часто оказывается полезным для асимптотического анализа. Форм факторы решеточных моделей менее ограничительны. Они не получаются как решения функциональных уравнений, но в последние годы их научились строить методами алгебраического анзаца Бете. Однако их суммирование до корреляционной функции по-видимому сложная процедура, особенно в случае коротких дистанций. Единственный более-менее конкретный результат для корреляционных функций полученный до сих пор в рамках решеточного форм факторного подхода относится к двухточечным функциям на больших расстояниях.

Помимо описанных выше методов и подходов применялся также и подход, основанный на теории вертексных операторов. В рамках этого подхода было получено представление в виде кратного интеграла для  $U_q(\hat{sl}_n)$  модели в критическом и массивном режимах. К сожалению, соответствующие формулы весьма громоздки и, к тому же, получены с точностью до нормировки. Это приводит к большим трудностям при попытке применить методы численного анализа полученных результатов. Ситуация становится

еще более сложной, для алгебраической структуры фундаментальной  $sl_3$  решеточной модели, подобной той, что была выявлена в модели XXZ.

В настоящей работе мы рассматриваем Гамильтониан (1.6.1) при нулевой температуре и отсутствующих внешних полях. Поскольку нам не удалось непосредственно обобщить скрытую фермионную структуру  $sl_2$  случая, мы будем следовать по другому пути, который также приведет к выявлению этой структуры. Мы выведем редуцированное квантовое уравнение Книжника-Замолодчикова (rqKZ), введенное еще при исследовании  $sl_2$  модели. Затем мы приведем решение этого нового уравнения rqKZ для  $n = 1, 2, 3$  узлов цепочки, что позволит нам получить прямой аналитический ответ для редуцированной матрицы плотности сегментов цепочки соответствующей длины. Отметим, что уравнение rqKZ не было известно для  $sl_3$  случая, и, кроме того, обобщение от  $sl_2$  до  $sl_3$  не является прямолинейным и тривиальным, как это может показаться на первый взгляд, поскольку в старшем ранге отсутствует кроссинг симметрия. Наши результаты для корреляционных функций малых расстояний при  $n = 1, 2, 3$  являются первыми явными результатами для корреляционных функций данной модели. Случай  $n = 4$  значительно сложнее. Основная цель наших исследований — определить минимальный набор независимых корреляционных функций малых расстояний, которые будут определять все корреляционные функции данной модели на больших расстояниях.

## 1.7 Вычисление конформных блоков сектора Неве-Шварца алгебры Вирасоро

Нами получены рекурсионные соотношения для конформных блоков NS сектора алгебры Вирасоро при помощи полюсного разложения. Используя известную формулу для положения сингулярных векторов в NS модуле, мы вычисляем вычеты конформных блоков в этих точках. В простейшем примере четырехточечного блока с-рекурсия есть сумма по полюсам во внутреннем канале

$$F_n = G_n + \sum_{\substack{rs \leq 2n \\ r \geq 2, s \geq 1, \\ r+s \in 2\mathbb{N}}} \frac{R_{r,s}(h)}{c - c_{r,s}(h)} F_{n-\frac{rs}{2}}(h \rightarrow h + \frac{rs}{2}, c \rightarrow c_{r,s}(h)) .$$

Отдельно рассматриваются наиболее важные случаи многоточечных конформных блоков на сфере и на торе. Также приведены рецепты для применения рекурсии к конформным теориям на поверхности рода  $g > 1$ . Для анализа глобальных блоков на поверхности рода  $g > 0$  мы используем обобщение формулы из нашей предыдущей статьи

$$G = \prod_{n=2}^{\infty} \frac{1 + q^{n-\frac{1}{2}}}{1 - q^n} \times F|_{osp(1|2)} = \sum_{n \in \frac{1}{2}\mathbb{N}_0} G_n q^n .$$

Используя свойства модулей над алгеброй Супер-Вирасоро, мы приводим формулу для разложения конформных блоков в сумму глобальных  $\mathfrak{osp}(2|1)$  блоков с неопределенными коэффициентами. Для 4-точечного блока эта формула имеет следующий вид

$$F = \sum_{p \in \frac{1}{2}\mathbb{N}_0} z^p \chi_p G(h \rightarrow h + p) .$$

Далее, пользуясь рекуррентными соотношениями, мы находим неизвестные коэффициенты

$$\chi_p = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \prod_{\ell=1}^j \sum_{\substack{r_\ell \geq 2, \\ s_\ell \geq 1}}^{\infty} \gamma_{r_\ell, s_\ell}(c_{eff}^{(\ell)}, d_i, h_{eff}^{(\ell)}) , \text{ with } \sum_{\ell=1}^j r_\ell s_\ell = 2p \text{ and } r_i + s_i \in 2\mathbb{N} .$$

Полученное решение полезно для доказательства свойств конформных блоков в квазиклассических пределах, потому что сходимость полученных рядов быстрее, чем у  $s$ -рекурсии.

## 1.8 Контравариантная форма редукционных алгебр

Контравариантная форма (или форма Шаповалова) на модулях старшего веса представляет собой мощный инструмент в теории представлений редуктивных алгебр Ли. Она применяется для построения неприводимых представлений, описания сингулярных векторов модулей Верма и так далее. В настоящей работе мы определяем и вычисляем аналог формы Шаповалова для некоторых модулей над редукционными алгебрами. В качестве иллюстрации мы вычислим нормы сингулярных векторов в тензорном произведении неприводимых конечномерных представлений алгебры Ли  $gl_n$  и симметрические или внешние степени ее фундаментального представления.

Пусть  $g$  является редуктивной алгеброй Ли с данным треугольным разложением  $g = n_- + h + n_+$ . Здесь  $n_\pm$  есть две противоположных максимальных нильпотентных подалгебр алгебры  $g$ , а  $h$  — ее подалгебра Картана. Редукционные алгебры  $Z_\pm$  и  $Z$  строятся по паре  $(\mathcal{A}, U(g))$ , где  $\mathcal{A}$  представляет собой ассоциативную алгебру, которая содержит универсальную обертывающую алгебру  $U(g)$  алгебры  $g$ . Мы определяем контравариантную форму для трех специальных редукционных алгебр: диагональной редукционной алгебры  $D(gl_n)$  и алгебры  $\text{Diff}_h(n)$  вместе с ее нечетной версией  $G\text{Diff}_h(n)$ .

Алгебраическая конструкция контравариантной формы для универсальной обертывающей алгебры полупростой алгебры Ли основана на отображении Хариш-Чандры, которое, в свою очередь, базируется на треугольном разложении  $g = n_- + h + n_+$ . Это разложение влечет разложение универсальной обертывающей алгебры  $U(g)$  в сумму



левого идеала  $n_-U(g)$ , правого идеала  $U(g)n_+$  и коммутативного кольца  $U(h)$ . Отображение Хариш-Чандры и контравариантная форма могут быть определены также и для алгебр  $D(gl_n)$ ,  $\text{Diff}_h(n)$  и  $G\text{Diff}_h(n)$ . Однако, диагональная редукционная алгебра обладает аналогичным изложенному выше разложением в сумму определенного левого и правого идеалов и коммутативного кольца над локализованной универсальной обертывающей алгеброй  $U(h)$ . Мы будем применять это разложение для определения аналога отображения Хариш-Чандры и для последующего построения контравариантной формы.

Следующий шаг будет состоять в расширении построенной формы на некоторые стандартные модули над редукционными алгебрами. Стандартный модуль обладает структурой бимодуля над  $(Z, U(h))$  и, кроме того, может трактоваться как деформация пространства рациональных функций на  $h^*$  со значениями в  $V$ , где  $V$  есть  $U(g)$ -модуль в случае диагональной редукционной алгебры или модулем над кольцом дифференциальных операторов в случае редукционных алгебр  $\text{Diff}_h(n)$  и  $G\text{Diff}_h(n)$ . Специализация стандартного модуля над диагональной редукционной алгеброй в точке общего веса  $\lambda \in h^*$  может быть отождествлена с пространством сплетающих операторов

$$M_\lambda \rightarrow V \otimes M_\mu,$$

снабженного структурой модуля над диагональной редукционной алгеброй. Здесь  $M_\lambda$  и  $M_\mu$  есть модули Верма над алгеброй  $g$ . Диагональная редукционная алгебра  $D(gl_n)$  и алгебры  $\text{Diff}_h(n)$  и  $G\text{Diff}_h(n)$  рассматриваются как деформации в вышеописанном смысле алгебр  $U(gl_n)$  и, соответственно, алгебр полиномиальных дифференциальных операторов от четных и нечетных переменных. Аналогично, стандартные модули  $P_h(n)$  и  $G_h(n)$  над кольцом  $h$ -дифференциальных операторов могут рассматриваться как деформации полиномиальных колец  $P(n)$  и  $G(n)$  соответственно.

Далее наша задача будет состоять в вычислении контравариантной формы на стандартных модулях  $P_h(n)$  и на их косо́й версии  $G_h(n)$ . Для решения этой задачи мы воспользуемся автоморфизмами Желобенко, определенными для редукционных алгебр. Затем мы используем связь контравариантной формы на редукционных алгебрах  $\text{Diff}_h(n)$  и  $G\text{Diff}_h(n)$  с автоморфизмом Желобенко  $\xi_{w_0}$ , где  $w_0$  есть элемент максимальной длины в группе Вейля алгебры  $gl_n$ . Происхождение этой связи восходит к работам Желобенко, в которых она применялась для доказательства неприводимости образов сплетающих операторов между некоторыми стандартными модулями Янгианов. Мы представляем слегка отличающееся доказательство этой связи и затем вычисляем контравариантную форму на полиномиальных представлениях алгебр  $\text{Diff}_h(n)$  и  $G\text{Diff}_h(n)$

двумя способами: во-первых, с помощью  $\xi_{w_0}$ , а во-вторых, прямым вычислением в данных редукционных алгебрах.

Специализация  $U(\hbar)$ -значной контравариантной формы в точке общего веса  $\lambda$  совпадает с ограничением  $gl_n$ -контравариантной формы на сингулярные (то есть,  $n_+$  инвариантные) вектора тензорных произведений  $P(n) \otimes M_\lambda$  и  $G(n) \otimes M_\lambda$  соответственно. Это совпадение возникает также и для тензорных произведений  $P(n) \otimes L_\lambda$  и  $G(n) \otimes L_\lambda$ , где  $L_\lambda$  есть неприводимый  $gl_n$ -модуль с доминантным весом  $\lambda$ . В этом случае контравариантная форма также допускает специализацию. Один из основных результатов данной работы состоит в доказательстве того, что эти специализации  $P_h(n)$  и  $G_h(n)$  представляют нулевые сингулярные вектора тогда и только тогда, когда они лежат в ядре специализированной формы.

Пусть  $g$  — конечномерная редуктивная алгебра Ли с фиксированным треугольным разложением  $g = n_- + h + n_+$ , где  $h$  — подалгебра Картана,  $n_-$  и  $n_+$  — две противоположные нильпотентные подалгебры. Обозначим символом  $\Delta$  систему корней алгебры  $g$ , символом  $\Delta_+$  — множество положительных корней. Пусть  $A$  представляет собой некоторую ассоциативную алгебру, содержащую в себе универсальную обертывающую алгебру  $U(g)$ . Тогда, в частности, алгебра  $A$  представляет собой  $U(g)$ -бимодуль по отношению к левому и правому умножению на элементы  $U(g)$ . Предположим, что  $A$  есть свободный левый  $U(g)$ -модуль и, кроме того, алгебра  $A$  содержит подпространство  $V$ , инвариантное относительно присоединенного действия  $U(g)$ , такое, что  $A$  изоморфна тензорному произведению  $U(g) \otimes V$  как левый  $U(g)$ -модуль. Действие на  $U(g) \otimes V$  — диагонально. Присоединенное действие алгебры Ли  $g$  на подпространстве  $V$  предполагается редуктивным.

В этих предположениях мы имеем три естественных редукционных алгебры. Редукционная алгебра Майкельсона  $Z_+ = Z(A, n_+)$  определяется как фактор нормализатора левого идеала  $J_+ = An_+$  по идеалу  $J_+$ . Редукционная алгебра Майкельсона  $Z_- = Z(A, n_-)$  определяется как фактор нормализатора правого идеала  $J_- = n_-A$  по идеалу  $J_-$ . В дальнейшем мы будем предполагать, что алгебра  $A$  снабжена отображением антиинволюции  $\varepsilon$ , чье ограничение на  $U(g)$  совпадает с Картановской антиинволюцией:

$$\varepsilon(e_\alpha) = e_{-\alpha}, \quad \varepsilon(x) = x \quad \forall x \in h,$$

где  $\alpha$  есть простые корни из  $\Delta_+$ ,  $e_{\pm\alpha}$  и  $h_\alpha$  — генераторы базиса Шевалье алгебры  $g$ , нормированные условиями:

$$[h_\alpha, e_{\pm\alpha}] = \pm 2e_{\pm\alpha}, \quad [e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha.$$

Поскольку  $\varepsilon(J_+) = J_-$  и  $\varepsilon(Z_+) = Z_-$ , то отображение  $\varepsilon$  устанавливает антиизоморфизм ассоциативных алгебр  $Z_-$  и  $Z_+$ .

Обозначим символом  $K$  мультипликативное множество, которое образовано всевозможными конечными произведениями элементов вида

$$h_\alpha + k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Здесь  $h_\alpha \in h$  есть корень, отвечающий корню  $\alpha$  из корневой системы  $\Delta$  алгебры Ли  $g$ .

Для построения третьей редукционной алгебры мы локализуем относительно  $K$  обертывающие алгебры  $U(h)$ ,  $U(g)$  и алгебру  $A$ , обозначив чертой над символом соответствующие кольца частных. Определим  $Z$  и  $\bar{Z} = Z(A, h_\pm)$  как двойное пространство косетов

$$Z = A/(J_- + J_+), \quad \bar{Z} = \bar{A}/(\bar{J}_- + \bar{J}_+),$$

где  $\bar{J}_+ = \bar{A}n_+$  и  $\bar{J}_- = n_-\bar{A}$ . Локализованное пространство двойных косетов  $\bar{Z}$  есть ассоциативная алгебра по отношению к умножению  $*$ . Это умножение определяется правилом:

$$x * y = xPy \quad \text{mod } J_- + J_+,$$

где  $P$  есть экстремальный проектор алгебры  $g$ :  $P^2 = P$ . Проектор  $P$  принадлежит определенному расширению алгебры  $\bar{U}(g)$  и удовлетворяет свойствам:

$$xP = Py = 0 \quad x \in n_-, y \in n_-,$$

и может быть задан явной мультипликативной формулой. С другой стороны, можно взять представителей  $\bar{x} \in \bar{A}$  и  $\bar{y} \in \bar{A}$  в классах элементов  $x$  и  $y$  таким образом, что либо  $\bar{x}$  будет принадлежать нормализатору левого идеала  $\bar{A}n_+$ , либо  $\bar{y}$  будет принадлежать нормализатору правого идеала  $n_-\bar{A}$ . Можно доказать, что такие представители всегда существуют. И тогда  $x * y$  есть образ пространства косетов  $\bar{A}$  произведения  $x \cdot y$ .

Последнее описание показывает, что отображения  $i_\pm : Z_\pm \rightarrow \bar{Z}$  определенные как композиции естественных включений и операций проектирования:

$$i_+ : Z_+ = \text{Norm}(J_+)/J_+ \rightarrow A/J_+ \rightarrow Z \subset \bar{Z},$$

$$i_- : Z_- = \text{Norm}(J_-)/J_- \rightarrow A/J_- \rightarrow Z \subset \bar{Z},$$

есть гомоморфизмы алгебр.

Для каждого корня  $\alpha$  корневой системы  $\Delta$  алгебры Ли  $g$  обозначим  $\bar{h} \in \bar{U}(h)$  элемент вида

$$\bar{h} = h_\alpha + (\rho, h_\alpha),$$

где  $\rho \in h^*$  есть полусумма положительных корней. Обозначим  $K_+ \subset K$  мультипликативное множество, которое содержит конечные произведения элементов  $(\bar{h} + k)$ , где  $k$  есть положительное целое число. Перечислим свойства отображений  $i_{\pm}$ .

- Отображения  $i_{\pm}$  инъективны.
- Для любого  $z \in Z$  существуют полиномы  $d_+, d_- \in K_+$ , такие, что  $d_+z$  принадлежит образу  $i_+$ , а  $zd_-$  принадлежит образу  $d_-$ .
- Антиинволюция  $\varepsilon$  индуцирует анти-автоморфизм алгебры двойных косетов  $\bar{Z}$ , оставляет инвариантным подпространство  $Z$  и отображает образы  $Z_{\pm}$  в образы  $Z_{\mp}$ .

Следовательно, присоединенное действие алгебры Ли  $g$  на  $A$  локально конечно и полупросто. То есть, алгебра  $A$  может быть разложена в прямую сумму конечномерных  $g$ -модулей по отношению к присоединенному действию  $g$ . Мы предполагаем также, что простые отражения  $\sigma$  алгебры  $h$ , генерирующие группу Вейля алгебры  $g$  расширяются до автоморфизмов алгебры  $A$ , сохраняющих  $U(g)$ . Мы будем обозначать их теми же символами и будем предполагать, что они все еще удовлетворяют соответствующим соотношениям группы кос.

## 1.9 Топологический носитель мер на симплексе Тома

Симплекс Тома является замкнутым подмножеством дважды бесконечного прямого произведения  $[0,1]^{\infty} \times [0,1]^{\infty}$ . Точками этого пространства являются пары последовательностей  $\alpha = (\alpha_i)$ ,  $\beta = (\beta_i)$ , таких, что

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq 0, \quad \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq 0, \quad \sum_i \alpha_i + \sum_i \beta_i \leq 1.$$

Задача гармонического анализа на бесконечной симметрической группе приводит к двухпараметрическому семейству  $\{M_{z,z'}\}$  вероятностных мер на  $\Omega$ , именуемых  $z$ -мерами. Установлено, что определение  $z$ -мер можно обобщить, введя дополнительный параметр  $\theta > 0$ , что приводит к трехпараметрическому семейству  $\{M_{z,z',\theta}\}$   $z$ -мер. Значения  $\theta = 1$  и  $\theta = 1/2$  имеют особый смысл: при  $\theta = 1$  мы возвращаемся к двухпараметрическим мерам  $\{M_{z,z'}\}$ , а при  $\theta = 1/2$  получается еще одно семейство мер, связанных с гармоническим анализом.

Подмножество в  $\Omega$ , образованное точками, у которых все  $\beta$ -координаты равны 0, может быть отождествлено с симплексом Кингмана, обычно обозначаемым символом  $\bar{V}_{\infty}$ . На симплексе  $\bar{V}_{\infty}$  имеется хорошо известное однопараметрическое семейство вероятностных мер — распределения Пуассона-Дирихле  $PD(\tau)$ ,  $\tau > 0$ , а также более общее семейство двухпараметрических распределений Пуассона-Дирихле  $PD(a,\tau)$ , введенных

Питманом (здесь мы используем стандартные обозначения для параметров). В предельном режиме, когда параметры  $z, z'$  стремятся к бесконечности, а параметр  $\theta$  стремится к 0 таким образом, что  $zz'\theta \rightarrow \tau$ ,  $z$ -меры сходятся к распределению Пуассона-Дирихле  $PD(\tau)$ . Двухпараметрические меры Пуассона-Дирихле  $PD(a, \tau)$  также могут быть получены вырождением из  $z$ -мер, но более формальным образом. Хотя  $z$ -меры и распределения Пуассона-Дирихле имеют ряд сходных черт, первые являются существенно более сложными объектами, нежели вторые. Одно из различий между ними состоит в том, что распределения Пуассона-Дирихле можно генерировать явным образом посредством относительно несложных вероятностных алгоритмов, тогда как для  $z$ -мер подобные конструкции не известны.

$Z$ -меры можно вводить двумя способами: предельным переходом от некоторых мер на диаграммах Юнга растущего размера и как решение некоторого аналога проблемы моментов. Опишем вкратце второе определение: мера  $M_{z, z', \theta}$  однозначно характеризуется уравнениями

$$\int_{\omega \in \Omega} P_\lambda(\omega; \theta) M_{z, z', \theta}(d\omega) = \phi_{z, z', \theta}(\lambda),$$

где  $\omega$  есть иное обозначение для  $(\alpha, \beta)$ ;  $\lambda$  пробегает множество разбиений  $Y$ ;  $P_\lambda(\cdot; \theta)$  обозначает симметрическую функцию Джека с параметром  $\theta$ , реализуемую как функция на  $\Omega$  посредством специализации

$$p_1 \mapsto 1, \quad p_k \mapsto \sum_i \alpha_i^k + (-\theta)^{k-1} \sum_i \beta_i^k, \quad k \geq 2,$$

где  $p_k$  есть  $k$ -я степенная сумма; наконец,  $\phi_{z, z', \theta}(\lambda)$  — некоторая функция на  $Y$ .

Функции  $P_\lambda$  неотрицательны на  $\Omega$ , поэтому  $\phi \geq 0$ . Мы налагаем условие невырожденности: наши ограничения на параметры  $z, z'$  выбираются так, что  $\phi(\lambda) > 0$  для всех  $\lambda \in Y$ .

Для большей определенности выпишем явным образом функцию  $\phi_{z, z', \theta}(\lambda)$  для особого случая  $\theta = 1$ : тогда симметрические функции Джека превращаются в симметрические функции Шура и

$$\phi_{z, z', 1}(\lambda) = \frac{\prod (z + j - i)(z' + j - i)}{(zz')zz' + 1 \dots (zz' + n - 1)} \frac{\dim \lambda}{n!},$$

где произведение в числителе берется по клеткам диаграммы разбиения  $\lambda$ ,  $\dim \lambda$  — число стандартных таблиц формы  $\lambda$ ,  $n$  — число клеток в  $\lambda$ .

Наша цель — доказать следующую теорему.

**Теорема.** Пусть  $M_{z, z', \theta}$  — произвольная невырожденная  $z$ -мера. Для любого открытого множества  $U \subset \Omega$  масса  $M(U)$  строго положительна. Иными словами, топологический носитель меры  $M_{z, z', \theta}$  есть все пространство  $\Omega$ .

Отметим, что аналогичное утверждение справедливо и для мер Пуассона-Дирхле: для них топологический носитель есть весь симплекс Кингсмана. На самом деле известно гораздо больше: распределение первых  $n$  координат  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  на  $\bar{V}_\infty$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , абсолютно непрерывно по мере Лебега, и имеется некоторое выражение для плотности. Для трехпараметрических  $z$ -мер результаты такого рода не известны.

Мы покажем, что утверждение теоремы непосредственно следует из результатов работ о модели диффузионных процессов, связанной с  $z$ -мерами.

Доказательство. Положим для простоты  $M := M_{z,z'\theta}$ . Известна конструкция, которая связывает с  $M$  феллеровскую полугруппу  $T(t)$  на  $C(\Omega)$  с переходной функцией  $p(t, \omega)$ ,  $t \geq 0$ . Отметим, что в особом случае  $\theta = 1$  конструкция существенно упрощается.

Обозначим через  $A$  генератор полугруппы  $T(t)$ . Как известно, для всякой точки  $\omega \in \Omega$  и ее окрестности  $V$  можно предъявить функцию  $f \in C(\Omega)$ , лежащую в области определения генератора  $A$  и такую, что  $Af(\omega) = 0$ ,  $f(\omega) > 0$  и точная верхняя грань функции  $f$  вне  $V$  строго меньше, чем  $f(\omega)$ .

Хорошо известно, что такое свойство генератора влечет за собой следующее: для любого открытого множества  $U \subset \Omega$  и любой его точки  $\omega \in U$  выполняется оценка  $1 - p(t) = o(t)$ . В частности,  $p(t) > 0$  для всех достаточно малых  $t$ .

С другой стороны, мера  $p(t)$  абсолютно непрерывна относительно меры  $M$  для любых  $\omega \in \Omega$  и  $t > 0$ . Мы заключаем, что  $M(U) > 0$ , что и требовалось. Теорема доказана.

Полученный результат может быть полезен при работе с  $L^2$ -версией марковской полугруппы  $T(t)$ .

### 1.10 Большие уклонения лавин в статистической модели

Теория больших уклонений позволяет ввести концепции равновесной термодинамики в неравновесный контекст. В частности, хорошо известно, что в большой системе, находящейся в равновесии с окружающей средой, распределение вероятности некоторой макроскопической аддитивной величины  $X$  (например, энергии, числа частиц или зарядов) дается экспонентой от функции энтропии

$$P(X \approx x) \asymp \exp S(x),$$

которая обычно является экстенсивной функцией  $x$ , то есть  $S(x) \sim Vs(x/V)$  в пределе большого объема  $V \rightarrow \infty$ , где  $V$  есть объем или любая другая аддитивная координата. Ниже в подобного рода уравнениях мы будем пользоваться обозначением  $\approx$  для ситуа-

ции, когда величина  $X$  находится в малой окрестности  $x$ , а знак  $\asymp$  будет означать, что отношение логарифмов от обеих частей стремится к единице в пределе  $x \rightarrow \infty$ .

Если же мы будем думать о временной эволюции стохастической системы (для определенности) и измерять аддитивный функционал  $Y_t$  на ее траекториях, то в общей ситуации при больших значениях времени  $t \rightarrow \infty$  распределение вероятностей величины  $Y_t$  принимает вид

$$P(Y_t/t \approx y) \asymp \exp(-tI(y)).$$

В этом случае говорят, что величина  $Y_t$  удовлетворяет свойству больших уклонений с функцией скорости  $I(y)$ . Следовательно, функция скорости содержит в точности ту же информацию о пространственно-временном ансамбле траекторий стохастического процесса, что и функция энтропии о равновесной системе.

Альтернативное описание состояния равновесия может быть дано в терминах свободной энергии, которая представляет собой преобразование Лежандра от энтропии  $f(\mu) = -\sup_x (s(x) + \mu x)$ . Свободная энергия может также рассматриваться как производящая функция масштабированных кумулянтов величины  $X$ . Аналогичным образом, преобразование Лежандра, примененное к функции скорости  $I(y)$  дает производящую функцию масштабированных кумулянтов

$$\hat{I}(\gamma) = \sup_y (y\gamma - I(y)) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \log\{E\}(e^{\gamma Y_t}).$$

Она дает эквивалентное описание временной эволюции системы в случае, когда  $I(y)$  выпукло.

Теория больших уклонений восходит к работам Больцмана, в которых он открыл статистическую природу энтропии. Впервые эту теорию применил Крамер в приложении к суммам независимых одинаково распределенных случайных величин. Затем она получила дальнейшее развитие в работах Фрейдлина и Вентцеля по стохастическим динамическим системам, а также Донскера и Варадана в приложении к изучению Марковских процессов.

Одним из главных приложений теории являются стохастические системы взаимодействующих частиц, которые служат простыми моделями, приближающими неравновесные системы. Недавно был достигнут существенный прогресс в изучении нескольких точно решаемых моделей взаимодействующих частиц. Эти модели формулируются в терминах Марковских процессов и допускают построение стационарной меры или даже полную диагонализацию Марковской матрицы посредством анзаца матричных произведений или анзаца Бете соответственно.

На этом пути удалось получить функции больших уклонений плотности частиц и токов частиц. Они явились первыми примерами функций больших уклонений, полученных для диффузионных систем. Появление ряда точных результатов привело в итоге к формулировке макроскопической теории флуктуаций — разновидности универсального теоретико-полевого подхода к большим уклонениям в диффузионных системах общего вида, которые не сводятся исключительно к точно решаемым случаям.

Интересно отметить, что в некоторых случаях удалось сформулировать гипотезы о виде поправок конечного размера в масштабированные кумулянты токов частиц, что позволило выйти за рамки интегрируемых моделей. Другими словами, их функциональные формы являются универсальными в рамках целых классов Эдвардса-Вилкинсона и Кардара-Паризи-Жанга соответственно. Как обычно, причины универсальности зависят от симметрий или законов сохранения модели, а не от деталей ее микроскопического устройства. В упомянутых выше случаях именно единый гиперболический закон сохранения отвечает за Эйлерову гидродинамику (линейную или нелинейную для классов Эдвардса-Вилкинсона и Кардара-Паризи-Жанга соответственно). Мы привели это замечание для того, чтобы подчеркнуть, что функция больших уклонений представляет собой не только характеристику какой-то частной модели, а имеет универсальный смысл в рамках гораздо более широкого контекста.

Настоящая работа посвящена изучению больших уклонений с стохастической RPM модели (от английского сочетания Raise and Peel Model). Эта стохастическая модель обладает еще одним классом симметрий, сильно отличающихся от уже упоминавшихся случаев конформной симметрии. Данная модель была предложена как модель интерфейса, который движется вверх случайными локальными размещениями ромбовидных плиток, и движется вниз спонтанными нелокальными лавинообразными испарениями плиток. Модель была сформулирована на языке теории представлений алгебры Темперли-Либа и динамические правила модели диктовались соотношениями на генераторы этой алгебры. Модель привлекла значительное внимание благодаря своему богатому комбинаторному содержанию.

Первоначально исследования были сконцентрированы на стационарной фазе процесса. Был получен ряд точных результатов о структуре стационарного состояния и было выдвинуто множество гипотез на основе связи между RPM и шестивершинной моделью, XXZ моделью, моделью плотно упакованных петель,  $O(1)$  петлевой моделью и теорией матриц переменного знака. Были сделаны также и некоторые другие предсказания о пространственно-временных корреляционных функциях в RPM с использованием методов конформной теории поля.



Итак, большинство результатов, полученных для RPM, касается свойств стационарного состояния, в то время как о временных корреляциях до сих пор не имеется практически никакой информации. В настоящей статье мы изучаем временную эволюцию модели, концентрируясь на характеристиках лавинной динамики. Мы изучаем совместные большие отклонения двух временизависимых величин: числа  $\mathcal{N}_t^\diamond$  всех плиток, удаленных лавиной к данному моменту времени  $t$  и общего числа  $\mathcal{N}_t^\circ$  глобальных лавин, которые захватывают всю систему.

Пользуясь отображением RPM в квантовую цепочку XXZ, мы получаем старшее собственное значение Марковской матрицы, деформированной включением двух параметров, которые отвечают за подсчет упомянутых величин. Данная деформация придает смысл производящей функции общих масштабированных кумулянтов величин  $\mathcal{N}_t^\diamond$  и  $\mathcal{N}_t^\circ$ . Применяя к этой функции преобразование Лежандра, мы получаем общую функцию скорости для двух величин. Результат получен в термодинамическом пределе в двух лидирующих порядках по размеру системы. Главный порядок термодинамического значения полученного собственного значения отвечает за распределение  $\mathcal{N}_t^\diamond$  в термодинамическом пределе. Аналогично термодинамическому значению свободной энергии двумерной вертексной модели, эта величина характерна для данной частной модели. Первая поправка к лидирующему порядку содержит информацию о распределении  $\mathcal{N}_t^\circ$ , а также поправки к распределению  $\mathcal{N}_t^\diamond$  и информацию о взаимозависимости этих двух величин. В отличие от главного приближения, эта поправка предсказывается конформной теорией поля, и, вследствие этого, можно ожидать, что она носит до некоторой степени универсальный характер.

Наш результат позволяет получить точные (в пределах двух лидирующих порядков) кумулянты как  $\mathcal{N}_t^\diamond$ , так и  $\mathcal{N}_t^\circ$ . Кумулянты первого порядка могут быть получены усреднением по стационарным состояниям. Наши результаты подтверждают формулы конечного размера, которые были гипотетически предложены на основе стационарных состояний конечных систем. Кумулянты старшего порядка представляют собой чисто динамические величины, которые впервые получены в нашей работе. Мы изучаем также асимптотики функции скорости и обсуждаем фазовый переход от критической к некритической фазе, наблюдающийся в функциях больших отклонений величин  $\mathcal{N}_t^\circ$  с наложенным условием атипичического значения временного усреднения величины  $\mathcal{N}_t^\diamond/t$ .

## 1.11 Вырождение подалгебр Бете в янгиане $Y(\mathfrak{gl}_n)$

### 1.11.1 Подалгебры Бете в янгианах.

Янгиан алгебры Ли  $\mathfrak{gl}_n$  это ассоциативная алгебра, исторически один из первых примеров квантовых групп. Янгиан  $Y(\mathfrak{gl}_n)$  — это деформация в классе алгебр Хопфа универсальной обёртывающей алгебры  $U(\mathfrak{gl}_n[t])$ , где  $\mathfrak{gl}_n[t]$  — это бесконечномерная алгебра Ли полиномов со значениями в  $\mathfrak{gl}_n$ . Эта алгебра появилась в работах Л. Фадеева и Ленинградской школы в связи с методом обратной задачи, см. [214, 217]. Янгиан содержит семейство коммутативных подалгебр  $B(C)$ , параметризованное комплексными матрицами  $C \in \text{Mat}_n$ . Будем называть такие подалгебры подалгебрами Бете. Это семейство возникает в связи с интегрируемыми моделями в статистической механике и в связи с алгебраическим анзацем Бете. Подробности и ссылки интересующийся читатель может найти в обзоре [203] и в книге [204].

Обозначим через  $T$  максимальный тор в  $GL_n$ , т.е. подгруппу диагональных матриц группы  $GL_n$ . В работе [207] изучаются подалгебры Бете с параметром  $C \in T$ . Пусть  $T^{reg}$  — это множество регулярных элементов тора, т.е. множество диагональных матриц с попарно различными собственными значениями. Мы будем часто использовать вложение  $GL_n \subset \mathfrak{gl}_n = \text{Mat}_n$  и рассматривать  $C$  как элемент картановской подалгебры  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}_n$ . В статье [208] Назаров и Ольшанский показали, что  $B(C)$  является свободной полиномиальной алгеброй, а так же является максимальной коммутативной подалгеброй янгиана  $Y(\mathfrak{gl}_n)$  для всех  $C \in T^{reg}$ . Для нерегулярного  $C \in T \setminus T^{reg}$ , подалгебра  $B(C)$  становится меньше. Тем не менее, существует естественный способ сопоставить подалгебру такого же размера, как для  $C \in T^{reg}$ , для любого  $C_0 \in \mathfrak{h} \setminus T^{reg}$  взяв предел подалгебры  $B(C)$  при  $C \rightarrow C_0$ . Например, подалгебра Гельфанда-Цейтлина получается как предел при  $t \rightarrow 0$  некоторого однопараметрического семейства подалгебр Бете, такого что  $C(t) \in T^{reg}$  для  $t \neq 0$  и  $C(0) = E_{11}$ . В общем случае такая предельная подалгебра  $\lim_{C \rightarrow C_0} B(C)$  не единственна, так как она зависит от однопараметрического семейства  $C(t)$ , такого что  $C(0) = C_0$ . Наша цель — описать все возможные предельные подалгебры.

Образы подалгебр Бете в универсальной обёртывающей алгебре  $U(\mathfrak{gl}_n)$  при гомоморфизме вычисления известны как “алгебры сдвига аргумента”. Вопрос описания всех пределов для алгебр сдвига аргумента был поставлен Винбергом в конце 1990-ых годов. Ответ был дан В.Шуваловым в работе [213] и позже в алгебро-геометрических терминах L. Aguirre, G. Felder and A. Veselov в статье [198]. Это описание можно в первом приближении описать следующим образом. Алгебры сдвига аргумента параметризованы регулярными диагональными матрицами с точностью до пропорциональности

и сдвига на скалярную матрицу. Это пространство параметров можно рассмотреть как конфигурационное пространство  $n$  попарно различных точек на комплексной прямой. Оказывается, что предельные подалгебры сдвига аргумента параметризуются замыканием Делиня-Мамфорда этого пространства, см. [198, 213]. Более того, все предельные подалгебры являются свободными [213] и максимальными коммутативными [215]. Так же можно явно описать индуктивную процедуру получения алгебр сдвига аргумента из меньших алгебр сдвига аргумента для меньших  $n$ . Естественно ожидать подобного описания предельных подалгебр Бете в янгиане.

### 1.11.2 Пределы подалгебр Бете.

Предельные подалгебры могут быть определены в чисто алгебро-геометрических терминах. Грубо говоря, конструкцию подалгебр Бете можно рассматривать как регулярное отображение из  $T^{reg}$  в “грасманиан” подпространств янгиана  $Y(\mathfrak{gl}_n)$  такой же “размерности” как  $B(C)$ . Пространство  $T^{reg}$  — некомпактно, в то время как грасманиан в известном смысле компактен. Это позволяет рассмотреть замыкание образа этого отображения и получить новые подалгебры с таким же рядом Пуанкаре. Мы называем такие подалгебры предельными подалгебрами.

Так как подалгебры  $B(C)$  не изменяются при растяжениях  $C$ , пространство параметров семейства  $B(C)$  является фактором  $T^{reg}/\mathbb{C}^*$  множества регулярных элементов тора по подгруппе скалярных матриц. Следуя [198], можно рассматривать пространство  $T^{reg}/\mathbb{C}^*$  как пространство модулей  $M_{0,n+2}$  рациональных кривых с  $n+2$  отмеченными точками (можно сопоставить матрице  $C$  с собственными значениями  $z_1, \dots, z_n$  кривую  $\mathbb{P}^1$  с отмеченными точками  $0, z_1, \dots, z_n, \infty$ ). Таким образом, предельные подалгебры семейства  $B(C)$  параметризуются некоторой компактификацией пространства  $M_{0,n+2}$ . Основной результат настоящей статьи следующий:

**Основная теорема.** Замыкание  $T^{reg}/\mathbb{C}^*$ , параметризующее предельные подалгебры изоморфно компактификации Делиня-Мамфорда  $\overline{M_{0,n+2}}$ . Все предельные подалгебры являются свободными полиномиальными алгебрами и максимальными коммутативными подалгебрами янгиана  $Y(\mathfrak{gl}_n)$ .

На самом деле мы опишем предельные подалгебры как произведения меньших подалгебр Бете и некоторых алгебр сдвига аргумента (которые являются образами подалгебр Бете в универсальной обёртывающей алгебре  $U(\mathfrak{gl}_n)$  при гомоморфизме вычисления.)

Естественно ожидать такие результаты из наличия биспектральной двойственности Мухина, Тарасов и Варченко, см. [206], которая сопоставляет образы подалгебр Бете в тензорном произведении представлений вычисления с алгеброй высших Гамильтонианов тригонометрической модели Годена при  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_k$ . Последняя есть образ подалгебры Годена тензорного произведения  $n + 1$  копии универсальной обёртывающей алгебры  $\mathfrak{gl}_k$ . С другой стороны, в работе [211] доказано, что замыкание пространства параметров этого семейства подалгебр Годена это  $\overline{M_{0,n+2}}$ . Сложность применения такого подхода состоит в том, что здесь мы имеем дело с образами подалгебр Бете в некотором специальном классе представлений янгиана. Таким образом, замыкание пространства параметров может отличаться от нашего. Мы используем другой подход, использующий централизаторную конструкцию Ольшанского и подалгебры сдвига аргумента.

Основная идея доказательства состоит в том, чтобы свести задачу об описании замыкания к такой же задаче замыкания семейства подалгебр сдвига аргумента в  $U(\mathfrak{gl}_N)$  где  $N$  достаточно велико. Для этих целей мы используем централизаторную конструкцию Ольшанского [209], которая приближает янгиан  $Y(\mathfrak{gl}_n)$  централизаторными подалгебрами вида  $U(\mathfrak{gl}_{n+k})^{\mathfrak{gl}_k}$ , а так же результаты Шувалова [213] и Тарасова [215], дающие описание предельных подалгебр семейства подалгебр сдвига аргумента.

### 1.11.3 Подалгебры сдвига аргумента

Пусть  $\hat{F}(C) \subset U(\mathfrak{gl}_n)$  — это образ  $B(C) \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$  при гомоморфизме вычисления  $Y(\mathfrak{gl}_n) \rightarrow U(\mathfrak{gl}_n)$ . Подалгебра  $\hat{F}(C)$  не меняется при прибавлении скалярной матрицы к  $C$ . Присоединённая градуированная алгебра подалгебры  $\hat{F}(C)$  — это Пуассон-коммутативная подалгебра  $F(C) \subset S(\mathfrak{gl}_n)$  известная как алгебра сдвига аргумента, так как она порождена инвариантами присоединённого действия алгебры  $S(\mathfrak{gl}_n)$  сдвинутых на  $tC$  для всех  $t \in \mathbb{C}$ , см. [208].

Пусть  $C$  — это диагональная матрица с попарно различными собственными значениями  $z_1, \dots, z_n$ . Тогда алгебра  $F(C)$  содержит квадратичные элементы  $H_i := \sum_{j \neq i} \frac{e_{ij}e_{ji}}{z_i - z_j}$  которые являются коэффициентами некоторой версии KZ связности. Более того,  $F(C)$  и  $\hat{F}(C)$  однозначно определяются подпространством  $Q_C \subset S(\mathfrak{gl}_n)$ , являющимся линейной оболочкой элементов  $H_i$ . Заметим, что  $H_i$  не меняются при одновременном аффинном преобразовании всех  $z_i$ , следовательно пространство параметров соответствующих алгебр сдвига аргумента естественно изоморфно конфигурационному пространству  $n$  попарно различных точек на аффинной прямой или, эквивалентно, конфигурационному пространству  $M_{0,n+1}$   $n + 1$  попарно различных точек на проективной прямой. Из результатов Aguirre, Felder и Veselov [198] следует, что замыкание семейства подпространств

$Q_C \subset S(\mathfrak{gl}_n)$  есть компактификация Делиня-Мамфорда  $\overline{M_{0,n+1}}$ , что важно для нашего доказательства.

#### 1.11.4 Централизаторная конструкция.

Пусть  $A_0 = \mathbb{C}[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots]$  — это фильтрованная полиномиальная алгебра от бесконечного числа переменных, такая что  $\deg \mathcal{E}_i = i$ . Централизаторная конструкция Ольшанского [209] — это набор сюръективных гомоморфизмов фильтрованных алгебр  $Y(\mathfrak{gl}_n) \otimes A_0 \rightarrow U(\mathfrak{gl}_{n+k})^{\mathfrak{gl}_k}$ , обобщающих гомоморфизм вычисления. Известно, что перенесение ядер этих гомоморфизмов нулевое, так что это семейство гомоморфизмов является асимптотическим изоморфизмом, т.е. для любой фильтрованной компоненты алгебры  $Y(\mathfrak{gl}_n) \otimes A_0$  существует  $K \in \mathbb{Z}$  такое, что для любого  $k > K$  ограничение соответствующего гомоморфизма на эту фильтрованную компоненту — изоморфизм. Идея доказательства состоит в анализе пространства параметров образов  $B(C)$  при централизаторной конструкции. Так как централизаторная конструкция — это асимптотический изоморфизм, то замыкание пространства параметров стабилизируется для  $k \gg 0$ .

#### 1.11.5 План доказательства.

Мы доказываем, что образ  $B(C) \otimes A_0$  в централизаторе  $U(\mathfrak{gl}_{n+k})^{\mathfrak{gl}_k}$  содержится в некоторой нерегулярной подалгебре сдвига аргумента  $\hat{F}(C^{(k)})$  и что  $\hat{F}(C^{(k)})$  асимптотически изоморфно  $B(C) \otimes A_0$ . Мы показываем, что замыкание пространства параметров подалгебр  $\hat{F}(C^{(k)})$  это  $\overline{M_{0,n+2}}$  (реализованное как подмногообразие многообразия  $\overline{M_{0,n+k+1}}$ , параметризующего все предельные подалгебры сдвига аргумента в универсальной обёртывающей алгебре  $U(\mathfrak{gl}_{n+k})$ ). Так как замыкание пространства параметров  $\hat{F}(C^{(k)})$  не зависит от  $k$ , замыкание пространства параметров в янгиане  $Y(\mathfrak{gl}_n)$  так же изоморфно  $\overline{M_{0,n+2}}$

Затем мы выводим из результатов Шувалова и Тарасова утверждение о том, что пределы алгебр  $\hat{F}(C^{(k)})$  являются свободными полиномиальными алгебрами и максимальными коммутативными подалгебрами алгебры  $U(\mathfrak{gl}_{n+k})^{\mathfrak{gl}_k}$ . Так как  $B(C) \otimes A_0$  асимптотически изоморфно  $\hat{F}(C^{(k)})$ , то же самое утверждение верно и для предельных подалгебр Бете, соответствующих точкам  $\overline{M_{0,n+2}}$ . Используя описание Шувалова пределов, мы явно описываем простейшие пределы, отвечающие общим точкам страты коразмерности 1 многообразия  $\overline{M_{0,n+2}}$  в терминах подалгебр Бете для меньших янгианов и алгебр сдвига аргумента меньших алгебр Ли. Повторяя эту процедуру мы получаем явное описание всевозможных предельных подалгебр Бете.

### 1.11.6 Обобщения на янгианы других типов.

По любой полупростой алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  (или даже алгебре Каца-Мууди  $\mathfrak{g}$ ) можно построить янгиан  $Y(\mathfrak{g})$ , квантовую группу, получаемую по рациональной  $R$ -матрице для  $\mathfrak{g}$ . По любому элементу  $C$  Картановского тора  $T$  соответствующей группы Ли  $G$  можно построить подалгебру Бете, порождённую следами произведения  $C$  с  $R$ -матрицей алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  во всех интегрируемых представлениях. Получим коммутативную алгебру, которая должна быть коммутативна для любого регулярного  $C$ . Многообразие, параметризующее все возможные пределы таких коммутативных подалгебр — это компактификация множества  $T^{reg}$  регулярных элементов тора (которое определено как про-алгебраическая схема). В случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$  это многообразие  $\overline{M_{0,n+2}}$ . Естественное обобщение этого утверждения на алгебры Ли других типов это замыкание Де Кончини-Прочези [199] дополнения следующего набора подмногообразий торического многообразия. Рассмотрим торическое многообразие  $X$  (на котором действует тор  $T \subset G$ ), отвечающее вееру из корневых гиперплоскостей. Эквивалентно,  $X$  является замыканием общей  $T$ -орбиты в многообразии флагов  $G/B$ . Мы можем рассматривать  $T^{reg}$  как дополнение до набора гиперплоскостей в многообразии  $X$ . Следуя Де Кончини и Прочези [199], можно построить компактификацию  $M_{\mathfrak{g}}$  множества  $T^{reg}$  раздутием всех неразложимых пересечений гиперплоскостей в  $X$ .

Гипотеза.  $M_{\mathfrak{g}}$  является пространством параметров для семейства предельных подалгебр Бете янгиана  $Y(\mathfrak{g})$ .

Замечание. Заметим, что  $\overline{M_{0,n+2}}$  это замыкание Де Кончини-Прочези множества  $T^{reg}$  для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ .

Замечание. Для бесконечных систем корней (для алгебр Каца-Мууди) многообразие  $M_{\mathfrak{g}}$  не является алгебраической схемой, но определено как про-алгебраическая схема. С другой стороны, подалгебры Бете в этом случае лежат не в янгиане, а в некотором его пополнении, которое есть обратный предел некоторых факторов янгиана. Таким образом, мы можем обобщить нашу гипотезу на янгианы бесконечномерных алгебр Ли, утверждая, что два вышеопределённых обратных предела изоморфны.

### 1.11.7 Приложение к кристаллам.

По аналогии с алгебрами сдвига аргумента и подалгебрами Годена, мы ожидаем что для вещественных значениях параметра соответствующие предельные подалгебры Бете имеют простой спектр в каждом неприводимом конечномерном (или интегрируемом) представлении янгиана. Следуя работе [211], мы можем построить покрытие мно-

гообразия  $M_{\mathfrak{g}}(\mathbb{R})$  для любого неприводимого представления янгiana  $Y(\mathfrak{g})$ . Слой такого накрытия — это множество общих собственных прямых для элементов подалгебры Бете в этом представлении. Для модулей Кириллова-Решетихина, мы ожидаем естественную биекцию слоя накрытия с соответствующим кристаллом, следовательно получая действие фундаментальной группы  $\pi_1(M_{\mathfrak{g}}(\mathbb{R}))$  на кристалле. Мы так же ожидаем, что это действие может быть описано в комбинаторных терминах.

### 1.12 Взвешенные ПБВ вырождения и тропические многообразия флагов

ПБВ вырождения модулей и проективных многообразий много изучались в последнее десятилетие, это быстро растущая область науки позволяет найти новые связи между комбинаторикой, геометрической теорией представлений, торической геометрий и колчанными многообразиями. Начало этой теории состоит в простом наблюдении. Пусть  $\mathfrak{n}^-$  — это комплексная алгебра Ли строго нижне-треугольных  $n \times n$  матриц, а  $U(\mathfrak{n}^-)$  — это её универсальная обёртывающая алгебра. Зададим степени элементарных матриц  $f_{i,j}$  равны один. Получим фильтрацию на  $U(\mathfrak{n}^-)$  и любой циклически порождённый  $\mathfrak{n}^-$ -модуль ([188]). Присоединённая градуированная структура в этом случае — абелева. Эта конструкция может быть перенесена на частичные многообразия флагов  $F$ , отождествлённое с орбитами старшего веса алгебраической группы. Таким образом получаем ПБВ вырождение многообразия флагов [184]. Эта техника может быть обобщена во многих направлениях, для обзора результатов см. [179] и [181].

В работе [182] использован другой подход. Вместо того, чтобы задавать степень каждого  $f_{i,j}$  через 1, мы рассматриваем весовую систему  $A$ , которая определяется как набор целых чисел  $a_{i,j}$ . Эта весовая система индуцирует фильтрацию алгебр  $\mathfrak{n}^-$  и  $U(\mathfrak{n}^-)$ . Можно задать следующий вопрос: какие условия на весовую систему необходимы, чтобы присоединённые градуированные векторные пространства допускали разумную алгебраическую структуру, например, чтобы присоединённое градуированное пространство алгебры  $\mathfrak{n}^-$  допускало структуру нетривиальной градуированной алгебры Ли.

В данной работе мы явно описываем многогранный конус  $\mathcal{K}$ , такой что для любой весовой системы из конуса возможно с помощью ПБВ вырождения построить вырожденные циклические модули и вырождать многообразия флагов  $F^A$ .

Мы изучаем комбинаторные, алгебраические и геометрические свойства в зависимости от позиции системы  $A$  в  $\mathcal{K}$ . Мы так же замечаем, что для некоторых весовых систем обсуждение многообразий  $F^A$  может быть найдено в литературе. Например, если  $a_{i,j} = 0$  для всех  $i, j$ , то мы получаем классическое многообразие флагов; если  $a_{i,j} = 1$  мы

получаем ПБВ вырождение многообразия флагов  $F^a$  ([184]); если  $a_{i,j} = (j - i + 1)(n - j)$  мы получаем вырождение в торическое многообразие, см. ([183], [190]). Мы доказываем, что последнее вырождение получается для любой весовой системы  $A$  в относительной внутренней  $\mathcal{K}$ . Мы так же получаем некоторые линейные вырожденные многообразия флагов (ПБВ локус), см. ([179]).

Зафиксируем весовую систему  $A$  в  $\mathcal{K}$ . Мы показываем, что можно вложить (аналогично классическому случаю) вырожденное многообразие флагов  $F^A$  в произведение проективных пространств, получаемых из (вырожденных) пространств представлений. В классическом случае, идеал  $I^0$  соотношений Плюккера в координатах Плюккера описывает образ многообразия флагов в этом произведении. Используя весовую систему, мы естественно задаём степень  $s_{\bullet}^A$  для любой Плюккеровой координаты. Пусть  $I^A$  есть начальный идеал идеала  $I^0$  по отношению к этим степеням. Тогда первая теорема — следующая:

Теорема 1.12.1. Идеал  $I^A$  — это идеал многообразия  $F^A$  по отношению к вышеопределённому вложению. Более того,  $I^A$  порождён своей квадратичной частью.

В работе [184] мономиальный базис в однородном координатном кольце абелева вырожденного многообразия флагов  $F^a$  был построен с использованием ПБВ полустандартных таблиц Юнга. Оказывается, что эти мономы образуют базис однородного координатного кольца многообразия  $F^A$  для всех  $A \in \mathcal{K}$  (опять обобщая результат [190]).

Как сказано выше, вырожденное многообразия флагов  $F^A$  нумеруется весовой системой, принадлежащей некоторому явно описанному конусу  $\mathcal{K}$ . Многообразию  $F^A$  зависит только от относительного места в конусе и многообразию флагов вырождается вдоль грани решётки  $\mathcal{K}$ :

Теорема 1.12.2. Пусть  $H_A$  (соотв.  $H_B$ ) — это минимальная грань конуса  $\mathcal{K}$ , которая содержит весовую систему  $A$  (соотв.  $B$ ). Если  $H_A = H_B$ , то  $F^A \simeq F^B$  как проективные многообразия. Более того, если  $H_B \subseteq H_A$ , то  $F^A$  это вырождение  $F^B$ .

Вспомним о степенях  $s_{\bullet}^A$  соответствующих Плюккерovým координатам. Пусть  $\mathcal{C} = \{(s_{\bullet}^A) \mid A \in \mathcal{K}\}$  — это множество всех наборов степеней, получаемых из всех весовых систем  $A \in \mathcal{K}$ . По конструкции,  $F^A$  — неприводимое многообразие и следовательно начальный идеал  $I^A$  не содержит мономов. Из этого следует, что  $\mathcal{C}$  содержит тропическое многообразие флагов [177]. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1.12.3.  $\mathcal{C}$  является максимальным конусом в тропическом многообразии флагов.



Мы выводим явные неравенства и получаем неизбыточное описание граней конуса  $\mathcal{C}$ . Насколько известно авторам, это первое явное описание максимального конуса для любого  $n > 1$  (см. [196, 194, 177] для частичных результатов в этом направлении).

### 1.13 Оперადы и универсальные обертывающие алгебры

Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта гласит, что универсальная обертывающая алгебра от алгебры Ли имеет естественную фильтрацию, присоединённо-градуированная алгебра к которой является алгеброй многочленов, которая в свою очередь является универсальной обертывающей от абелевой алгебры Ли. Гинзбург и Капранов предложили определение универсальной обертывающей алгебры от алгебры  $A$  над аугментированной операдой  $P$ , категория модулей над которой совпадает с категорией модулей над  $A$ . Мы доказали, что для кошулевой операдой  $P$  свойство ПБВ для универсальной обертывающей будет выполнено тогда и только тогда, когда соответствующая кошулево-двойственная кооперада  $P^!$ , рассматриваемая, как пермутада будет порождена образующими первой степени и кошулева. Также мы показали, что если операда  $P$  обладает базисом Грёбнера, все старшие мономы которого левонормированны, то свойство ПБВ также будет выполнено.

Мы дали концептуально новое описание топологической операдой вещественных точек пространства модулей стабильных комплексных кривых рода ноль с отмеченными точками, называемой в дальнейшем операдой кактусов. Несколько различных удобных алгебраических моделей операдой кактусов было получено на основе топологической модели. Пользуясь данными моделями нам удалось легко передоказать знаменитый результат Этингофа-Камнитцера-Энрикеса-Райнса об описании рациональных когомологий данных пространств. Более того мы смогли вычислить рациональный гомотопический тип кактусной группы, описать нижний центральный ряд для проунипотентного пополнения и описать теорию деформаций кактусной операдой.

### 1.14 Плоские вырождения с “ямой”: производящие функции и теория представлений.

В работе [168] рассматриваются задачи перечислительной комбинаторики трёхмерных диаграмм Юнга, которые мотивированны теорией представлений.

Удобно отождествлять трёхмерные диаграммы юнга с плоскими разбиениями, т.е. с набором неотрицательных целых чисел  $a_{i,j}$  таких что  $a_{i,j} \geq a_{i+1,j}$ ,  $a_{i,j} \geq a_{i,j+1}$  и

все кроме конечного числа чисел  $a_{i,j}$  равны 0. Позже мы будем рассматривать более общие плоские разбиения.

Обозначим через  $|a| = \sum a_{i,j}$ , т.е., число клеток в соответствующей трёхмерной диаграмме Юнга. Для любого множества  $\mathcal{A}$  плоских разбиений, определим производящую функцию через  $\sum_{a \in \mathcal{A}} q^{|a|}$ . Такие функции интенсивно изучаются в перечислительной комбинаторике, например, одна из формул МакМагона имеет вид (см., например, [166, 1.5 ex. 13(d)])

$$\sum_{\{a | a_{n+1,1}=0\}} q^{|a|} = q^{-\binom{n}{3}} \frac{V(1, q, \dots, q^{n-1})}{(q)_\infty^n},$$

где  $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$  — это определитель Ван-дер-Монда и  $(q)_\infty = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)$ . Предел  $n \rightarrow \infty$  даёт хорошо знакомую формулу МакМагона для производящей функции всех плоских разбиений:  $\sum_a q^{|a|} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)^{-k}$ .

Мы изучаем разбиения, удовлетворяющие следующим условиям

$$a_{n+1, m+1} = 0. \tag{1.14.1}$$

Мы называем такое условие ямой в клетке  $(n+1, m+1)$ . Более того, мы рассматриваем плоские разбиения  $a = \{a_{i,j}\}$  с бесконечным числом ненулевых  $a_{i,j}$  и некоторыми  $a_{i,j}$  равными  $\infty$ , удовлетворяющие следующим асимптотическим условиям

$$1. \lim_{j \rightarrow \infty} a_{i,j} = \nu_i, \quad 2. \lim_{i \rightarrow \infty} a_{i,j} = \mu_j, \quad 3. a_{i,j} = \infty \text{ iff } (i,j) \in \lambda, \tag{1.14.2}$$

где  $\nu, \mu, \lambda$  — разбиения (см. рис. 1).

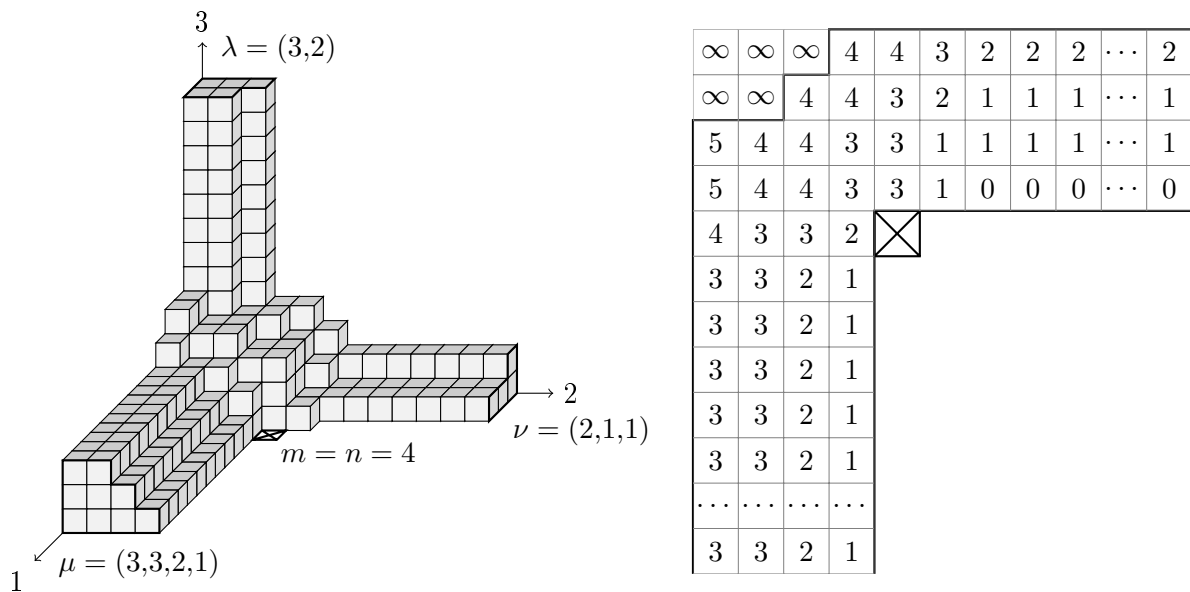


Рисунок 1

Мы обозначаем через  $\chi_{\mu,\nu,\lambda}^{n,m}(q)$  производящую функцию плоских разбиений, удовлетворяющую (1.14.1), (1.14.2). Из условий следует, что  $l(\nu) \leq n$ ,  $l(\mu) \leq m$ , и  $\lambda_{n+1} < m + 1$ .

Заметим, что асимптотические условия (1.14.2) возникают в теории топологических вершин [169]. Условие (1.14.1) так же появляется в теории струн, см. [154]. Наша мотивация происходит из теории представлений, что мы обсудим ниже.

В некоторых частных случаях формулы  $\chi_{\mu,\nu,\lambda}^{n,m}(q)$  были известны и ранее. Для того, чтобы записать ответ нам нужно ввести некоторые обозначения. Через  $\rho_n$  обозначим разбиение  $(n-1, n-2, \dots, 1, 0)$ , мы будем опускать индекс  $n$  и писать просто  $\rho$ , если число частей будет понятно из контекста. Для любого разбиения из не более, чем  $n$  частей  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  через  $q^{\lambda+\rho}$  обозначим  $(q^{\lambda_1+n-1}, \dots, q^{\lambda_n})$ . Через  $a_{\lambda+\rho}(x_1, \dots, x_n)$  обозначим антисимметрический многочлен.

$$a_{\lambda+\rho}(x_1, \dots, x_n) = \det \left( x_i^{\lambda_j+n-j} \right)_{i,j=1}^n.$$

Формула для  $\chi_{\mu,\nu,\lambda}^{n,m}(q)$  известна в случае  $m = 0$ , т.е., когда яма находится около стены. А именно,

$$\chi_{\emptyset,\nu,\lambda}^{n,0}(q) = \frac{q^{\sum_{i=1}^n (\lambda_i+n-i)(\nu_i+n-i)}}{(q)_\infty^n} a_{\nu+\rho}(q^{-\lambda-\rho}), \quad (1.14.3)$$

см., например, [139, Theorem 4.6]. Ясно, что это является обобщением вышеприведённой формулы МакМагона. Другой известный случай это если два асимптотических условия зануляются  $\lambda = \mu = \emptyset$ , see [149], [150].

В нашей работе мы находим формулу для  $\chi_{\mu,\nu,\lambda}^{n,m}(q)$  в общем случае. А именно, мы доказываем три формулы, которые алгебраически эквивалентны, но имеют разную форму и значение. Приведём здесь простейшую, но уже новую формулу здесь:

$$\chi_{\mu,\nu,\emptyset}^{n,n}(q) = \sum_{A_1 > A_2 > \dots > A_n \geq 0} (-1)^{\sum_{i=1}^n A_i} q^{\sum_{i=1}^n \binom{A_i+1}{2}} \frac{a_{\nu+\rho}(q^A) a_{\mu+\rho}(q^{-A})}{(q)_\infty^{2n}},$$

Заметим, что каждое слагаемое является произведением двух выражений в правой части (1.14.3) (с точностью до множителя  $(-1)^{\dots} q^{\dots}$ ).

Так как три формулы алгебраически эквивалентны, достаточно доказать только одну из них. Мы дадим два различных комбинаторных доказательства. Эти доказательства проще чем доказательства в частных случаях, см. [149], [150].

Первое доказательство основано на биекции между плоскими разбиениями и набором непересекающихся путей. Число таких наборов можно подсчитать с помощью

леммы Линдрёма-Гессела-Виеннота, см. [160],[153]. Эти доказательства дают описание в терминах определителей для  $\chi_{\mu,\nu,\lambda}^{n,m}(q)$ .

Во втором доказательстве мы интерпретируем условия (1.14.1),(1.14.2) как определение некоторых бесконечномерных многогранников. Мы выводим формулу для производящей функции целых точек в этом многограннике как сумму вложений вершин, используя теорему Бриона [136]. Это доказательство даёт “бозонную формулу (обычно формула называется бозонной, если она эквивалентна линейной комбинации характеров алгебры многочленов. В нашем случае бозонная формула — это комбинация членов  $q^\Delta/(q)_\infty^{n+m}$ ) для  $\chi_{\mu,\nu,\lambda}^{n,m}(q)$ .

Условия [143] появляются в теории представлений квантовой тороидальной алгебры  $U_{\vec{q}}(\dot{\mathfrak{gl}}_1)$ . А именно, плоские разбиения, удовлетворяющие этим условиям занумерованы базисом в модулях МакМагона  $\mathcal{N}_{\mu,\nu,\lambda}^{n,m}(v)$  над  $U_{\vec{q}}(\dot{\mathfrak{gl}}_1)$ . Следовательно  $\chi_{\mu,\nu,\lambda}^{n,m}(q)$  является характером представления  $\mathcal{N}_{\mu,\nu,\lambda}^{n,m}(v)$ . Естественно задать вопрос о теоретико-представленческой интерпретации наших формул характеров.

Мы выдвигаем гипотезу о том, что существует резольвента модуля  $\mathcal{N}_{\mu,\nu,\lambda}^{n,m}(v)$  такая, что её Эйлерова характеристика совпадает с нашей формулой для характера. В этом случае мы говорим, что эта резольвента есть материализация формулы для характеров. Например, БГГ резольвента [135] есть материализация формулы Вейля для характеров. Зелевинский построил комплекс, который является материализацией формулы Якоби-Труди для полиномов Шура [174].

Наши формулы для функций  $\chi_{\mu,\nu,\lambda}^{n,m}(q)$  напоминают формулы для характера тензорного произведения супералгебры Ли  $\mathfrak{gl}_{m|n}$ . Это сходство может быть объяснено с помощью того факта, что представления  $\mathcal{N}_{\mu,\nu,\lambda}^{n,m}(v)$  на самом деле являются представлениями некоторой  $q$ -деформированной  $W$ -алгебры, которую мы называем  $W_{\vec{q}}(\dot{\mathfrak{gl}}_{n|m})$ .

Такие  $W$ -алгебры появляются следующим образом Простой, но не описанный в литературе факт, состоит в том, что  $\mathcal{N}_{\mu,\nu,\lambda}^{n,m}(v)$  есть подфактор представления Фока алгебры  $U_{\vec{q}}(\dot{\mathfrak{gl}}_1)$ . Этот модуль Фока есть тензорное произведение  $n + m$  базовых модулей Фока. На таких модулях Фока алгебра  $U_{\vec{q}}(\dot{\mathfrak{gl}}_1)$  действует через свой фактор, называемый  $W$ -алгеброй. Эта  $W$ -алгебра коммутирует с определёнными сплетающими операторами, которые называются скриннинговыми операторами. Структура этих операторов в нашем случае предполагается  $W_{\vec{q}}(\dot{\mathfrak{gl}}_{n|m})$ .

Существует конформный предел  $\vec{q} \rightarrow (1,1,1)$  скриннинговых операторов и мы обозначаем предел алгебры  $W$  через  $W(\dot{\mathfrak{gl}}_{n|m})$ . Для  $m = 0$  эта алгебра совпадает с алгеброй  $W(\dot{\mathfrak{gl}}_n)$  [162]. Алгебры  $W(\dot{\mathfrak{gl}}_{n|m})$  предположительно совпадают с сектором нулевого

момента  $W_n^{(2)}$ , введёнными в [151]. Мы не нашли ссылки для общих  $n, m$ . Заметим, что наши  $W$ -алгебры отличаются от введённых в работе [157].

Стандартное утверждение в теории вертексных алгебр это эквивалентность абелевых категорий определённых представлений вертексной алгебры и определённых представлений квантовой группы. Это утверждение похоже на теоремы Дринфельда-Кохно и Каждана-Люстига. Мы предполагаем, что при этой эквивалентности  $W(\mathfrak{gl}_{n|m})$  отвечает произведению квантовых групп  $U_q \mathfrak{gl}_{n|m} \otimes U_{q'} \mathfrak{gl}_n \otimes U_{q''} \mathfrak{gl}_m$  для определённых  $q, q', q''$ . А представления  $\mathcal{N}_{\mu, \nu, \lambda}^{n, m}(v)$  при эквивалентности переходят в  $L_\lambda^{(n|m)} \otimes L_\nu^{(n)} \otimes L_\mu^{(m)}$ , где  $L_\nu^{(n)}$  и  $L_\mu^{(m)}$  являются конечномерными неприводимыми представлениями алгебры  $U_{q'} \mathfrak{gl}_n$  и  $U_{q''} \mathfrak{gl}_m$ , соответственно, а  $L_\lambda^{(n|m)}$  является тензорным представлением алгебры  $U_q \mathfrak{gl}_{n|m}$  (представление  $L_\lambda^{(n|m)}, L_\nu^{(n)}, L_\mu^{(m)}$  так же зависит от  $v$ , но для простоты эта зависимость здесь не обсуждается).

### 1.15 Исследование интегрируемых иерархий псевдоразностных операторов

Нами рассмотрен вопрос о построении и описании свойств некоторых интегрируемых иерархий псевдоразностных операторов. Для построенных иерархий изучен ряд возможных аналогов известных свойств и структур интегрируемых иерархий псевдодифференциальных операторов.

Многие солитонные дифференциальные уравнения допускают вложения в совместные системы уравнений Лакса, так называемые интегрируемые иерархии дифференциальных или псевдодифференциальных операторов. Центральную роль в понимании структуры этих уравнений играет алгебра псевдодифференциальных операторов  $\text{Psd}$ . В наиболее классическом хорошо и корректно определённом конечномерном случае деформации приводящие к интегрируемым иерархиям строятся с помощью следующего подхода. Рассматривается разложение конечномерной алгебры Ли в прямую сумму двух подалгебр, таких что, во-первых, каждая из них является алгеброй Ли некоторой группы Ли, и во-вторых, разложение в прямую сумму имеет свой эквивалент на групповом уровне. При таких условиях деформации коммутирующих потоков на одной из алгебр в направлении группы отвечающей второй алгебре определены максимально прямо и просто и записываются через уравнения Лакса. В бесконечномерном случае реализация, проверка или обход перечисленных условий на подалгебры могут представлять трудности и требовать дополнительной работы, тем не менее во многих случаях удаётся добиться успехов. Так, с помощью различных разложений  $\text{Psd}$  был получен ряд интересных и содержательных уравнений.

Помимо уравнений типа КдФ известно также множество разностных уравнений в которых также возникают солитонные решения. Кроме того, в последнее время довольно широкий круг вопросов связанных с совместными системами обсуждался в дифференциально-разностном контексте как с математической, так и с физической точки зрения.

В наших исследованиях мы рассматриваем вопрос об определении и исследовании для случая псевдоразностных операторов конструкций аналогичных уже известным в случае псевдодифференциальных операторов. Мы вводим алгебру  $\text{Ps}\Delta$  псевдоразностных операторов реализованную как алгебра бесконечномерных  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  матриц. Она является аналогом алгебры  $\text{Psd}$  псевдодифференциальных операторов. Затем, в соответствии с идеями теоремы Адлера-Костанта-Симса мы рассматриваем в  $\text{Ps}\Delta$  интегрируемые иерархии состоящие из различных наборов совместных уравнений Лакса, являющихся эволюционными уравнениями деформаций внутри алгебры  $\text{Ps}\Delta$  обратимого постоянного псевдоразностного оператора первой степени  $\Lambda_0$ . Полученные уравнения обобщают известную ранее дискретную иерархию Кадомцева-Петвиашвилли. Уравнения Лакса обобщённых деформаций строятся с помощью разложения алгебры  $\text{Ps}\Delta$  в прямую сумму двух подалгебр, зависящих от оператора  $\Lambda_0$ . Для всякого возможного  $\Lambda_0$  нами рассмотрено два связанных с ним разложения алгебры  $\text{Ps}\Delta$  и следовательно, две интегрируемые иерархии. Далее показано, что если аналогично псевдодифференциальному случаю взять для решения каждой из иерархий соответствующие проекции разных степеней деформированного основного направления, то эти псевдоразностные операторы будут удовлетворять соотношениям нулевой кривизны. Более того, доказано и обратное, из выполнений соотношений нулевой кривизны следует, что деформированный элемент является решением. Также рассмотрен аналог известной из псевдодифференциального случая связи одевающего оператора деформации задающей интегрируемую иерархию с решением некоторой задачи Коши. При некотором естественном условии на алгебру матричных коэффициентов получены в терминах нулевой кривизны необходимые и достаточные условия существования соответствующих задач Коши в псевдоразностном случае.

## 1.16 Числа Гурвица: обобщения и приложения

### 1.16.1 Числа Буске-Мелу-Шеффера и обобщенные числа Гурвица

В наши исследованиях в 2018 изучались числа Буске-Мелу-Шеффера и обобщенные числа Гурвица, которые являются модификациями простых чисел Гурвица.

Числа Буске-Мелу-Шеффера  $b_{m,\varkappa,k}$  перечисляют разложения перестановки данного циклического типа  $\varkappa \vdash n$  в произведение  $m$  перестановок с фиксированной суммарной вырожденностью  $k$ . Вырожденностью перестановки  $\alpha \in S_n$  мы называем разность  $n - l(\alpha)$ , где  $l(\alpha)$  — количество циклов в перестановке  $\alpha$ .

Б.С.Бычковым, М.Э. Казаряном и П.И. Дуниным-Барковским независимо установлено, что числа Буске-Мелу-Шеффера удовлетворяют обобщенной топологической рекурсии — рекуррентной процедуре, позволяющей эффективно вычислять эти числа по начальным данным рекурсии. Корректность процедуры обобщенной топологической рекурсии доказана В.Бушаром и Б.Эйнаром, однако числа Буске-Мелу-Шеффера являются первым нетривиальным примером ее использования.

Также, совместно с А.В. Михайловым, показано, что формальная  $\tau$ -функция иерархии КП, являющаяся производящей функцией для симметризованных хроматических многочленов взвешенных графов, удовлетворяет иерархии линейных уравнений.

### 1.16.2 Числа Гурвица-Севери

Для жёстких и полужёстких конфигураций получено выражения чисел Гурвица-Севери через классические числа Гурвица. Если  $(g,d,\ell)$  удовлетворяют неравенству

$$d + \ell \geq g + 2$$

(гибкий случай), то для трех наборов прямых  $a_1 \dots, a_{2d+2g-2}$ ,  $b_1 \dots, b_\ell$  и  $x_1 \dots, x_{d+\ell-g-2}$  общего положения, проходящих через точку  $p$ , количество кривых  $\Sigma \subset \mathbb{C}P^2$  рода  $g$  с нодом кратности  $\ell$  в точке  $p$ , касающихся прямых  $b_1 \dots, b_\ell$  в точке  $p$ , прямых  $a_1 \dots, a_{2d+2g-2}$  в точках, отличных от  $p$ , и имеющих ноды на прямых  $x_1 \dots, x_{d+\ell-g-2}$  (число Гурвица-Севери  $\mathfrak{H}_{g,d,\ell}$ ), равно

$$\mathfrak{H}_{g,d,\ell} = \binom{d}{2}^{d+\ell-g-2} d^\ell h_{g,1^d}/d!,$$

где  $h_{g,1^d}$  — классическое число Гурвица.

В полужестком случае, при

$$d + \ell < g + 2 \leq d + 2\ell$$

для двух наборов прямых  $a_1 \dots, a_{2d+2g-2}$  и  $b_1 \dots, b_{d+2\ell-g-2}$  общего положения, проходящих через точку  $p$ , количество кривых  $\Sigma \subset \mathbb{C}P^2$  рода  $g$  с нодом кратности  $\ell$  в точке  $p$ , касающихся прямых  $b_1 \dots, b_{d+2\ell-g-2}$  в точке  $p$  и прямых  $a_1 \dots, a_{2d+2g-2}$  в точках, отлич-

ных от  $p$  (число Гурвица–Севери  $\mathfrak{H}_{g,d,\ell}$ ), равно

$$\mathfrak{H}_{g,d,\ell} = d^{d+2\ell-g-2} \binom{2g-d-\ell-1}{g-3} h_{g,1^d}/d!,$$

где  $h_{g,1^d}$  — классическое число Гурвица.

### 1.16.3 Новые инварианты графов

Обнаружен новый класс инвариантов графов, обладающих свойством интегрируемости. Первым инвариантом из этого класса оказался симметризованный хроматический многочлен Стенли. Этот инвариант принимает значения в кольце многочленов от бесконечного числа переменных. В работе Чмутова, Дужина и Ландо 1994 года этот инвариант был введен для построения достаточно большого класса инвариантов Васильева узлов. В 1995 году Р. Стенли предложил эквивалентный инвариант, обобщающий хорошо известный хроматический многочлен узлов. Многочлен Стенли превращается в хроматический многочлен при специальных значениях переменных.

Простые графы порождают алгебру Хопфа. Многочлен Стенли осуществляет гомоморфизм из градуированной алгебры Хопфа графов в градуированную алгебру Хопфа многочленов от бесконечного числа переменных. Удалось показать, что любой такой гомоморфизм обладает свойством интегрируемости. Тем самым, возникает естественная задача поиска других аналогичных алгебр Хопфа, обладающих этим свойством. Отметим, однако, что гомоморфизм алгебры Хопфа графов в алгебру Хопфа многочленов, как правило, не порождает инвариант Васильева узлов – симметризованный хроматический многочлен Стенли представляет собой исключение. Кроме того, М.Э.Казарян и С.К.Ландо, совместно с С.М.Натанзоном (НИУ ВШЭ) ввели понятие разделяющих оснащенных чисто вещественных чисел Гурвица и описали производящую функцию для них.

Показано, что для ориентированного графа  $\Gamma$  с нумерованными вершинами и ребрами, такого, что его рёбра с номерами  $p_1 \dots, p_m$  являются петлями, оператора Лапласа  $\Delta(\Gamma)$  равно сумме, со знаком минус, графов, полученных из графа  $\Gamma$  заменой петель на такие всевозможные ребра с теми же номерами и начальными вершинами, которые не являются петлями и фиксированного подмножества  $I = \{i_1 \dots, i_s\} \subset \{1 \dots, n\}$  вершин графа  $\Gamma$  выполняется

$$\Delta(Y_I) = A_I,$$



где  $A_I \in \mathcal{G}_{n,k}$  есть сумма всех ациклических графов, в которых вершины  $i_1 \dots, i_s$ , и только они, являются стоками, а

$$Y_I = \sum_G (-1)^{\beta_0(G)} G \in \mathcal{G}_{n,k},$$

где  $\beta_0(G)$  — количество компонент связности графа  $G$ , а суммирование идёт по множеству всех сильно полусвязных графов, в которых вершины  $i_1 \dots, i_s$  (и только они) являются изолированными.

#### 1.16.4 Произведения случайных матриц в теории передачи информации

Рассмотрена задача о произведениях случайных матриц, которая появилась в задачах теории передачи информации и в задачах квантового хаоса, использующих независимые ансамбли Жинибра. Произведения включают случайные комплексные матрицы (то есть матрицы с распределенными по Гауссу независимыми матричными элементами), обозначим их  $Z_i, Z_i^\dagger, i = 1, \dots, n$ , и  $2n$  матриц-источников - комплексных матриц  $C_i, C_i^*, i = 1, \dots, n$ , которые играют роль параметров в нашей модели. Номера матриц (то есть номера независимых гауссовых ансамблей) будет также называть цветом матрицы. Мы рассматриваем совокупность произведений  $X_1, \dots, X_F$ , в которые каждая матрица из набора  $\{Z_i C_i, Z_i^\dagger C_i^*, i = 1, \dots, n\}$  войдет лишь один раз в произведение  $X = X_1 \cdots X_F$ . Графически это можно изобразить совокупностью  $F$  полигонов с общим числом ребер  $2n$ , - где стороны полигона с номером  $a$  кодируют порядок в произведении матриц  $X_a$ . Матрицы  $Z_i$  и матрицы  $Z_i^\dagger$  соответствуют сторонам полигонов, а матрицы-источник - вершинам. Тем самым, стороны полигонов обладают цветом и каждый цвет встречается лишь дважды. Вершина, следующая за стороной полигона окрашена в тот же цвет (во всех полигонах выбрано направление обхода, например, по часовой стрелке). Стороны одного цвета мы соединяем линией: "внутренней" или "внешней" хордой. При вычислении средних в гауссовом ансамбли согласно теореме Вика матрицы  $Z_i$  спариваются с матрицами  $Z_i^\dagger$ . Это соответствует известной процедуре склеивания римановой поверхности  $\Sigma_{e^*}$  с некоторой эйлеровой характеристикой  $e^*$  из системы полигонов и построению вложенного ленточного графа. Отметим важный момент - в нашей модели указанные полигоны соответствуют не членам ряда теории возмущений (фейнмановским графикам), как происходит в известной одноматричной модели, а выбраны изначально в качестве своеобразного индекса, который помечает выбранную нами модель. Любой системе полигонов с четным общим числом сторон мы сопоставляем матричную модель, в которую добавляем наборы констант связи, каждому полигону (или, что то же: каждому произведению матриц  $X_a, a = 1, \dots, F$ ) приписывается свой полубесконечный набор констант связи, как это обычно делается в матричных моделях.

Мы показываем, что спектральные корреляционные функции этой матричной модели порождают числа Гурвица  $H_{e^*}$ , которые перечисляют неэквивалентные разветвленные накрытия  $\Sigma_{e^*}$ . Роль матриц-источников - формирование профилей ветвления в точках ветвления, которые приписываются вершинам ленточного графа, вложенного в базовую поверхность  $\Sigma_{e^*}$ . Роль констант связи нашей модели состоит в том, чтобы генерировать профили ветвления в  $F$  дополнительных точках ветвления, приписанных граням графа (граням «триангулированной» поверхности  $\Sigma_{e^*}$ ). Числа Гурвица для поверхностей Клейна также могут быть получены с помощью небольшой модификации этой модели. Для этого мы спарим любую из исходных матриц (в этом случае представляем дырку на  $\Sigma_{e^*}$ ) с тау функцией, которую мы называем мебиусовой. Таким образом, представленные матричные модели порождают числа Гурвица для любой заданной эйлеровой характеристику базовой поверхности  $e^*$  и для любого заданного набора профилей ветвления. Существует прямая связь этой модели с дискретным бета-ансамблем, в котором в качестве беты выступает эйлерова характеристика базовой поверхности (благодаря дискретности проблема ультрафиолетовой расходимости не возникает). Графики Фейнмана этих моделей описывают накрытия ленточных графов другими ленточными графами (это будет показано в следующих работах).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение кратко суммируем полученные в 2018 году результаты исследований по проекту:

— Исследована самодуальная форма преобразований Бэклунда для непрерывной во времени  $gl_N$ -модели Руйсенаарса-Шнайдера. Показано, что самодуальное описание моделей Руйсенаарса-Шнайдера может быть выведено из комплексифицированного уравнения уравнения “промежуточных длинных волн” с дискретным лапласианом с помощью простого полюсного анзаца.

— Определены и описаны квази-компактные структуры на  $G^C$ -расслоениях Хиггса на сингулярных кривых, что обобщает полученный ранее результат для группы Ли  $SL(N)$ . Показано, что в частных случаях такая конструкция приводит к классическим интегрируемым системам типа Хитчина. Для этих систем получены представления Лакса со спектральным параметром, в виде полей Хиггса на сингулярной рациональной кривой. Установлена полная интегрируемость данных моделей по Лиувиллю.

— Построено общее решение класса фуксовых систем ранга  $N$ , а также изомонодромные тау-функции в терминах полувыврожденных конформных блоков  $W_N$ -алгебры с центральным зарядом  $c = N - 1$ . Попутно получено обобщение результата Боукока и Вотса о минимальном множестве матричных элементов вертексных операторов для общего центрального заряда и доказано несколько свойств полувыврожденных вертексных операторов и конформных блоков для  $c = N - 1$ .

— Получены представления в виде детерминанта Фредгольма и в виде ряда для тау-функции для системы Фуджи-Сузуки-Тсуды и её обобщения на много переменных. Специальный случай этой конструкции даёт аналог в старшем ранге для непрерывного гипергеометрического ядра Бородина и Ольшанского. В качестве побочного результата получено прямое изомонодромное доказательство AGT-W соответствия для  $c = N - 1$ .

— Рассмотрен класс гиперэллиптических кривых, у которых многоугольники Ньютона содержат только 4 граничных точки. Представлены соответствующие кластерные интегрируемые системы Тоды, а их дискретные автоморфизмы отождествлены с редукциями билинейного уравнения Хироты.

— Получены формулы рекурсии для векторов Бете моделей с периодическими граничными условиями, которые решаются иерархическим анзацем Бете и основаны на квантовой аффинной алгебре  $U_q(gl_n)$ . Представлена формула сумм для их скалярных произведений. Доказано, что когда векторы Бете становятся собственными, их нормы принимают вид детерминанта Годена.

— Исследован класс квантовых интегрируемых моделей, которые можно решить используя иерархический алгебраический анзац Бете и обладающими  $gl(m|n)$ -инвариантной R-матрицей. Доказана обобщенная гипотеза о норме собственных векторов их гамильтониана.

— Установлено явное соответствие между классическими тригонометрическими спиновыми цепочками и кластерными интегрируемыми системами в контексте 5-мерных суперсимметричных калибровочных теорий.

— При изучении связи между уравнениями Пенлеве и конформной теорией поля определены  $c = -2$  тау-функции в виде ряда Фурье  $SU(2)$  статсуммы Некрасова; исследованы их свойства и найдено их соответствие с уравнением Пенлеве  $III_3$  и уравнением  $q$ -Пенлеве  $III$ .

— В исследованиях по квантовым матричным алгебрам определена вторая каноническая форма производящей матрицы алгебры уравнения отражений и обобщенного Янгиана.

— Построена редуцированная матрица плотности для  $sl_3$ -инвариантной фундаментальной модели с помощью новой версии квантового уравнения Книжника-Замолодчикова.

— Построены контравариантные формы на диагональных редукционных алгебрах, алгебрах деформированных дифференциальных операторов, а также на некоторых стандартных модулях над этими алгебрами. Доказано, что специализация этих форм на пространстве коммутативных переменных представляет нулевые сингулярные вектора в том и только том случае, когда эти вектора принадлежат ядру форм.

— Доказано, что любое открытое подмножество симплекса Тома имеет строго положительную массу относительно любой невырожденной  $z$ -меры.

— Построены функции больших уклонений, характеризующие лавинную динамику в статистической RP-модели; рассмотрен фазовый переход от критического к некритическому режиму в лавинной динамике модели.

— Доказан изоморфизм замыкания  $T^{reg}/\mathbb{C}^*$ , параметризующего предельные подалгебры янгиана  $Y(\mathfrak{gl}_n)$ , и компактификации Делиня-Мамофрда  $\overline{M}_{0,n+2}$ .

— Получен критерий наличия PBW-свойства у универсальной обертывающей алгебры, отвечающей  $P$ -алгебре кошулевой операды  $P$ .

— Получены явные выражения для производящих функций плоских разбиений "с ямой" являющиеся характерами представлений квантовой тороидальной алгебры  $gl_1$ .

— Построено семейство матричных моделей, генерирующее числа Гурвица для базовых пространств с любой заданной характеристикой Эйлера.

- Классическая матричная теорема о деревьях для  $n \times n$  матрицы Лапласа обобщена на серию 3-параметрических тождеств степеней  $k = n, n + 1, n + 2, \dots$ , для полиномов Бернарди и высших аналогов детерминантов.
- Построено решение интегрируемой иерархии дифференциальных уравнений Кадомцева-Петвиашвили, использующее хопфову структуру алгебры графов.

Полученные результаты составили содержание 22 опубликованных международных рецензируемых журналах статей, 4 публикаций в сборниках, 6 принятых к печати статей и 12 препринтов, а также послужили основой для подготовки 57 докладов на международных научных конференциях. При участии лаборатории было организовано две международных конференции и две международных школы-конференции. Кроме того были организованы визиты в лабораторию иностранных ученых, которые прочли 7 курсов лекций для студентов и специалистов.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 A.G. Abanov, E. Bettelheim and P. Wiegmann, Integrable hydrodynamics of Calogero-Sutherland model: Bidirectional Benjamin-Ono equation, *J. Phys. A: Math. Theor.* 42 (2009) 135201; arXiv:0810.5327 [cond-mat.str-el].
- 2 A.G. Abanov, A. Gromov and M. Kulkarni, Soliton solutions of a Calogero model in a harmonic potential, *J. Phys. A: Math. Theor.* 44 (2011) 295203; arXiv:1103.6231 [cond-mat.str-el].
- 3 A.G. Abanov and P.B. Wiegmann, Quantum Hydrodynamics, Quantum Benjamin-Ono Equation, and Calogero Model, *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005) 076402; arXiv:cond-mat/0504041 [cond-mat.str-el].
- 4 M.J. Ablowitz, A.S. Fokas, J. Satsuma and H. Segur, On the periodic intermediate long wave equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* 15 (1982) 781–786.
- 5 M. Bektov, A. Liashyk, A. Zabrodin and A. Zotov, Trigonometric version of quantum-classical duality in integrable systems, *Nuclear Physics B* 903 (2016) 150-163; arXiv:1510.07509 [math-ph].
- 6 A. Liashyk, D. Rudneva, A. Zabrodin and A. Zotov, Asymmetric 6-vertex model and classical Ruijsenaars-Schneider system of particles, *Theoret. and Math. Phys.* 192:2 (2017), 1141–1153; arXiv:1611.02497 [math-ph].
- 7 T.B. Benjamin, Internal waves of permanent form in fluids of great depth, *Journal of Fluid Mechanics* 29:3 (1967) 559–592.
- 8 H. Ono, Algebraic Solitary Waves in Stratified Fluids, *J. Phys. Soc. Jpn.* 39 (1975) 1082–1091.
- 9 G. Bonelli, A. Sciarappa, A. Tanzini and P. Vasko, Six-dimensional supersymmetric gauge theories, quantum cohomology of instanton moduli spaces and  $gl(N)$  Quantum Intermediate Long Wave Hydrodynamics, *JHEP* 07 (2014) 141; arXiv:1403.6454 [hep-th].
- 10 H.H. Chen, Y.C. Lee and N.R. Pereira, Algebraic internal wave solitons and the integrable Calogero–Moser–Sutherland Nbody problem, *Physics of Fluids* 22 (1979) 187–188.
- 11 F. Calogero, Solution of a three-body problem in one dimension, *J. Math. Phys.* 10 (1969) 2191–2196.
- 12 J. Moser, Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations, *Advances in mathematics* 16 (1975) 197–220.
- 13 B. Sutherland, Exact results for a quantum many-body problem in one dimension, *Physical Review A* 4:5 (1971) 2019–2021.

- 14 M.A. Olshanetsky and A.M. Perelomov, Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras, *Inventiones mathematicae* 37:2 (1976) 93–108.
- 15 B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi and S. Yanagida, A commutative algebra on degenerate  $CP^1$  and Macdonald polynomials, *Journal of Mathematical Physics* 50 (2009) 095215; arXiv:0904.2291 [math.CO].
- 16 A. Gorsky, A. Zabrodin and A. Zotov, Spectrum of Quantum Transfer Matrices via Classical Many-Body Systems, *JHEP* 01 (2014) 070; arXiv:1310.6958 [hep-th].
- 17 A. Hurwitz and R. Courant, *Theory of functions*, Nauka, Moscow, 1968.
- 18 R.I. Joseph, Solitary waves in a finite depth fluid, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 10:12 (1977) L225-L227.
- 19 D.R.S. Ko, T. Kubota and L.D. Dobbs, Weakly-Nonlinear, Long Internal Gravity Waves in Stratified Fluids of Finite Depth, *Journal of Hydronautics* 12:4 (1978) 157–165.
- 20 M. Kulkarni and A.P. Polychronakos, Emergence of Calogero family of models in external potentials: Duality, Solitons and Hydrodynamics, arXiv:1706.03809 [math-ph].
- 21 V.B. Kuznetsov and E.K. Sklyanin, On Backlund transformations for many-body systems, *J. Phys. A: Math. Gen.* 31 (1998) 2241–2251; arXiv:solv-int/9711010.
- 22 D.R. Lebedev and A.O. Radul, Periodic intermediate long wave equation: The undressing method, *Theoret. and Math. Phys.* 70:2 (1987) 140–147.
- 23 A.V. Litvinov, On spectrum of ILW hierarchy in conformal field theory, *JHEP* 11 (2013) 155; arXiv:1307.8094 [hep-th].
- 24 A. Mironov, A. Morozov and Y. Zenkevich, Ding–Iohara–Miki symmetry of network matrix models, *Physics Letters B* 762 (2016) 196–208; arXiv:1603.05467 [hep-th].
- 25 M. Nazarov and E. Sklyanin, Integrable Hierarchy of the Quantum Benjamin-Ono Equation, *SIGMA* 9 (2013) 078; arXiv:1309.6464 [nlin.SI].
- 26 Frank W. Nijhoff and Gen-Di Pang, A time-discretized version of the Calogero-Moser model, *Physics Letters A*, 191 (1994) 101–107; arXiv:hep-th/9403052.
- 27 F.W. Nijhoff, O. Ragnisco and V.B. Kuznetsov, Integrable Time-Discretisation of the Ruijsenaars-Schneider Model, *Commun. Math. Phys.*, 176 (1996) 681–700; arXiv:hep-th/9412170.
- 28 S.N.M. Ruijsenaars and H. Schneider, A new class of integrable systems and its relation to solitons, *Annals of Physics* 146:1 (1986) 1–34.

- 29 J. Shiraishi and Y. Tutiya, Periodic ILW equation with discrete Laplacian, *J. Phys. A: Math. Theor.* 42 (2009) 404018; arXiv:0904.2644 [nlin.SI].
- 30 J. Shiraishi and Y. Tutiya, Periodic Benjamin–Ono equation with discrete Laplacian and 2D-Toda hierarchy, *Proc. of the Infinite Analysis 09, New Trends in Quantum Integrable Systems*, ed. by B. Feigin et al. (2011) p. 357; arXiv:1004.1455 [math-ph].
- 31 J. Shiraishi and Y. Tutiya, On some special solutions to periodic Benjamin-Ono equation with discrete Laplacian, *Math. Comput. Simulation* 82 (2012) 1341–1347; arXiv:0911.5005 [nlin.SI].
- 32 Yuri B. Suris, *The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach*, Springer Basel AG (2003).
- 33 A. Weil, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer-Verlag, (1976).
- 34 S. Wojciechowski, The analogue of the Backlund transformation for integrable many-body systems, *J. Phys. A: Math. Gen.* 15 (1982) L653–L657.
- 35 D. Baraglia, L.P. Schaposnik, Real structures on moduli spaces of Higgs bundles, *Adv. Theor. Math. Phys.* 20:3 (2016) 525–551.
- 36 E. Billey, J. Avan, O. Babelon, Exact Yangian Symmetry in the Classical Euler-Calogero-Moser Model, *Physics Letters A*, 188:3 (1994) 263–271.
- 37 F. Calogero, Solution of a three-body problem in one dimension, *J. Math. Phys.* 10 (1969) 2191–2196.
- 38 L. Fehér, B.G. Puztai, A class of Calogero type reductions of free motion on a simple Lie group, *Letters in Mathematical Physics*, 79(3) (2007) 263–277.
- 39 L. Fehér, B.G. Puztai, Spin Calogero models associated with Riemannian symmetric spaces of negative curvature, *Nuclear Physics B* 751 (2006) 436–458.
- 40 L. Fehér, An application of the reduction method to Sutherland type many-body systems, *Geometric Methods in Physics*, Birkhauser, Basel, 2013, 109–117.
- 41 J. Gibbons, T. Hermsen, A generalization of the Calogero-Moser systems, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 11 (1984) 337–348.
- 42 S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic press (1978).
- 43 N. Hitchin, Stable bundles and integrable systems, *Duke Math. J.* 54:1 (1987) 91–114.
- 44 A. Kapustin, E. Witten, Electric-magnetic duality and the geometric Langlands program, arXiv preprint hep-th/0604151.



- 45 S. Kharchev, A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, Calogero-Sutherland system with two types interacting spins, JETP Letters 106 No. 3 (2017) 179–183.
- 46 S. Kharchev, A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, Quasi-compact Higgs bundles and Calogero-Sutherland systems with two types of spins, Journal of Mathematical Physics 59:10 (2018) 103509.
- 47 H. Konno, Construction of the moduli space of stable parabolic Higgs bundles on a Riemann surface, Journal of the Mathematical Society of Japan 45 (1993) 253–276.
- 48 N. Nekrasov, Holomorphic bundles and many-body systems, Commun. Math. Phys. 180 (1996) 587–603.
- 49 N. Nekrasov, S. Shatashvili, Quantization of integrable systems and four dimensional gauge theories, In XVIth International Congress on Mathematical Physics, (2010) (pp. 265-289).
- 50 N. Nekrasov, E. Witten, The omega deformation, branes, integrability and Liouville theory, JHEP 09 (2010) 092.
- 51 M. Olshanetsky, A. Perelomov, Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras, Inventiones mathematicae 37:2 (1976) 93–108.
- 52 C.T. Simpson, Harmonic bundles on noncompact curves, Journal of the American Mathematical Society 3(3), (1990) 713–770.
- 53 B. Sutherland, Exact results for a quantum many-body problem in one dimension, Physical Review A 4:5 (1971) 2019–2021.
- B. Sutherland, Exact Results for a Quantum Many-Body Problem in One Dimension. II, Physical Review A, 5:3 (1972) 1372–1376.
- 54 D.V. Talalaev, A.V. Chervov, Hitchin system on singular curves, Theoret. and Math. Phys 140:2 (2004) 1043–1072.
- 55 S. Wojciechowski, An integrable marriage of the Euler equations with the Calogero-Moser system, Physics Letters A 111 (1985) 101–103.
- 56 M. Bershtein, P. Gavrylenko and A. Marshakov, Cluster integrable systems,  $q$ -Painlevé equations and their quantization, JHEP 1802 (2018), 077; [arXiv:1711.02063].
- 57 M. Bershtein and A. Shchekkin,  $q$ -deformed Painlevé tau function and  $q$ -deformed conformal blocks, J. Phys. A. 50 8 (2017) 085202; [arXiv:1608.02566].
- 58 M. Bershtein and A. Shchekkin, Bäcklund transformation of Painlevé III( $D_8$ )  $\tau$  function, J. Phys. A. 50 11 (2017) 115205; [arXiv:1608.02568].
- 59 G. Bonelli, A. Grassi, and A. Tanzini, New results in  $\mathcal{N} = 2$  theories from non-perturbative string Annales Henri Poincare 19 3 (2018) 743–774; [arXiv:1704.01517].

- 60 G. Bonelli, A. Grassi, and A. Tanzini, Quantum curves and  $q$ -deformed Painlevé equations; [arXiv:1710.11603].
- 61 G. Bonnet, F. David, B. Eynard, Breakdown of universality in multi-cut matrix models; J.Phys. A 33 (2000) 6739–6768; [arXiv:cond-mat/0003324].
- 62 A. Brini, A. Tanzini, Exact results for topological strings on resolved  $Y^{p,q}$  singularities, Comm. Math. Phys. (2009) 289 205–252; [arXiv:0804.2598].
- 63 P. Di Francesco, Quantum  $A_r$  Q-system solutions as  $q$ -multinomial series, Electron. J. Combin., 18(1) (2011), 176, 17; [arXiv:1104.0339]
- 64 R. Eager, S. Franco, and K. Schaeffer, Dimer Models and Integrable Systems, JHEP 1206 (2012) 106; [arXiv:1702.03958].
- 65 T. Eguchi and H. Kanno, Topological strings and Nekrasov’s formulas, JHEP. 0312, (2003) 006; [arXiv:hep-th/0310235].
- 66 L.D. Faddeev, L. Takhtajan, Hamiltonian methods in the theory of solitons, Springer, 2007.
- 67 J. Fay, Theta-functions on Riemann surfaces, Lect. Notes Math. 352, Springer, N.Y. 1973.
- 68 G. Felder and M. Müller-Lennert, Analyticity of Nekrasov Partition Functions; [arXiv:1709.05232].
- 69 M. Finkelberg and A. Tsymbaliuk, Multiplicative slices, relativistic Toda and shifted quantum affine algebras [arXiv:1708.01795].
- 70 V.V.Fock, Inverse spectral problem for GK integrable system [arXiv:1503.00289]
- 71 V. Fock and A. Marshakov, Loop groups, Clusters, Dimers and Integrable systems, in Geometry and Quantization of Moduli Spaces 1–65; [arXiv:1401.1606].
- 72 S. Fomin and A. Zelevinsky, Cluster algebras IV: coefficients, Compos. Math. 143 (2007), 112–164; [arXiv:math/0602259].
- 73 S. Franco, A. Hanany, K. Kennaway, D. Vegh, B. Wecht, Brane Dimers and Quiver Gauge Theories, JHEP 0601 (2006) 096 [arXiv:hep-th/0504110].
- 74 S. Franco, A. Hanany, D. Martelli, J. Sparks, D. Vegh, B. Wecht, Gauge Theories from Toric Geometry and Brane Tilings, JHEP 0601 (2006) 128 [arXiv:hep-th/0505211].
- 75 S. Franco, Y. Hatsuda, M. Marino, Exact quantization conditions for cluster integrable systems J.Stat.Mech. (2016) 063107; [arXiv:1512.03061].
- 76 Y. Hatsuda, M. Marino Exact quantization conditions for the relativistic Toda lattice JHEP 1605 (2016) 133 [arXiv:1511.02860].

- 77 O. Gamayun, N. Iorgov, and O. Lisovyy, Conformal field theory of Painlevé VI, JHEP 1210, (2012), 38; [arXiv:1207.0787].
- 78 O. Gamayun, N. Iorgov, and O. Lisovyy, How instanton combinatorics solves Painlevé VI,V and III's, J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013) 335203; [arXiv:1302.1832].
- 79 P. Gavrylenko, Isomonodromic  $\tau$ -functions and  $W_N$  conformal blocks, JHEP 0915, (2015), 167; [arXiv:1505.00259].
- 80 P. Gavrylenko and A. Marshakov, Exact conformal blocks for the W-algebras, twist fields and isomonodromic deformations, JHEP 1602 (2016) 181; [arXiv:1507.08794 [hep-th]].
- 81 M. Gekhtman, M. Shapiro, A. Vainshtein Generalized Bäcklund-Darboux transformations for Coxeter-Toda flows from a cluster algebra perspective Acta Math., 206, (2011), 245–310; [arXiv:0906.1364].
- 82 A. B. Goncharov and R. Kenyon, Dimers and cluster integrable systems, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (2013) 46, 5, 747–813; [arXiv:1107.5588].
- 83 L. Göttsche, H. Nakajima, K. Yoshioka  $K$ -theoretic Donaldson invariants via instanton counting, Pure Appl.Math.Quart. 5 (2009) 1029–1111; [arXiv:math/0611945].
- 84 R. Gonin, A. Tsymbaliuk On Sevostyanov's construction of quantum difference Toda lattices for classical groups [arXiv:1804.01063].
- 85 A. Iqbal and A. K. Kashani-Poor, Instanton counting and Chern-Simons theory, Adv.Theor.Math.Phys. 7 3 (2003), 457–497; [arXiv:hep-th/0212279].
- 86 Концевич М., Равномерные расположения, Журнал “Квант” (1985) 7 51–52.
- 87 A. Marshakov Seiberg-Witten Theory and Integrable Systems World Sci. Publishing, 1999.
- 88 A. Marshakov, Lie Groups, Cluster Variables and Integrable Systems, J. Geom. Phys. 67 (2013) 16–36; [arXiv:1207.1869].
- 89 N. Nekrasov, A. Okounkov, Seiberg-Witten theory and random partitions, Prog.Math. 244 (2006) 525-596; [hep-th/0306238].
- 90 H. Nakajima, K. Yoshioka, Perverse coherent sheaves on blow-up. III. Blow-up formula from wall-crossing, Kyoto J. Math. 51 2 (2011), 263–335; [arXiv:0911.1773].
- 91 H. Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, Comm. Math.Phys. 220(2) (2001) 165–229.
- 92 H. Sakai, Problem: Discrete Painlevé equations and their Lax forms RIMS Kôkyûroku Bessatsu B2 (2007) 195–208.

- 93 Y. Tachikawa, Five-dimensional Chern-Simons terms and Nekrasov's instanton counting, JHEP 0402 (2004) 050, [arXiv:hep-th/0401184].
- 94 E. T. Whittaker and G. N. Watson A Course of Modern Analysis. Cambridge University Press (1927).
- 95 A. Zabrodin, A survey of Hirota's difference equations, Theoret. and Math. Phys., 113 2, (1997), 1347–1392.
- 96 L. D. Faddeev, E. K. Sklyanin and L. A. Takhtajan, Quantum Inverse Problem. I, Theor. Math. Phys. 40 (1979) 688–706.
- 97 L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg  $XYZ$  model, Usp. Math. Nauk 34 (1979) 13; Russian Math. Surveys 34 (1979) 11 (Engl. transl.).
- 98 L. D. Faddeev, How Algebraic Bethe Ansatz works for integrable model, in: Les Houches Lectures Quantum Symmetries, eds A. Connes et al, North Holland, (1998) 149, arXiv:hep-th/9605187.
- 99 V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
- 100 N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras, Correlation functions of the  $XXZ$  Heisenberg spin-1/2 chain in a magnetic field, Nucl. Phys. B 567 (2000) 554–582, arXiv:math-ph/9907019.
- 101 N. Kitanine, K. Kozłowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, Form factor approach to dynamical correlation functions in critical models, J. Stat. Mech. 1209 (2012) P09001, arXiv:1206.2630.
- 102 F. Göhmann, A. Klümper, A. Seel, Integral representations for correlation functions of the  $XXZ$  chain at finite temperature, J. Phys. A 37 (2004) 7625–7652, arXiv:hep-th/0405089.
- 103 P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, Generalized Heisenberg ferromagnet and the Gross–Neveu model, Zh. Eksp. Theor. Fiz. 80 (1981) 214–228; Sov. Phys. JETP, 53:1 (1981) 108–114 (Engl. transl.)
- 104 P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin,  $GL(3)$ -invariant solutions of the Yang-Baxter equation and associated quantum systems, Zap. Nauchn. Sem. POMI. 120 (1982) 92–121; J. Sov. Math., 34:5 (1982) 1948–1971 (Engl. transl.)
- 105 P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, Diagonalization of  $GL(N)$  invariant transfer matrices and quantum  $N$ -wave system (Lee model), J. Phys. A: 16 (1983) L591–L596.
- 106 V. Tarasov, A. Varchenko, Jackson integral representations of solutions of the quantized Knizhnik–Zamolodchikov equation, Algebra and Analysis, 6:2 (1994) 90–137; St. Petersburg Math. J. 6:2 (1995) 275–313 (Engl. transl.), arXiv:hep-th/9311040.

- 107 V. Tarasov, A. Varchenko, Combinatorial formulae for nested Bethe vectors, SIGMA 9 (2013) 048, arXiv:math/0702277 [math.QA].
- 108 S. Belliard and E. Ragoucy, The nested Bethe ansatz for 'all' closed spin chains, J. Phys. A 41 (2008) 295202, arXiv:0804.2822.
- 109 S. Khoroshkin, S. Pakuliak, A computation of an universal weight function for the quantum affine algebra  $U_q(\mathfrak{gl}(N))$ , J. of Mathematics of Kyoto University, 48 n.2 (2008) 277–321, arXiv:0711.2819 [math.QA].
- 110 S. Pakuliak, S. Khoroshkin, The weight function for the quantum affine algebra  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$ , Theor. Math. Phys. 145 (2005) 1373, arXiv:math/0610433 [math.QA].
- 111 S. Khoroshkin, S. Pakuliak, V. Tarasov, Off-shell Bethe vectors and Drinfeld currents, J. Geom. Phys. 57 (2007) 1713, arXiv:math/0610517 [math.QA].
- 112 L. Frappat, S. Khoroshkin, S. Pakuliak, E. Ragoucy, Bethe Ansatz for the Universal Weight Function, Ann. H. Poincarre 10 (2009) 513, arXiv:0810.3135.
- 113 S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, Bethe vectors of  $GL(3)$ -invariant integrable models, J. Stat. Mech. 1302 (2013) P02020, arXiv:1210.0768.
- 114 A. Hutsalyuk, A. Liashyk, S. Z. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, Current presentation for the double super-Yangian  $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$  and Bethe vectors, Russ. Math. Surv. 72:1 (2017) 33–99, arXiv:1611.09020.
- 115 A. G. Izergin and V. E. Korepin, A lattice model related to the nonlinear Schrödinger equation, Sov. Phys. Dokl. 26 (1981) 653–654.
- 116 P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, Quantum spectral transform method: recent developments, in Integrable Quantum Field Theories, Lecture Notes in Phys. 151 Springer, Berlin–Heidelberg, (1982) 61–119.
- 117 A. Molev, M. Nazarov and G. Olshanski, Yangians and classical Lie algebras, Russian Math. Surv. 51:2 (1996), 205–282, arXiv:hep-th/9409025.
- 118 A. Molev, Yangians and Classical Lie Algebras. Mathematical Surveys and Monographs, 143. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- 119 A. Hutsalyuk, A. Liashyk, S. Z. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, Scalar products of Bethe vectors in the models with  $\mathfrak{gl}(m|n)$  symmetry, Nucl. Phys. B923 (2017) 277–311, arXiv:1704.08173.
- 120 Boos H, Göhmann F, Klümper A, Nirov K S and Razumov A V, Quantum groups and functional relations for higher rank, J. Phys. A: Math. Theor. 47, (2014) pp. 275201.
- 121 Boos H and Korepin V, Quantum spin chains and Riemann zeta function with odd arguments, J. Phys. A: Math. Gen. 34, (2001) pp. 5311–5317.

- 122 A.Chervov, D.Talalaev The KZ equation, G-operators, the quantum Drinfel'd-Sokolov reduction and the quantum Cayley-Hamilton identity J. Math. Sci. (N.Y.) 158 (2008), pp. 904–911.
- 123 D. Gurevich, P. Pyatov, P. Saponov Hecke symmetries and characteristic relations on reflection equation algebras, Lett. Math. Phys. 41 (1997), no. 3, pp. 255–264.
- 124 D. Gurevich, P. Saponov Generic super-orbits in  $gl(m|n)^*$  and their braided counterparts, J. of Geometry and Physics 60 (2010), pp. 1411–1423.
- 125 D. Gurevich, P. Saponov Braided Yangians, arXiv:1612.05929.
- 126 D.Gurevich, P.Saponov From Reflection Equation Algebra to Braided Yangians, Proc. International Conference in Mathematical Physics, Kezenoy-Am 2016 (Russia), to appear in Springer Verlag, 2018.
- 127 V.Drinfeld, V.Sokolov Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type (Russian) Current problems in math. Vol 24, pp. 81–180, Moscow, 1984.
- 128 E.Frenkel, N.Reshetikhin, M.Semenov-Tian-Shansky Drinfeld-Sokolov reduction for difference operators and deformations of W-algebras. I. The case of Virasoro algebra, Comm. Math. Phys. 192 (1998), pp. 605–629.
- 129 E.Frenkel, N.Reshetikhin Quantum affine algebras and deformations of the Virasoro and W-algebras, CMP 178, pp. 237–264.
- 130 Jimbo M, Miki K, Miwa T and Nakayashiki A, Correlation functions of the XXZ model, Phys. Lett. A 168, (1992) pp. 256–63.
- 131 M. Aigner, Lattice Paths and Determinants Computational Discrete Mathematics, 13B“12, Lecture Notes in Comput. Sci., 2122, Springer-Verlag, Berlin, (2001).
- 132 A. Barvinok Integer points in polyhedra EMS, Zurich, 2008.
- 133 M. Beck, C. Haase, F. Sottile, Formulas of Brion, Lawrence, and Varchenko on rational generating functions for cones, Math. Intelligencer 31 1(2009), 9–17; [arXiv:math/0506466].
- 134 A. Berele, A. Regev, Hook Young diagrams with applications to combinatorics and representations of Lie superalgebras, Adv. Math., 64, (1987), 118–175.
- 135 I.N. Bernstein, I.M. Gelfand, S.I. Gelfand, Differential operators on the base affine space and a study of  $\mathfrak{g}$ -modules, I.M. Gelfand (ed.), Lie groups and their representations, Proc. Summer School on Group Representations, Janos Bolyai Math. Soc.& Wiley (1975), 39–64.
- 136 M. Brion, Points entiers dans les polyèdres convexes, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 21 4 (1988), 653B“663.

- 137 I. Burban, O. Schiffmann On the Hall algebra of an elliptic curve *Duke Math. J.* 161 7 (2012), 1171–1231; [arXiv:math/0505148].
- 138 Shun-Jen Cheng, Jae-Hoon Kwon, Ngau Lam, A BGG-Type Resolution for Tensor Modules over General Linear Superalgebra, *Lett. Math. Phys.*, 84 1, (2008), 75–87; [arXiv:0801.0914].
- 139 B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin, Quantum continuous  $\mathfrak{gl}_\infty$ : Tensor product of Fock modules and  $W_n$  characters, *Kyoto J. Math.*, 51 2, (2011) 365–392; [arXiv:1002.3113].
- 140 B. Feigin, E. Frenkel, Affine Kac-Moody algebras at the critical level and Gelfand-Dikii algebras, *Int. Jour. Mod. Phys. A7, Supplement 1A* (1992) 197–215.
- 141 B. Feigin, E. Frenkel, Quantum W-algebras and Elliptic Algebras, *Comm. Math. Phys.*, 178 3, (1996), 653–677; [arXiv:q-alg/9508009].
- 142 B. Feigin and D. Fuchs, Representations of the Virasoro algebra. Representations of Lie Groups and Related Topics, 465, *Adv. Stud. Contemp. Math.*, 7, Gordon and Breach, New York, 1990.
- 143 B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin, Quantum toroidal  $\mathfrak{gl}_1$  algebra: plane partitions, *Kyoto J. Math.*, 52 3, (2012), 621–659; [arXiv:1110.5310].
- 144 B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin, Quantum toroidal  $\mathfrak{gl}_1$  and Bethe ansatz, *J. Phys. A* 48 24, (2015), 244001; [arXiv:1502.07194].
- 145 B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin, Finite type modules and Bethe Ansatz for quantum toroidal  $\mathfrak{gl}(1)$ ; *Comm. Math. Phys.* 356 1 (2017), 285–327; [arXiv:1603.02675].
- 146 B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, A. Odesskii, Ya. Pugai, Algebra of screening operators for the deformed  $W_n$  algebra, *Comm. Math. Phys.*, 191 (3), (1998), 501–541; [arXiv:q-alg/9702029].
- 147 B. Feigin, A. Hoshino, J. Shibahara, J. Shiraishi, S. Yanagida, Kernel function and quantum algebras, *RIMS kōkyūroku* 1689, (2010), 133–152; [arXiv:1002.2485].
- 148 B. Feigin, I. Makhlin, A Combinatorial Formula for Affine Hall-Littlewood Functions via a Weighted Brion Theorem, *Selecta Mathematica* (2016) [arXiv:1505.04269].
- 149 B. Feigin, G. Mutafyan, The Quantum Toroidal Algebra  $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$ : Calculation of Characters of Some Representations as Generating Functions of Plane Partitions, *Funct. Anal. Appl.*, 47 1, (2013) 50–61.
- 150 B. Feigin, G. Mutafyan, Characters of Representations of the Quantum Toroidal Algebra  $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$ : Plane Partitions with “Stands”, *Funct. Anal. Appl.*, 48 1, (2014) 36–48.

- 151 B.L. Feigin, A.M. Semikhatov,  $W_n^{(2)}$  algebras, Nucl. Phys. B 698 (3), (2004), 409–449; [arXiv:math/0401164].
- 152 D. Gaiotto, M. Rapčák, Vertex Algebras at the Corner, [arXiv:1703.00982].
- 153 I. Gessel, G. Viennot, Binomial Determinants, Paths, and Hook Length Formulae, Advances in Mathematics 58, (1985), 300–321.
- 154 D. Jafferis Crystals and intersecting branes [arXiv:hep-th/0607032].
- 155 M. Jimbo, M. Lashkevich, T. Miwa, Y. Pugai Lukyanov’s screening operators for the deformed Virasoro algebra Physics Letters A 229 (5), 285–292; [arXiv:hep-th/9607177].
- 156 D. Kazhdan and G. Lusztig, Tensor structures arising from affine Lie algebras, I, J. Amer. Math. Soc. 6 (1993) 905B $\mathbb{T}$ “947; II, J. Amer. Math. Soc. 6 (1993) 949B $\mathbb{T}$ “1011; III, J. Amer. Math. Soc. 7 (1994) 335B $\mathbb{T}$ “381; IV, J. Amer. Math. Soc. 7 (1994) 383B $\mathbb{T}$ “453.
- 157 V.G. Kac, S. Roan, M. Wakimoto, Quantum Reduction for Affine Superalgebras, Comm. Math. Phys. 241 2, (2003), 307–342; [arXiv:math-ph/0302015].
- 158 A. Lascoux, P. Pragacz Ribbon Schur Functions. European Journal of Combinatorics 9 6, (1988), 561–574.
- 159 J. Lawrence, Rational-function-valued valuations on polyhedra, Discrete and computational geometry (New Brunswick, NJ, 1989/1990), DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., 6, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 199–208.
- 160 B. Lindström, On the vector representation of induced matroids, Bull. London Math. Soc. 5, (1973), 85–90.
- 161 A. Litvinov, L. Spodyneiko, On  $W$  algebras commuting with a set of screenings, JHEP (2016) 138 [arXiv:1609.06271].
- 162 S. L. Lukyanov and V. A. Fateev, Additional symmetries and exactly soluble models in two-dimensional conformal field theory, Sov.Sci.Rev.A.Phys. 15 (1990) 1–117.
- 163 A. G. Khovanskii, A. V. Pukhlikov, Finitely additive measures of virtual polyhedra, St. Petersburg Math. J. 4 2, (1993), 337–356.
- 164 A. G. Khovanskii, A. V. Pukhlikov, The Riemann-Roch theorem for integrals and sums of quasipolynomials on virtual polytopes, St. Petersburg Math. J. 4 4, (1993), 789–812.
- 165 I. Makhlin, Weyl’s Formula as the Brion Theorem for Gelfand-Tsetlin Polytopes, Functional Analysis and Its Applications, 50:2 (2016), 98–106 [arXiv:1409.7996].



- 166 I. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, 2-nd ed. Clarendon Press (1995).
- 167 E.M. Moens, J. van der Jeugt, A determinantal formula for supersymmetric Schur polynomials, *J. Algebraic Combin.* 17 3, (2003), 283–307.
- 168 M. Bershtein, B. Feigin, G. Merzon, Plane partitions with a “pit”: generating functions and representation theory, *Sel. Math. New Ser.* 24 (2018) 21–62.
- 169 A. Okounkov, N. Reshetikhin, C. Vafa, Quantum Calabi-Yau and Classical Crystals, The unity of mathematics, 597-618, *Progr. Math.*, 244, Birkhauser Boston; [arXiv:hep-th/0309208].
- 170 A.N.Sergeev, Representations of the Lie superalgebras  $\mathfrak{gl}(n,m)$  and  $Q(n)$  on the space of tensors, *Funct. Anal. Appl.*, 18 1, (1984) 70–72.
- 171 J. Shiraishi, H. Kubo, H. Awata, S. Odake, A Quantum Deformation of the Virasoro Algebra and the Macdonald Symmetric Functions, *Lett.Math.Phys.* 38 (1996) 33 [arXiv:q-alg/9507034].
- 172 R. P. Stanley, Enumerative Combinatorics, Vol. 1 Cambridge University Press (1997).
- 173 A. Tsymbaliuk, The affine Yangian of  $gl_1$  revisited, *Adv. in Math.* 304, (2017) 583–645 [arXiv:1404.5240].
- 174 A.V. Zelevinsky, Resolutions, dual pairs, and character formulas, *Funct. Anal. Appl.*, 21 2, (1987), 152–154.
- 175 D. Anderson, Okounkov bodies and toric degenerations, *Mathematische Annalen*, 356(3), pp. 1183–1202, 2013.
- 176 V. Alexeev, M. Brion, Toric degenerations of spherical varieties, *Selecta Mathematica*, 10(4), pp. 453–478, 2005.
- 177 L. Bossinger, S. Lamboglia, K. Mincheva, F. Mohammadi, Computing toric degenerations of flag varieties, arXiv:1702.05480.
- 178 R. Carter, Lie Algebras of Finite and Affine Type, Cambridge University Press, 2005.
- 179 G. Cerulli Irelli, X. Fang, E. Feigin, G. Fourier, M. Reineke, Linear degenerations of flag varieties, *Math. Z.* 287 (2017), no. 1-2, 615–654.
- 180 X. Fang, G. Fourier, P. Littelmann, Essential bases and toric degenerations arising from birational sequences, *Adv. Math*, Volume 312, 25 May 2017, Pages 107–149.
- 181 X. Fang, G. Fourier, P. Littelmann, On toric degenerations of flag varieties, *Representation Theory - Current Trends and Perspectives*, EMS Series of Congress Reports, pp. 187–232, 2016.

- 182 X.Fang, E.Feigin, G.Fourier, I.Makhlin, Weighted PBW degenerations and tropical flag varieties, *Commun.Contemp.Math.* to appear, <https://doi.org/10.1142/S0219199718500165>
- 183 X. Fang, G. Fourier, M. Reineke, PBW-type filtration on quantum groups of type  $A_n$ , *Journal of Algebra*, Volume 449(2016), pp. 321–345.
- 184 E. Feigin,  $\mathbb{G}_a^M$  degeneration of flag varieties, *Selecta Mathematica, New Series*, vol. 18 (2012), no. 3, pp. 513–537.
- 185 E. Feigin, Degenerate flag varieties and the median Genocchi numbers, *Mathematical Research Letters*, no. 18 (6) (2011), pp. 1–16.
- 186 E. Feigin, I. Makhlin, Vertices of FFLV polytopes, *J. Algebraic Combin.* 45 (2017), no. 4, 1083–1110.
- 187 E. Feigin, M. Finkelberg, P. Littelmann, Symplectic degenerate flag varieties, *Canadian Journal of Mathematics*, vol. 66 (2014), no. 6 pp. 1250–1286.
- 188 E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, PBW filtration and bases for irreducible modules in type  $A_n$ , *Transformation Groups*, March 2011, Volume 16, Issue 1, pp 71–89.
- 189 E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, PBW-filtration and bases for symplectic Lie algebras, *International Mathematics Research Notices*, no. 24 (2011), pp. 5760–5784.
- 190 E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, Favourable modules: Filtrations, polytopes, Newton-Okounkov bodies and flat degenerations, *Transform. Groups* 22 (2017), no. 2, 321–352.
- 191 W. Fulton, *Young Tableaux*, Cambridge University Press, 1997.
- 192 W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Princeton University Press, 1993.
- 193 R.Hartshorne, *Algebraic geometry*, New York: Springer-Verlag, 1977; corrected 6th printing, 1993. GTM 52.
- 194 D. Maclagan, B. Sturmfels, *Introduction to tropical geometry*. Graduate Studies in Mathematics, 161. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015. xii+363 pp.
- 195 E. Miller, B. Sturmfels, *Combinatorial Commutative Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, 227. Springer-Verlag, New York, 2005. xiv+417 pp.
- 196 D. Speyer, B. Sturmfels, The tropical Grassmannian, *Advances in Geometry* 4(3), pp. 389–411, 2004.
- 197 E. Vinberg, On some canonical bases of representation spaces of simple Lie algebras, conference talk, Bielefeld, 2005.
- 198 Leonardo Aguirre, Giovanni Felder, Alexander P. Veselov Gaudin subalgebras and stable rational curves. *Compositio Mathematica*, 2011, Vol. 147, 1463–1478.

- 199 Corrado De Concini, Claudio Procesi, Wonderful models of subspace arrangements. *Selecta Math. (N.S.)* 1 (1995), no. 3, 459–494.
- 200 Corrado De Concini, Claudio Procesi, Hyperplane Arrangements And Holonomy Equations. *Selecta Math. (N.S.)* 1 (1995), no. 3, 495–535.
- 201 Knop, Friedrich. A Harish-Chandra homomorphism for reductive group actions. *Ann. of Math. (2)* 140 (1994), no. 2, 253–288.
- 202 F. Magri, A simple model of the integrable Hamiltonian equation. *J.Math.Phys.* 19(5): 1156–1162, 1978.
- 203 A. I. Molev Yangians and their applications. *Handbook of Algebra*, Vol. 3, 2003, 907–959.
- 204 A.I.Molev Yangians and classical Lie algebras. *Mathematical Surveys and Monographs*. Vol.143. Providence, RI: AMS, 2007.
- 205 A. S. Miscenko, A. T. Fomenko Euler equations on finite-dimensional Lie groups. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 12(2):371.
- 206 Mukhin, E.; Tarasov, V.; Varchenko, A. Bispectral and  $(gl_N, gl_M)$  dualities, discrete versus differential. *Adv. Math.* 218 (2008), no. 1, 216–265.
- 207 Aleksei Ilin, Leonid Rybnikov, Degeneration of Bethe subalgebras in the Yangian of  $gl_n$ , *Letters in Mathematical Physics*, V. 108, Issue 4 (2018) 1083–1107, <https://doi.org/10.1007/s11005-017-1031-2>
- 208 Maxim Nazarov, Grigori Olshanski Bethe Subalgebras in Twisted Yangians. *Comm. Math. Phys.* 178 (1996), 483–506.
- 209 G. I. Olshanski, Extension of the algebra  $U(\mathfrak{g})$  for infinite-dimensional classical Lie algebras  $\mathfrak{g}$ , and the Yangians  $Y(gl(m))$ . *Soviet Math. Dokl.* 36 (1988), 569–573.
- 210 L. G. Rybnikov Centralizers of certain quadratic elements in Poisson-Lie algebras and the method of translation of invariants. *Russian Mathematical Surveys*, 2005, 60:2, 367–369.
- 211 L. Rybnikov Cactus group and monodromy of Bethe vectors. *International Mathematics Research Notices* 2016;doi: 10.1093/imrn/rnw259. arXiv:1409.0131 math.QA
- 212 L. Rybnikov Argument Shift Method and Gaudin Model. *Func. Anal. Appl.* 40 (2006), No 3, pp. 30–43.
- 213 V. V. Shuvalov On Limits of Mishchenko–Fomenko Subalgebras in Poisson Algebras of Semisimple Lie Algebras. *Functional Analysis and Its Applications*, 2002, 36:4, 298-305.
- 214 Takhtajan L.A., Faddeev L.D., Quantum inverse scattering method and the Heisenberg XYZ-model. *Russian Math. Surv.* 34 (1979), no. 5, 11-68.

215 A. A. Tarasov The maximality of certain commutative subalgebras in the Poisson algebra of a semisimple Lie algebra. Russian Mathematical Surveys, 2002, 57:5, 1013–1014.

216 A. A. Tarasov Uniqueness of liftings of maximal commutative subalgebras of the Poisson-Lie algebra to the enveloping algebra. Sbornik: Mathematics, 2003, 194:7, 1105–1111.

217 Tarasov V., Structure of quantum  $L$ -operators for the  $R$ -matrix of the  $XXZ$ -model. Theor. Math. Phys. 61 (1984), 1065–1071.

218 E.B. Vinberg On certain commutative subalgebras of universal enveloping algebra. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 54:1 (1990), 3–25.