Правительство Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
(НИУ ВШЭ)

УДК 515.14
Рег. № НИОКТР АААА-А19-119061790096-7
Рег. № ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ
Проректор НИУ ВШЭ
канд. экон. наук
_______________М.М. Юдкевич
«___» _________2019 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

РАЗВИТИЕ КОМБИНАТОРНЫХ, ГОМОЛОГИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВ МОДУЛЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ И ИХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К ПРОБЛЕМАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(заключительный)

Руководители НИР:
научн. руководитель МЛ теории
представлений и математической физики,
канд. физ.-мат. наук ___________А.Ю. Окуньков

зав. МЛ теории представлений и математической
физики, д-р физ.-мат. наук ______________Б.Л. Фейгин

Москва 2019

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководители		
Научный руководитель лаборатории, к.ф.-м.н	подпись, дата	А.Ю. Окуньков (общая координация работы)
Заведующий лаборатории, д.ф.-м.н	подпись, дата	Б.Л. Фейгин (общая координация работы)
Заместитель заведующего лабораторией, д.ф.-м.н	подпись, дата	А.В. Забродин (введение, заключение,реферат)
Заместитель заведующего лабораторией, к.ф.-м.н	подпись, дата	П.Н. Пятов (введение, заключение,реферат)
Заместитель заведующего лабораторией, к.ф.-м.н	подпись, дата	Л.Г. Рыбников (введение, заключение,реферат)
Менеджер научного проекта	подпись, дата	Е.А. Жингель (введение, заключение,реферат)
Исполнители		
Главный научный сотрудник, к.ф.-м.н	подпись, дата	И.В. Лосев (общая координация работы)
Научный сотрудник, к.ф.-м.н.	подпись, дата	М.А. Берштейн (раздел 1)
Научный сотрудник, к.ф.-м.н.	подпись, дата	Ю.М. Бурман (раздел 1)
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	подпись, дата	В.Г. Горбунов (раздел 1)
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	подпись, дата	Е.А. Горский (раздел 1)
Научный сотрудник, д.ф.-м.н	подпись, дата	А.В. Зотов (раздел 1)
Научный сотрудник, к.ф.-м.н.	подпись, дата	И.Ю. Махлин (раздел 1)
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	подпись, дата	О.В. Огиевецкий (раздел 1)
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	подпись, дата	А.Ю. Орлов (раздел 1)
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	подпись, дата	В.А. Побережный (раздел 1)
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	подпись, дата	А.М. Поволоцкий (раздел 1)
Научный сотрудник, д.ф.-м.н	подпись, дата	П.А. Сапонов (раздел 1)

Научный сотрудник, д.ф.-м.н	подпись, дата	А.Н. Сергеев (раздел 1)
Научный сотрудник, Ph.D.	подпись, дата	Т. Такебе (раздел 1)
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	подпись, дата	А.С. Хорошкин (раздел 1)
Младший научный сотрудник, к.ф.-м.н	подпись, дата	В.Э. Ахмедова (раздел 1)
Младший научный сотрудник, к.ф.-м.н.	подпись, дата	Б.С. Бычков (раздел 1)
Младший научный сотрудник, к.ф.-м.н	подпись, дата	П.Г. Гавриленко (раздел 1)
Младший научный сотрудник	подпись, дата	А. Ляшик (раздел 1)
Младший научный сотрудник	подпись, дата	Н.С. Семенякин (раздел 1)
Младший научный сотрудник	подпись, дата	А.А. Трофимова (раздел 1)
Младший научный сотрудник	подпись, дата	А.И. Щечкин (раздел 1)
Стажер-исследователь	подпись, дата	Д.А. Васильев (раздел 1)
Стажер-исследователь	подпись, дата	Р.В. Гейко (раздел 1)
Стажер-исследователь	подпись, дата	Р.Р. Гонин (раздел 1)
Стажер-исследователь	подпись, дата	А.Н. Дятлик (раздел 1)
Стажер-исследователь	подпись, дата	А.Ю. Жевнерчук (раздел 1)
Стажер-исследователь	подпись, дата	Д.И. Зубов (раздел 1)
Стажер-исследователь	подпись, дата	А.Н. Иванов (раздел 1)
Стажер-исследователь	подпись, дата	А.И. Ильин (раздел 1)
Стажер-исследователь	подпись, дата	И.Д. Левин (раздел 1)
Стажер-исследователь	подпись, дата	И.А. Машанова-Голикова (раздел 1)

Стажер-исследователь	подпись, дата	М.Г. Матушко (раздел 1)
Стажер-исследователь	подпись, дата	И.Д. Моторин (раздел 1)
Стажер-исследователь	подпись, дата	А.К. Стоян (раздел 1)
Стажер-исследователь	подпись, дата	П.А. Филиппова (раздел 1)
Стажер-исследователь	подпись, дата	А.Л. Шейнкман (раздел 1)

РЕФЕРАТ

Отчет на 126 страниц, 1 часть, 1 рис., 216 источников.

ФУНКЦИЯ НЕКРАСОВА, УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ, τ-ФУНКЦИЯ, КОНФОРМНЫЙ БЛОК, АЛГЕБРА ВИРАСОРО, ИНСТАНТОННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ, ВЕРТЕКСНЫЕ АЛГЕБРЫ, АФФИННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ, УРАВНЕНИЕ КНИЖНИКА-ЗАМОЛОДЧИКОВА, РЕДУКЦИЯ ДРИНФЕЛЬДА-СОКОЛОВА, ТОЖДЕСТВА ГАМИЛЬТОНА-КЭЛИ, МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ, АНЗАЦ БЕТЕ, ВЕРОЯТНОСТНЫЕ Z-МЕРЫ, СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ, ОПЕРАДЫ, ЧИСЛА ГУРВИЦА, АЛГЕБРЫ ЧЕРЕДНИКА, ИНВАРИАНТЫ УЗЛОВ, ГОМОЛОГИИ ХОВАНОВА-РОЗАНСКОГО, ГОМОЛОГИИ КОШУЛЯ, ЯНГИАНЫ, ПОДАЛГЕБРЫ БЕТЕ, КВАНТОВЫЕ ГРУППЫ

Цели работы: развитие общего подхода к разнообразным вопросам, находящимся на стыке теории интегрируемых систем с теорией представлений квантовых и бесконечномерных групп и алгебр.

Задачи: развитие новых направлений математики с опорой на идеи, возникающие в современной фундаментальной физике; вовлечение сотрудников и студентов НИУ ВШЭ в научную деятельность лаборатории, содействие их контактам с зарубежными исследователями.

Объекты научного исследования: интегрируемые модели квантовой механики и теории стохастических процессов; геометрическая теория представлений, эллиптические конформные блоки, обобщенные янгианы, квантовые матричные алгебры, редукционные алгебры, геометрическое соответствие Ленглендса.

Методы исследований: алгебраический и теоретико-представленческий анализ классических и квантовых теорий поля, статистической физики и случайных процессов, развитие комбинаторных, гомологических и геометрических методов в теории пространств модулей различных геометрических и аналитических структур.

Полученные результаты: рассмотрены эллиптические решения интегрируемых нелинейных дифференциальных и разностных уравнений и получены уравнения движения для их полюсов; построены новые модели интегрируемых релятивистских волчков типа Эйлера-Арнольда; доказаны новые комбинаторные соотношения для скалярных произведений векторов Бете в серии gl_n-инвариантных интегрируемх моделей; изучены представления квантовой тороидальной алгебры gl_1, что позволило доказать гипотезу о соотношениях между q-деформированными конформными блоками; построены и изучены обобщения соответствия между уравнениями Пенлеве и калибровочными теориями на специальный случай $SU(2)$ $\mathcal{N} = 2^*$ теории; построено соответствие между кластерными интегрируемыми системами и спиновыми цепочками в контексте их соответствия 5-мерным суперсимметричным калибровочным теориям; определено семейство коммутативных подалгебр Бете в янгиане и изучены их структурные свойства; для семейства обобщенных янгианов построены производящие функции, являющиеся аналогами элементарных симметрических функций и доказана их коммутативность; установлены точные законы больших чисел для двух аддитивных по времени величин в стохастической модели "Raise and Peel"; для неоднородной редуцированной матрицы плотности и произвольной простой алгебры Ли построены функциональные уравнения; предложена конструкция новой интегрируемой модели через проективный предел $n \to \infty$ модели Калоджеро-Сазерленда n фермионных частиц.

Организационные результаты: подготовка к публикации статей, содержащих результаты научной деятельности лаборатории; организация и проведение международных конференций, школ и научных семинаров; организация визитов в лабораторию зарубежных специалистов; организация курсов лекций.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория представлений групп и алгебр — это одна из центральных областей математики, имеющая множество как математических, так и физических приложений. Различные аспекты этой теории проявляются и находят разнообразные приложения в таких областях математики и физики, как алгебраическая геометрия, перечислительная комбинаторика, теория нелинейных дифференциальных уравнений, квантовая механика и теория поля, статистическая физика и теория стохастических процессов, топология узлов и многие другие. С точки зрения математической физики теория представлений является ядром теории интегрируемых систем, которая в последние двадцать лет привлекает все больше исследователей, ставит новые задачи и является источником множества идей, зачастую приводящих к рождению новых направлений в современной математике и теоретической физике.

Исследования, проводившиеся в международной лаборатории теории представлений и математичесой физики в 2019 году, соответствовали передовым тенденциям развития вышеупомянутых областей математики и физики, и были направлены на разработку новых методов и концепций в теории представлений полупростых алгебр Ли и их деформаций; развитие комбинаторных, гомологических и геометрических методов в теории пространств модулей алгебраических кривых с приложениями к проблемам математической физики; развитие нового подхода в теории интегрируемых систем, связанного с квантовыми когомологиями пространств флагов; нахождение и исследование зеркальной симметрии для кокасательных расслоений пространств флагов; дальнейшее изучение и развитие связей между общими гипергеометрическими функциями и фробениусовыми структурами, ассоциированными с квантовыми когомологиями; изучение связей между динамическими квантовыми группами и геометрией аффинных грассманианов; вычисление характеристических классов глобальных локусов сингулярностей в пространствах модулей отображений алгебраических кривых и развитие связей с интегрируемыми иерархиями; выявление геометрической и теоретико-представленческой природы обнаруженного недавно нетривиального соответствия между квантовыми интегрируемыми системами и классическими интегрируемыми иерархиями; развитие структурной теории для алгебр обобщенных янгианов; развитие теории представлений и геометрической теории эллиптических деформаций алгебр Ли с приложениями к интегрируемым системам с эллиптическими R-матрицами; алгебраический анализ интегрируемых иерархий солитонных уравнений, интегрируемых моделей классической и квантовой теории поля и статистической физики; анализ интегрируемых структур конформных теорий поля, суперсимметричных калибровочных теорий поля и их деформаций.

В соответствии с возложенными на неё задачами Лаборатория провела следующие мероприятия:

1) подготовила к публикации 30 статей (все с аффилиацией НИУ ВШЭ и с благодарностью Программе государственной поддержки ведущих университетов РФ "5-100 из них 26 опубликовано, 4 принято в печать, из них 22 в журналах Q1,Q2 по WoS или Scopus) и более 40 презентаций докладов на международных и российских научных конференциях;

2) организовала и провела международную конференцию "Классические и квантовые интегрируемые системы"(CQIS-2019, С.Петербург, 22-26 июля 2019), международную конференцию "Vertex algebras and geometry of moduli spaces" (Москва, математический факультет НИУ ВШЭ, 20 - 24 апреля 2019г.), международную школу «Передовые методы современной теоретической физики: интегрируемые и стохастические системы» (Дубна, 26 июля - 2 августа 2019г.), 4-ю зимнюю школу-конференцию "Теория струн, интегрируемые модели и теория представлений" (Москва 20-26 января 2019 г.), а также проводила еженедельный семинар по математической физике, семинары в сотрудничестве с ведущими зарубежными специалистами и другие мероприятия, содействующие созданию творческой атмосферы в Лаборатории, и ориентированные на подготовку молодых учёных, аспирантов и студентов;

3) пригласила и организовала прием 4 ведущих зарубежных специалистов из Франции, Японии, Ирландии.

Ниже приводится краткое описание основных научных результатов, полученных в Лаборатории в 2017 году:

Рассмотрены эллиптические решения интегрируемых нелинейных дифференциальных и разностных уравнений (уравнения Кадомцева-Петвиашвили, B-версии уравнения Кадомцева-Петвиашвили, двумеризованной цепочки Тода) и получены уравнения движения для их полюсов. Динамика полюсов дается интегрируемой многочастичной системой типа Калоджеро-Мозера или Руйсенаарса-Шнайдера. Основное техническое средство – вспомогательные линейные задачи для волновой функции, с помощью которых выводятся уравнения движения полюсов вместе с представлением Лакса для них.

Был исследован специальный класс квантовых нединамических R-матриц со спектральным параметром и в фундаментальном представлении группы GL_N, которые представляют собой тригонометрические решения ассоциативного уравнения Янга-Бакстера. В простейшем случае $N = 2$ эти R-матрицы являются широко известными шести- и семивершинными R-матрицами. Они использовались для построения интегрируемых релятивистских волчков типа Эйлера-Арнольда. Были описаны пары Лакса со спектральным параметром, тензоры инерции и пуассоновы структуры. Эти структуры являются линейными для нерелятивистских моделей, а в релятивистском случае представляют собой классические алгебры Склянина. В некоторых частных случаях описанные волчки калибровочно эквивалентны системам Калоджеро-Мозера-Сазерленда и тригонометрической модели Руйсенарса-Шнайдера.

Для квантовых интегрируемых моделей, разрешимых вложенным алгебраическим анзацем Бете и обладающих $gl(N)$-инвариантной R-матрицей, мы изучаем два типа векторов Бете. Первый тип связан с исходной матрицей монодромии, а второй тип связан с матрицей монодромии, тесно связанной с обратной матрицей монодромии. Мы показываем, что эти два типа векторов Бете совпадают с точностью до нормировки и перестановки параметров Бете. Чтобы доказать это соответствие, мы используем токовый подход. Это тождество дает новые комбинаторные соотношения для скалярных произведений векторов Бете.

Мы изучаем представления квантовой тороидальной алгебры gl_1 при $q = t$. Мы строим явную конструкцию твистованных фоковских модулей с произвольным наклоном n'/n. Как векторное пространство, оно естественно отождествляется с представлениями уровня 1 аффинной gl_n. Также мы изучаем твистованные W-алгебры sl_n, действующие на этих модулях. В качестве приложения, мы доказываем соотношение на q-деформированные конформные блоки, которое было выдвинуто в качестве гипотезы при изучении q-деформации соответствия между изомонодромной деформацией и CFT.

Мы изучаем обобщения соответствия между уравнениями Пенлеве и калибровочными теориями на специальный случай $SU(2)$ $\mathcal{N} = 2^*$ теории. Мы показываем, что статсумма Некрасова-Окунькова этой клибровочной теории даёт явное комбинаторное выражение и формулу в виде детерминанта Фредгольма для тау-функции, описывающей изомонодромные деформации SL_2 плоских связностей на торе с одним проколом. Это достигается за счет переформулировки задачи Римана-Гильберта, связанной с тором, в терминах киральных конформных блоков свободнофермионной алгебры. Такая точка зрения даёт точное решение ренормгруппового потока в $SU(2)$ $\mathcal{N} = 2^*$ теории на самодуальном Ω-бэкграунде и, в пределе Зайберга-Виттена, простое соотношение между инфракрасными и ультрафиолетовыми константами связи. Также мы обобщаем эти результаты на случай $SL(N)$ плоских связностей на торе с произпольным количеством проколов. На стороне калибровочных теорий это соответствует теориям класса $\mathcal{S}$ на торе с проколами, а со стороны конформной теории поля – N-компонентным фермионам в присутствии полей монодромии на торе.

Мы построили соответствие между классом кластерных интегрируемых систем и спиновыми цепочками в контексте их соответствия 5-мерным суперсимметричным калибровочным теориям. Было показано что $\mathfrak{gl}_N$ цепочки XXZ-типа на M узлах изоморфны кластерным интегрируемым системам с многоугольниками Ньютона в виде прямоугольника размера $N \times M$ и двудольным графом в форме сетки-рабицы. Функции Казимира скобки Пуассона, которые занумерованы зиг-заг путями на графе соответствуют неоднородностям, функциям Казимира узла и твистам цепочки, и общему спину узла. Симметричность кластерной формулировки задачи естественным образом приводит к спектральной двойственности которая отождествляет $\mathfrak{gl}_N$-цепочку на M узлах и $\mathfrak{gl}_M$-цепочку на N узлах. Для этих систем мы построили явно подгруппу кластерной группы класов отображений $\mathcal{G}_\mathcal{Q}$и показали что она действует перестановками на зиг-загах и, как следствие, перестановками твистов и неоднородностей. Мы построили билинейные уравнения Хироты, описывающие динамику тау-функций или А-кластерных переменных под действием генераторов $\mathcal{G}_\mathcal{Q}$.

Определяется семейство коммутативных подалгебр Бете $B(C) \subset Y(\mathfrak{g}), C \in G$. Доказывается, что если элемент $C \in G$ – регулярный, то подалгебры являются свободными, а если элемент $C \in G$ – регулярный полупростой, то максимальными коммутативными подалгебрами янгиана. Исследуются два способа компактифицировать пространство параметров G^{reg} подалгебр Бете – конструкция предельных подалгебр, дающая плоское семейство подалгебр и чудесная компактификация группы G, которая даёт неплоское семейство подалгебр. Описываются подалгебры, соответствующие общим точкам в каждом страте чудесной компактификации группы G. Для широкого класса бесконечномерных ассоциативных алгебр (обобщенных янгианов) построены производящие функции, являющиеся аналогами элементарных симметрических функций и доказана их коммутативность при произвольных значениях спектральных параметров. Таким образом показано, что коэффициенты разложения элементарных симметрических функций по обратным степеням параметра генерируют коммутативную подалгебру Бете в обобщенном янгиане.

Установлены точные законы больших чисел для двух аддитивных по времени величин в статистической модели RPM (raise and peel model). Найдено число плиток, удаляемых лавинами за заданный промежуток времени, а также вычислено общее число глобальных лавин за этот промежуток.

Систематизирован и развит графический подход к исследованиям квантовых интегрируемых вершинных статистических моделей и соответсвующим квантвым спиновым цепочкам. Предъявлены графческие формы условия унитарности и кроссинг-соотношений. Условия коммутативности операторов переноса на решетках с граничными условиями выведены графическим методом.

Для неоднородной редуцированной матрицы плотности и произвольной простой алгебры Ли найдены функциональные уравнения в виде редуцированного квантового уравнения Книжника-Замолодчикова. Это уравнение позволяет проводить исследования корреляционных функций при произвольной температуре, а также изучать основное состояние модели.

Предложена конструкция интегрируемой модели через проективный предел модели Калоджеро-Сазерленда N фермионных частиц при стремлении числа частиц к бесконечности. Получены явные формулы для предела операторов Данкла и для коммутирующих гамильтонианов в терминах вершинных операторов.

Подробное изложение полученных результатов представлено в основной части отчета. Она разделена на разделы, в каждом из которых обсуждается одно из направлений исследований, проводимых Лабораторией. Каждый раздел содержит собственное введение, где определяются основные понятия, вводятся определения и ставится задача, после чего следует описание методов исследования и полученных результатов. Ссылки на литературу собраны в списке использованных источников. Полученные результаты опубикованы в статьях и препринтах.

1 Основные научные результаты

1.1 Динамика полюсов эллиптических решений нелинейных интегрируемых уравнений

1.1.1 Введение

Изучение сингулярных решений интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и динамики их полюсов было начато в замечательной работе [1], где были рассмотрены эллиптические и рациональные решения уравнений Кортевега – де Фриза и Буссинеска. В этой работе было обнаружено, что полюса решений двигаются как частицы интегрируемой многочастичной системы Калоджеро-Мозера [2, 3, 4, 5] с некоторыми ограничениями в фазовом пространстве. Позднее было показано [6, 7], что в случае более общего уравнения Кадомцева-Петвиашвили (КП) связь с многочастичными интегрируемыми системами становится наиболее естественной: динамика полюсов рациональных решений уравнения КП изоморфна системе частиц Калоджеро-Мозера с рациональным потенциалом взаимодействия $1/(x_i - x_j)^2$ без всяких ограничений в фазовом пространстве.

Эллиптические, (т.е. двоякопериодические в комплексной плоскости) решения уравнения КП были изучены Кричевером в работе [8], где было показано, что полюса x_i эллиптических решений (вообще говоря, комплексные) подчиняются уравнениям движения

$$\ddot{x}_i = 4 \sum_{k \neq i} \wp'(x_i - x_k) \tag{1.1.1}$$

системы Калоджеро-Мозера с эллиптическим потенциалом парного взаимодействия $\wp(x_i - x_j)$ ($\wp$ – эллиптическая $\wp$-функция Вейерштрасса). Точка означает производную по “времени” $y = t_2$. Метод, примененный Кричевером, заключается в подстановке эллиптического решения не в само уравнение КП, а во вспомогательную линейную задачу для него. При этом используется специальный анзац для волновой функции, зависящий от спектрального параметра. Этот метод позволяет получить уравнения движения для N полюсов в фундаментальной области вместе с представлением Лакса для них:

$$\dot{L} = [M, L], \tag{1.1.2}$$

где $N \times N$ матрицы L, M зависят от x_i и $\dot{x}_i$, а также от спектрального параметра.

Другой способ вывода уравнений движения для полюсов сингулярных решений уравнения КП был предложен в работе [9]. Он заключается в параметризации волновой функции ее полюсами x_i и нулями y_i (а не вычетами в полюсах, как в методе Кричевера). Этот подход не позволяет получить представление Лакса, но вместо этого приводит к так называемой самодуальной форме уравнений движения.

Эллиптические решения матричного уравнения КП были изучены в работе [10]; они связаны со спиновым обобщением системы Калоджеро-Мозера. Спиновые степени свободы представляют собой матричные вычеты в полюсах решений (в скалярном случае они фиксированы).

Решения B-версии уравнения КП (B-КП), которые являются эллиптическми функциями переменной $x = t_1$, были недавно изучены в работе [11]. Было показано, что полюса двигаются во времени t_3 в соответствии со следующими уравнениями движения:

$$\ddot{x}_i + 6\sum_{j\neq i}(\dot{x}_i + \dot{x}_j)\wp'(x_i - x_j) - 72\sum_{j\neq k\neq i}\wp(x_i - x_j)\wp'(x_i - x_k) = 0. \tag{1.1.3}$$

Здесь точка означает производную по времени t_3. Эти уравнения не допускают представления Лакса. Вместо этого для них существует матричное представление вида

$$\dot{L} = [M, L] + P(L - \Lambda I), \tag{1.1.4}$$

где P – бесследовая матрица, I – единичная матрица, а Λ – собственное значение матрицы Лакса L, зависящее от спектрального параметра (представление типа тройки Манакова [12]). Матричные элементы матриц L, M зависят от x_i, $\dot{x}_i$ и от спектрального параметра.

Динамика полюсов x_i решений двумеризованной цепочки Тода, которые являются эллиптическими функциями дискретной переменной $x = t_0$, подчиняется уравнениям движения эллиптической интегрируемой системы Руйсенаарса-Шнайдера [13] (релятивистской версии системы Калоджеро-Мозера):

$$\ddot{x}_i = \sum_{j\neq i}\dot{x}_i\dot{x}_j\frac{\wp'(x_i - x_j)}{\wp(\eta) - \wp(x_i - x_j)} \tag{1.1.5}$$

(см. [14]). Здесь точка означает производную по времени t_1. В пределе $\eta \to 0$ воспроизводится система Калоджеро-Мозера. Аналогично системе Калоджеро-Мозера, система Руйсенаарса-Шнайдера допускает представление Лакса, которое может быть получено путем подстановки полюсного анзаца для волновой функции в разностную вспомогательную линейную задачу. Существует также самодуальная форма уравнений движения (см. [15]).

Мы даем подробный вывод уравнений движения полюсов эллиптических решений уравнений КП (как по времени t_2, так и по времени t_3), B-КП и Тоды вместе с представлениями Лакса или Манакова для них.

1.1.2 Эллиптические решения уравнения КП

1.1.2.1 Уравнение КП

Уравнение КП – это первый член бесконечной иерархии КП с независимыми переменными ("временами") $t_1 = x, t_2, t_3, t_4, \ldots$ [16, 17]. Уравнение КП эквивалентно условию нулевой кривизны (Захарова-Шабата) $\partial_{t_3} A_2 - \partial_{t_2} A_3 + [A_2, A_3] = 0$ для дифференциальных операторов

$$A_2 = \partial_x^2 + 2u, \qquad A_3 = \partial_x^3 + 3u\partial_x + w. \tag{1.1.6}$$

Оно имеет вид системы уравнений для двух зависимых переменных u, w:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2w_x = 3u_{t_2} + 3u_{xx} \\ \\ 2u_{t_3} - w_{t_2} = 6uu_x + 2u_{xxx} - w_{xx}. \end{array} \right. \tag{1.1.7}$$

Исключая из нее w, получим уравнение КП для функции u:

$$3u_{t_2 t_2} = \Big(4u_{t_3} - 12uu_x - u_{xxx}\Big)_x. \tag{1.1.8}$$

Уравнение Захарова-Шабата (и, следовательно, уравнение КП) является условием совместности вспомогательных линейных задач

$$\partial_{t_2}\psi = A_2\psi, \qquad \partial_{t_3}\psi = A_3\psi \tag{1.1.9}$$

для волновой функции ψ, зависящей от спектрального параметра z.

Общее решение иерархии КП дается в терминах тау-функции $\tau = \tau(t_1, t_2, t_3, \ldots)$. Выражение зависимых переменных u,w через тау-функцию

$$u = \partial_x^2 \log \tau, \qquad w = \frac{3}{2}(\partial_x^3 \log \tau + \partial_{t_2}\partial_x \log \tau) \tag{1.1.10}$$

приводит уравнения (1.1.7) к билинейной форме [17]. Решение линейных уравнений (1.1.9) может быть выражено через тау-функцию по формуле [16]

$$\psi = A(z) \exp\Big(\sum_{k \geqslant 1} t_k z^k\Big) \frac{\tau\Big(t_1 - z^{-1}, t_2 - \frac{1}{2} z^{-2}, t_3 - \frac{1}{3} z^{-3}, \ldots\Big)}{\tau(t_1, t_2, t_3, \ldots)}, \tag{1.1.11}$$

где z – спектральный параметр, а $A(z)$ – нормировочный множитель.

1.1.2.2 Динамика полюсов эллиптических решений по времени t_2

Нашей целью является изучение двоякопериодических (эллиптических) по переменной x решений уравнения КП. Для таких решений тау-функция – это "эллиптический квазиполином" по переменной x:

$$\tau = Ce^{Q(x,t_2,t_3,\ldots)} \prod_{i=1}^{N} \sigma(x - x_i), \tag{1.1.12}$$

где $Q(x, t_2, t_3, \ldots)$ – квадратичная форма по временам, и

$$\sigma(x) = \sigma(x|\,\omega, \omega') = x \prod_{s\neq 0} \Big(1 - \frac{x}{s}\Big)\, e^{\frac{x}{s} + \frac{x^2}{2s^2}}, \quad s = 2\omega m + 2\omega' m' \quad \text{with integer } m, m'$$

это σ-функция Вейерштрасса с квазипериодами 2ω, $2\omega'$ такими, что $\mathrm{Im}(\omega'/\omega) > 0$. Она связана с ζ- and $\wp$-функциями Вейерштрасса формулами $\zeta(x) = \sigma'(x)/\sigma(x)$, $\wp(x) = -\zeta'(x) = -\partial_x^2 \log \sigma(x)$. Мы положим $Q = cx^2 + bt_2 x + \ldots$ с некоторыми константами b,c. Предполагается, что корни x_i эллиптического квазиполинома все различны. Соответственно, функция $u = \partial_x^2 \log \tau$ – эллиптическая функция с двойными полюсами в точках x_i:

$$u = -\sum_{i=1}^{N} \wp(x - x_i) + 2c. \tag{1.1.13}$$

Полюса зависят от времен t_2, t_3.

Следуя подходу Кричевера [8], для изучения t_2-динамики полюсов мы рассмотрим вспомогательную линейную задачу $\partial_{t_2}\psi = A_2\psi$ для функции ψ, т.е.

$$\partial_{t_2}\psi = \partial_x^2 \psi + 2u\psi. \tag{1.1.14}$$

Поскольку коэффициентная функция u двоякопериодична, можно искать двоякоблоховские решения $\psi(x)$ этого уравнения, т.е. решения, такие, что $\psi(x + 2\omega) = b\psi(x)$, $\psi(x + 2\omega') = b'\psi(x)$ с некоторыми блоховскими множителями b, b'. Формулы (1.1.11), (1.1.12) свидетельствуют о том, что функция ψ имеет простые полюса в точках x_i. Полюсной анзац для ψ-функции имеет вид

$$\psi = e^{xz + t_2 z^2 + t_3 z^3} \sum_{i=1}^{N} c_i \Phi(x - x_i, \lambda), \tag{1.1.15}$$

где коэффициенты c_i не зависят от x. Здесь мы используем функцию

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{\sigma(x + \lambda)}{\sigma(\lambda)\sigma(x)}\, e^{-\zeta(\lambda)x}, \tag{1.1.16}$$

которая имеет простой полюс при $x = 0$ (здесь ζ – это ζ-функция Вейерштрасса). Разложение функции Φ при $x \to 0$ таково:

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{1}{x} + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots, \qquad x \to 0,$$

где $\alpha_1 = -\frac{1}{2}\wp(\lambda)$, $\alpha_2 = -\frac{1}{6}\wp'(\lambda)$. Нетрудно убедиться, что Φ – эллиптическая функция от λ. Параметры z и λ – спектральные параметры. Пользуясь свойствами квазипериодичности функции Φ по первому аргументу,

$$\Phi(x + 2\omega, \lambda) = e^{2(\zeta(\omega)\lambda - \zeta(\lambda)\omega)}\Phi(x, \lambda),$$

$$\Phi(x + 2\omega', \lambda) = e^{2(\zeta(\omega')\lambda - \zeta(\lambda)\omega')}\Phi(x, \lambda),$$

легко видеть, что ψ (1.1.15) – действительно двоякоблоховская функция с блоховскими множителями

$$b = e^{2(\omega z + \zeta(\omega)\lambda - \zeta(\lambda)\omega)}, \qquad b' = e^{2(\omega' z + \zeta(\omega')\lambda - \zeta(\lambda)\omega')}.$$

Мы часто будем опускать второй аргумент у Φ и будем писать просто $\Phi(x) = \Phi(x, \lambda)$. Нам также понадобятся производные по x $\Phi'(x, \lambda) = \partial_x \Phi(x, \lambda)$, $\Phi''(x, \lambda) = \partial_x^2 \Phi(x, \lambda)$ и т. д.

Функция $-\partial_{t_2}\psi + \partial_x^2\psi + 2u\psi$ – тоже двоякоблоховская с теми же блоховскими множителями. Если она не имеет полюсов, единственная возможность для нее – это экспоненциальная функция Ce^{ax}, которая, однако, имеет блоховские множители, не эквивалентные b, b'. Следовательно, $C = 0$, и эта функция тождественно равна нулю. Подставив (1.1.15) в (1.1.14) с u в виде (1.1.13), получим:

$$-\sum_i \dot{c}_i \Phi(x - x_i) + \sum_i c_i \dot{x}_i \Phi'(x - x_i) + 2z \sum_i c_i \Phi'(x - x_i) + \sum_i c_i \Phi''(x - x_i)$$

$$-2\left(\sum_i \wp(x - x_i)\right)\left(\sum_k c_k \Phi(x - x_k)\right) + 4c \sum_i c_i \Phi(x - x_i) = 0,$$

где точка над буквой означает производную по t_2. Различные члены этого выражения имеют полюса при $x = x_i$. Старшие полюса (третьего порядка) сокращаются тождественно. Путем прямого вычисления можно убедиться, что условия сокращения полюсов второго и первого порядка имеют вид

$$c_i \dot{x}_i = -2zc_i - 2\sum_{j \neq i} c_j \Phi(x_i - x_j), \tag{1.1.17}$$

$$\dot{c}_i = (4c - 2\alpha_1)c_i - 2\sum_{j \neq i} c_j \Phi'(x_i - x_j) - 2c_i \sum_{j \neq i} \wp(x_i - x_j) \tag{1.1.18}$$

для всех $i = 1, \ldots, N$. Введем $N \times N$ матрицы

$$L_{ij} = -\delta_{ij}\dot{x}_i - 2(1-\delta_{ij})\Phi(x_i - x_j), \tag{1.1.19}$$

$$M_{ij} = \delta_{ij}(\wp(\lambda) + 4c) - 2\delta_{ij}\sum_{k \neq i} \wp(x_i - x_k) - 2(1-\delta_{ij})\Phi'(x_i - x_j). \tag{1.1.20}$$

Данные условия можно записать как систему линейных уравнений для вектора $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_N)^T$:

$$\begin{cases} L\mathbf{c} = 2z\mathbf{c} \\ \\ \dot{\mathbf{c}} = M\mathbf{c}. \end{cases} \tag{1.1.21}$$

Удобно ввести диагональные матрицы I, X, D с матричными элементами $I_{ik} = \delta_{ik}$, $X_{ik} = \delta_{ik}x_i$,

$$D_{ik} = \delta_{ik}\sum_{j \neq i} \wp(x_i - x_j) \tag{1.1.22}$$

и внедиагональные матрицы A, B с матричными элементами

$$A_{ik} = (1-\delta_{ik})\Phi(x_i - x_k), \qquad B_{ik} = (1-\delta_{ik})\Phi'(x_i - x_k), \tag{1.1.23}$$

тогда матрицы L,M представятся в виде

$$L = -\dot{X} - 2A, \qquad M = (\wp(\lambda) + 4c)I - 2B - 2D.$$

Дифференцируя первое из уравнений (1.1.21) по t_2, придем к условию совместности линейных задач (1.1.21):

$$\Big(\dot{L} + [L,M]\Big)\mathbf{c} = 0. \tag{1.1.24}$$

Мы имеем

$$\dot{L} + [L,M] = -\ddot{X} - 2\dot{A} + 2[\dot{X}, B] + 4[A,B] + 4[A,D].$$

Легко видеть, что $\dot{A} = [\dot{X}, B]$. Далее, в приложении доказано, что $[A,B] + [A,D] = D'$, где D' – диагональная матрица $D'_{ik} = \delta_{ik}\sum_{j \neq i} \wp'(x_i - x_j)$. Следовательно, мы имеем тождество

$$\dot{L} + [L,M] = -\ddot{X} + 4D',$$

и условие совместности утверждает, что должно быть $(-\ddot{X} + 4D')_{ii} = 0$ для всех $i = 1, \ldots, N$. Это дает уравнения движения эллиптической системы Калоджеро-Мозера (1.1.1) вместе с представлением Лакса для них (1.1.2).

Из представления Лакса следует, что эволюция по времени – изоспектральное преобразование матрицы Лакса L, так что все следы $\mathrm{tr}\, L^k$ и характеристический полином $\det(L-2zI)$ – интегралы движения.

Модель Калоджеро-Мозера является гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H_2 = \sum_i p_i^2 - 2\sum_{i<j} \wp(x_i - x_j) \tag{1.1.25}$$

и каноническими скобками Пуассона $\{x_i, p_k\} = \delta_{ik}$. Поскольку $\dot{x}_i = \partial H_2/\partial p_i = 2p_i$, имеем выражение матрицы Лакса через импульсы в виде

$$L_{ij} = -2\Big(\delta_{ij}p_i + (1-\delta_{ij})\Phi(x_i - x_j)\Big).$$

Высшие гамильтонианы имеют вид

$$H_k = 2^{-k}\mathrm{tr}\, L^k + \sum_{m=0}^{k-2} a_m(\lambda)\mathrm{tr}\, L^m, \tag{1.1.26}$$

где $a_m(\lambda)$ – некоторые эллиптические функции от λ, которые определяются требованием, чтобы гамильтониан не содержал λ-зависимых членов. В частности,

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\, L = -\sum_i p_i, \\
H_2 &= \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\, L^2 - N(N-1)\wp(\lambda) = \sum_i p_i^2 - 2\sum_{i<j}\wp(x_i - x_j), \\
H_3 &= \frac{1}{8}\,\mathrm{tr}\, L^3 - \frac{3}{2}\,(N-1)\wp(\lambda)\mathrm{tr}\, L - \frac{1}{2}\,N(N-1)(N-2)\wp'(\lambda) \\
&= -\sum_i p_i^3 + 3\sum_{i\neq j} p_i\,\wp(x_i - x_j).
\end{aligned} \tag{1.1.27}$$

1.1.2.3 Динамика полюсов эллиптических решений по времени t_3

Аналогично нашим действиям для времени t_2, мы должны подставить ψ в виде (1.1.15) в линейную задачу $\partial_{t_3}\psi = \partial_x^3\psi + 3u\partial_x\psi + w\psi$. В соответствии с (1.1.10), (1.1.12), для эллиптических решений имеем:

$$w = -\frac{3}{2}\sum_i \wp'(x-x_i) + \frac{3}{2}\sum_i \dot{x}_i\wp(x-x_i) + \frac{3}{2}\,b. \tag{1.1.28}$$

Подстановка приводит к следующему уравнению:

$$\sum_i \partial_{t_3}c_i\Phi(x-x_i) - \sum_i c_i\partial_{t_3}x_i\Phi'(x-x_i)$$

$$
\begin{gathered}
= 3z^2\sum_i c_i\Phi'(x-x_i) + 3z\sum_i c_i\Phi''(x-x_i) + \sum_i c_i\Phi'''(x-x_i) \\
-3z\left(\sum_i \wp(x-x_i)\right)\left(\sum_j c_j\Phi(x-x_j)\right) - 3\left(\sum_i \wp(x-x_i)\right)\left(\sum_j c_j\Phi'(x-x_j)\right) \\
-\frac{3}{2}\left(\sum_i \wp'(x-x_i)\right)\left(\sum_j c_j\Phi(x-x_j)\right) + \frac{3}{2}\left(\sum_i \dot{x}_i\wp(x-x_i)\right)\left(\sum_j c_j\Phi(x-x_j)\right) \\
+6cz\sum_i c_i\Phi(x-x_i) + 6c\sum_i c_i\Phi'(x-x_i) + \frac{3}{2}\,b\sum_i c_i\Phi(x-x_i).
\end{gathered}
$$

Полюса четвертого порядка при $x = x_i$ сокращаются тождественно. Сокращение полюсов третьего порядка приводит к тому же самому условию (1.1.17), которое есть уравнение на собственные значения $L\mathbf{c} = 2z\mathbf{c}$ для матрицы Лакса. Сокращение полюсов второго порядка приводит к уравнениям

$$
\partial_{t_3}x_i c_i = -3z^2c_i - 6cc_i - 3z\sum_{j\neq i} c_j\Phi(x_i-x_j) + 3c_i\sum_{j\neq i}\wp(x_i-x_j) + \frac{3}{2}\,\dot{x}_i\sum_{j\neq i} c_j\Phi(x_i-x_j). \tag{1.1.29}
$$

Принимая во внимание (1.1.17), можно переписать их в виде

$$
\partial_{t_3}x_i = -6c - \frac{3}{4}\,\dot{x}_i^2 + 3\sum_{j\neq i}\wp(x_i-x_j), \tag{1.1.30}
$$

или, в матричной форме, $\partial_{t_3}X = -6cI - \frac{3}{4}\,\dot{X}^2 + 3D$. Наконец, сокращение полюсов первого порядка приводит (с учетом уравнения $\dot{\mathbf{c}} = M\mathbf{c}$) к условиям

$$
\begin{gathered}
\partial_{t_3}c_i = \frac{3}{2}\,z\dot{c}_i - \frac{3}{2}\sum_{j\neq i} c_j\Phi''(x_i-x_j) + \frac{3}{2}\,c_i\sum_{j\neq i}\wp'(x_i-x_j) + \frac{1}{2}\,\wp'(\lambda)c_i + \frac{3}{2}\,bc_i \\
+\frac{3}{2}\dot{x}_i\sum_{j\neq i} c_j\Phi'(x_i-x_j) + \frac{3}{2}\,c_i\sum_{j\neq i}\dot{x}_j\wp(x_i-x_j) - \frac{3}{4}\,\wp(\lambda)\dot{x}_i c_i.
\end{gathered}
$$

Введя диагональную матрицу $\tilde{D}_{ik} = \delta_{ik}\sum\limits_{j\neq i}\dot{x}_j\wp(x_i-x_j)$ и внедиагональную матрицу $C_{ik} = (1-\delta_{ik})\Phi''(x_i-x_k)$, можно представить эти условия в матричном виде

$$
\partial_{t_3}\mathbf{c} = T\mathbf{c}, \tag{1.1.31}
$$

где

$$
T = \frac{3}{4}\,ML - \frac{3}{2}\,C + \frac{3}{2}\,\dot{X}B + \frac{3}{2}\,D' + \frac{3}{2}\,\tilde{D} - \frac{3}{4}\,\wp(\lambda)\dot{X} + \frac{1}{2}(\wp'(\lambda) + 3b)I. \tag{1.1.32}
$$

Условие совместности линейной системы (1.1.31) и уравнения $L\mathbf{c} = 2z\mathbf{c}$ имеет вид $(\partial_{t_3}L + [L,T])\mathbf{c} = 0$. Вычислим $\partial_{t_3}L + [L,T]$, используя уравнение Лакса $\dot{L} = [M,L]$. Имеем после некоторых простых вычислений:

$$
\partial_{t_3}L + [L,T] = -\partial_{t_3}\dot{X} - 3D'\dot{X} + 3\Big([A,C] + 2[B,D] - AD' - D'A\Big) + 3Y + \frac{3}{2}[\dot{X}, C - \wp(\lambda)A],
$$

где $Y = B\dot{X}A - A\dot{X}B - [A, \tilde{D}]$. В приложении доказано матричное тождество $[A{,}C] + 2[B, D] - AD' - D'A = 0$. Далее,

$$Y_{ik} + \frac{1}{2}[\dot{X}, C - \wp(\lambda)A]_{ik} = 0 \qquad \text{for } i \neq k$$

и

$$Y_{ii} = -\sum_{j\neq i} \dot{x}_j \wp'(x_i - x_j).$$

Отсюда следует, что матрица $\partial_{t_3} L + [L, T]$ диагональна, и

$$\Big(\partial_{t_3} L + [L, T]\Big)_{ii} = -\partial_{t_3}\dot{x}_i - 3\sum_{j\neq i}(\dot{x}_i + \dot{x}_j)\wp'(x_i - x_j). \tag{1.1.33}$$

Значит, условие совместности приводит к уравнениям движения

$$\partial_{t_3}\dot{x}_i + 3\sum_{j\neq i}(\dot{x}_i + \dot{x}_j)\wp'(x_i - x_j) = 0. \tag{1.1.34}$$

Легко видеть, что эти уравнения получаются из (1.1.30) дифференцированием по t_2. Уравнение (1.1.30) и (1.1.34), будучи переписаны в терминах импульсов p_i, представляют собой гамильтоновы уравнения движения для гамильтониана $\tilde{H}_3 = H_3 + 6cH_1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_{t_3} x_i = \dfrac{\partial \tilde{H}_3}{\partial p_i} = -6c - 3p_i^2 + 3\displaystyle\sum_{j\neq i}\wp(x_i - x_j) \\[2em] \partial_{t_3} p_i = -\dfrac{\partial \tilde{H}_3}{\partial x_i} = -3\displaystyle\sum_{j\neq i}(p_i + p_j)\wp'(x_i - x_j) \end{array}\right. \tag{1.1.35}$$

(H_3 дается формулой (1.1.27)).

Легко убедиться, что результат работы [1] для уравнения КдФ (u не зависит от t_2) следует из (1.1.35): уравнения движения имеют вид $\partial_{t_3} x_i = -6c + 3\sum\limits_{j\neq i}\wp(x_i - x_j)$ на локусе, определяемом условием $\sum\limits_{j\neq i}\wp'(x_i - x_j) = 0$.

1.1.3 Эллиптические решения уравнения B-КП

1.1.3.1 Уравнение B-КП

Уравнение B-КП, первый член бесконечной иерархии B-КП с независимыми переменными (“временами”) $t_1 = x, t_3, t_5, t_7, \ldots$ [16, 20] (см. также [21, 22, 23]), представляет собой следующую систему уравнений для двух зависимых переменных u, w:

$$\left\{\begin{array}{l} 3w' = 10u_{t_3} + 20u''' + 120uu' \\[1.5em] w_{t_3} - 6u_{t_5} = w''' - 6u^{\mathrm{V}} - 60uu''' - 60u'u'' + 6uw' - 6wu', \end{array}\right. \tag{1.1.36}$$

где черта означает дифференцирование по x. Уравнения (1.1.36) эквивалентны уравнению Захарова-Шабата $\partial_{t_5}B_3 - \partial_{t_3}B_5 + [B_3, B_5] = 0$ для дифференциальных операторов

$$B_3 = \partial_x^3 + 6u\partial_x, \qquad B_5 = \partial_x^5 + 10u\partial_x^3 + 10u'\partial_x^2 + w\partial_x. \tag{1.1.37}$$

Уравнение Захарова-Шабата является условием совместности вспомогательных линейных задач

$$\partial_{t_3}\psi = B_3\psi, \qquad \partial_{t_5}\psi = B_5\psi$$

для волновой функции ψ зависящей от спектрального параметра z.

Тау-функция $\tau = \tau(t_1, t_3, t_5, \ldots)$ иерархии B-КП связана с переменными u,w формулами

$$u = \partial_x^2 \log\tau, \qquad w = \frac{10}{3}\,\partial_{t_3}\partial_x \log\tau + \frac{20}{3}\,\partial_x^4 \log\tau + 20(\partial_x^2 \log\tau)^2. \tag{1.1.38}$$

В терминах тау-функции уравнения (1.1.36) приводятся к билинейной форме. Волновая функция ψ выражается через тау-функцию следующим образом [20]:

$$\psi = A(z)\exp\Big(\sum_{k\geqslant 1,\, k \text{ odd}} t_k z^k\Big)\, \frac{\tau\Big(t_1 - 2z^{-1}, t_3 - \frac{2}{3}\,z^{-3}, t_5 - \frac{2}{5}\,z^{-5} \ldots\Big)}{\tau(t_1, t_3, t_5, \ldots)}. \tag{1.1.39}$$

1.1.3.2 Динамика полюсов

Наша цель – изучить динамику полюсов эллиптических по $t_1 = x$ решений уравнения B-КП как функций от $t_3 = t$. Для эллиптических решений тау-функция имеет вид

$$\tau = Ae^{Q(x,t,\ldots)}\prod_{i=1}^{N}\sigma(x - x_i) \tag{1.1.40}$$

с квадратичной формой $Q = cx^2 + \ldots$ и u таким же как в (1.1.13). Основной инструмент для нас – это линейная задача $\partial_t\psi = B_3\psi$, т.е.

$$\partial_t\psi = \partial_x^3\psi + 6u\partial_x\psi. \tag{1.1.41}$$

Как и в случае КП, можно искать двоякоблоховские решения $\psi(x)$ в виде

$$\psi = e^{xz + tz^3}\sum_{i=1}^{N} c_i\Phi(x - x_i, \lambda) \tag{1.1.42}$$

с простыми полюсами при $x = x_i$ и независимыми от x коэффициентами c_i (функция Φ здесь та же, что и в предыдущем разделе).

Из (1.1.41) видно, что константа c в выражении (1.1.13) для функции u может быть исключена преобразованием $x \to x - 12ct$, $t \to t$ (или $\partial_x \to \partial_x$, $\partial_t \to \partial_t + 12c\partial_x$ для векторных полей). Поэтому начиная с этого места мы для простоты положим $c = 0$.

Подставив (1.1.42) в (1.1.41) с $u = -\sum_i \wp(x - x_i)$, получим:

$$\sum_i \dot{c}_i \Phi(x-x_i) - \sum_i c_i \dot{x}_i \Phi'(x-x_i) = 3z^2 \sum_i c_i \Phi'(x-x_i) + 3z \sum_i c_i \Phi''(x-x_i) + \sum_i c_i \Phi'''(x-x_i)$$

$$-6z\Big(\sum_k \wp(x-x_k)\Big)\Big(\sum_i c_i \Phi(x-x_i)\Big) - 6\Big(\sum_k \wp(x-x_k)\Big)\Big(\sum_i c_i \Phi'(x-x_i)\Big).$$

Это выражение имеет полюса при $x = x_i$ (максимум четвертого порядка). Полюса четвертого и третьего порядка сокращаются тождественно. Условия сокращения полюсов второго и первого порядков имеют следующий вид:

$$c_i \dot{x}_i = -(3z^2 - 3\wp(\lambda))c_i - 6z \sum_{k \neq i} c_k \Phi(x_i - x_k) - 6 \sum_{k \neq i} c_k \Phi'(x_i - x_k) + 6c_i \sum_{k \neq i} \wp(x_i - x_k), \tag{1.1.43}$$

$$\begin{aligned} \dot{c}_i &= 3z\wp(\lambda)c_i + 2\wp'(\lambda)c_i - 6z \sum_{k \neq i} c_k \Phi'(x_i - x_k) - 6zc_i \sum_{k \neq i} \wp(x_i - x_k) \\ &\quad - 6 \sum_{k \neq i} c_k \Phi''(x_i - x_k) + 6c_i \sum_{k \neq i} \wp'(x_i - x_k). \end{aligned} \tag{1.1.44}$$

В матричном виде эти условия выглядят как линейные уравнения на вектор $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_N)^T$:

$$\begin{cases} L\mathbf{c} = 3(z^2 - \wp(\lambda))\mathbf{c} \\ \dot{\mathbf{c}} = M\mathbf{c}, \end{cases} \tag{1.1.45}$$

где

$$L = -\dot{X} - 6zA - 6B + 6D, \tag{1.1.46}$$

$$M = (3z\wp(\lambda) + 2\wp'(\lambda))I - 6zB - 6zD - 6C + 6D' \tag{1.1.47}$$

с теми же матрицами X, A, B, C, D, D', что и в предыдущем разделе. Отметим, что теперь матрицы L,M зависят не только от λ, но также и от z. Условие совместности линейной системы (1.1.45) имеет вид

$$\Big(\dot{L} + [L,M]\Big)\mathbf{c} = 0. \tag{1.1.48}$$

В приложении доказано следующее матричное тождество:

$$\dot{L} + [L,M] = -12D'\Big(L - 3(z^2 - \wp(\lambda))I\Big) - \ddot{X} + 12D'(6D - \dot{X}) + 6\dot{D} - 6D''', \quad (1.1.49)$$

где $D'''_{ik} = \delta_{ik} \sum\limits_{j\neq i} \wp'''(x_i - x_j)$. Используя его, легко видеть, что условие совместности (1.1.48) эквивалентно занулению всех элементов диагональной матрицы

$$-\ddot{X} + 12D'(6D - \dot{X}) + 6\dot{D} - 6D'''.$$

Это дает уравнения движения для полюсов x_i:

$$\ddot{x}_i + 6\sum_{j\neq i}(\dot{x}_i + \dot{x}_j)\wp'(x_i - x_j) - 72\sum_{j\neq i}\sum_{k\neq i}\wp(x_i - x_j)\wp'(x_i - x_k) + 6\sum_{j\neq i}\wp'''(x_i - x_j) = 0.$$

Используя тождество $\wp'''(x) = 12\wp(x)\wp'(x)$, приходим к уравнениям движения (1.1.3). Они были впервые получены в работе [11]. Их рациональный предел (когда оба периода стремятся к бесконечности и $\wp(x) \to 1/x^2$) имеет вид

$$\ddot{x}_i - 12\sum_{j\neq i}\frac{\dot{x}_i + \dot{x}_j}{(x_i - x_j)^3} + 144\sum_{j\neq k\neq i}\frac{1}{(x_i - x_j)^2(x_i - x_k)^3} = 0. \quad (1.1.50)$$

Отметим, что в отличие от случая КП, где взаимодействие между “частицами” (полюсами) парное, в случае В-КП имеется трехчастичное взаимодействие.

1.1.3.3 Интегралы движения

Уравнения (1.1.3) не имеют представления типа Лакса. Вместо него уравнениям движения эквивалентно матричное соотношение

$$\dot{L} + [L,M] = -12D'(L - \Lambda I), \quad (1.1.51)$$

где $\Lambda = 3(z^2 - \wp(\lambda))$. Это представление типа тройки Манакова. В отличие от случая КП, эволюция $L \to L(t)$ не изоспектральна. Тем не менее, характеристический полином $\det(L - \Lambda I)$ является интегралом движения. Действительно,

$$\frac{d}{dt}\log\det(L - \Lambda I) = \frac{d}{dt}\operatorname{tr}\log(L - \Lambda I) = \operatorname{tr}\Big(\dot{L}(L - \Lambda I)^{-1}\Big) = -12\operatorname{tr}D' = 0,$$

где мы использовали (1.1.51) и тот факт, что матрица D' бесследовая (поскольку $\wp'$ – нечетная функция, мы имеем $\sum\limits_{i\neq j}\wp'(x_i - x_j) = 0$). Выражение

$$R(z,\lambda) = \det\Big(3(z^2 - \wp(\lambda))I - L\Big) = \sum_{k=0}^{2N} R_k(\lambda)z^k$$

является полиномом от z степени $2N$. Его коэффициенты $R_k(\lambda)$ – интегралы движения. Легко показать, что $R_k(\lambda)$ – эллиптические функции от λ с полюсом (высокого порядка) при $\lambda = 0$.

Пример ($N = 2$):

$$\det_{2\times 2}\Big(3(z^2 - \wp(\lambda))I - L\Big) = 9z^4 + 3z^2\Big(\dot{x}_1 + \dot{x}_2 - 18\wp(\lambda)\Big) - 36z\wp'(\lambda) - 3\wp(\lambda)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)$$
$$+ \dot{x}_1\dot{x}_2 - 6(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)\wp(x_1 - x_2) - 27\wp^2(\lambda) + 9g_2,$$

где g_2 – коэффициент в разложении $\wp$-функции вблизи $x = 0$: $\wp(x) = x^{-2} + \frac{1}{20}\,g_2x^2 + \frac{1}{28}\,g_3x^4 + O(x^6)$. Следовательно, при $N = 2$ имеются два интеграла движения: $I_1 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2$, $I_2 = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + 6(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)\wp(x_1 - x_2)$.

Для произвольных N можно доказать, что величины

$$I_1 = \sum_i \dot{x}_i,$$
$$I_2 = \frac{1}{2}\sum_i \dot{x}_i^2 + 6\sum_{i\neq j} \dot{x}_i\wp(x_{ij}) - 18\sum_{i\neq j\neq k} \wp(x_{ij})\wp(x_{ik}) \tag{1.1.52}$$

(здесь $x_{ik} \equiv x_i - x_k$) являются интегралами движения. В выражении для I_2 последняя сумма берется по всем тройкам различных чисел i,j,k от 1 до N. Доказательство можно найти в работе [11].

1.1.4 Эллиптические решения двумеризованной цепочки Тоды

1.1.4.1 Двумеризованная цепочка Тоды

Уравнение двумеризованной цепочки Тоды – это первый член бесконечной иерархии [24]. Оно эквивалентно уравнению Захарова-Шабата $\partial_{\bar{t}_1} C_1 - \partial_{t_1}\bar{C}_1 + [C_1, \bar{C}_1] = 0$ для разностных операторов $C_1 = e^{\eta\partial_x} + b(x)$, $\bar{C}_1 = a(x)e^{-\eta\partial_x}$, которое, в свою очередь, является условием совместности линейных задач

$$\partial_{t_1}\psi(x) = \psi(x + \eta) + b(x)\psi(x),$$
$$\partial_{\bar{t}_1}\psi(x) = a(x)\psi(x - \eta). \tag{1.1.53}$$

Выписав его явно, получим систему

$$\begin{cases} \partial_{t_1}\log a(x) = b(x) - b(x - \eta) \\ \\ \partial_{\bar{t}_1} b(x) = a(x) - a(x + \eta). \end{cases}$$

Исключив из нее $b(x)$, придем к уравнению второго порядка для $a(x)$:

$$\partial_{t_1}\partial_{\bar{t}_1}\log a(x) = 2a(x) - a(x+\eta) - a(x-\eta) \tag{1.1.54}$$

В терминах функции $\varphi(x)$, которая вводится соотношением $a(x) = e^{\varphi(x)-\varphi(x-\eta)}$, это уравнение приобретает наиболее знакомый вид

$$\partial_{t_1}\partial_{\bar{t}_1}\varphi(x) = e^{\varphi(x)-\varphi(x-\eta)} - e^{\varphi(x+\eta)-\varphi(x)}. \tag{1.1.55}$$

Замена зависимых переменных с помощью тау-функции

$$a(x) = \frac{\tau(x+\eta)\tau(x-\eta)}{\tau^2(x)}, \qquad b(x) = \partial_{t_1}\log\frac{\tau(x+\eta)}{\tau(x)}, \tag{1.1.56}$$

приводит уравнение двумеризованной цепочки Тоды к виду

$$\partial_{t_1}\partial_{\bar{t}_1}\log\tau(x) = 1 - \frac{\tau(x+\eta)\tau(x-\eta)}{\tau^2(x)}. \tag{1.1.57}$$

1.1.4.2 Динамика полюсов эллиптических решений

Нас интересуют решения, для которых $a(x), b(x)$ являются эллиптическими функциями переменной x. Для таких решений тау-функция имеет вид

$$\tau(x) = Ce^{cx^2+rxt_1+\bar{r}x\bar{t}_1+\gamma t_1\bar{t}_1}\prod_{i=1}^{N}\sigma(x-x_i), \tag{1.1.58}$$

тогда

$$a(x) = e^{2\eta^2 c}\prod_k \frac{\sigma(x-x_k+\eta)\sigma(x-x_k-\eta)}{\sigma^2(x-x_k)} = e^{2\eta^2 c}\sigma^{2N}(\eta)\prod_k\Big(\wp(\eta)-\wp(x-x_k)\Big),$$

$$b(x) = \sum_k \dot{x}_k\Big(\zeta(x-x_k)-\zeta(x-x_k+\eta)\Big) + r\eta,$$

где $\dot{x}_k = \partial_{t_1}x_k$.

Мы начнем с изучения динамики полюсов по времени t_1. Для этого достаточно решить первую линейную задачу в (1.1.53) с $b(x)$ как выше и следующим полюсным анзацем для ψ-функции:

$$\psi = z^{x/\eta}e^{t_1 z+\bar{t}_1 z^{-1}}\sum_{i=1}^{N}c_i\Phi(x-x_i,\lambda). \tag{1.1.59}$$

Отметим, что в работе [14] была использована несколько другая версия функции Φ, которая отличается от нашей экспоненциальным множителем. Подставив (1.1.59) в (1.1.53), получим:

$$z\sum_i c_i\Phi(x-x_i) + \sum_i \dot{c}_i\Phi(x-x_i) - \sum_i c_i\dot{x}_i\Phi'(x-x_i) = z\sum_i c_i\Phi(x-x_i+\eta)$$

$$+\left(\sum_k \dot{x}_k\Big(\zeta(x-x_k)-\zeta(x-x_k+\eta)\Big)+r\eta\right)\sum_i c_i\Phi(x-x_i).$$

Сокращение полюсов приводит к условиям

$$\begin{cases} zc_i+\dot{c}_i=r\eta c_i+\dot{x}_i\sum\limits_{k\neq i}c_k\Phi(x-x_k)+c_i\sum\limits_{k\neq i}\dot{x}_k\Big(\zeta(x_i-x_k)-\zeta(x_i-x_k+\eta)\Big) \\ \\ zc_i-\dot{x}_i\sum\limits_k c_k\Phi(x_i-x_k-\eta)=0, \end{cases}$$

которые могут быть записаны в матричном виде

$$\begin{cases} L\mathbf{c}=z\mathbf{c} \\ \\ \dot{\mathbf{c}}=M\mathbf{c} \end{cases} \tag{1.1.60}$$

с матрицами $L=\dot{X}A^-$, $M=r\eta I+\dot{X}A-\dot{X}A^-+D^0-D^+$, где матрица A такая же, как и выше, и

$$A^-_{ij}=\Phi(x_i-x_j-\eta),\quad D^{\pm}_{ij}=\delta_{ij}\sum_{k\neq i}\dot{x}_k\zeta(x_i-x_k\pm\eta),\quad D^0_{ij}=\delta_{ij}\sum_{k\neq i}\dot{x}_k\zeta(x_i-x_k).$$

Прямое вычисление показывает, что

$$\dot{L}+[L,M]=\Big(\ddot{X}\dot{X}^{-1}+D^++D^--2D^0\Big)L,$$

так что условие совместности линйеных задач (1.1.60) принимает вид $\ddot{X}\dot{X}^{-1}+D^++D^--2D^0=0$. Это дает уравнения движения

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= -\sum_{k\neq i}\dot{x}_i\dot{x}_k\Big(\zeta(x_i-x_k+\eta)+\zeta(x_i-x_k-\eta)-2\zeta(x_i-x_k)\Big) \\ &= \sum_{k\neq i}\dot{x}_i\dot{x}_k\frac{\wp'(x_i-x_k)}{\wp(\eta)-\wp(x_i-x_k)} \end{aligned} \tag{1.1.61}$$

вместе с представлением Лакса для них. Это уравнения движения эллиптической N-частичной системы Руйсенаарса-Шнайдера (релятивистского обобщения системы Калоджеро-Мозера).

Система Руйсенаарса-Шнайдера гамильтонова с гамильтонианом

$$H=\sum_i e^{p_i}\prod_{k\neq i}\frac{\sigma(x_i-x_k+\eta)}{\sigma(x_i-x_k)}, \tag{1.1.62}$$

где p_i, x_i – канонические переменные. Можно легко проверить, что

$$H=\sum_i \dot{x}_i=\mathrm{const}\,\mathrm{tr}\,L. \tag{1.1.63}$$

Теперь изучим динамику полюсов по времени $\bar{t}_1$. Подстановка полюсного анзаца во вторую линейную задачу (1.1.53) ведет к довольно громоздким вычислениям и необходимости использовать сложные тождества для эллиптических функций. Мы будем действовать другим способом. Подставив выражение (1.1.58) для тау-функции в уравнение (1.1.57), получим

$$\gamma-1-\sum_i \partial_{\bar{t}_1}\partial_{t_1}x_i\zeta(x-x_i)-\sum_i \partial_{\bar{t}_1}x_i\partial_{t_1}x_i\wp(x-x_i)=-e^{2c\eta^2}\prod_i \frac{\sigma(x-x_i+\eta)\sigma(x-x_i-\eta)}{\sigma^2(x-x_i)}.$$

Приравнвая коэффициенты при полюсах первого и второго порядков, придем к соотношениям

$$\partial_{\bar{t}_1}x_i\,\partial_{t_1}x_i=-e^{2c\eta^2}\sigma^2(\eta)\prod_{k\neq i}\frac{\sigma(x_i-x_k+\eta)\sigma(x_i-x_k-\eta)}{\sigma^2(x_i-x_k)}, \tag{1.1.64}$$

$$\partial_{\bar{t}_1}\partial_{t_1}x_i=\partial_{\bar{t}_1}x_i\,\partial_{t_1}x_i\sum_{k\neq i}\Big(\zeta(x_i-x_k+\eta)+\zeta(x_i-x_k-\eta)-2\zeta(x_i-x_k)\Big) \tag{1.1.65}$$

(они были упомянуты в работе [14]). Прологарифмируем уравнение (1.1.64), продифференцируем по $\bar{t}_1$ и воспользуемся соотношением (1.1.65). Получим уравнения движения

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{t}_1}\partial_{\bar{t}_1}x_i &= -\sum_{k\neq i}\partial_{\bar{t}_1}x_i\,\partial_{\bar{t}_1}x_k\Big(\zeta(x_i-x_k+\eta)+\zeta(x_i-x_k-\eta)-2\zeta(x_i-x_k)\Big)\\ &= \sum_{k\neq i}\partial_{\bar{t}_1}x_i\,\partial_{\bar{t}_1}x_k\frac{\wp'(x_i-x_k)}{\wp(\eta)-\wp(x_i-x_k)},\end{aligned} \tag{1.1.66}$$

которые имеют такой же вид, как и уравнения (1.1.61) для динамики по t_1. Они гамильтоновы с гамильтонианом

$$\bar{H}=\sum_i e^{-p_i}\prod_{k\neq i}\frac{\sigma(x_i-x_k-\eta)}{\sigma(x_i-x_k)}=\mathrm{const}\,\mathrm{tr}\,L^{-1}. \tag{1.1.67}$$

1.1.5 Матричные тождества

Здесь мы докажем некоторые полезные тождества для внедиагональных матриц

$$A_{ij}=(1-\delta_{ij})\Phi(x_i-x_j),\quad B_{ij}=(1-\delta_{ij})\Phi'(x_i-x_j),\quad C_{ij}=(1-\delta_{ij})\Phi''(x_i-x_j)$$

и диагональных матриц

$$D_{ij}=\delta_{ij}\sum_{k\neq i}\wp(x_i-x_k),\quad D'_{ij}=\delta_{ij}\sum_{k\neq i}\wp'(x_i-x_k),\quad D'''_{ij}=\delta_{ij}\sum_{k\neq i}\wp'''(x_i-x_k).$$

Начнем с тождества

$$[A,B]+[A,D]=D'. \tag{1.1.68}$$

Для преобразования коммутаторов $[A,B]+[A,D]$ используем тождество

$$\Phi(x)\Phi'(y)-\Phi(y)\Phi'(x)=\Phi(x+y)(\wp(x)-\wp(y)), \tag{1.1.69}$$

которое, в свою очередь, следует из легко доказываемого тождества

$$\Phi(x,\lambda)\Phi(y,\lambda)=\Phi(x+y,\lambda)\Big(\zeta(x)+\zeta(y)-\zeta(x+y+\lambda)+\zeta(\lambda)\Big). \tag{1.1.70}$$

С помощью (1.1.69) получим при $i\neq k$

$$\Big([A,B]+[A,D]\Big)_{ik}=\sum_{j\neq i,k}\Phi(x_i-x_j)\Phi'(x_j-x_k)-\sum_{j\neq i,k}\Phi'(x_i-x_j)\Phi(x_j-x_k)$$
$$+\Phi(x_i-x_k)\Big(\sum_{j\neq k}\wp(x_j-x_k)-\sum_{j\neq i}\wp(x_i-x_j)\Big)=0,$$

так что $[A,B]+[A,D]$ – это некоторая диагональная матрица. Чтобы найти ее диагональные элементы, нужен специальный случай (1.1.69) при $y=-x$ (получаемый как предел $y\to -x$):

$$\Phi(x)\Phi'(-x)-\Phi(-x)\Phi'(x)=\wp'(x). \tag{1.1.71}$$

Это дает

$$\Big([A,B]+[A,D]\Big)_{ii}$$
$$=\sum_{j\neq i}\Big(\Phi(x_i-x_j)\Phi'(x_j-x_i)-\Phi'(x_i-x_j)\Phi(x_j-x_i)\Big)=\sum_{j\neq i}\wp'(x_i-x_j)=D'_{ii},$$

так что мы получаем матричное тождество (1.1.68).

Комбинируя производные от (1.1.69) по x и y, получим тождества

$$\Phi(x)\Phi''(y)-\Phi(y)\Phi''(x)=2\Phi'(x+y)(\wp(x)-\wp(y))+\Phi(x+y)(\wp'(x)-\wp'(y)), \tag{1.1.72}$$

$$\Phi'(x)\Phi''(y)-\Phi'(y)\Phi''(x)=\Phi''(x+y)(\wp(x)-\wp(y))+\Phi'(x+y)(\wp'(x)-\wp'(y)). \tag{1.1.73}$$

Их пределы при $y\to -x$ таковы:

$$\Phi(x)\Phi''(-x)-\Phi(-x)\Phi''(x)=0, \tag{1.1.74}$$

$$\Phi'(x)\Phi''(-x)-\Phi'(-x)\Phi''(x)=-\frac{1}{6}\,\wp'''(x)-\wp(\lambda)\wp'(x). \tag{1.1.75}$$

Используя эти формулы, нетрудно доказать следующие матричные тождества:

$$[A,C] = 2[D,B] + D'A + AD', \tag{1.1.76}$$

$$[B,C] = [D,C] + D'B + BD' - \frac{1}{6}\, D''' - \wp(\lambda) D'. \tag{1.1.77}$$

Наконец, докажем тождество

$$Y + \frac{1}{2}[\dot X, C] - \frac{1}{2}\,\wp(\lambda)[\dot X, A] = -\tilde D', \tag{1.1.78}$$

где

$$Y = B\dot X A - A\dot X B - [A, \tilde D], \quad \tilde D_{ij} = \delta_{ij}\sum_{k\neq i} \dot x_k \wp(x_i - x_k), \quad \tilde D'_{ij} = \delta_{ij}\sum_{k\neq i}\dot x_k \wp'(x_i - x_k).$$

Имеем:

$$Y_{ii} = \sum_{j\neq i}\Big(\Phi'(x_{ij})\dot x_j \Phi(x_{ji}) - \Phi(x_{ij})\dot x_j \Phi'(x_{ji})\Big) = -\sum_{j\neq i}\dot x_j \wp'(x_{ij}) = -\tilde D'_{ii}$$

благодаря (1.1.71). При $i \neq k$ найдем, используя (1.1.69):

$$\begin{aligned} Y_{ik} = &\sum_{j\neq i,k}\Big(\Phi'(x_{ij})\dot x_j\Phi(x_{jk}) - \Phi(x_{ij})\dot x_j \Phi'(x_{jk})\Big) + \Phi(x_{ik})\sum_{j\neq i}\dot x_j\wp(x_{ij}) - \Phi(x_{ik})\sum_{j\neq k}\dot x_j \wp(x_{kj}) \\ &= \Phi(x_{ik})\sum_{j\neq i,k}\dot x_j\Big(\wp(x_{jk}) - \wp(x_{ij})\Big) + \Phi(x_{ik})\Big(\sum_{j\neq i}\dot x_j\wp(x_{ij}) - \sum_{j\neq k}\dot x_j \wp(x_{kj})\Big) \\ &= -(\dot x_i - \dot x_k)\Phi(x_{ik})\wp(x_{ik}). \end{aligned}$$

Теперь получаем при $i \neq k$:

$$Y_{ik} + \frac{1}{2}[\dot X, C]_{ik} - \frac{1}{2}\,\wp(\lambda)[\dot X, A]_{ik} = \frac{1}{2}\,(\dot x_i - \dot x_k)\Big(\Phi''(x_{ik}) - \Phi(x_{ik})(2\wp(x_{ik}) - \wp(\lambda))\Big) = 0$$

Поскольку $[\dot X, A]_{ii} = [\dot X, C]_{ii} = 0$, матричное тождество (1.1.78) доказано.

Докажем тождество (1.1.49). Используя явный вид матриц L, M (1.1.46), (1.1.47), пишем

$$\begin{aligned} \dot L + [L,M] \;=\; & 36z^2\Big([A,B] + [A,D]\Big) \\ & - 6z\Big(\dot A - [\dot X, B]\Big) + 36z\Big([A,C] - [A, D'] + 2[B, D]\Big) \\ & - 6\Big(\dot B - [\dot X, C]\Big) - \ddot X + 6\dot D + 36\Big([B,C] - [B, D'] + [C, D]\Big). \end{aligned}$$

Прежде всего заметим, что $\dot A_{ik} = (\dot x_i - \dot x_k)\Phi'(x_i - x_k)$, $\dot B_{ik} = (\dot x_i - \dot x_k)\Phi''(x_i - x_k)$, и, следовательно, $\dot A = [\dot X, B]$, $\dot B = [\dot X, C]$. Далее, мы имеем $[A,B]+[A,D] = D'$ (см. (1.1.68)), и с помощью уравнений (1.1.76), (1.1.77) $\dot L + [L,M]$ преобразуется к виду (1.1.49).

1.2 Обобщенные модели Калоджеро и Тоды

1.2.1 Обобщенные системы Калоджеро

Одномерные системы частиц с интегрируемым потенциалом взаимодействия широко известны в математической физике. В этой статье рассматриваются два типа таких систем – модели типа Калоджеро [27] и полные симметрические системы Тоды, обобщающие трёхдиагональные системы Тоды, отвечающие потенциалам с экспоненциальной зависимостью от расстояний [46]. Мы рассматриваем частицы в системах типа Калоджеро с дополнительными внутренними степенями свободы (классическим спином), введённые в [30, 31]. Еще точнее, будут описаны обобщённые системы Калоджеро с двумя типами спинов. В случае тодовских взаимодействий рассматриваются системы с большим числом степеней свободы.

Описание системы. Модели Калоджеро [27, 28] – это одномерные системы попарно взаимодействующих частиц с потенциалами, зависящими от расстояния между частицами или от более сложной линейной функции от координат, заданной корнями простых алгебр Ли [29]. Потенциалы могут быть рациональными, тригонометрическими либо эллиптическими функциями.

Эти модели имеют много приложений как в теоретической физике, так и в математике. Важнейшим их свойством является полная интегрируемость как на классическом так и на квантовом уровне.

Как уже говорилось, мы рассматриваем частицы, обладающие внутренними степенями свободы, называемые спином. В оригинальных работах [30, 31] спины принадлежали орбитам $\mathcal{O}$ коприсоединённого действия простой комплексной группы $G^{\mathbb{C}}$. Иначе говоря, это элементы алгебры, двойственной к алгебре Ли $g^{\mathbb{C}}$ =Lie($G^{\mathbb{C}}$), с фиксированными значениями функций Казимира. Например для $g^{\mathbb{C}}$ =sl(N,$\mathbb{C}$) (бесследовые комплексные матрицы размера $N{\times}N$) элементы орбиты – бесследовые матрицы с фиксированными собственными значениями. На орбитах существует невырожденная линейная скобка Пуассона, определяемая структурными константами алгебры $g^{\mathbb{C}}$. Пусть $R = \{\alpha\}$ система корней отвечающая простой комплексной алгебре Ли $g^{\mathbb{C}}$, $\mathbf{v}$,$\mathbf{u} \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ элементы её картановской подалгебры, которые мы отождествляем с импульсами и координатами частиц, а $S = \sum_{\alpha\in R} S_\alpha E_\alpha$ – разложение спина $S \in g^{\mathbb{C}}$ по корневому базису $\{E_\alpha\}$. В этих терминах квадратичный гамильтониан систем Калоджеро имеет вид:

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{v},\mathbf{v}) + U(S,\mathbf{u})\,, \quad U(S,\mathbf{u}) = \sum_{\alpha\in R} S_\alpha S_{-\alpha} V(\mathbf{u}_\alpha)\,,$$

где $(\,,)$ – инвариантное скалярное произведение на $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, $\mathbf{u}_\alpha = (\alpha,\mathbf{u})$ а $V(\mathbf{u}_\alpha)$ – некоторая рациональная, тригонометрическая либо эллиптическая функция. Скобки Пуассона между координатами частиц и их импульсов канонические $\{v_k,u_j\} = \delta_{jk}$, а пуассонова структура для спиновых переменных дается дираковскими скобками. Они получаются из скобки Пуассона-Ли после введения связей $\mathrm{Project}\, S|_{\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}} = 0$ и фиксации калибровки по отношению к присоединенному действию картановской подгруппы на спиновые переменные. Потенциал является гамильтонианом волчка Эйлера-Арнольда [32], построенного по группе $G^{\mathbb{C}}$ с тензором инерции, зависящим от координат взаимодействующих частиц. В частности, для $G^{\mathbb{C}}$ =SL(N,$\mathbb{C}$)

$$U(S,\mathbf{u}) = \sum_{j\neq k} S_{jk}S_{kj}V(u_j - u_k)\,.$$

Было доказано, что системы (1.2.1) являются вполне интегрируемыми по Лиувиллю.

Мы рассматриваем модификацию таких систем Калоджеро, сохраняющую интегрируемость. Она заключается в замене спиновых переменных, принадлежащих орбитам, на переменные P, являющиеся сечениями кокасательных расслоений T^*X к однородным пространствам $X = K\backslash G^{\mathbb{C}}$. Здесь K – максимальная компактная подгруппа $G^{\mathbb{C}}$. Пространство X называется симметрическим пространствам. Для $G^{\mathbb{C}}$ =SL(2,$\mathbb{C}$), K =SU(2) и X =SU(2)\SL(2,$\mathbb{C}$) – пространство Лобачевского. Кокасательных расслоение T^*X – пуассоново многообразие с невырожденной скобкой.

Ниже мы опишем классический тригонометрический случай, обобщающий вещественную спиновую модель Калоджеро-Сазерленда (КС) (1.2.1)

$$H^{CS} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} v_j^2 + \sum_{j<k} \frac{S_{jk}S_{kj}}{\sinh^2(u_j - u_k)}\,.$$

Здесь $v_j,u_k \in \mathbb{R}$, переменные $\mathbf{S} = \sum_{jk} S_{jk}E_{jk}$ в модели КС – элементы орбиты группы SL(N,$\mathbb{R}$), то есть собственные значения матриц $\mathbf{S}$ фиксированы. Кроме того, наложена связь $\mathrm{diag}\,\mathbf{S} = 0$, и матричные элементы S_{jk} и $S_{jk}\exp(x_j - x_k)$ для всех $x_k \in \mathbb{R}$ считаются эквивалентными. До наложения связей переменные $\mathbf{S}$ идентифицируются с угловыми моментами SL(N,$\mathbb{R}$) волчка.Обобщение модели КС выглядит следующим образом [33, 34, 35, 36]. Гамильтониан (1.2.1) обобщается до

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} v_j^2 + \sum_{j<k} \frac{S_{jk}^2 + T_{jk}^2 - 2S_{jk}T_{jk}\cosh(u_j - u_k)}{\sinh^2(u_j - u_k)}\,,$$

где S_{ij}, T_{ij} – матричные элементы антисимметричных матриц S и T ($S_{jk} = -S_{kj}$, $T_{jk} = -T_{kj}$) со скобками Пуассона-Ли, отвечающими прямой сумме двух алгебр $\mathrm{so}(N) \oplus \mathrm{so}(N)$:

$$\{S_{ij}, S_{kl}\} = -\frac{1}{2}\left(S_{il}\delta_{kj} - S_{kj}\delta_{il} - S_{ik}\delta_{lj} + S_{lj}\delta_{ik}\right),$$

$$\{T_{ij}, T_{kl}\} = \frac{1}{2}\left(T_{il}\delta_{kj} - T_{kj}\delta_{il} - T_{ik}\delta_{lj} + T_{lj}\delta_{ik}\right),$$

$$\{S_{ij}, T_{kl}\} = 0.$$

Таким образом, гамильтониан и скобки описывают, в частности, два взаимодействующих волчка Эйлера-Арнольда на группе $\mathrm{SO}(N)$ с моментами инерции, зависящими от координат частиц.

Размерность фазового пространства равна $(N-1)(N+2)-2[N/2]$. Мы предъявляем необходимое для интегрируемости число независимых интегралов движения. Их инволютивность следует из существования классической r-матрицы, которую мы явно строим.

В случае $N = 2$ алгебра $\mathrm{so}(2)$ коммутативна и мы можем зафиксировать значения спинов. Тогда из (1.2.1) получаем гамильтониан с двумя константами

$$H = \frac{v^2}{2} + \frac{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \cosh(2u)}{\sinh^2(2u)}.$$

Можно показать, что он совпадает с моделью КС типа BC_1 [29]. Его квантовая версия рассматривалась в [37].

Также как и модель КС (1.2.1), двухспиновое обобщение переносится на произвольные простые алгебры Ли с сохранением полной интегрируемости. У произвольной простой комплексной алгебры Ли $g^{\mathbb{C}}$ имеется единственная с точностью до изоморфизма вещественная форма $g^{\mathbb{R}} \subset g^{\mathbb{C}}$ и максимальная компактная подалгебра $\mathfrak{k} \subset g^{\mathbb{C}}$ [38]. Максимальная компактная подалгебра алгебры $g^{\mathbb{R}}$ - алгебра $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \cap g^{\mathbb{R}}$. Пусть $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ - картановская подалгебра алгебры $g^{\mathbb{R}}$, и R^+ система положительных корней по отношению $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$. Тогда интегрируемое обобщение гамильтониана (1.2.1) имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + 2\sum_{\alpha \in R^+} \frac{S_\alpha^2 + T_\alpha^2 - 2S_\alpha T_\alpha \cosh(\mathbf{u}_\alpha)}{(\alpha, \alpha)\sinh^2(\mathbf{u}_\alpha)}.$$

Скобки Пуассона-Ли для угловых моментов $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ определены на компактной подалгебре $\mathfrak{u}$ (нижняя строка Таблицы 1).

	A_{N-1}	B_N	C_N	D_N
$g^{\mathbb{C}}$	$\mathrm{sl}(N,\mathbb{C})$	$\mathrm{so}(2N+1,\mathbb{C})$	$\mathrm{sp}(N,\mathbb{C})$	$\mathrm{so}(2N,\mathbb{C})$
$g^{\mathbb{R}}$	$\mathrm{sl}(N,\mathbb{R})$	$\mathrm{so}(N,N+1)$	$\mathrm{sp}(N,\mathbb{R})$	$\mathrm{so}(N,N)$
$\mathfrak{k}$	$\mathrm{su}(N)$	$\mathrm{so}(2N+1)$	$\mathrm{sp}(N)$	$\mathrm{so}(2N)$
$\mathfrak{u}$	$\mathrm{so}(N)$	$\mathrm{so}(N+1)\oplus\mathrm{so}(N)$	$\mathrm{u}(N)$	$\mathrm{so}(N)\oplus\mathrm{so}(N)$

	G_2	F_4	E_6	E_7	E_8
$g^{\mathbb{C}}$	$\mathrm{g}_2^{\mathbb{C}}$	$\mathrm{f}_4^{\mathbb{C}}$	$\mathrm{e}_6^{\mathbb{C}}$	$\mathrm{e}_7^{\mathbb{C}}$	$\mathrm{e}_8^{\mathbb{C}}$
$g^{\mathbb{R}}$	$\mathrm{g}_2^{\mathbb{R}}$	$\mathrm{f}_4^{\mathbb{R}}$	$\mathrm{e}_6^{\mathbb{R}}$	$\mathrm{e}_7^{\mathbb{R}}$	$\mathrm{e}_8^{\mathbb{R}}$
$\mathfrak{k}$	$\mathrm{g}_2^{\mathbb{R}}$	$\mathrm{f}_4^{\mathbb{R}}$	$\mathrm{e}_6^{\mathbb{R}}$	$\mathrm{e}_7^{\mathbb{R}}$	$\mathrm{e}_8^{\mathbb{R}}$
$\mathfrak{u}$	$\mathrm{su}(2)\oplus\mathrm{su}(2)$	$\mathrm{sp}(3)\oplus\mathrm{su}(2)$	$\mathrm{sp}(4)$	$\mathrm{su}(8)$	$\mathrm{so}(16)$

Таблица 1. Нормальные формы $g^{\mathbb{R}}$ и компактные подалгебры $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{u}$ простых комплексных алгебр $g^{\mathbb{C}}$

Можно показать, что эта модель эквивалентна следующей модели с квадратичным гамильтонианом:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} v_j^2 + \sum_{\alpha\in R^+} \frac{\mathbf{P}_\alpha \mathbf{P}_{-\alpha}}{\sinh^2(\mathbf{u}_\alpha)}\,.$$

Здесь по-прежнему $v_j,u_k \in \mathbb{R}$ – координаты и импульсы частиц, а переменные $\mathbf{P}$ – сечение кокасательного расслоения $T^*\mathcal{X}^{\mathbb{R}}$, где $\mathcal{X}^{\mathbb{R}} = U\backslash G^{\mathbb{R}}$ – симметрическое пространство. Это фактор пространство группы $G^{\mathbb{R}}$ ($\mathrm{Lie}\, G^{\mathbb{R}} = g^{\mathbb{R}}$) – нормальной вещественной формы группы $G^{\mathbb{C}}$. Группа U есть её максимальная компактная подгруппа ($\mathrm{Lie}\, U = \mathfrak{u}$). Сечения $\mathbf{P}$ могут быть определены как сопряжения элемента $\zeta \in g^{\mathbb{R}}$

$$\mathbf{P} = \mathrm{Ad}_g^{-1}\zeta\,.$$

Здесь $g \in \mathcal{X}^{\mathbb{R}}$. Пусть σ – инволютивный автоморфизм группы $G^{\mathbb{R}}$, чьи неподвижные точки – подгруппа U. Тогда g может быть представлена в виде $g = ff^\dagger$, где $\dagger = \sigma^{-1}$, $f \in G^{\mathbb{R}}$. Кроме того, наложены связи $\mathbf{P}|_{\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}} = 0$, $\zeta|_{\mathfrak{u}} = 0$.

Обобщенные модели КС как системы Хитчина. Обобщенную КС систему можно построить, используя подход Хитчина [39, 40]. Оператор Лакса интегрируемых систем Хитчина удовлетворяет так называемым уравнениям Хитчина. Они возникают из уравнения самодуальности в четырех измерениях после редукции на двумерную риманову поверхность Σ. А именно, вместо $\mathbb{R}^4$ рассматривается четырехмерное пространство

$\mathbb{R}^2 \times \Sigma$, где Σ играет роль базовой спектральной кривой. Состав полей системы Хитчина определяется четырехмерными вектор-потенциалами, принимающими значение в компактной алгебре $\mathrm{su}(N)$ ($\mathfrak{k}$ в общем случае, см. Таблицу 1). Они зависят только от координат на Σ. После редукции два из четырёх вектор-потенциалов превращаются в скалярные поля – поля Хиггса. Фазовое пространство систем Хитчина, то есть пространство модулей решений уравнений Хитчина, есть гиперкэлерово многообразие. В частности, координаты частиц и их импульсы описывают модули решений уравнения Хитчина. Отметим также, что уравнения Хитчина появляются естественным образом в четырёх-мерной твистованной суперсимметричной $\mathcal{N} = 4$ теории Янга-Миллса [41].

Спиновые переменные есть вычеты поля Хиггса в особых точках. С точки зрения четырёхмерной теории особые точки это точки пересечения римановой поверхности Σ с двумерными поверхностями C трансверсальными к Σ. Спиновые переменные же в этом подходе это переменные в сигма-модели $C \to \mathcal{O}$, взаимодействующей с системой Хитчина [42]. Фазовое пространство такой сигма-модели тоже гиперкэлерово. Это означает, что отвечающие этой сигма-модели так называемые поверхностные операторы (surface operators) не нарушают $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрию.

На самом деле для построения фазового пространства интегрируемых систем вместо пространства модулей решений уравнений Хитчина используется пространство модулей расслоений Хиггса. Расслоение Хиггса описывается антиголоморфной компонентой вектор потенциала и голоморфной компонентой поля Хиггса, принимающими значение в комплексной алгебре $g^{\mathbb{C}}$. Эти два пространства модулей почти эквивалентны и мы рассматриваем второе из них. В таком подходе поле Хиггса оказывается оператором Лакса интегрируемой системы. Кроме того, такая конструкция позволяет ввести зависимость оператора Лакса от спектрального параметра $L = L(z)$, $(z \in \Sigma)$. В свою очередь с помощью оператора Лакса можно строить полный набор интегралов движения.

Важным ингредиентом нашей конструкции является так называемая квази-компактная структура калибровочной группы. Ее наличие означает, что калибровочные преобразования в сингулярных точках базовой кривой редуцируются к унитарной группе (в стандартном подходе системы Хитчина могут иметь квази-параболического структуру, то есть в сингулярных точках калибровочные преобразования редуцируются к борелевским подгруппам). В результате, мы заменяем описанную выше сигма-модель на модель $C \to T^*\mathcal{X}^{\mathbb{C}}$, где $\mathcal{X}^{\mathbb{C}}$ – симметрическое пространство $\mathrm{SU}(N)\backslash\mathrm{SL}(N,\mathbb{C})$. В общем же случае это симметрическое пространство $\mathcal{X}^{\mathbb{C}} = K\backslash G^{\mathbb{C}}$, где $K \subset G^{\mathbb{C}}$ – максимальная компактная подгруппа. Фазовое пространство этой сигма-модели не является гиперкэлеровым, что приводит к нарушению суперсимметрии в соответствующей четырёх-мерной теории.

С точки зрения динамических систем фазовое пространство систем с квазикомпактной структурой плохо определено, так как часть описывающих его переменных, относящаяся к сигма-модели, вещественная, а другая часть комплексная. Мы переходим к вещественным переменным, используя подход предложенный для гладких кривых [43]. Предположим, базовая спектральная кривая Σ допускает антиголоморфную инволюцию, которая в локальных координатах выглядит как $\imath : z \to \bar{z}$. Одновременно рассмотрим инволютивный автоморфизм σ алгебры $g^{\mathbb{C}}$ $(\sigma^2 = 1)$ такой, что инвариантная подалгебра инволюции является вещественной нормальной формой $g^{\mathbb{R}}$ алгебры Ли $g^{\mathbb{C}}$. Эти подалгебры приведены в Таблице 1. Рассмотрим одновременное действие этих инволюций $L(z) \to L^{\sigma}(\bar{z})$. Инвариантное подмножество такого действия определяет оператор Лакса вещественной интегрируемой системы. Его аргументом является вещественная кривая S – инвариант действия $\imath$. Таким образом мы переходим к вещественной интегрируемой системе.

В нашем случае, как и в случае системы КС, кривая Σ сингулярна. На рис. 1 изображена базовая спектральных кривая для обобщённой системы КС. Это комплексная проективная кривая $\mathbb{C}P^1$ в которой отождествлены точки 0 и ∞. Для модели КС сингулярная точка это точка $z = 1$ на $\mathbb{C}P^1$. Отличие системы КС от обобщённой системы КС в том, что вычет оператора Лакса в точке $z = 1$ в первом случае лежит в коприсоединённой орбите группы $G^{\mathbb{C}}$, а во втором – в кокасательном пространстве $\mathcal{X}^{\mathbb{C}} = K \backslash G^{\mathbb{C}}$. Отметим, что системы Хитчина на особых кривых (и, в частности, система КС) изучались ранее в [44, 45].

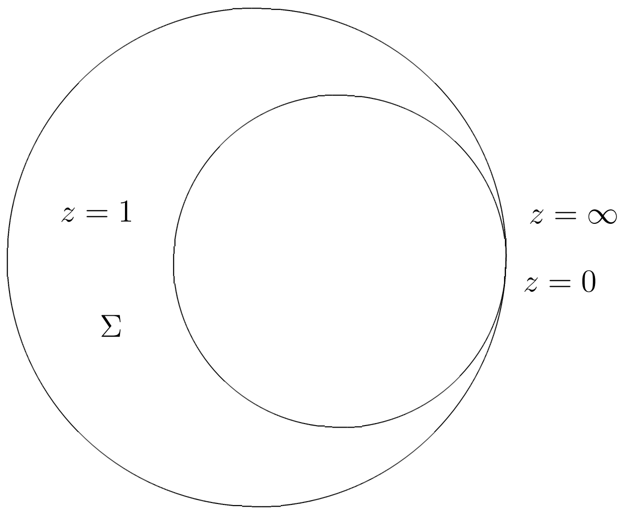

Рис.1 Базовая спектральная кривая $\Sigma = \mathbb{C}P^1$

При переходе к вещественной интегрируемой системе кривая Σ на рис.1 заменяется на окружность S^1, а оператор Лакса $L(x)$ в точке $x = 1$ имеет полюс с коэффициентом, принадлежащем вещественному симметрическому пространству $\mathcal{X}^{\mathbb{R}} = U \backslash G^{\mathbb{R}}$. Алгебры Ли групп $G^{\mathbb{R}}$ и U приведены во второй и последней строчках Таблицы 1.

1.2.2 Фазовые портреты обобщенной системы Тоды

Система Тоды (или цепочка Тоды) впервые была рассмотрена в работах [46, 47], в работе [48] были найдены n функционально независимых интегралов движения, а в работах [49, 50, 95] была доказана инволютивность этих интегралов. Известно (см. [55], [56]), что система Тоды имеет в качестве обобщения интегрируемую систему на произвольной полупростой группе Ли. Эта система называется обобщенная (полная симметричная) система Тоды. Об интегрируемости этой системы см. [65] и [66]; схема Адлера-Костанта-Симса была развита в [67, 68, 69].

Можно поставить вопрос о геометрических свойствах такой системы на произвольной группе. В частности, в нашей работе [52] был описан фазовый портрет такой системы на действительной специальной линейной группе (в более абстрактных терминах, на действительных формах A_n серий). Было также показано, что он может быть идентифицирован с диаграммой Хассе порядка Брюа на соответствующей группе Вейля. Этот результат обобщает, в некотором смысле, классический результат работы [57]; он появился, как попытка дать точную математическую интерпретацию результатов [58] (см. также [59] и [60]).

Вопрос описания фазового портрета заключается в исследовании асимптотического поведения системы. Аналогия – абсолютно упругое столкновение двух бильярдных шаров, один из которых покоится, а другой движется с импульсом p. После столкновения шары обмениваются импульсами. То же явление происходит и в трехдиагональной системе Тоды. Например, в случае матрицы Лакса ранга 2, матрица Лакса вырождается в диагональную матрицу $(+\lambda, -\lambda)$ при $t \to -\infty$, а после взаимодействия при $t \to +\infty$ в диагональную матрицу $(-\lambda, +\lambda)$, где λ – импульсы. В случае матрицы Лакса более высокого ранга, вопрос асимптотического поведения системы уже не такой простой, и в этом и заключается задача – получить картину всех возможных траекторий системы. Для решения этой задачи мы будем использовать свойства обобщенной системы Тоды: во-первых, градиентность потока на соответствующем многообразии флагов, существование функции Морса и невырожденных критических точек, и, во-вторых, существование достаточно большого количества полуинвариантов – координат Плюккера. Заметим, что, когда матрица Лакса вырождается в диагональную матрицу собственных значений, такая матрица отвечает критической точке в фазовом пространстве. Идея решения этой задачи заключается в следующем. Так как система градиентная, имеет функцию Морса, значит каждая траектория должна идти от одной критической точки к другой, следовательно, для каждой критической точки мы можем описать локальное пространство входящих и исходящих траекторий. Чтобы понять какие траектории связывают две критические точки, мы высаживаем нашу систему на минорные поверхности – полуинварианты с нулевым значением ($M = 0$, см. [71]), сохраняющиеся потоком Тоды. То есть траектории будут лежать на этих поверхностях или их пересечении. Оказывается, этих минорных поверхностей достаточно, чтобы выделить одну траекторию между двумя критическими точками, но бывает и так, что две критические точки вообще не соединяются никакой траекторией. В систематизации траекторий и состоит задача. И, повторим, оказывается, что траектории соединяют критические точки в соответствии с диаграммой Хассе порядка Брюа на соответствующей группе Вейля. О порядке Брюа см. [53] и [62].

1.2.3 Фазовые портреты потоков Тоды на $Sp(4,\mathbb{R})$, на действительной форме G_2 и на вырожденных орбитах

Наше изложение основано на работах [53] и [54]. Наши рассуждения строятся на немного изменённых методах, которые использовались в работе [52], однако, применение этих методов к группам, отличающимся от $SL(n,\mathbb{R})$, оказывается довольно сложным. Причина этого состоит в том факте, что определение системы Тоды на группах Ли обычно основывается на рассмотрении корней и базисов Шевалье, в то время как наше исследование фазового портрета основано на большом множестве инвариантных относительно потоков подпространств, которые могут быть описаны в терминах пространства флагов и матричных представлений групп.

Чтобы решить эту задачу, нужно было найти подходящую переформулировку системы Тоды, чтобы матричное представление группы могло быть использовано. Оказалось, что такая переформулировка действительно существует; она была дана, в частности, в работе [56]. Фактически, можно показать, что существует вложение полупростой группы G в специальную линейную группу подходящей размерности такое, что G сохраняется системой Тоды на $SL(n,\mathbb{R})$; тогда система Тоды на G эквивалентна ограничению системы определённой на $SL(n,\mathbb{R})$. Есть много способов, которыми система Тоды может быть определена на классических простых группах или, скорее, на соответствующих алгебрах Ли (фактически, можно говорить об индуцированной системе на соответствующих пространствах флагов G/B^+). Например, можно дать точные формулы для матриц L и M в терминах канонической системы корней (см. [56]): для любого базиса Картана-Вейля $H_1,\dots,H_r,E_{\alpha_1},\dots,E_{\alpha_{n-r}}$, где $r = \operatorname{rk}\mathfrak{g}$, $n = \dim\mathfrak{g}$, пусть Δ^+ определяет подмножество положительных корней (относительно данного базиса), тогда

$$L = \textstyle\sum_{i=1}^r a_i H_i + \sum_{\alpha\in\Delta^+} b_\alpha(E_\alpha + E_{-\alpha}),\ M = \sum_{\alpha\in\Delta^+} b_\alpha(E_\alpha - E_{-\alpha}), \qquad (1.2.1)$$
$$L' = [L,M].$$

Другой возможный подход состоит в том, чтобы применить схему Адлера-Костанта-Симса, мы получим следующие матричные представления:

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n-1n} \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & -a_{n-1n} & 0 \end{pmatrix}$$

где L_+ и L_- – верхняя и нижняя диагональные части L, соответственно, а $B = L_+ - L_-$. В настоящей работе мы выбираем такую точку зрения на обобщённую систему Тоды, которая была использована в работе [59] (см. также [56]). Она основана на следующей идее, обобщающей схему Адлера-Костанта-Симса: если мы вкладываем группу G в подходящую $SL(n,\mathbb{R})$ так, что подалгебра Картана отображается в диагональные матрицы и корневые вектора соответствуют верхней и нижней треугольным матрицам, так что матрицы, соответствующие $+\alpha$ и $-\alpha$ векторам транспонируются друг в друга, тогда матрица Лакса L даётся формулой (1.2.3) и принадлежит пересечению симметрической матрицы и образа $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}_n$, а M даётся ограничением процедуры антисимметризации на L.

Как уже говорилось, важным свойством системы Тоды является то, что она также имеет структуру градиентного потока. Есть много способов описать это (см., например, [64], [55]). Рассмотрим вложение (вещественную форму) G в $SL(n,\mathbb{R})$, как объяснялось выше. Тогда максимальная компактная подгруппа в G будет отображена внутрь группы ортогональных матриц $SO(n,\mathbb{R})$. Кроме того, из уравнения (1.2.1) следует, что собственные значения матрицы Лакса сохраняются потоком Тоды. Поскольку каждая вещественная симметрическая матрица L может быть представлена в форме $\Psi\Lambda\Psi^t$, где Ψ ортогональна и Λ диагональная матрица собственных значений, мы можем использовать это же разложение. Тогда Ψ будет матрицей из максимальной компактной подгруппы $K_G \subset G$, и Λ будет матричной формой подгруппы Картана группы G. Так как матрица Λ не меняется под действием потока Тоды, фиксируя её, мы получим динамическую систему на Ψ

$$\frac{d\Psi}{dt} = M\Psi,\ M = (\Psi\Lambda\Psi^t)_+ - (\Psi\Lambda\Psi^t)_-. \qquad (1.2.2)$$

Эта система (1.2.2), в определённом смысле, эквивалентна потоку Тоды (поток Тоды получен из присоединённого действия $\Psi(t)$ на Λ). Можно рассмотреть эту систему на пространстве флагов, ассоциированном с G, которое эквивалентно $F(G) = K_G/(K_G \bigcap H)$, где H есть выбранная максимальная коммутативная подгруппа. Теперь можно показать, что уравнения (1.2.2) в самом деле заданы градиентным потоком на K_G (или на $F(G)$). Для этого введём инвариантную евклидову структуру на $\mathfrak{so}_n$ (подходящая деформация формы Киллинга), и продолжим её до римановой на $SO(n,\mathbb{R})$; эта структура является тогда ограничением на K_G, вложенным в ортогональную группу, как объяснялось выше. Тогда можно показать, что уравнение (1.2.2) имеет форму градиентного потока следующей функции относительно выбранной римановой структуры $F_G(\Psi) = Tr(\Psi\Lambda\Psi^t N)$, где Λ – матрица собственных значений, и N подходящая диагональная матрица (представляющая элемент в выбранной подгруппе Картана). Список таких элементов для различных групп можно найти, например, в работе [55].

Другим важным свойством системы (1.2.2) является то, что может быть найдено много многообразий в $SO(n,\mathbb{R})$, сохраняющихся этой системой. Важное большое семейство таких инвариантных многообразий образовано, так называемыми, минорными поверхностями. Подробнее см. в [71]).

Система на $Sp(4,\mathbb{R})$. Напомним, что $Sp(2n,\mathbb{R})$ – группа линейных преобразований $\mathbb{R}^{2n}$, сохраняющих ориентацию, – сохраняет данную невырожденную антисимметрическую билинейную форму J. Если мы хотим вложить $Sp(4,\mathbb{R})$ в $SL(4,\mathbb{R})$ так, чтобы положительные корни перешли в верхние треугольные матрицы, нам следует выбрать J антидиагональной. Вследствие этого вложения подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{R})$ диагональна. Матрица Лакса – симметрическая матрица в $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{R})$: $L = U\Lambda U^{-1}$. Здесь Λ – диагональная матрица собственных значений L, а U матрица из $U(2) = Sp(4,\mathbb{R}) \bigcap SO(4,\mathbb{R})$, максимальная компактная подгруппа группы $Sp(4,\mathbb{R})$. M матрица из уравнения (1.2.1) равна $M = (U\Lambda U^{-1})_{>0} - (U\Lambda U^{-1})_{<0}$. Зафиксируем собственные значения L как $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, так что соответствующий элемент в алгебре Картана есть $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2$. Поскольку система Тоды на $Sp(4,\mathbb{R})$ даётся ограничением уравнения (1.2.1) из $SL(4,\mathbb{R})$, можно описать критические точки потока на пространстве флагов; они даются классами эквивалентности ортогональных матриц в $Sp(4,\mathbb{R})$, то есть из пересечения $SO(4,\mathbb{R}) \bigcap Sp(4,\mathbb{R}) = U(2)$, которые сохраняют подалгебру Картана $Sp(4,\mathbb{R})$. Существует восемь перестановочных матриц $\tilde{s}_i$, которые попадают в $U(2)$. Используем формулы из [56], которые выражают функцию Морса системы Тоды на симплектических флагах в терминах корней $Sp(n,\mathbb{R})$. Вычисляем квадратичную часть функции Морса F_n на $Sp(n,\mathbb{R})$, в особых точках в терминах локальных координат, перенесённых из алгебры Ли. Чтобы восстановить точную картину траекторий, соединяющих особые точки, делаем перечень минорных поверхностей, к которым они принадлежат, см. [54]. Сравнивая индексы Морса точек и множества точек внутри различных инвариантных подмногообразий (минорных поверхностей), можно получить соответствующую диаграмму.

Эта диаграмма 1-параметрических семейств траекторий, соединяющих особые точки, которые соответствуют $\tilde{s}_i$. Как можно видеть, она совпадает с диаграммой порядка Брюа для группы Вейля группы $Sp(4,\mathbb{R})$, см. [62]. Также отметим, что индексы особых точек совпадают с длинами соответствующих элементов Вейля; такой факт также имел место во всех предыдущих ситуациях, которые рассматривались в работе [52].

Случай G_2 . Наименьшей спорадической группой из классификационного списка простых групп Ли является группа G_2. Существует много способов ввести её. Например, как подгруппу в $SL(7,\mathbb{R})$, которая сохраняет данную симметрическую 2-форму и кубическую форму на $\mathbb{R}^7$. Наше рассмотрение основано на описании G_2, данное Гроссом в [70]. Нужно вложить эту группу в $SL(7,\mathbb{R})$ так, чтобы все необходимые для анализа условия, перечисленные выше, оставались в силе. Схема в этом случае похожа на схему в предыдущем случае, трудность была в выборе правильного представления для корневых векторов, что было достигнуто определённым выбором ортогональной матрицы сопряжения P, подробности см в [54]. Алгебра Картана в этом случае (мы получаем ее, сопрягая алгебру Картана, рассмотренную в [70], матрицей P) состоит из диагональных матриц, и можно получить точные матричные представления элементов группы Вейля в этом представлении, что и было сделано.

Система на $Gr_2(4,\mathbb{R})$. Рассмотрим две пары совпадающих собственных значений матрицы Лакса ранга 4. Тогда динамическую система 1.2.2 на $\Psi \in SO(4,\mathbb{R})$ определена на грассманиане $Gr_2(4,\mathbb{R})$, так как Ψ) определена с точностью до действия тора. В этом случае рассмотрим расслоение с базой $SO(4)/(SO(2)\times SO(2))$ и слоем изоморфным тору. Пространство расслоения – $SO(4)$. Наверху (над базой) количество особых точек – 24, на базе – 6. Каждая особая точка на базе – проекция (результат слияния) целого непрерывного множества (тора) точек из $SO(4)$, которое соответствует диагональной матрице с двумя парами совпадающих собственных значений (одной из 6). Граничные точки этого множества наверху – 4 особые точки, связанные преобразованием из $SO(2)\times SO(2)$. В работе [53] показано, что все необходимые свойства такой системы Тоды для анализа фазового портрета сохраняются.

1.3 Подкрученное представление алгебры q-разностных операторов, подкрученные q-W алгебры и конформные блоки

1.3.1 Введение

Тороидальные алгебры. Теория представлений квантовой тороидальной алгебры активно развивается в последние годы. У этой теории имеются бесчисленные приложения, включающие геометрическую теорию представлений и АГТ-соответствие [100], топологические струны, интегрируемые системы, теория узлов [89], и комбинаторика [77].

Мы будем рассматривать только квантовую тороидальную $\mathfrak{gl}_1$ алгебру; обозначаем ее $U_{q,t}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$. Эта алгебра зависит от двух параметров q,t и имеет образующие типа ПБВ $E_{k,l}$, $(k,l)\in\mathbb{Z}^2$ и центральные элементы c',c [76]. В основном мы будем рассматривать случай $q=t$, при этом тороидальная алгебра становится универсальной обертывающей алгебры Ли с образующими $E_{k,l}$, c', c и соотношением

$$[E_{k,l},E_{r,s}] = (q^{(sk-lr)/2} - q^{(lr-sk)/2})E_{k+r,l+s} + \delta_{k,-r}\,\delta_{l,-s}(c'k+cl).$$

Будем обозначать эту алгебру Ли $\mathfrak{Diff}_q$, так как имеется гомоморфизм из этой алгебры в алгебру q-разностных операторов, порожденную D,x, с соотношением $Dx=qxD$, а именно $E_{k,l}\mapsto q^{kl/2}x^lD^k$.

Алгебру $\mathfrak{Diff}_q$ можно задать и по-другому, используя образующие Шевалле $E(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}E_{1,k}z^{-k}$, $F(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}E_{-1,k}z^{-k}$, $H(z)=\sum_{k\neq 0}E_{0,k}z^{-k}$, см., например, [105].

Здесь мы работаем с фоковским представлением $\mathfrak{Diff}_q$; более точно, имеется семейство представлений $\mathcal{F}_u$, зависящее от параметра u. Эти представления являются просто фоковскими модулями для подалгебры Гейзенберга $E_{0,k}$. Образы $E(z)$ и $F(z)$ являются вертексными операторами (экспонентой от Гейзенберга). Конструкции такого типа обычно называются бозонизациями.

В работах [82], [100] показано, что образ тороидальной алгебры $U_{q,t}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$ в эндоморфизмах тензорного произведения n фоковских модулей является деформированной W-алгебры для $\mathfrak{gl}_n$. Имеется так называемый конформный предел $q,t\to 1$, при котором W-алгебры становится вертексной алгеброй. Эти вертексные алгебры являются тензорным произведением алгебры Гейзенберга и W-алгебры для $\mathfrak{sl}_n$. В случае $q=t$, центральный заряд соответствующей W-алгебры $\mathfrak{sl}_n$ равен $n-1$. Такие W-алгебры появлялись при изучении соответствия между изомонодромной деформацией и CFT [86], [87]. Это одна из мотиваций нашей работы.

q-деформация соответствия между изомонодромной деформацией и CFT была предложена в [73], [75], [91]. Основное утверждение – явная формула для q-изомонодромной тау-функции в виде бесконечной суммы конформных блоков для деформированной W-алгебры при $q=t$. В общем случае, эти тау-функции сложны, но имеются специальные случаи (соответствующие алгебраическим решениям), при которых эта тау-функция имеет очень простой вид ([73], [72]). Эти случаи должны соответствовать специальным представлениям q-деформированной W-алгебры. Построение таких представлений – одна из целей нашей работы.

Подкрученные модули Фока. Имеется естественное действие группы $SL(2,\mathbb{Z})$ на $\mathfrak{Diff}_q$. Мы будем параметризовать элементы $\sigma\in SL(2,\mathbb{Z})$ следующим образом:

$$\sigma=\begin{pmatrix} m' & m\\ n' & n\end{pmatrix}.$$

Тогда σ действует следующим образом:

$$\sigma(E_{k,l})=E_{m'k+ml,\,n'k+nl},\quad \sigma(c')=m'c'+n'c,\ \ \sigma(c)=mc'+nc.$$

Для всего $\mathfrak{Diff}_q$ модуля M и $\sigma\in SL(2,\mathbb{Z})$ обозначим за M^σ модуль, подкрученный на автоморфизм σ. Подкрученный модуль зависит от n и n' (с точностью до измофорфизма). Эти числа равны значениям центральных элементов c и c' на модуле $\mathcal{F}_u^\sigma$. Поэтому мы также используем обозначение $\mathcal{F}_u^{(n',n)}$ для $\mathcal{F}_u^\sigma$. Подкрученный модуль $\mathcal{F}_u^\sigma$ (для общих q,t) используются, например, в работе [90].

Ниже мы дадим явную конструкцию твистованного фоковского модуля $\mathcal{F}_u^\sigma$ при $q = t$. На самом деле мы дадим три конструкции: первая в терминах n-фермионов, вторую в терминах n-бозонов и третью в терминах твистованного бозона. Здесь для простоты мы предположили, что $n > 0$. Другими словами, твистованные фоковские модули будут отождествлены с базовыми представлениями $\widehat{\mathfrak{gl}}_n$; две разные бозонизации соответсвуют однородной [84] и главной [94],[92] конструкциям.

Задача построения бозонизации нетривиальна, так как бозонизация описывается в терминах образующих Шевалле (а действие $SL(2,\mathbb{Z})$ на образующие Шевалле не имеет простого описания). Появление аффинной $\mathfrak{gl}_n$ согласовано с гипотезой Горского-Негута [90]. Конкретнее, в работе [90] была выдвинута гипотеза, что на $\mathcal{F}_u^\sigma$ имеется некоторое действие $U_{p^{1/2}}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$, удовлетворяющее довольно неявно заданным условиям (здесь $p = q/t \neq 1$). Мы ожидаем, что действие этой квантовой группы является p-деформацией $\widehat{\mathfrak{gl}}_n$-действия, построенного нами.

Рассмотрим это действие на простейших примерах. Также для простоты мы приводим здесь только формулы для $E(z)$. В случае $n = 1$, $n' = 0$

$$E(z) = uq^{-1/2}z\psi(q^{-1/2}z)\psi^*(q^{1/2}z) = \frac{u}{1-q} :\exp\left(\phi(q^{1/2}z) - \phi(q^{-1/2}z)\right):,$$

где $\psi(z)$,$\psi^*(z)$ – комплексно сопряжённые фермионы, $\phi(z) = \sum_{j\neq 0} a[j]z^{-j}/j$ – бозон и $a[j]$ образующие алгебры Гейзенберга с соотношением $[a[j],a[j']] = j\delta_{j+j',0}$.

Первый нетривиальный пример $n = 2$, $n' = 1$. У нас есть формулы:

$$E(z) = u^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{4}}\left(z^2\psi_{(0)}(q^{-1/2}z)\psi^*_{(1)}(q^{1/2}z) + z\psi_{(1)}(q^{-1/2}z)\psi^*_{(0)}(q^{1/2}z)\right), \tag{1.3.1}$$

$$E(z) = u^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{4}}\left(z^2 :\exp\left(\phi_1(q^{1/2}z) - \phi_0(q^{-1/2}z)\right): + z :\exp\left(\phi_0(q^{1/2}z) - \phi_1(q^{-1/2}z)\right):\right)(-1)^{a_0[0]}, \tag{1.3.2}$$

$$E(z) = \frac{z^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}}{2(1-q^{\frac{1}{2}})}\left(:\exp\left(\sum_{k\neq 0}\frac{q^{-k/4}-q^{k/4}}{k}a_k z^{-k/2}\right): - :\exp\left(\sum_{k\neq 0}(-1)^k\frac{q^{-k/4}-q^{k/4}}{k}a_k z^{-k/2}\right):\right). \tag{1.3.3}$$

Здесь $\psi_{(0)}(z)$,$\psi^*_{(0)}(z)$ и $\psi_{(1)}(z)$,$\psi^*_{(1)}(z)$ – антикоммутирующие пары комплексно сопряжённых фермионов, $\phi_b(z) = \sum_{j\neq 0} a_b[j]z^{-j}/j + Q + a_b[0]\log z$ это коммутирующие бозоны, и $a_b[j]$ образующие алгебры Гейзенберга с соотношением $[a_b[j],a_{b'}[j']] = j\delta_{j+j',0}\delta_{b,b'}$. Образующие a_k в (1.3.3) удовлетворяют $[a_k,a_{k'}] = k\delta_{k+k',0}$.

Соотношения между (1.3.1) и (1.3.2) – это обычное бозон-фермионное соответствие. В правой части формулы (1.3.3) мы имеем только один Гейзенберг a_k, но зато у нас есть как чётные, так и нечетные степени z, так что можно считать, что у нас бозон с нетривиальной монодромией. Это объясняет термин ‘твистованный бозон’; мы также будем называть эту конструкцию странной бозонизацией. Заметим, что нецелые степени z сократятся в правой части (1.3.3).

Мы доказали приведенные ниже теоремы двумя способами. Первый способ основан на следующей идее. Для всякой подрешётке полного ранга $\Lambda \in \mathbb{Z}^2$ индекса n у нас есть подалгебра $\mathfrak{Diff}^{\Lambda}_{q^{1/n}} \subset \mathfrak{Diff}_{q^{1/n}}$, порождённая $E_{a,b}$ при $(a,b) \in \Lambda$ и центральными элементами c, c'. Алгебра $\mathfrak{Diff}^{\Lambda}_{q^{1/n}}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{Diff}_q$, изоморфизм зависит от выбора положительно ориентированного базиса v_1,v_2 в Λ. Обозначим этот изоморфизм ϕ_{v_1,v_2}.

Если базис v_1,v_2 выбран в виде $v_1 = (N,0)$, $v_2 = (R,d)$, то ограничения фоковского модуля $\mathcal{F}_u$ на $\phi_{v_1,v_2}(\mathfrak{Diff}_q)$ изоморфно следующей сумме произведений фоковских модулей:

$$\mathcal{F}_{u^{1/N}}|_{\phi_{v_1,v_2}(\mathfrak{Diff}_q)} \cong \bigoplus_{l\in\mathbf{Q}_{(d)}} \mathcal{F}_{uq^{rl_0}} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{uq^{r(\frac{\alpha}{n}+l_\alpha)}} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{uq^{r\left(\frac{d-1}{d}+l_{d-1}\right)}} \qquad (1.3.4)$$

где $r = \gcd(N,R)$ и $\mathbf{Q}_{(d)} = \{(l_0,\dots,l_{d-1}) \in \mathbb{Z}^d | \sum l_i = 0\}$. Если мы выберем базис w_1,w_2 в Λ, который отличается от v_1,v_2 на $\sigma \in SL(2,\mathbb{Z})$, то мы получим разложение, аналогичное (1.3.4), но с правой часть в виде суммы тензорных произведений твистованных фоковских модулей. Для базиса $w_1 = (r,n_{tw})$, $w_2 = (0,n)$ мы напишем формулы для действия образующих Шевале алгебры $\mathfrak{Diff}_q = \mathfrak{Diff}^{\Lambda}_{q^{1/n}}$, используя либо фермионы, либо изначальные бозоны, использованные изначально для построения $\mathcal{F}_u$. Применяя всё это для решётки с $d = 1$, мы получим наши теоремы.

Второе доказательство основывается на полубесконечной конструкции. Обозначим за V_u представление алгебры $\mathfrak{Diff}_q$ на векторном пространстве с базисом $x^{k-\alpha}$ для $k \in \mathbb{Z}$, где $\mathfrak{Diff}_q$ действует как q-разностные операторы. Это представление называется векторным представлением; параметр u равен $q^{-\alpha}$. Фоковское представление $\mathcal{F}_u$ изоморфно $\Lambda^{\infty/2+0}(V_u) \subset \Lambda^{\infty/2}(V_u)$. После твиста мы получим полубесконечную конструкцию $\mathcal{F}^{\sigma}_u \subset (\Lambda^{\infty/2} V_u)^{\sigma} = \Lambda^{\infty/2}(V^{\sigma}_u)$. Заметим, что гипотетически полубесконечная конструкция $\mathcal{F}^{\sigma}_u$ может быть обобщена на случай $q \neq t$ (см. [78]).

Скрученные W алгебры. Обозначим за $\mathfrak{Diff}^{\geqslant 0}_q$ подалгебру $\mathfrak{Diff}_q$, порожденную c и $E_{a,b}$, для $a \geqslant 0$. Имеется другой набор образущих $E^k[j]$ пополнения алгебры $U(\mathfrak{Diff}^{\geqslant 0}_q)$, определямых по формуле $\sum_{j\in\mathbb{Z}} E^k[j]z^{-j} = (E(z))^k$. Токи $H(z)$ и $E^k(z)$ для $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ удовлетворяют соотношению q-деформированной W-алгебры $\mathfrak{gl}_\infty$ (см. [100]). Мы обозначим эту алгебру $\mathcal{W}_q(\mathfrak{gl}_\infty)$.

Имеется идеал $J^{\geqslant 0}_{\mu,d}$ в $U(\mathfrak{Diff}^{\geqslant 0}_q) = \mathcal{W}_q(\mathfrak{gl}_\infty)$ который действует нулем на тензорном произведении $\mathcal{F}_{u_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{u_d}$, здесь $\mu = \frac{1}{1-q}(u_1 \cdots u_d)^{1/n}$. Этот идеал прожден соотношениями $c = d$ и

$$E^d(z) = \mu^d d! \exp\left(\varphi_-(z)\right) \exp\left(\varphi_+(z)\right),$$

где

$$\varphi_-(z) = \sum_{j>0} \frac{q^{-j/2} - q^{j/2}}{j} E_{0,-j} z^j, \quad \varphi_+(z) = -\sum_{j>0} \frac{q^{j/2} - q^{-j/2}}{j} E_{0,j} z^{-j}.$$

Фактор-пространство $\mathcal{W}_q(\mathfrak{gl}_\infty)/J^{\geqslant 0}_{\mu,d}$ является q-деформированной W-алгеброй $\mathfrak{gl}_d$. Мы будем обозначать эту алгебру $\mathcal{W}_q(\mathfrak{gl}_d)$, она не зависит от μ (с точностью до изоморфизма) и действует на тензорном произведении $\mathcal{F}_{u_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{u_d}$ ([81], [100]).

Мы будем изучать тензорное произведение фоковских модулей $\mathcal{F}^\sigma_{u_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}^\sigma_{u_d}$. Мы покажем, что идеал $J^{\geqslant 0}_{\mu,nd,n'd}$, порожденный соотношениями $c = nd$ и

$$E^{nd}(z) = z^{n'd} \mu^{nd} (nd)! \exp\left(\varphi_-(z)\right) \exp\left(\varphi_+(z)\right)$$

действует нулем для

$$\mu = (-1)^{1/n} \frac{q^{-1/2n}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} (u_1 \cdots u_d)^{1/nd}.$$

Обозначим фактор $\mathcal{W}_q(\mathfrak{gl}_\infty)/J^{\geqslant 0}_{\mu,nd,n'd}$ за $\mathcal{W}_q(\mathfrak{gl}_{nd}, n'd)$ и будем его называть твистованной q-деформированной W-алгеброй $\mathfrak{gl}_{nd}$.

У всего сказанного выше имеется параллельное описание через q-деформированную W-алгебру для $\mathfrak{sl}_n$, введенную в работе [80]. Определим $T_k[j]$ по формуле

$$T_k(z) = \sum T_k[j] z^{-j} = \frac{\mu^{-k}}{k!} \exp\left(-\frac{k}{c}\varphi_-(z)\right) E^k(z) \exp\left(-\frac{k}{c}\varphi_+(z)\right).$$

Образующие $T_k[j]$ – элементы пополнения $U(\mathfrak{Diff}^{\geqslant 0}_q)$. Эти образующие коммутируют с H_i и удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{l=0}^{\infty} f_{k,n}[l] \Big(T_1[r-l] T_k[s+l] - T_k[s-l] T_1[r+l] \Big) = -(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})^2 (kr - s) T_{k+1}[r+s].$$

Алгебра порожденная $T_k[j]$ обозначается $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$. Имеется идеал в алгебре $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$, который действует нулем на $\mathcal{F}_{u_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{u_d}$. Этот идеал содержит соотношения $c = d$, $T_d(z) = 1$, и $T_{d+k}(z) = 0$ для $k > 0$. Фактор является стандартной W-алгеброй $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_d)$ [80]. Выполнено следующее соотношение: $\mathcal{W}_q(\mathfrak{gl}_d) = \mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_d) \otimes U(\mathfrak{Heis})$, где $\mathfrak{Heis}$ – алгебра Гейзенберга, порожденная $E_{0,j}$.

В случае тензорного произведения твистованных фоковских модулей

$$\mathcal{F}^\sigma_{u_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}^\sigma_{u_d}$$

ситуация похожа. Соответствующий идеал содержит соотношения $T_{nd}(z) = z^{n'd}$, $T_{nd+k}(z) = 0$ для $k > 0$. Фактор имеет описание в терминах образующих $T_1(z), \dots, T_{nd}(z)$ и соотношений. Мы обозначим это алгебру $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_{nd}, n'd)$. Квадратичные соотношения алгебры $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_{nd}, n'd)$ такие же, как и в нетвистованном случае

$$\sum_{l=0}^{\infty} f_{k,n}[l]\Big(T_1[r{-}l]T_k[s{+}l] - T_k[s{-}l]T_1[r{+}l]\Big) = -(q^{\frac{1}{2}}{-}q^{-\frac{1}{2}})^2(kr-s)T_{k+1}[r{+}s]$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} f_{n-k,n}[l]\Big(T_{n-1}[r{-}l]T_k[s{+}l] - T_k[s{-}l]T_{n-1}[r{+}l]\Big) = -(q^{\frac{1}{2}}{-}q^{-\frac{1}{2}})^2\big((n{-}k)r-s\big)T_{k-1}[r{+}s]$$

с единственной разницей, что $T_{nd}(z) = z^{n'd}$.

Алгебра $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_{nd}, n'd)$ – градуированная $\deg T_k[j] = j + \frac{n'k}{n}$. Переобозначим генераторы $T_k^{tw}[r] = T_k[r - \frac{n'k}{n}]$ для $r \in \frac{n'k}{n} + \mathbb{Z}$. Реализация алгебры $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_{nd}, n'd)$ в терминах образующих $T_k^{tw}[r]$ и алгебры $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_{nd})$ в терминах $T_k[r]$ заданы одними и теми же формулами, вся разница в значениях, которые пробегает r. Эвристически, можно считать, что $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_{nd}, n'd)$ – это та же самая алгебра, что и $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_{nd})$, но с токами, имеющими нетривиальную монодромию вокруг нуля.

Чтобы объяснить эти результаты с большими подробностями, рассмотрим пример $\mathfrak{sl}_2$. В качестве разминки рассмотрим нетвистованный случай $n' = 0$. Алгебра $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_2)$ является q-деформированной алгеброй Вирасоро [102]. Имеется один ток $T(z) = T_1(z)$ и соотношение

$$\sum_{l=0}^{\infty} f[l]\Big(T[r{-}l]\,T[s{+}l] - T[s{-}l]\,T[r{+}l]\Big) = -2r(q^{\frac{1}{2}}{-}q^{-\frac{1}{2}})^2\delta_{r+s,0}, \tag{1.3.5}$$

где $f[l]$ – коэффициенты ряда

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f[l]x^l = \frac{\sqrt{(1-qx)(1-q^{-1}x)}}{1-x}.$$

У этой алгебры имеется стандартная бозонизация [102]

$$T(z) = -(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})z\left[u :\exp\big(\eta(q^{1/2}z) - \eta(q^{-1/2}z)\big): + u^{-1} :\exp\big(\eta(q^{-1/2}z) - \eta(q^{1/2}z)\big):\right], \tag{1.3.6}$$

где $\eta(z) = \sum_{k\neq 0}\eta[k]z^{-k}/k$ и $\eta[k]$ – это образующие алгебры Гейзенберга $[\eta[k_1], \eta[k_2]] = \frac{1}{2}k_1\delta_{k_1+k_2,0}$; можно также добавить $\eta[0]$, который соотносится с параметром u. В терминах тороидальной алгебры $\mathfrak{Diff}_q$ этив формулы соответствуют тензорному произведению двух фоковских модулей $\mathcal{F}_{u_1} \otimes \mathcal{F}_{u_2}$, здесь $u^2 = u_1/u_2$.

Теперь рассмотрим твистованный случай $n' = 1$. Алгебра $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_2,1)$ порождена одним током $T^{tw}(z) = T_1^{tw}(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2} T_1^{tw}[r]z^{-r}$. Образующие $T^{tw}[r] = T_1^{tw}[r]$ удовлетворяют соотношению (1.3.5). Алгебра $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_2,1)$ называется твистованной q-деформированной алгеброй Вирасоро.

Как было объяснено выше, представления $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_2,1)$ получаются из твистованного фоковского модуля $\mathcal{F}_u^{(1,2)}$. Бозонизация твистованного фоковского модуля даёт бозонизацию алгебры $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_2,1)$. Используя формулу (1.3.2) мы получаем бозонизацию

$$T^{tw}(z) = (q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}) \left[z^{1/2} :\exp\left(\eta(q^{1/2}z) + \eta(q^{-1/2}z)\right): + z^{3/2} :\exp\left(-\eta(q^{1/2}z) - \eta(q^{-1/2}z)\right):\right].$$

Используя формулу (1.3.3), мы получим странную бозонизацию

$$T^{tw}(z) = (-1)^{\frac{1}{2}} \frac{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{2(q^{\frac{1}{4}} - q^{-\frac{1}{4}})} z^{\frac{1}{2}} \left[:\exp\left(\sum\nolimits_{2\nmid r} \frac{q^{-\frac{r}{4}} - q^{\frac{r}{4}}}{r} J_r z^{-\frac{r}{2}}\right) - :\exp\left(\sum\nolimits_{2\nmid r} \frac{q^{\frac{r}{4}} - q^{-\frac{r}{4}}}{r} J_r z^{-\frac{r}{2}}\right):\right].$$

Здесь $\eta(z) = \sum_{k\neq 0} \eta[k]z^{-k}/k + Q + \eta[0]\log z$, и J_r – моды нечетной алгебры Гейзенберга, $[J_r, J_s] = r\delta_{r+s,0}$. Эти формулы для бозонизации – новые.

Можно рассмотреть вложение $\mathfrak{Diff}^{\Lambda}_{q^{1/n}} \subset \mathfrak{Diff}_{q^{1/n}}$ для того, чтобы построить бозонизацию W-алгебры. А именно, можно взять бозонизацию $\mathfrak{Diff}_{q^{1/n}}$, а затем выразить действие W-алгебры, соответствующей $\mathfrak{Diff}_q = \mathfrak{Diff}^{\Lambda}_{q^{1/n}}$ в терминах этих бозонов.

Для примера рассмотрим Λ, порожденную $v_1 = e_1$, $v_2 = 2e_2$ и фоковское представление $\mathcal{F}_{u^{1/2}}$ алгебры $\mathfrak{Diff}_{q^{1/2}}$. Можно показать (например, используя разложение (1.3.4)), что действие алгебры $\mathcal{W}_q(\mathfrak{gl}_\infty)$, соответствующей $\mathfrak{Diff}_q \cong \mathfrak{Diff}^{\Lambda}_{q^{1/2}}$ на $\mathcal{F}_{u^{1/2}}$, пропускается через фактор $\mathcal{W}_q(\mathfrak{gl}_2)$. Поэтому мы получаем нечетную бозонизацию нетвистованной q-деформированной алгебры Вирасоро $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_2)$

$$T(z) = \frac{q^{\frac{1}{4}} + q^{-\frac{1}{4}}}{2} \left[:\exp\left(\sum_{2\nmid r} \frac{q^{-\frac{r}{4}} - q^{\frac{r}{4}}}{r} J_r z^{-\frac{r}{2}}\right): + :\exp\left(\sum_{2\nmid r} \frac{q^{\frac{r}{4}} - q^{-\frac{r}{4}}}{r} J_r z^{-\frac{r}{2}}\right):\right], \quad (1.3.7)$$

где J_r – нечетная часть изначального бозона из $\mathcal{F}_u$. Четная часть бозона исчезла в этой формуле, так как она лежит в $\mathfrak{Heis} \subset \mathfrak{Diff}^{\Lambda}_{q^{1/2}}$.

Из разложения (1.3.4) следует, что формула (1.3.7) дает бозонизацию специального представления $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_2)$, изоморфного прямой сумме фоковских модулей (смотри (1.3.6)) со специальными параметрами $u = q^{l-1/4}$ для $l \in \mathbb{Z}$.

В конформном пределе $q \to 1$ формула (1.3.7) дает нечетную бозонизацию алгебры Вирасоро $L_k = \frac{1}{4}\sum_{\frac{1}{2}(r+s)=k} :J_rJ_s: + \frac{1}{16}\delta_{k,0}$, см. [106].

Вектор Уиттекера и соотношения на конформные блоки. В качестве применения мы докажем следующее соотношение:

$$z^{\frac{1}{2}\sum\frac{i^2}{n^2}}\prod_{i\neq j}\frac{1}{(q^{1+\frac{i-j}{n}};q,q)_\infty}\left(q^{\frac{1}{n}}z^{\frac{1}{n}};q^{\frac{1}{n}},q^{\frac{1}{n}}\right)_\infty=\sum_{(l_0,\ldots,l_{n-1})\in\mathbf{Q}}\mathcal{Z}\left(q^{l_0},q^{\frac{1}{n}+l_1},\ldots,q^{\frac{n-1}{n}+l_{n-1}};z\right)\tag{1.3.8}$$

Здесь решетка $\mathbf{Q}$ та же, что и выше; $(u;q,q)_\infty=\prod_{i,j=0}^{\infty}(1-q^{i+j}u)$. Функция $\mathcal{Z}(u_1,\ldots,u_n;z)$ – уиттекеровский предел конформного блока. По АГТ соответствию, $\mathcal{Z}$ – статсумма Некрасова. Мы напомним определение $\mathcal{Z}(u_1,\ldots,u_n;z)$ ниже.

Соотношение (1.3.8) было выдвинуто в качестве гипотезы в работе [72], при изучении соответствия q-изомонодромия/CFT. Правая часть формулы (1.3.8) – специализация общей формулы, выдвинутой в качестве гипотезы [72, (3.6)] для тау-функции деавтономированного дискретного потока Тоды. Левая часть формулы (1.3.8) – это тау-фукнция, соответствующая алгебраическому решению, см. [72, (3.11)].

Напомним определение $\mathcal{Z}(u_1,\ldots,u_n;z)$. Вектор Уиттекера $W(z|u_1,\ldots,u_N)$ – это вектор в пополненном тензорном произведении $\mathcal{F}_{u_1}\otimes\ldots\otimes\mathcal{F}_{u_n}$, являющийся собственным вектором для операторов $E_{a,b}$ с $Nb\geqslant a\geqslant 0$ с собственными значениями

$$E_{0,k}\,W(z|u_1,\ldots,u_N)=\frac{z^k}{q^{k/2}-q^{-k/2}}W(z|u_1,\ldots,u_N)$$

$$E_{Nk,k}\,W(z|u_1,\ldots,u_N)=\frac{\left((-q^{-\frac{1}{2}})^N u_1\cdots u_N z\right)^k}{q^{-k/2}-q^{k/2}}W(z|u_1,\ldots,u_N)$$

при $k>0$;

$$E_{k_1,k_2}W(z|u_1,\ldots,u_N)=0$$

при $Nk_2>k_1>0$. Также наложим условие $W(z|u_1,\ldots,u_N)=|0\rangle\otimes\cdots\otimes|0\rangle+\cdots$ для фиксации нормировки.

Этот вектор существует и единственный для общих параметров $u_1,\ldots,u_n$. Мы докажем этот результат, существенно используя результаты работ [100],[101]. Функция $\mathcal{Z}$ пропорциональна шаповаловскому произведению двух векторов Уиттекера

$$\mathcal{Z}(u_1,\ldots,u_n;z)=z^{\frac{\sum(\log u_i)^2}{2(\log q)^2}}\prod_{i\neq j}\frac{1}{(qu_iu_j^{-1};q,q)_\infty}\left\langle W_u(1|qu_n^{-1},\ldots,qu_1^{-1}),W(z|u_1,\ldots,u_n)\right\rangle.$$

Мы докажем (1.3.8), используя разложение (1.3.4). Рассмотрим вектор Уиттекера $W(z|1)$ для алгебры $\mathfrak{Diff}_{q^{1/n}}$. Его шаповалоское спаривание даст левую часть (1.3.8). С другой стороны, мы покажем, что его проекции на слагаемые $\mathcal{F}_{q^{l_0}}\otimes\cdots\otimes\mathcal{F}_{q^{\frac{n-1}{n}+l_{n-1}}}$ являются уиттекеровскими векторами для алгебры $\mathfrak{Diff}_q$. Таким образом, то же шаповалоское произведение равно правой части формулы (1.3.8).

В конформном пределе $q\to 1$ соотношение, аналогичное (1.3.8), было доказано для $n=2$ в работе [74] похожими методами.

1.3.2 Явные формулы для твистованных представлений

Здесь мы дадим три явных построения модуля $\mathcal{F}_u^\sigma$ для

$$\sigma = \begin{pmatrix} m' & m \\ n' & n \end{pmatrix}.$$

Конструкции называются фермионной, бозонной и странной бозонной.

1.3.2.1 Фермионная конструкция

Рассмотрим алгебру, порожденную $\psi_{(a)}[i]$ и $\psi_b[j]$ для $i,j \in \mathbb{Z}$; $a,b = 0, \ldots, n-1$ с соотношениями

$$\left\{\psi_{(a)}[i], \psi_{(b)}[j]\right\} = 0; \quad \left\{\psi^*_{(a)}[i], \psi_b[j]\right\} = 0;$$

$$\left\{\psi_{(a)}[i], \psi_b[j]\right\} = \delta_{a,b}\ \delta_{i+j,0}.$$

Рассмотрим токи

$$\psi_{(a)}(z) = \sum_i \psi_{(a)}[i] z^{-i-1}; \quad \psi^*_b(z) = \sum_i \psi^*_b[i] z^{-i}.$$

Рассмотрим модуль $F^{n\psi}$ с циклическим вектором $|l_0, \ldots, l_{n-1}\rangle$ и соотношениями

$$\psi_{(a)}[i]\ |l_0, \ldots, l_{n-1}\rangle = 0 \quad \text{for } i \geqslant l_a,$$

$$\psi^*_{(a)}[j]\ |l_0, \ldots, l_{n-1}\rangle = 0 \quad \text{for } j > -l_a.$$

Модуль $F^{n\psi}$ не зависит от $l_0, \ldots, l_{n-1}$. Изоморфизм получается из формул

$$\psi^*_{(a)}[-l_a]\ |l_0, \ldots, l_a, \ldots, l_{n-1}\rangle = |l_0, \ldots, l_a + 1, \ldots, l_{n-1}\rangle\,,$$

$$\psi_{(a)}[l_a - 1]\ |l_0, \ldots, l_a, \ldots, l_{n-1}\rangle = |l_0, \ldots, l_a - 1, \ldots, l_{n-1}\rangle\,.$$

Теорема. Формулы, приведенные ниже, задают действие $\mathfrak{Diff}_q$ на $F^{n\psi}$:

$$c' = n', \quad c = n,$$

$$H^{tw}_k = \sum_a \sum_{i+j=k} \psi_a[i]\ \psi^*_a[j],$$

$$E^{tw}(z) = \sum_{b-a \equiv -n' \bmod n} u^{\frac{1}{n}} q^{-1/2} z \psi_{(a)}(q^{-1/2}z) \psi^*_b(q^{1/2}z) z^{\frac{n'-a+b}{n}} q^{(a+b)/2n},$$

$$F^{tw}(z) = \sum_{b-a \equiv n' \bmod n} u^{-\frac{1}{n}} q^{1/2} z \psi_{(a)}(q^{1/2}z) \psi^*_b(q^{-1/2}z) z^{\frac{-n'-a+b}{n}} q^{-(a+b)/2n}.$$

Полученный модуль изоморфен $\mathcal{M}_u^\sigma$.

Так как $\mathcal{F}_u^\sigma \subset \mathcal{M}_u^\sigma$, мы построили фермионную реализацию $\mathcal{F}_u^\sigma$.

1.3.2.2 Бозонная конструкция

Рассмотрим алгебру, порожденную $a_b[i]$ для $b = 0, \ldots, n-1$ и $i \in \mathbb{Z}$ соотношением $[a_{b_1}[i], a_{b_2}[j]] = i\delta_{b_1,b_2}\delta_{i+j,0}$. Нам нужно расширить алгебру, добавив операторы e^{Q_b}, подчиняющиеся соотношению $a_b[0]e^{Q_b} = e^{Q_b}(a_b[0]+1)$. Обозначим

$$\phi_b(z) = \sum_{j\neq 0} \frac{1}{j} a_b[j] z^{-j} + Q_b + a_b[0] \log z$$

Пусть $\mathbf{Q}$ – решетка с базисом $Q_0 - Q_1, \ldots, Q_{n-2} - Q_{n-1}$. Рассмотрим групповую алгебру $\mathbb{C}[\mathbf{Q}_{(n)}]$. Эта алгебра имеет базис e^λ для $\lambda = \sum_i \lambda_i Q_i \in \mathbf{Q}_{(n)}$. Определим действие $a_b[0]$ на $\mathbb{C}[\mathbf{Q}_{(n)}]$ по формуле

$$a_b[0]\, e^{\sum \lambda_i Q_i} = \lambda_b\, e^{\sum \lambda_i Q_i}.$$

Пусть F^{na} – фоковское представление алгебры, порожденной $a_b[i]$ при $i \neq 0$; то есть имеется циклический вектор $|0\rangle \in F^{na}$ такой, что $a_b[i]\,|0\rangle = 0$ при $i > 0$.

Наконец, $F^{na} \otimes \mathbb{C}[\mathbf{Q}_{(n)}]$ – представление всей алгебры Гейзенберга со следующим действием: $a_b[i]$ при $i \neq 0$ действует на первый сомножитель, $a_b[0]$ действует на второй сомножитель. Также $\mathbb{C}[\mathbf{Q}_{(n)}]$ действует на $F^{na} \otimes \mathbb{C}[\mathbf{Q}_{(n)}]$.

Теорема. Имеется действие $\mathfrak{Diff}_q$ на $F^{na} \otimes \mathbb{C}[\mathbf{Q}_{(n)}]$, заданное формулами

$$H^{tw}[k] = \sum_b a_b[k], \qquad c' = n', \quad c = n,$$

$$E^{tw}(z) = \sum_{b-a \equiv -n' \bmod n} u^{\frac{1}{n}} q^{\frac{a+b-n}{2n}} z^{\frac{n'-a+b}{n}+1} :\exp\left(\phi_b(q^{1/2}z) - \phi_a(q^{-1/2}z)\right): \epsilon_{a,b},$$

$$F^{tw}(z) = \sum_{b-a \equiv n' \bmod n} u^{-\frac{1}{n}} q^{\frac{-a-b+n}{2n}} z^{\frac{-n'-a+b}{n}+1} :\exp\left(\phi_b(q^{-1/2}z) - \phi_a(q^{1/2}z)\right): \epsilon_{a,b},$$

здесь $\epsilon_{a,b} = \prod_r (-1)^{a_r[0]}$ (мы берем произведение по таким r, что $a-1 \geqslant r \geqslant b$ при $a > b$ или $b-1 \geqslant r \geqslant a$ при $b > a$).

Полученное представление изоморфно $\mathcal{F}_u^\sigma$.

1.3.3 Странная бозонизация

Пусть ζ – n-ый примитивный корень из единицы; например, $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

Теорема. Имеется действие $\mathfrak{Diff}_q$ на F^a_α, определенное формулами

$$H^{tw}_k = a_{nk}, \quad c = n, \quad c' = n',$$

$$E^{tw}(z) = z^{n'/n}\frac{u^{\frac{1}{n}}}{n(1-q^{1/n})}\sum_{l=0}^{n-1}\zeta^{ln'} :\exp\left(\sum_k \frac{q^{-k/2n}-q^{k/2n}}{k}a_k\zeta^{-kl}z^{-k/n}\right):,$$

$$F^{tw}(z) = z^{-n'/n}\frac{u^{-\frac{1}{n}}}{n(1-q^{-1/n})}\sum_{l=0}^{n-1}\zeta^{-ln'} :\exp\left(\sum_k \frac{q^{k/2n}-q^{-k/2n}}{k}a_k\zeta^{-kl}z^{-k/n}\right):.$$

Полученное представление изоморфно $\mathcal{F}^\sigma_u$.

1.4 $\mathcal{N}=2^*$ калибровочная теория, свободные фермионы на торе и Пенлеве 6

1.4.1 Введение

Четырехмерные суперсимметричные калибровочные теории с восемью суперзарядами могут быть изучены с помощью различных дополнительных подходов, основывающихся на алгебраических свойствах их BPS-состояний. Центральную роль в здесь играют двумерные классические [107] и квантовые [108] интегрируемые системы и двумерные конформные теории поля [109, 110]. В этом контексте было замечено, что ренормгрупповые потоки суперсимметричных теорий в самодуальном Ω -бэкграунде можно изучать как изомонодромные деформации связностей Хитчина [111]. В частном случае $SU(2)$ калибровочных теорий эта задача сводится к изучению уравнений Пенлеве. Более точно, изомонодромные проблемы, связанные с уравнениями Пенлеве, в пределе оперов идентифицированы с системами Хитчина, соответствующие тау-функции вычислены для полного набора изомонодромных задач, связанных со схемой вырождения Пенлеве, и сравнены со статсуммами топологических струн на соответствующих геометриях локальных кривых Зайберга-Виттена. Эти вычисления включают не только топологические струны на большом радиусе, но и в других фазах, например, в конифолдной точке [111]. Это направление исследований было вызвано предыдущей работой, посвященной решению некоторых уравнений Пенлеве в терминах комбинаторики инстантонов и двумерных конформных блоков алгебры Вирасоро, начинающейся с [112]. Дальнейшее развитие в этом направлении представлено в [113, 114, 115, 116, 117, 118, 119]. Это соответствие было затем расширено на случай q-разностных уравнений Пенлеве, q-деформированную алгебру Вирасоро [120, 121, 122, 123, 124, 125] и пятимерные $\mathcal{N}=1$ калибровочные теории и непертурбативные топологические струны [126, 127, 128, 129, 130].

Изомонодромные задачи, изучаемые до сих пор, касаются только колчанный калибровочных теорий с линейным колчаном, которые соответствуют конформной теории поля на двумерной сфере. Целью данной работы является показать, как соответствие между уравнениями Пенлеве, конформной теорией поля и калибровочными теориями можно распространить на циклические колчаны: это равносильно определению конформной теории поля на торе и включению гипермультиплетов в присоединенном представлении в калибровочной теории. Мы хотели бы проиллюстрировать это, рассматривая явно простейший случай тора с одним проколом и группой SL_2, который соответствует массивной деформации $\mathcal{N}=4$ супер Янг-Миллса, известной как $\mathcal{N}=2^*$.

Основным результатом нашей работы является то, что дана явная реализация тау-функции изомонодромных деформаций SL_2-плоских связностей с простым полюсом в терминах дуальных статсумм Некрасова-Окунькова Z^D для $SU(2)$ $\mathcal{N}=2^*$ теории [131]:

$$\mathcal{T}_{gauge}(\tau)=\frac{Z^D(\eta,a,m,\tau)}{Z_{twist}(\tau)^2}.$$

Мы также получаем два альтернативных выражения для тау-функции в виде ряда Фурье по конформным блокам алгебры Вирасоро с целым или полуцелыми сдвигами:

$$\begin{aligned}\eta(\tau)^{-1}\theta_2(2Q|2\tau)\mathcal{T}_{gauge}(\tau)&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{i(n+\frac{1}{2})\eta}\,\mathrm{tr}_{\mathcal{V}_{a+n+\frac{1}{2}}}(q^{L_0}V_m(0))=Z^D_{1/2}(\eta,a,m,\tau)\\ \eta(\tau)^{-1}\theta_3(2Q|2\tau)\mathcal{T}_{gauge}(\tau)&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{in\eta}\,\mathrm{tr}_{\mathcal{V}_{a+n}}(q^{L_0}V_m(0))=Z^D_0(\eta,a,m,\tau).\end{aligned}\tag{1.4.1}$$

Здесь Q является решением изомонодромной системы на торе, $\mathcal{V}_{a+n/2}$ это модуль Верма алгебры Вирасоро с размерностью $(a+n/2)^2$, $V_m(0)$ – это примарное поле алгебры Вирасоро, вставленное на торе в начале координат в цилиндрических координатах, а $q=e^{2\pi i\tau}$.

Наконец, прокомментируем связь этих результатов с теорией Зайберга-Виттена и интегрируемыми системами: связность Хитчина, которую мы используем, является деавтономизацией матрицы Лакса эллиптической системы Калоджеро-Мозера. В целом мы рассматриваем зависимость от маргинальных деформаций теорий класса $\mathcal{S}$, деформируя матрицу Лакса, которая описывает ее кулоновскую ветку, подобно тому, что было сделано в теории Зайберга-Виттена с помощью деформаций Уизема [132, 133, 134, 135, 136]. Гамильтонианы интегрируемой системы становятся зависящими от времен, при этом времена являются такими маргинальными деформациями.

1.4.2 Линейные системы на торе

Для обобщения матрицы Лакса на случай тора мы должны принять во внимание теорему Римана-Роха. Из-за нее нет никакой функции с единственным простым полюсом на торе, и в общем случае матрица Лакса $L(z)$, от которой требуются простые полюса в заданных точках, будет нетривиально преобразовываться вдоль A и B циклов:

$$L(z+1) = T_A L(z) T_A^{-1}, \qquad L(z+\tau) = T_B L(z) T_B^{-1}, \tag{1.4.2}$$

где твисты T_A,T_B удовлетворяют условию

$$T_A T_B^{-1} T_A^{-1} T_B = \zeta,$$

где

$$\zeta = e^{2\pi i c_1/N},$$

и $c_1 = 0,\ldots,N-1$ это первый класс Черна расслоения с со структурной группой $SL(N)$. c_1 классифицирует неэквивалентные плоские расслоения на торе [137]. Вообще L преобразуется как связность, потому в функциях переклейки T_A,T_B может быть неоднородный член. Тем не менее, эти матрицы могут быть выбраны так, что они не будут зависеть от z с точностью до скалярного множителя [137].

Можно перейти от одного расслоения к другому с помощью сингулярных калибровочных преобразований, известных как преобразования Гекке [138], так что без ограничения общности можно иметь дело со случаем $c_1 = 0$, что соответствует матрице Лакса N-частичной эллиптической системы Калоджеро-Мозера. Известно, что она описывает изомонодромные деформации на торе с одним проколом, где изомонодромное время это модуль тора τ [139, 140]. Также это матрица Лакса интегрируемой системы, описывающей теорию Зайберга-Виттена с группой $SU(N)$ и с одним гипермультиплетом в присоединенном представлении, или $\mathcal{N} = 2^*$ теорию [141, 142, 143].

$SL(2,\mathbb{C})$-линейная система с одной простым полюсом при $z = 0$ на торе имеет вид

$$\begin{cases} \partial_z Y(z|\tau) = L(z|\tau) Y(z|\tau), \\ Y(z_0|\tau) = \mathbb{I}_2, \end{cases} \qquad L(z|\tau) = \begin{pmatrix} p & mx(2Q,z) \\ mx(-2Q,z) & -p \end{pmatrix}, \tag{1.4.3}$$

$$T_A = \mathbb{I}_2 \qquad T_B = e^{2\pi i \boldsymbol{Q}}, \qquad \zeta = 1$$

где

$$x(u,z) = \frac{\theta_1(z-u|\tau)\theta_1'(\tau)}{\theta_1(z|\tau)\theta_1(u|\tau)},$$

также мы использовали обозначение

$$e^{2\pi i \boldsymbol{Q}} = e^{2\pi i Q \sigma^z}.$$

Здесь и далее мы будем использовать стандартные матрицы Паули $\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Жирные буквы всегда означают либо векторы, либо диагональные матрицы.

Как следствие (1.4.2), решение Y будет иметь, помимо обычных монодромий, действующих справа, также твисты, действующее слева:

$$Y(\gamma_A \cdot z|\tau) = Y(z)M_A, \qquad Y(\gamma_B \cdot z|\tau) = e^{2\pi i \boldsymbol{Q}} Y(z) M_B, \qquad Y(\gamma_k \cdot z|\tau) = Y(z) M_k.$$

В отличие от монодромий, твисты не являются постоянными вдоль изомонодромных потоков. В этом случае с одним проколом мы можем легко использовать тождество на функцию Ламе $x(u,z)$ и определяющее уравнение для вычисления изомонодромного гамильтониана

$$H_\tau = \frac{1}{2}\oint_A \operatorname{tr} L^2(z) dz = \int_{0+ih}^{1+ih} dz \left[p^2 - m^2\left(\wp(2Q|\tau) - \wp(z|\tau)\right)\right]$$
$$= p^2 - m^2 \wp(2Q|\tau) - 2m^2 \eta_1(\tau),$$

связанного со временем $2\pi i \tau$. Последний член происходит из

$$\int_{0+ih}^{1+ih} dz \wp(z|\tau) = -\int_{0+ih}^{1+ih} dz \zeta'(z|\tau) = \zeta(0) - \zeta(1) = -2\eta_1(\tau),$$

и поскольку он является функцией только от τ, он не вносит вклада в уравнения изомонодромных деформаций, которые являются гамильтоновыми уравнениями для этого гамильтониана, и принимают вид специального уравнения Пенлеве 6 для Q [139, 140]:

$$(2\pi i)^2 \frac{d^2 Q}{d\tau^2} = m^2 \wp'(2Q). \tag{1.4.4}$$

Это уравнение представляет собой уравнение изомонодромной деформации, потому что оно эквивалентно уравнение пары Лакса

$$2\pi i \partial_\tau L + \partial_z M + [M,L] = 0,$$

про которое можно показать, используя свойства функции Ламе, что оно является условием совместности системы

$$\begin{cases} \partial_z Y = LY, \\ 2\pi i \partial_\tau Y = -MY, \end{cases}$$

где M – это вторая матрица из пары Лакса для L:

$$M = m \begin{pmatrix} \wp(2Q) & \partial_Q x(2Q,z) \\ \partial_Q x(-2Q,z) & \wp(2Q) \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что твист является Пенлеве-трансцендентом, т.е., некоторой функцией от τ, которая вообще говоря не может быть выражена в терминах обычных специальных функций.

1.4.3 Монодромии торических конформных блоков

Теперь мы переходим к основному результату: выводу из конформной теории поля решения линейной системы (1.4.3) и тау-функции изомонодромной задачи. Для этого рассмотрим киральный блок

$$\Phi(z,z_0|\tau,a,m) = \langle V_m(0)\tilde{\phi}(z_0) \otimes \phi(z)\rangle = \frac{1}{Z(\tau)} \operatorname{tr}_{\mathcal{V}_a} \left(q^{L_0} V_m(0)\tilde{\phi}(z_0) \otimes \phi(z)\right)$$

в лиувиллевой конформной теории поля при $c = 1$, где $\phi_i,\tilde{\phi}_i$ являются вырожденными полями, V_m является примарным полем с лиувиллевским зарядом m, конформный вес $\Delta_m = m^2$, а $Z(\tau)$ является статсуммой конформной теории поля. Благодаря результатам, уже имеющимся на сфере, объект

$$\Phi^D(z,z_0) = \sum_n e^{in\eta} \Phi(z,z_0;\tau,m,a+n)$$

имеет заданные монодромии в классах

$$M_A \sim ie^{2\pi i\boldsymbol{a}}, \qquad\qquad M_1 \sim e^{2\pi i\boldsymbol{m}}.$$

Фактор i в M_A происходит из якобиана перехода от плоскости к цилиндру для поля размерности $\frac{1}{4}$.

В случае тора у нас не всегда будут только целые сдвиги внутренних весов при обносе z вокруг замкнутой петли: когда мы перемещаем вырожденное поле вокруг B-цикла тора, мы выполняем слияние с примарным полем V_m только один раз, так что из-за правил слияния $[\phi_{(1,2)}] \times [V_a] = [V_{a-1/2}] + [V_{a+1/2}]$ внутренние веса сдвигаются на полуцелые числа. Как следствие, преобразование Фурье Φ^D, включающее только целые сдвиги, не будет переходить в себя под действием монодромии по B-циклу. Давайте сделаем это наблюдение более точным путем вычисления того, как Φ преобразуются когда вырожденное поле идет по петле вокруг B-цикла.

Это преобразование может быть записано как

$$\Phi_{ss'}(\gamma_B \cdot z) = i \sum_{s''=\pm} \Phi_{ss''}(z) e^{-\frac{s''}{2}\overleftarrow{\partial_a}} e^{i\pi s''(a-s/2)} F_{s''s'}(a - s/2,m,a) e^{-i\pi s'a},$$

где мы обозначили через $e^{-\frac{s''}{2}\overleftarrow{\partial_a}}$ оператор сдвига, который действует налево, $a \to a - s''/2$ (операторы должны действовать с правой стороны, потому что таково действие монодромий). Теперь мы используем свойство

$$F_{s''s'}(\boldsymbol{a}-s/2,m,a)=ss''F_{s''s'}(a,m-1/2,a),$$

матрицы слияния, которое можно легко проверить, используя ее явное выражение, а также

$$e^{i\pi s''(a-s/2)}=-ss''ie^{i\pi s''a}$$

чтобы переписать написанное выше действие монодромии как матричное действие (операторнозначное, из-за сдвигов):

$$\Phi(\gamma_B\cdot z)=\Phi(z)e^{-\frac{1}{2}\overleftarrow{\partial_a}\sigma^z}e^{i\pi\boldsymbol{a}}F(a,m-1/2,a)e^{-i\pi\boldsymbol{a}}. \tag{1.4.5}$$

На первый взгляд, может показаться, что из-за полуцелых сдвигов в промежуточном канале в случае тора мы должны рассматривать преобразование Фурье

$$\sum_n e^{\frac{in\eta}{2}}\Phi(z,z_0;\tau,m,a+n/2),$$

так как оно диагонализует оператор сдвига $e^{-\frac{1}{2}\overleftarrow{\partial}_{\boldsymbol{a}}}$. Однако, делая так, мы портим действие монодромии по A-циклу, так как

$$\Phi(\gamma_A\cdot z,a+n)=i\Phi(z,a+n)e^{-2\pi i\boldsymbol{a}},$$

$$\Phi(\gamma_A\cdot z,a+n+1/2)=-i\Phi(z,a+n+1/2)e^{-2\pi i\boldsymbol{a}}.$$

Это может быть исправлено путем рассмотрения конформной теории поля с дополнительными $U(1)$ бозоном, как в [114], так что вместо вырожденных полей у нас имеются свободные фермионы:

$$\psi(z)\equiv e^{i\varphi(z)}\phi(z),\qquad\qquad \bar{\psi}(z)\equiv e^{-i\varphi(z)}\tilde{\phi}(z). \tag{1.4.6}$$

Наличие $U(1)$ бозонов сдвигает все показатели монодромии на собственное значение σ нулевой моды $\partial\varphi$: мы могли бы также положить $\sigma=0$, однако, как мы увидим, оказывается, что имеет смысл сохранить этот фактор. Эффектом добавления $U(1)$ бозона является то, что дополнительный знак вдоль A-цикла сокращается со знаком от вырожденных полей, так что конформный блок свободных фермионов

$$\begin{aligned}\Psi^D(z,z_0;\tau,m,a,\sigma,\eta,\rho)&\equiv\sum_{n,k}e^{\frac{in\eta}{2}}e^{4\pi i(\rho+1/2)(n/2+k+1/2)}\Psi(z,z_0;m,a+n/2,\sigma+1/2+n/2+k)\\&\equiv\langle V_m(0)\bar{\psi}(z_0)\otimes\psi(z)\rangle\end{aligned}$$

имеет числовые монодромии вдоль всех нестягиваемых циклов. В этом определении сдвиги вирасоровского старшего веса $a\to a+n/2$ и гейзенберговского заряда ($\sigma+$

$1/2 \to \sigma+1/2+n/2+k$) приводят к сдвигу фермионного заряда(ов) двухкомпонентных фермионов на $(n+k, k)$. Используя вышеуказанные соображения, вместе с выражением (1.4.5) для монодромии по B-циклу, и действие

$$\Psi^D(z,z_0;\tau,m,a,\sigma)e^{-\frac{1}{2}\overleftarrow{\partial_a}\sigma^z}e^{-\frac{1}{2}\overleftarrow{\partial_\sigma}} = \Psi^D(z,z_0;\tau,m,a,\sigma)e^{i\frac{\eta}{2}\sigma^z+2\pi i\rho},$$

мы видим, что монодромии по A- и B-циклам тора принимают вид

$$\hat{M}_A = e^{-2\pi i\boldsymbol{a}-2\pi i\sigma} \equiv e^{-2\pi i\sigma}M_A,$$

$$\hat{M}_B = e^{i\frac{\eta}{2}\sigma^z+2\pi i\rho}e^{i\pi\boldsymbol{a}}F(a,m-1/2,a)e^{-i\pi\boldsymbol{a}} \equiv e^{2\pi i\rho}M_B.$$

Выше M_A, M_B являются частями монодромий $\hat{M}_A,\hat{M}_B$, которые не зависят от дополнительных $U(1)$ зарядов σ,ρ и имеют единичный определитель. Они являются матрицами монодромии решения Y линейной системы (1.4.3). Отметим также, что $\det Y(z) = 1$, так что дополнительные $U(1)$ факторы $e^{2\pi i\rho}$ и $e^{-2\pi i\sigma}$ с точки зрения линейной системы введены искусственно. На самом деле, они являются произвольными, и мы можем положить их равными любому значению, но оказывается, что удобно оставить их произвольным на время вычислений.

Сделаем некоторые заключительные замечания относительно этого вычисления. Монодромия по A-циклу кодируется в разложении по модам комплексных фермионов:

$$\psi(z) = \sum_{p\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \psi_p e^{2\pi i(p-\boldsymbol{a}-(\sigma+1/2))z}$$

которое происходит от замены координат от плоскости к тору $w = e^{-2\pi iz}$. Мы видим, что сдвиги $1/2$ и σ нужно добавить для того, чтобы сократить антипериодичность естественного разложения по модам. Таким же способом в вычислении монодромии по B-циклу мы сдвигаем на $1/2$ параметр ρ для того, чтобы сократить фактор (-1), приходящий из переупорядочения фермионов. Эти два сдвига означают, что мы фермионизуем вырожденные поля в фермионы, периодические вдоль обоих циклов на торе (в том смысле, что никакие дополнительные знаки не участвует в вычислении монодромий). Сдвиг σ сводится к условию периодичности на цилиндре, в то время как сдвиг ρ реализуется в операторном формализме, используемом нами, как вставка $(-)^F$ под все следы.

Знаки сдвигов на n определяются выражением для L_0, скрученным двумя фермионными зарядами $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$:

$$L_0 = const + L_0^{(0)} + \mathbf{H}_1(\sigma + a) + \mathbf{H}_2(\sigma - a),$$

где

$$[L_0^{(0)},\psi_{i,p}] = -n\psi_{i,p}, \qquad [\mathbf{H}_i,\psi_{j,p}] = \delta_{ij}\psi_{j,p}.$$

1.4.4 Статсумма $\mathcal{N} = 2^*$ калибровочной теории как детерминант Фредгольма

Для того, чтобы построить решение задачи Римана-Гильберта на торе с одним проколом в терминах корреляторов конформной теории поля, необходимо перейти от вырожденных полей к свободным фермионам, см. (1.4.6). В [116] было показано, что в случае сферы с четырьмя проколами можно просуммировать выражение для тау-функции в один фредгольмов детерминант с помощью обобщенной теоремы Вика для свободных фермионов. Этот детерминант для обобщенной тау-функции на сфере с N проколами также построен в [144] математически строгим образом. Было показано, что он удовлетворяет определению Джимбо-Мивы для тау-функции и воспроизводит разложение соответствующей статсуммы Некрасова. Более позднее понимание таких детерминантных формул в случае сферы, вместе с упрощенным доказательством, можно найти в [145].

В [144] задача Римана-Гильберта решается путем разрезания сферы с n проколами на пары штанов, являющихся в то же время сферами с тремя проколами. Таким образом, задача Римана-Гильберта на сфере с n проколами сводится к задаче о правильной склейке решений задач Римана-Гильберта на сферах с тремя проколами, в $0,1,\infty$. Последние даются, будучи отнормированными на свои асимптотики в нуле, с помощью

$$Y_0(w) = (1-w)^{(m-\gamma)}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} {}_2F_1(m,m+2a,2a,w) & \frac{-mw}{2a-1}{}_2F_1(1+m,1+m-2a,2-2a,w) \\ \frac{m}{2a}{}_2F_1(1+m,m+2a,1+2a,w) & {}_2F_1(m,1+m-2a,1-2a,w) \end{pmatrix},$$

где ${}_2F_1$ являются гипергеометрическими функции, а γ – это $U(1)$-сдвиг, который мы прокомментируем позже. Следует отметить, что решение выше такое же, как решение на сфере с тремя проколами после замены координат от сферических к цилиндрическим $w = e^{2\pi i z}$. Решение выше хорошо определено как ряд по w, сходящихся при $|w| < 1$, поэтому мы определим ещё одно нормированное решение той же задачи, хорошо определённое как ряд по w^{-1}:

$$Y_\infty(w) = \sigma^x Y_0(1/w)\sigma^x.$$

Здесь нашей мотивацией являются работы [116] и [144]. Мы вычислим соответствующий детерминант Фредгольма с помощью разрезания на штаны тора с одним проколом. А именно, мы раскладываем след, вставив разложение тождественного оператора по свободно-фермионным состояниям, вычисляем матричные элементы V_m с помощью обобщенной теоремы Вика, и, наконец, приходим к выражению для детерминанта Фредгольма, данному ниже.

Тор с одним проколом может быть получен из сферы с тремя проколами путём склеивания двух дырок. Мы будем считать, что эти дырки соответствуют проколам в $0,\infty$ в сферических координатах, или $\pm i\infty$ в цилиндрических координатах. Таким образом мы должны показать, как эта склейка превращается в операцию на решении задачи Римана-Гильберта на сфере с тремя проколами.

Для того, чтобы склеить решения, определенные в нуле и бесконечности, определим следующие интегральные ядра:

$$\mathsf{a}(w,w') = D\frac{Y_0(qw)^{-1}Y_0(w') - \mathbb{I}}{qw - w'}, \qquad \mathsf{b}(w,w') = -D\frac{Y_0(qw)^{-1}Y_\infty(w')}{qw - w'},$$
$$\mathsf{c}(w,w') = D^{-1}\frac{Y_\infty(w/q)^{-1}Y_0(w')}{w/q - w'}, \qquad \mathsf{d}(w,w') = D^{-1}\frac{\mathbb{I} - Y_\infty(w/q)^{-1}Y_\infty(w')}{w/q - w'},$$

где диагональная матрица D дается формулой

$$D = -q^{(1+\sigma)}e^{2\pi i\rho}\mathrm{diag}(q^{-a}e^{-2\pi i\beta},q^{a}e^{2\pi i\beta}),$$

а $e^{2\pi i\beta}$ дается выражением

$$e^{2\pi i\beta} = e^{i\eta/2}\frac{\Gamma(1-2a)\Gamma(2a-m)}{\Gamma(2a)\Gamma(1-2a-m)}.$$

Теперь конкретизируем гильбертовы пространства, на которых действуют вышеуказанные операторы. На самом деле есть по крайней мере два равнозначных варианта. Первый – это рассматривать их как операторы, действующие на пространстве функций на окружности $S^1 = \{w, |w| = R\}$, где $|q| < R < 1$, со значениями в вектор-строчках:

$$\mathcal{H} = L^2(S^1)\otimes\mathbb{C}^2.$$

В этом представлении действие оператора A на функцию F определяется интегралом

$$(\mathsf{A}f)(w) = \oint\frac{dw'}{2\pi i}f(w')\mathsf{A}(w',w).$$

Вместо этого мы будем использовать другое описание этого гильбертова пространства, которое лучше приспособлено для вычислительных целей, и дает естественную связь со свободнофермионным описанием: мы будем использовать разложение ядер в ряд Фурье

$$\begin{aligned}
\mathsf{a}(w,w') &= \sum_{p,q\in\mathbb{Z}'_-}\frac{\mathsf{a}_{pq}}{w^{p+\frac12}w'^{q+\frac12}}, \qquad & \mathsf{b}(w,w') &= \sum_{p\in\mathbb{Z}'_-,q\in\mathbb{Z}'_+}\frac{\mathsf{b}_{pq}}{w^{p+\frac12}w'^{q+\frac12}}\\
\mathsf{c}(w,w') &= \sum_{p\in\mathbb{Z}'_+,q\in\mathbb{Z}'_-}\frac{\mathsf{c}_{pq}}{w^{p+\frac12}w'^{q+\frac12}}, \qquad & \mathsf{d}(w,w') &= \sum_{p,q\in\mathbb{Z}'_+}\frac{\mathsf{d}_{pq}}{w^{p+\frac12}w'^{q+\frac12}},
\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

где $\mathbb{Z}'_+ = \{\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\ldots\}$, $\mathbb{Z}'_- = \{-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{5}{2},\ldots\}$ положительные и отрицательные полуцелые числа, соответственно, $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z}'_- \sqcup \mathbb{Z}'_+$. С точки зрения Фурье-мод мы можем описать наше гильбертово пространство как $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}'} \otimes \mathbb{C}^2$, базисные вектора которого занумерованы парами (p,α) из полуцелого числа $p \in \mathbb{Z}'$ и одного матричного индекса $\alpha \in \{1,2\}$. Можно также определить два подпространства $\mathcal{H}$: $\mathcal{H}_+$, соответствующее $\mathbb{Z}'_+$ – подпространство неотрицательных Фурье-мод, и $\mathcal{H}_-$, соответствующее $\mathbb{Z}'_-$ – подпространство отрицательных Фурье-мод. Мы легко можем видеть из (1.4.7), что операторы $\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{d}$ нетривиально действуют только между следующими подпространствами:

$$\mathsf{a}:\mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-, \quad \mathsf{b}:\mathcal{H}_- \to \mathcal{H}_-, \quad \mathsf{c}:\mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_+, \quad \mathsf{d}:\mathcal{H}_- \to \mathcal{H}_+.$$

Используя приведенное выше определение, вместе с результатами [144], можно записать следующее выражение для двойственной статсуммы $Z^D(\tau)$:

$$Z^D(\tau) = N(a,m,a)q^{a^2+(\sigma+1/2)^2-1/12}e^{2\pi i(\rho+1/2)}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-2\gamma^2}\det\left(\mathbb{I}+K\right), \tag{1.4.8}$$

где оператор K может быть записан в виде блочной матрицы относительно разложения $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$:

$$K = \begin{pmatrix} \mathsf{c} & \mathsf{d} \\ \mathsf{a} & \mathsf{b} \end{pmatrix}.$$

В качестве альтернативы можно просуммировать все моды Фурье и определить интегральное ядро единственной матрицы как

$$K(w,w') = \mathsf{a}(w,w') + \mathsf{b}(w,w') + \mathsf{c}(w,w') + \mathsf{d}(w,w'),$$

действующее на $L^2(S^1) \otimes \mathbb{C}^2$.

Сделаем некоторые замечания по поводу (1.4.8). Фактор $N(a,m,a)$, учитывает нормировку вершинного оператора в конформной теории поля, или что то же самое, однопетлевой фактор в статсумме Некрасова, в то время как q^{a^2} это классический вклад в статсумму. Детерминант Фредгольма $\det(1+K)$ затем идентифицируется с инстантонной частью статсуммы Некрасова-Окунькова для $\mathcal{N}=2^*$ калибровочной теории, с точностью до свободнофермионной нормировки, зависящей от фоновых зарядов (γ,σ,ρ), которые произвольные и могут быть положены равными любому значению. Теперь посмотрим, как получить интересные результаты путем специализации этих $U(1)$-зарядов к специальным значениям.

Во-первых, обратим внимание, что правая часть (1.4.8) не зависит от γ, так как $U(1)$ фактор $\eta(q)^{-2\gamma^2}$ сокращает такой же вклад из детерминанта. Преимущество иметь этот дополнительный сдвиг γ, заключается в том, что можно рассмотреть два случая, $\gamma = 0$ и $\gamma = m$. Первый случай соответствует $\mathrm{Res}_{w=1} L(w)dw \sim \mathrm{diag}(m, -m)$, в то время как второй соответствует $\mathrm{Res}_{w=1} L(w)dw \sim \mathrm{diag}(2m,0)$. Вторая нормировка была использована в [131].

Если $\gamma = 0$, суммирование по главным минорам K дает вирасоровские конформные блоки, но в этом случае такие миноры имеют сложный вид. Если положить вместо этого $\gamma = m$, миноры K превращаются в факторизованные некрасовские выражения: технически $U(1)$ вклад перед определителем, вместе с $\eta(\tau)^{-1}$ из (1.4.11), сокращает $U(1)$-фактор, участвующий в АГТ-соответствии. Явные вычисления миноров см. в работе [144].

Рассмотрим теперь ρ,σ. Обратим внимание, что зависимость $Z^D(\eta,a,m,\rho,\sigma,\tau)$ от этих параметров, даваемая (1.4.11), довольно простая, так как единственная значимая комбинация – это $\sigma\tau + \rho$. Теперь положим $\sigma = 0$ и изучим зависимость от ρ. Из (1.4.10) можем видеть, что нули $Z^D(\eta,a,m,\rho,\tau)$ в ρ определяют решение $Q(\tau)$ уравнения Пенлеве 6 (1.4.4):

$$Z^D(\eta,a,m,\pm Q(\tau) + k + l\tau,\tau) = 0, \tag{1.4.9}$$

так что Q может быть найдено как ноль определителя Фредгольма (1.4.8).

Это связано с тем, что имеется формула для полной двойственной фермионной статсуммы Некрасова, связывающей ее с изомонодромной тау-функцией и некоторыми функциями от твистов:

$$Z^D(\tau) = e^{2\pi i\tau\sigma^2}\eta(\tau)^{-2}\theta_1(\sigma\tau + \rho + Q(\tau))\theta_1(\sigma\tau + \rho - Q(\tau))\mathcal{T}(\tau). \tag{1.4.10}$$

Имеется также другая формула, связывающая фермионную статсумму с вирасоровскими:

$$Z^D(\tau) = -Z^D_0(\tau)e^{2\pi i\tau\sigma^2}\eta(\tau)^{-1}\theta_2(2\sigma\tau + 2\rho|2\tau) + Z^D_{1/2}(\tau)e^{2\pi i\tau\sigma^2}\eta(\tau)^{-1}\theta_3(2\sigma\tau + 2\rho|2\tau). \tag{1.4.11}$$

Вместе они позволяют получить (1.4.1).

Формула (1.4.9) определенно является деавтономизацией формулы Кричевера [146], которая дает координаты N частиц $Q_i(t)$ в эллиптической системе Калоджеро-Мозера как нули тэта-функции: $\Theta(\vec{U}Q_i(t) + \vec{V}t + \vec{W}) = 0$.

Действительно, из (1.4.1) мы видим, что решение неавтономной системы можно находить из неявного уравнения

$$\frac{\theta_3(2Q|2\tau)}{\theta_2(2Q|2\tau)} = \frac{Z^D_0(\tau)}{Z^D_{1/2}(\tau)}.$$

Решение же автономного уравнения в этом случае получается из другого неявного уравнения [147]:
$$\frac{\theta_2(2Q(t)|2\tau_0)}{\theta_3(2Q(t)|2\tau_0)} = \frac{\theta_2(2\omega t + \phi_0)|2\tau_{SW})}{\theta_3(2\omega t + \phi_0)|2\tau_{SW})}.$$

И действительно, изучая явно изоспектральный/автономный предел, мы можем увидеть, что статсуммы Некрасова превращаются в тэта-функции, и мы действительно восстанавливаем известный ответ.

Для того, чтобы объяснить происхождение (1.4.9) в духе [144], мы замечаем следующее. Если подставить $\rho = Q(\tau)$, то первая строка $Y(w)$ имеет следующие свойства периодичности:

$$Y_{1i}(w+1) = Y_{1i}(w), \quad Y_{1i}(w+\tau) = e^{2\pi i Q} Y_{1i}(w) M_B = Y_{1i}(w)\hat{M}_B.$$

Таким образом, мы видим, что эти две функции $Y_{11}(w)$ и $Y_{12}(w)$ – это глобально определенные функции на торе с заданными монодромиями $\hat{M}_A$ и $\hat{M}_B$. Далее мы приводим другие тождества, которые могут быть получены путем приравнивания $U(1)$ зарядов определенным значениям.

Теперь мы выведем некоторые дополнительные тождества, которые могут быть получены из фредгольмового определителя (1.4.8). Заметим что $K|_{\rho\ \mapsto \rho+1/2} = -K$. Объединяя это наблюдение с (1.4.11) и со свойствами периодичности для тэта-функций, мы находим

$$Z^D_{1/2}(\tau)\eta(\tau)^{-1}\theta_3(2\rho|2\tau) = \frac{1}{2}N(a,m,a)q^{a^2-1/3}e^{2\pi i\rho}\left(\det(\mathbb{I}-K) - \det(\mathbb{I}+K)\right),$$
$$Z^D_{0}(\tau)\eta(\tau)^{-1}\theta_2(2\rho|2\tau) = \frac{1}{2}N(a,m,a)q^{a^2-1/3}e^{2\pi i\rho}\left(\det(\mathbb{I}-K) + \det(\mathbb{I}+K)\right),$$

где мы кладем $\gamma = 0$ для упрощения формул. Для произвольного γ все то же самое.

Другая возможность – это подставить $\rho = \frac{1}{4}$ и $\rho = \frac{1}{4} + \frac{\tau}{2}$ в (1.4.11) для того, чтобы сократить каждую из двух тэта-функций:

$$Z^D_{1/2}(\tau)\eta(\tau)^{-1}\theta_4(2\tau) = -iN(a,m,a)q^{a^2-1/3}\det\left(\mathbb{I} + K|_{\rho=\frac{1}{4}}\right),$$
$$Z^D_{0}(\tau)\eta(\tau)^{-1}\theta_4(2\tau) = N(a,m,a)q^{a^2+5/12}\det\left(\mathbb{I} + K|_{\rho=\frac{1}{4}+\frac{\tau}{2}}\right).$$

1.5 Новая симметрия $\mathfrak{gl}(N)$-инвариантных векторов Бете

1.5.1 Введение

Алгебраический анзац Бете, разработанный Ленинградской школой [148, 149, 150], является мощным методом исследования квантовых интегрируемых систем. Этот подход можно использовать для нахождения спектров квантовых гамильтонианов. Кроме того, этот метод может быть использован для вычисления корреляционных функций квантовых интегрируемых моделей [151, 152, 153, 154]. В рамках алгебраического анзаца Бете эта задача сводится к вычислению скалярных произведений векторов Бете.

Понятие вектора Бете является одним из наиболее важных понятий алгебраического анзаца Бете. Эти векторы принадлежат физическому пространству состояний рассматриваемой квантовой модели. Они зависят от набора комплексных чисел, называемых параметрами. При определенном ограничении, наложенном на параметры Бете, вектор Бете становится собственным вектором квантового гамильтониана. В этом случае он обычно называется on-shell вектом Бете. В противном случае, если параметры Бете являются общими комплексными числами, соответствующий вектор иногда называют off-shell вектором Бете.

Модели, базирующиеся на $\mathfrak{gl}(2)$, имеют довольно простой вид векторов Бете [148, 149, 150, 151]. Однако, в квантовых интегрируемых моделях с симметрией более высокого ранга задача построения векторов Бете становится очень нетривиальной. Существует несколько способов задания этих векторов. Рекурсивная процедура построения off-shell векторов Бете была приведена в работах [155, 156, 157]. Явная формула, содержащая тензорные произведения матриц монодромии и R-матриц, была предложена в [159, 160, 161]. Другой подход к этой проблеме, основанный на проекциях в токовой алгебре, был сформулирован в [162, 163, 164, 165]. Явные формулы для векторов Бете в терминах элементов матрицы монодромии, действующих на эталонное состояние, были получены в [166, 167].

Мы находим новую симметрию векторов Бете в моделях с $\mathfrak{gl}(N)$-инвариантной R-матрицей. Вполне естественно ожидать, что симметрии матрицы монодромии алгебры должны генерировать соответствующие симметрии векторов Бете [157, 159, 166, 167]. Мы рассматриваем отображение матрицы монодромии T на новую матрицу $\widehat{T}$, тесно связанную с квантовой обратной матрицей монодромии, а также изучаем свойства векторов Бете, связанных с обеими этими матрицами. Будет показано, как эти два типа векторов Бете связаны друг с другом. В качестве прямого следствия этого соответствия найдены новые симметрии скалярных произведений векторов Бете.

1.5.2 RTT-алгебра и обозначения

Рассматриваются квантовые интегрируемые модели, разрешимые алгебраическим анзацем Бете и обладающие $\mathfrak{gl}(N)$-инвариантной R-матрицей

$$R(u,v) = \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + g(u,v)\mathbf{P}, \quad g(u,v) = \frac{c}{u-v}. \tag{1.5.1}$$

Здесь $\mathbf{I}$ – тождественный оператор, действующий в пространстве $\mathbf{C}^N$, $\mathbf{P}$ – оператор перестановки, действующий в $\mathbf{C}^N \otimes \mathbf{C}^N$, а c – константа. Ключевым объектом алгебраического анзаца Бете является матрица монодромии $T(u)$ с операторными элементами $T_{ij}(u)$, действующими в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (физическое пространство квантовой модели). Она удовлетворяет RTT-алгебре:

$$R(u,v)\left(T(u) \otimes \mathbf{I}\right)\left(\mathbf{I} \otimes T(v)\right) = \left(\mathbf{I} \otimes T(v)\right)\left(T(u) \otimes \mathbf{I}\right) R(u,v). \tag{1.5.2}$$

Уравнение (1.5.2) задает коммутационные соотношения элементов матрицы монодромии

$$[T_{ij}(u), T_{kl}(v)] = g(u,v)\left(T_{il}(u)T_{kj}(v) - T_{il}(v)T_{kj}(u)\right). \tag{1.5.3}$$

Используя (1.5.2), легко доказать, что

$$[\mathcal{T}(u), \mathcal{T}(v)] = 0,$$

где $\mathcal{T}(u) = \sum_i T_{ii}(u)$ – трансфер-матрица. Таким образом, трансфер-матрица является производящей функцией интегралов движения рассматриваемой модели.

Мы предполагаем, что пространство $\mathcal{H}$ имеет псевдовакуумный вектор $|0\rangle$ такой, что

$$\begin{aligned} T_{ii}(u)|0\rangle &= \lambda_i(u)|0\rangle, \\ T_{ij}(u)|0\rangle &= 0, \quad i > j, \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

где $\lambda_i(u)$ - некоторые функции, зависящие от конкретной квантовой интегрируемой модели. Действие $T_{ij}(u)$ с $i < j$ на псевдовакуум нетривиально. В физическиинтересных моделях многократное действие этих операторов на $|0\rangle$ порождает базис в пространстве $\mathcal{H}$.

Поскольку матрица монодромии определяется с точностью до общего нормирующего скалярного фактора, то удобно иметь дело с отношениями

$$\alpha_i(u) = \frac{\lambda_i(u)}{\lambda_{i+1}(u)}, \quad i = 1, \ldots, N-1. \tag{1.5.5}$$

Мы рассматриваем функции $\alpha_i(u)$ как свободные функциональные параметры (обобщенная модель).

Помимо исходной матрицы монодромии $T(u)$ мы также можем рассмотреть обратную ей матрицу (квантовую ко-матрицу). Для этого сначала введем квантовый определитель матрицы монодромии $\mathrm{qdet}\,\big(T(u)\big)$ [168, 169, 170, 171] по формуле

$$\mathrm{qdet}\,\big(T(u)\big) = \sum_p \mathrm{sgn}\,(p)\; T_{1,p(1)}(u)\; T_{2,p(2)}(u-c)\;\ldots\; T_{N,p(N)}(u-(N-1)c).$$

Здесь сумма берется по всем перестановкам p множества $\{1{,}2,\ldots N\}$, $p(i)$, являющимся i-м элементом перестановки p множества $\{1{,}2,\ldots N\}$. Квантовый определитель является центром RTT-алгебры

$$\big[\;\mathrm{qdet}\,\big(T(u)\big), T_{ij}(v)\;\big] = 0.$$

Легко доказать, что

$$\mathrm{qdet}\,\big(T(u)\big)|0\rangle = \lambda_1(u)\lambda_2(u-c)\ldots\lambda_N(u-(N-1)c)|0\rangle.$$

Аналогично квантовому детерминанту, мы можем ввести квантовые миноры размера $m\times m$ $(1\le m<N)$

$$t^{a_1a_2\ldots a_m}_{b_1b_2\ldots b_m}(u) = \sum_p \mathrm{sgn}\,(p)\; T_{a_1,b_{p(1)}}(u)\; T_{a_2,b_{p(2)}}(u-c)\;\ldots\; T_{a_m,b_{p(m)}}(u-(m-1)c). \tag{1.5.6}$$

Здесь сумма берется по перестановкам множества $\{1{,}2,\ldots m\}$, где $p(i)$ – это i-ый элементом перестановки p множества $\{1{,}2,\ldots m\}$.

Теперь мы можем ввести квантовую обратную матрицу монодромии

$$\tilde{T}(u-c)T(u) = \mathrm{qdet}\,(T(u))\;\mathbf{I},$$

где элементы $\tilde{T}_{ij}(u)$ определены квантовыми минорами

$$\tilde{T}_{ij}(u) = (-1)^{i+j} t^{1\ldots\hat{j}\ldots N}_{1\ldots\hat{i}\ldots N}(u). \tag{1.5.7}$$

Здесь обозначения $\hat{i}$ и $\hat{j}$ означают, что соответствующие индексы опущены.

Известно, что квантовая обратная матрица монодромии удовлетворяет RTT-соотношению с противоположным знаком константы c [171], то есть

$$[\tilde{T}_{ij}(u),\tilde{T}_{kl}(v)] = g(v,u)\left(\tilde{T}_{il}(u)\tilde{T}_{kj}(v) - \tilde{T}_{il}(v)\tilde{T}_{kj}(u)\right).$$

Тогда, определяя $\widehat{T}_{ij}(u)$ как

$$\widehat{T}_{ij}(u) = \tilde{T}_{N+1-j,N+1-i}(u), \tag{1.5.8}$$

находим, что элементы $\widehat{T}_{ij}(u)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям (см., например, [170, 172])

$$[\widehat{T}_{ij}(u),\widehat{T}_{kl}(v)] = g(u,v)\left(\widehat{T}_{il}(u)\widehat{T}_{kj}(v) - \widehat{T}_{il}(v)\widehat{T}_{kj}(u)\right).$$

Поскольку эти коммутационные соотношения совпадают с (1.5.3), заключаем, что $\widehat{T}(u)$ удовлетворяет RTT-алгебре (1.5.2) с той же R-матрицей (1.5.1). Таким образом, отображение $T_{ij}(u) \to \widehat{T}_{ij}(u)$ является автоморфизмом RTT-алгебры.

1.5.2.1 Обозначения

В этом разделе мы опишем обозначения, которые используются ниже. Во-первых, введем специальное обозначения для комбинации $1 + g(u,v)$

$$f(u,v) = 1 + g(u,v) = \frac{u - v + c}{u - v}. \tag{1.5.9}$$

Во-вторых, введем обозначение множеств переменных. Обозначим их чертой: $\bar{t}^i$, $\bar{x}^s$ и так далее. Здесь верхние индексы обозначают принадлежность различным наборам. Отдельные элементы множеств обозначаются нижними индексами: t^i_j, x^s_k и так далее. Таким образом, $\bar{t} = \{\bar{t}^1,\bar{t}^2\}$ означает, например, что $\bar{t}$ является объединением двух множеств $\bar{t}^1$ и $\bar{t}^2$. При этом каждое из этих двух множеств состоит из элементов $\bar{t}^s = \{t^s_1,t^s_2,\dots,t^s_{a_s}\}$, где $s = 1,2$.

Обозначение $\bar{t}^i+q$ означает, что константа q добавляется ко всем элементам множества $\bar{t}^i$. Подмножества переменных обозначаются римскими индексами: $\bar{t}^s_{\rm I}$, $\bar{x}^s_{\rm II}$ и так далее. В частности, мы рассматриваем разбиение множеств на подмножества. Тогда обозначение $\bar{t}^s \Rightarrow \{\bar{t}^s_{\rm I},\ \bar{t}^s_{\rm II}\}$ означает, что множество $\bar{t}^s$ разделено на два непересекающихся подмножества $\bar{t}^s_{\rm I}$ и $\bar{t}^s_{\rm II}$. Порядок элементов в каждом подмножестве не является существенным.

Чтобы сделать формулы более компактными, мы используем сокращенное обозначение для произведений функций, зависящих от одной или двух переменных. А именно, если функция f (1.5.9) зависит от набора переменных (или двух наборов переменных), это означает, что нужно взять произведение по соответствующему набору (или двойное произведение по обоими наборами). Например,

$$f(u,\bar{t}^i) = \prod_{t^i_j\in\bar{t}^i} f(u,\bar{t}^i_j), \qquad f(\bar{t}^s,\bar{x}^p) = \prod_{t^s_j\in\bar{t}^s}\prod_{x^p_k\in\bar{x}^p} f(t^s_j,x^p_k). \tag{1.5.10}$$

Мы используем такое же обозначение для произведений коммутирующих операторов, их вакуумных собственных значений λ_i (1.5.4) и отношений этих собственных значений α_i (1.5.5)

$$\lambda_i(\bar{t}^i) = \prod_{\bar{t}^i_j\in\bar{t}^i} \lambda_i(\bar{t}^i_j), \qquad \alpha_i(\bar{t}^i) = \prod_{\bar{t}^i_j\in\bar{t}^i} \alpha_i(t^i_j), \qquad T_{ij}(\bar{t}^s_{\rm I}) = \prod_{\bar{t}^s_k\in\bar{t}^s_{\rm I}} T_{ij}(\bar{t}^s_k). \tag{1.5.11}$$

Мы распространим это соглашение на новые функции, которые появятся позже. Наконец, по определению, любое произведение по пустому множеству равно 1. Двойное произведение равно 1, если хотя бы один из наборов пуст.

1.5.3 Векторы Бете

Одной из основных задач алгебраического анзаца Бете является нахождение собственных векторов трансфер-матрицы, которые обычно называются on-shell векторы Бете. Для этого сначала следует построить off-shell векторы Бете (или, что то же самое, векторы Бете), которые принадлежат гильбертову пространству $\mathcal{H}$. Последние являются специальными многочленами по $T_{ij}(u)$ с $i < j$, действующими на $|0\rangle$. В простейшем случае $\mathfrak{gl}(2)$ векторы Бете имеют вид $T_{12}(\bar{u})|0\rangle$, где $\bar{u} = \{u_1, \dots, u_n\}$, $n = 0,1,\dots$. Однако в общем случае $\mathfrak{gl}(N)$ форма векторов Бете гораздо более сложная (см., например, [167]).

В моделях, базирующихся на $\mathfrak{gl}(N)$, off-shell вектор Бете $\mathbb{B}(\bar{t})$ зависит от $N-1$ наборов комплексных чисел $\bar{t} = \{\bar{t}^1, \bar{t}^2, \dots, \bar{t}^{N-1}\}$, называемых параметрами Бете. Вектор Бете $\mathbb{B}(\bar{t})$ симметричен по перестановкам параметров Бете в каждом подмножестве $\bar{t}^i$. Однако, он не симметричен относительно перестановок подмножеств, а также при заменах $t^i_j \leftrightarrow t^k_l$. Если параметры Бете удовлетворяют специальной системе уравнений (уравнениям Бете), то off-shell вектор Бете становится собственным состоянием трансфер-матрицы. Однако в общем случае никаких ограничений на параметры Бете t^i_k не накладывается.

Форма off-shell векторов Бете однозначно фиксируется до общего коэффициента нормализации. Здесь мы используем ту же нормализацию, что и в [173]. А именно, мы уже упоминали, что общий вектор имеет вид многочлена от T_{ij} с $i < j$, примененного к псевдовакууму $|0\rangle$. Среди всех членов этого многочлена есть один моном, который содержит операторы T_{ij} только с $j - i = 1$. Мы называем этот член главным членом и обозначаем его $\widetilde{\mathbb{B}}(\bar{t})$.

Мы задаем нормировку векторов Бете, фиксируя числовой коэффициент при главном члене:

$$\widetilde{\mathbb{B}}(\bar{t}) = \frac{T_{12}(\bar{t}^1)T_{23}(\bar{t}^2)\dots T_{N-1,N}(\bar{t}^{N-1})|0\rangle}{\prod_{i=1}^{N-1}\lambda_{i+1}(\bar{t}^i)\prod_{i=1}^{N-2}f(\bar{t}^{i+1},\bar{t}^i)}. \tag{1.5.12}$$

Напомним, что здесь мы используем сокращенные обозначения (1.5.10), (1.5.11) для произведений операторов $T_{i,i+1}$, вакуумных собственных значений λ_{i+1} и f-функций.

1.5.3.1 Векторы Бете матрицы $\widehat{T}(u)$

В предыдущем разделе мы видели, что матрица $\widehat{T}(u)$ удовлетворяет RTT-соотношению (1.5.2). Используя определение $\widehat{T}_{ij}$ (см. (1.5.7)), можно найти действия операторов $\widehat{T}_{ij}$ на псевдовакуум. Простой расчет показывает, что

$$\widehat{T}_{ij}(u)|0\rangle = 0, \qquad i > j,$$
$$\widehat{T}_{ii}(u)|0\rangle = \hat{\lambda}_i(u)|0\rangle,$$

где

$$\hat{\lambda}_{N+1-i}(u) = \prod_{k=0}^{i-2} \lambda_{k+1}(u - ck) \prod_{k=i}^{N-1} \lambda_{k+1}(u - (k-1)c). \tag{1.5.13}$$

Из (1.5.13) следует, что отношения собственных значений вакуума имеют следующий вид:

$$\hat{\alpha}_i(u) = \frac{\hat{\lambda}_i(u)}{\hat{\lambda}_{i+1}(u)} = \alpha_{N-i}(u - (N-i-1)c). \tag{1.5.14}$$

Наконец, операторы $\widehat{T}_{ij}$ с $i < j$ действуют на $|0\rangle$ как операторы рождения.

Таким образом, мы можем построить off-shell векторы Бете $\hat{\mathbb{B}}(\bar{t})$ по матрице монодромии $\widehat{T}(u)$. Эти векторы однозначно определены при условии, что их нормировка фиксирована. Мы фиксируем ее так же, как в (1.5.12). А именно, главной член $\tilde{\hat{\mathbb{B}}}(\bar{t})$ off-shell вектора Бете $\hat{\mathbb{B}}(\bar{t})$ имеет вид

$$\tilde{\hat{\mathbb{B}}}(\bar{t}) = \frac{\widehat{T}_{12}(\bar{t}^1)\widehat{T}_{23}(\bar{t}^2)\dots\widehat{T}_{N-1,N}(\bar{t}^{N-1})|0\rangle}{\prod_{i=1}^{N-1}\hat{\lambda}_{i+1}(\bar{t}^i)\prod_{i=1}^{N-2} f(\bar{t}^{i+1},\bar{t}^i)}.$$

Здесь мы расширили сокращенное обозначение (1.5.10), (1.5.11) на произведения операторов $\widehat{T}_{i,i+1}$ и вакуумных собственных значений $\hat{\lambda}_{i+1}$.

Нашим основным результатом является связь между $\mathbb{B}(\bar{t})$ и $\hat{\mathbb{B}}(\bar{t})$.

1.5.3.2 Формула ко-произведения

Действие ко-произведения в RTT-алгебре индуцирует специальное преобразование векторов Бете, известное как формулы ко-произведения [159, 163, 164, 165]. Это наш основной инструмент для изучения соответствия между $\mathbb{B}(\bar{t})$ и $\hat{\mathbb{B}}(\bar{t})$. Для объяснения формулы ко-произведения введем составную (композитную) модель.

Рассмотрим композитную модель, в которой матрица монодромии $T(u)$ представлена как произведение двух парциальных матриц монодромии [174, 175]:

$$T(u) = T^{(2)}(u)T^{(1)}(u).$$

В рамках композитной модели предполагается, что матричные элементы каждого $T^{(l)}(u)$ $(l = 1,2)$ действуют в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(l)}$, так что $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$. Каждый из $T^{(l)}(u)$ удовлетворяет RTT-соотношению (1.5.2) и имеет свой собственный псевдовакуумный вектор $|0\rangle^{(l)}$, такой что $|0\rangle = |0\rangle^{(1)} \otimes |0\rangle^{(2)}$. Поскольку операторы $T^{(2)}_{ij}(u)$ и $T^{(1)}_{kl}(v)$ действуют в разных пространствах, они коммутируют друг с другом. Мы предполагаем, что

$$T^{(l)}_{ii}(u)|0\rangle^{(l)} = \lambda^{(l)}_i(u)|0\rangle^{(l)}, \qquad i = 1,\dots,N, \qquad l = 1,2,$$

где $\lambda^{(l)}_i(u)$ – новые свободные функциональные параметры. Мы также вводим

$$\alpha^{(l)}_k(u) = \frac{\lambda^{(l)}_k(u)}{\lambda^{(l)}_{k+1}(u)}, \qquad l = 1,2, \qquad k = 1,\dots,N-1,$$

и распространяем соглашение (1.5.11) на произведение этих функций. Нетрудно заметить, что

$$\lambda_i(u) = \lambda^{(1)}_i(u)\lambda^{(2)}_i(u), \qquad \alpha_k(u) = \alpha^{(1)}_k(u)\alpha^{(2)}_k(u).$$

Мы можем связать парциальные off-shell векторы Бете $\mathbb{B}^{(l)}(\bar t)$ с каждой парциальной матрицей монодромии для $T^{(l)}(u)$ $(l = 1,2)$. В то же время можно построить векторы Бете $\mathbb{B}(\bar t)$, используя полную матрицу монодромии $T(u)$.

Формула ко-произведения показывает, как вектор Бете полной матрицы монодромии $T(u)$ может быть выражен в терминах парциальных векторов Бете $\mathbb{B}^{(l)}(\bar t)$ [159, 164, 165]:

$$\mathbb{B}(\bar t) = \sum \frac{\prod_{s=1}^{N-1} \alpha^{(2)}_s(\bar t^s_{\rm I}) f(\bar t^s_{\rm II},\bar t^s_{\rm I})}{\prod_{s=1}^{N-2} f(\bar t^{s+1}_{\rm II},\bar t^s_{\rm I})} \mathbb{B}^{(1)}(\bar t_{\rm I})\mathbb{B}^{(2)}(\bar t_{\rm II}). \tag{1.5.15}$$

Здесь все множества параметров Бете $\bar t^s$ делятся на два подмножества $\bar t^s \Rightarrow \{\bar t^s_{\rm I},\bar t^s_{\rm II}\}$, и сумма берется по всем возможным разбиениям.

В [176] было доказано, что формула ко-произведения фиксирует вектор Бете с точностью до общего множителя. Точнее, можно умножить вектор на любую функцию одной переменной, одинаковую для всех элементов $\bar t^i$

$$\mathbb{B}(\bar t) \to \mathbb{B}(\bar t) \prod_{i=1}^{N-1} q_i(\bar t^i), \tag{1.5.16}$$

где мы использовали (1.5.11) для произведений функций q_i по множествам $\bar t^i$. Если функции q_i фиксированы, тогда вектор Бете $\mathbb{B}(\bar t)$ однозначно определяется свойством ко-произведения (1.5.15).

Все приведенные выше аргументы полностью применимы к векторам Бете $\hat{\mathbb{B}}(\bar{t})$ матрицы $\widehat{T}(u)$. В частности, они задаются формулой ко-произведения

$$\hat{\mathbb{B}}(\bar{t}) = \sum \frac{\prod_{s=1}^{N-1} \hat{\alpha}_s^{(2)}(\bar{t}^s_{\rm I}) f(\bar{t}^s_{\rm II},\bar{t}^s_{\rm I})}{\prod_{s=1}^{N-2} f(\bar{t}^{s+1}_{\rm II},\bar{t}^s_{\rm I})} \hat{\mathbb{B}}^{(1)}(\bar{t}_{\rm I}) \hat{\mathbb{B}}^{(2)}(\bar{t}_{\rm II}), \tag{1.5.17}$$

где сумма по разбиениям $\bar{t}^s \Rightarrow \{\bar{t}^s_{\rm I}, \bar{t}^s_{\rm II}\}$ берется как в (1.5.15), а обозначение (1.5.11) используется для произведений $\hat{\alpha}_s^{(2)}(\bar{t}^s_{\rm I})$. Функции $\hat{\alpha}_k^{(2)}(u)$ связаны с функциями $\alpha_k^{(2)}(u)$ по формуле, аналогичной формуле (1.5.14):

$$\hat{\alpha}_k^{(l)}(u) = \alpha_{N-k}^{(l)}(u - (N-k-1)c), \qquad l = 1,2. \tag{1.5.18}$$

1.5.4 Соответствие между двумя типами векторов Бете

Для того, чтобы сформулировать основной результат, введем отображение множеств параметров Бете:

$$\mu(\bar{t}) \equiv \mu(\{\bar{t}^1,\bar{t}^2,\dots,\bar{t}^{N-1}\}) = \{\bar{t}^{N-1},\bar{t}^{N-2} - c,\dots,\bar{t}^1 - (N-2)c\}. \tag{1.5.19}$$

Таким образом, это отражение переупорядочивает наборы $\bar{t}^i$ и сдвигает каждое множество $\bar{t}^i$ на $c(i+1-N)$.

Теорема 1.5.1. Off-shell векторы Бете $\mathbb{B}$ и $\hat{\mathbb{B}}$ интегрируемых моделей с $\mathfrak{gl}(N)$-инвариантной R-матрицей связаны между собой следующим образом:

$$\hat{\mathbb{B}}(\bar{t}) = (-1)^{\#\bar{t}} \left(\prod_{s=1}^{N-2} f(\bar{t}^{s+1}, \bar{t}^s) \right)^{-1} \mathbb{B}\big(\mu(\bar{t})\big). \tag{1.5.20}$$

Здесь $\#\bar{t}$ – общая мощность всех множеств $\bar{t}^i$, и согласно (1.5.19)

$$\mathbb{B}\big(\mu(\bar{t})\big) = \mathbb{B}\big(\bar{t}^{N-1},\bar{t}^{N-2} - c,\dots,\bar{t}^1 - (N-2)c\big).$$

Доказательство. Рассмотрим формулу ко-произведения для $\mathbb{B}\big(\mu(\bar{t})\big)$. Мы имеем

$$\mathbb{B}\big(\mu(\bar{t})\big) = \sum \frac{\prod_{s=1}^{N-1} \alpha_s^{(2)}(\bar{t}^{N-s}_{\rm I} - (s-1)c) f(\bar{t}^{N-s}_{\rm II} - (s-1)c,\bar{t}^{N-s}_{\rm I} - (s-1)c)}{\prod_{s=1}^{N-2} f(\bar{t}^{N-s-1}_{\rm II} - sc,\bar{t}^{N-s}_{\rm I} - (s-1)c)}$$

$$\times\, \mathbb{B}^{(1)}\big(\mu(\bar{t}_{\rm I})\big) \mathbb{B}^{(2)}\big(\mu(\bar{t}_{\rm II})\big).$$

Здесь $\mu(\bar{t}_{\rm I})$ и $\mu(\bar{t}_{\rm II})$ – соответственно, образы подмножеств $\bar{t}_{\rm I}$ и $\bar{t}_{\rm II}$ под действием отображения μ. Используя (1.5.18) и

$$f(x+z,y+z) = f(x,y), \qquad f(x-c,y) = \frac{1}{f(y,x)},$$

находим:

$$\mathbb{B}\big(\mu(\bar t)\big)=\sum\prod_{s=1}^{N-1}\hat\alpha_s^{(2)}(\bar t^s_{\rm I})f(\bar t^s_{\rm II},\bar t^s_{\rm I})\prod_{s=1}^{N-2}f(\bar t^{s+1}_{\rm I},\bar t^s_{\rm II})\;\;\mathbb{B}^{(1)}\big(\mu(\bar t_{\rm I})\big)\mathbb{B}^{(2)}\big(\mu(\bar t_{\rm II})\big). \tag{1.5.21}$$

Введем вектор

$$\mathcal{B}(\bar t)=\frac{\mathbb{B}\big(\mu(\bar t)\big)}{\prod_{s=1}^{N-2}f(\bar t^{s+1},\bar t^s)}.$$

Тогда из (1.5.21) следует, что этот вектор обладает следующим свойством ко-произведения:

$$\mathcal{B}(\bar t)=\sum\frac{\prod_{s=1}^{N-1}\hat\alpha_s^{(2)}(\bar t^s_{\rm I})f(\bar t^s_{\rm II},\bar t^s_{\rm I})}{\prod_{s=1}^{N-2}f(\bar t^{s+1}_{\rm II},\bar t^s_{\rm I})}\mathcal{B}(\bar t_{\rm I})\mathcal{B}(\bar t_{\rm II}).$$

Если сравнить это уравнение с формулой ко-произведения для $\hat{\mathbb{B}}(\bar t)$ (1.5.17), видим, что они совпадают. Таким образом, эти векторы могут отличаться только общим множителем (1.5.16):

$$\frac{\mathbb{B}\left(\bar t^1,\bar t^2-c,\dots,\bar t^{N-1}-(N-2)c\right)}{\prod_{s=1}^{N-2}f(\bar t^s,\bar t^{s+1})}=\mathcal{B}(\bar t)=\hat{\mathbb{B}}(\bar t)\prod_{i=1}^{N-1}q_i(\bar t^i). \tag{1.5.22}$$

Для нахождения функций q_i рассмотрим простейший случай, когда $\bar t^i=\{t^i_1\}$, а все остальные множества пусты. В этом случае векторы Бете совпадают с их главными членами [167]. Мы получаем

$$\frac{T_{i,i+1}(t^i_1-(i-1)c)|0\rangle}{\lambda_{i+1}\left(t^i_1-(i-1)c\right)}=\frac{\widehat T_{N-i,N-i+1}(t^i_1)|0\rangle}{\hat\lambda_{N-i+1}(t^i_1)}q_i(t^i_1). \tag{1.5.23}$$

Используя (1.5.7), (1.5.6) находим

$$\widehat T_{N-i,N-i+1}(t^i_1)|0\rangle=-\left(\prod_{k=0}^{i-2}\lambda_{k+1}(t^i_1-kc)\right)T_{i,i+1}(t^i_1-(i-1)c)|0\rangle\left(\prod_{k=i}^{N-2}\lambda_{k+2}(t^i_1-kc)\right),$$

и согласно (1.5.13), приходим к

$$\frac{\widehat T_{N-i,N-i+1}(t^i_1)|0\rangle}{\hat\lambda_{N-i+1}(t^i_1)}=-\frac{T_{i,i+1}(t^i_1-(i-1)c)|0\rangle}{\lambda_{i+1}(u-(i-1)c)}.$$

Сравнивая это уравнение с (1.5.23), приходим к выводу, что $q_i(t^i_1)=-1$. Наконец, с учетом (1.5.22) получаем уравнение (1.5.20). □

1.5.4.1 Дуальные векторы Бете

Для изучения скалярных произведений следует ввести дуальные векторы Бете. Они принадлежат к двойственному пространству $\mathcal{H}^*$ и могут быть получены путем последовательных применений T_{ij} с $i < j$ справа на дуальный псевдовакуум $\langle 0| \in \mathcal{H}^*$. Они также зависят от $N-1$ наборов комплексных чисел $\{\bar{x}^1,\bar{x}^2,\dots,\bar{x}^{N-1}\}$. Дуальные векторы Бете становятся дуальными собственными состояниями трансферматрицы, если эти параметры удовлетворяют системе уравнений Бете. Более подробная информация об этих векторах содержится в работах [167, 173].

На данный момент для нас важно, что дуальные векторы Бете могут быть получены путем транспонирования обычных векторов Бете. А именно, отображение $\psi\big(T_{ij}(u)\big) = T_{ji}(u)$ определяет антиавтоморфизм RTT-алгебры [171]:

$$\psi(AB) = \psi(B)\psi(A).$$

Здесь A и B – произвольные произведения элементов матрицы монодромии T_{ij}. Распространяя это отображение на векторы Бете $\psi\big(|0\rangle\big) = \langle 0|$, можно доказать, что [166, 167]

$$\mathbb{C}(\bar{x}) = \psi\big(\mathbb{B}(\bar{x})\big),$$

где $\mathbb{C}(\bar{x})$ – дуальный вектор Бете. Используя эту формулу, можно доказать, что дуальные векторы Бете также удовлетворяют свойству, аналогичному (1.5.20). А именно, пусть $\mathbb{C}(\bar{x})$ и $\hat{\mathbb{C}}(\bar{x})$ – дуальные векторы Бете, соответственно связанные с матрицами монодромии $T(u)$ и $\widehat{T}(u)$. Тогда

$$\hat{\mathbb{C}}(\bar{x}) = (-1)^{\#\bar{x}} \left(\prod_{s=1}^{N-2} f(\bar{x}^{s+1}, \bar{x}^s)\right)^{-1} \mathbb{C}\big(\mu(\bar{x})\big). \tag{1.5.24}$$

Здесь обозначения такие же, как и в (1.5.20).

В заключение этого раздела отметим, что формула ко-произведения, похожая на (1.5.15), также существует для дуальных векторов Бете. Таким образом, уравнение (1.5.24) также может быть доказано с помощью этой формулы ко-произведения.

1.5.5 Симметрия старших коэффициентов

В качестве прямого применения уравнения (1.5.20) изучим свойства симметрии скалярных произведений, которые определенны как

$$S(\bar{x}|\bar{t}) = \mathbb{C}(\bar{x})\mathbb{B}(\bar{t}).$$

Множеств $\bar{x}$ и $\bar{t}$ – комплексные числа общего вида, такие, что $\#\bar{x}^i = \#\bar{t}^i$ для $i = 1,\dots,N-1$. Если последнее условие не выполняется, то скалярное произведение равно 0.

Скалярное произведение вектора Бете и дуального вектора Бете может быть описано формулой сумм [173]

$$\mathbb{C}(\bar{x})\mathbb{B}(\bar{t}) = \sum W_{\text{part}}(\bar{x}_{\text{I}}, \bar{x}_{\text{II}}|\bar{t}_{\text{I}},\bar{t}_{\text{II}}) \prod_{k=1}^{N-1} \alpha_k(\bar{x}^k_{\text{I}})\alpha_k(\bar{t}^k_{\text{II}}). \tag{1.5.25}$$

Здесь все множества параметров Бете $\bar{t}^k$ и $\bar{x}^k$ делятся на два подмножества $\bar{t}^k \to \{\bar{t}^k_{\text{I}}, \bar{t}^k_{\text{II}}\}$ и $\bar{x}^k \to \{\bar{x}^k_{\text{I}}, \bar{x}^k_{\text{II}}\}$, так что $\#\bar{t}^k_{\text{I}} = \#\bar{x}^k_{\text{I}}$. Сумма берется по всем возможным таким разбиениям. Коэффициенты W_{part} являются рациональными функциями, полностью определенными R-матрицей. Они не зависят от отношений собственных вакуумных значений α_k. Используя результаты раздела 1.5.4, мы можем легко найти свойства симметрии этих коэффициентов. Для этого следует вычислить скалярное произведение двумя различными способами.

Заменяя в (1.5.25) $\bar{x}^k \to \bar{x}^{N-k} - (k-1)c$ и $\bar{t}^k \to \bar{t}^{N-k} - (k-1)c$, приходим к

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\big(\mu(\bar{x})\big)\mathbb{B}\big(\mu(\bar{t})\big) = \sum W_{\text{part}}\big(\mu(\bar{x}_{\text{I}}), \mu(\bar{x}_{\text{II}})|\mu(\bar{t}_{\text{I}}),\mu(\bar{t}_{\text{II}})\big)\\ \times \prod_{k=1}^{N-1} \alpha_k(\bar{x}^{N-k}_{\text{I}} - (k-1)c)\alpha_k(\bar{t}^{N-k}_{\text{II}} - (k-1)c).\end{aligned}$$

Согласно (1.5.13), получаем

$$\mathbb{C}\big(\mu(\bar{x})\big)\mathbb{B}\big(\mu(\bar{t})\big) = \sum W_{\text{part}}\big(\mu(\bar{x}_{\text{I}}),\mu(\bar{x}_{\text{II}})|\mu(\bar{t}_{\text{I}}), \mu(\bar{t}_{\text{II}})\big) \prod_{k=1}^{N-1} \hat{\alpha}_k(\bar{x}^k_{\text{I}})\hat{\alpha}_k(\bar{t}^k_{\text{II}}).$$

Наконец, используя (1.5.20) и (1.5.24), преобразуем левую часть следующим образом:

$$\begin{aligned}&\hat{\mathbb{C}}(\bar{x})\hat{\mathbb{B}}(\bar{t}) \prod_{k=1}^{N-2} f(\bar{x}^{k+1}, \bar{x}^k) f(\bar{t}^{k+1}, \bar{t}^k)\\ &= \sum W_{\text{part}}\big(\mu(\bar{x}_{\text{I}}), \mu(\bar{x}_{\text{II}})|\mu(\bar{t}_{\text{I}}),\mu(\bar{t}_{\text{II}})\big) \prod_{k=1}^{N-1} \hat{\alpha}_k(\bar{x}^k_{\text{I}})\hat{\alpha}_k(\bar{t}^k_{\text{II}})\mu(\bar{x}_{\text{II}})|\mu(\bar{t}_{\text{I}}),\mu(\bar{t}_{\text{II}})\big).\end{aligned} \tag{1.5.26}$$

С другой стороны, скалярное произведение векторов Бете $\hat{\mathbb{C}}(\bar{x})$ и $\hat{\mathbb{B}}(\bar{t})$ задается формулой сумм

$$\hat{\mathbb{C}}(\bar{x})\hat{\mathbb{B}}(\bar{t}) = \sum W_{\text{part}}(\bar{x}_{\text{I}},\bar{x}_{\text{II}}|\bar{t}_{\text{I}},\bar{t}_{\text{II}}) \prod_{k=1}^{N-1} \hat{\alpha}_k(\bar{x}^k_{\text{I}})\hat{\alpha}_k(\bar{t}^k_{\text{II}}). \tag{1.5.27}$$

Поскольку функции $\hat{\alpha}_i(u)$ являются свободными функциональными параметрами, уравнения (1.5.26) и (1.5.27) могут давать один и тот же результат тогда и только тогда, когда коэффициенты при каждом произведении $\hat{\alpha}_i$ совпадают. Это означает, что для произвольного разбиения параметров Бете выполнено следующее уравнение:

$$W_{\rm part}(\bar{x}_{\rm I},\bar{x}_{\rm II}|\bar{t}_{\rm I},\bar{t}_{\rm II})\prod_{k=1}^{N-2}f(\bar{x}^{k+1},\bar{x}^{k})f(\bar{t}^{k+1},\bar{t}^{k})=W_{\rm part}\big(\mu(\bar{x}_{\rm I}),\mu(\bar{x}_{\rm II})|\mu(\bar{t}_{\rm I}),\mu(\bar{t}_{\rm II})\big). \qquad (1.5.28)$$

В частности, можно рассмотреть разбиение с $\bar{x}_{\rm I}=\bar{x}$ и $\bar{t}_{\rm I}=\bar{t}$. Тогда соответственно $\bar{x}_{\rm II}=\bar{t}_{\rm II}=\emptyset$. Соответствующий коэффициент $W_{\rm part}$ тогда называется старшим коэффициентом. Обозначим его $Z(\bar{x}|\bar{t})$:

$$Z(\bar{x}|\bar{t})=W_{\rm part}(\bar{x},\emptyset|\bar{t},\emptyset).$$

Тогда из (1.5.28) немедленно следует, что

$$Z\big(\mu(\bar{x})|\mu(\bar{t})\big)=Z(\bar{x}|\bar{t})\prod_{k=1}^{N-2}f(\bar{x}^{k+1},\bar{x}^{k})f(\bar{t}^{k+1},\bar{t}^{k}) \qquad (1.5.29)$$

Аналогичное свойство (1.5.29) для моделей, описываемых $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}(3))$-алгеброй было доказано в [177].

1.5.6 Выводы

Мы нашли новую симметрию векторов Бете. Как уже упоминалось, off-shell вектор Бете является многочленом по элементам матрицы монодромии T_{ij}, примененным к псевдовакууму. Новая симметрия дает описание вектора Бете в терминах элементов матрицы монодромии $\widehat{T}_{ij}$ (1.5.8).

Прямое доказательство эквивалентности двух представлений возможно, но является технически сложным. Наше доказательство основано на свойствах ко-произведения векторов Бете (1.5.15). Этот подход оказался очень плодотворным при изучении векторов Бете для моделей с симметрией высших рангов. В частности, с помощью этого метода мы смогли вывести формулу суммы для скалярного произведения векторов Бете в моделях с $\mathfrak{gl}(N)$- и $\mathfrak{gl}(m|n)$-инвариантными R-матрицами [167].

В качестве прямого применения новой симметрии доказано тождество для старших коэффициентов скалярного произведения (1.5.29). Однако, это не единственное применение полученного результата. Новое представление позволяет исследовать свойства сложных операторов, состоящих из элементов исходной матрицы монодромии T_{ij} и матрицы монодромии $\widehat{T}_{ij}$. Недавно этот тип операторов рассматривался в [178]. Там, в частности, было высказано предположение, что в $\mathfrak{gl}(3)$-инвариантных спиновых це-

почках оператор
$$B^g(u) = T_{23}(u)\widehat{T}_{13}(u) - T_{13}(u)\widehat{T}_{12}(u)$$

может использоваться для построение on-shell векторов Бете. Наш результат позволяет получить явные формулы для действия $B^g(u)$ на векторы Бете, используя известные формулы действия операторов $T_{ij}(u)$ [166]. Таким образом, мы получаем возможность проверить гипотезу [178].

В заключение этого раздела отметим, что симметрии RTT-алгебры, аналогичные рассмотренным нами, также существуют для супералгебр $\mathfrak{gl}(m|n)$ и квантовых аффинных $U_q(\widehat{gl_n})$-алгебр. Следует ожидать, что в этих случаях векторы Бете также допускают представления, связанные с квантовой обратной матрицей монодромии.

1.6 Янгиан произвольной простой алгебры Ли и его реализации, подалгебры Бете

Пусть $\mathfrak{g}$ – произвольная простая комплексная алгебра Ли, G – соответствующая присоединённая группа. Янгиан $Y(\mathfrak{g})$ для простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ – это алгебра Хопфа, деформация универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g}[t])$.

Янгиан $Y(\mathfrak{g})$ для произвольной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ был определен В. Дринфельдом в его работе [183], в то время как янгиан для алгебры $\mathfrak{sl}_n$ (точнее, $\mathfrak{gl}_n$) появился несколько ранее в работах Л.Д. Фадеева и ленинградской школы, см., например, [214]. Отметим, что исторически открытие янгианов связанно с построением рациональных решений уравнения Янга-Бакстера.

1.6.1 Янгиан для простой алгебры Ли.

В этом разделе мы следуем работам [183], [185], [216], [181], [186].

1.6.1.1 Приложения теории янгианов

Теория янгианов имеет множество различных приложений в математике. Отметим лишь некоторые из них:

— Квантовые интегрируемые системы, см. например [198];
— Геометрическая теория представлений, в частности, колчанные многообразия, алгебры Холла, квантование срезов в аффинном грассманиане, см. [201], [209], [199];
— Представления классических алгебр Ли, см., например, [203].

1.6.1.2 Обозначения

Пусть $\mathfrak{g}$ – простая комплексная алгебра Ли, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – картановская подалгебра, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ – борелевская подалгебра, $\mathfrak{g}[t]$ – соответствующая алгебра Ли токов, то есть алгебра Ли полиномиальных отображений $\mathbb{C} \to \mathfrak{g}$.

Пусть Φ обозначает соответствующую алгебре Ли $\mathfrak{g}$ систему корней, Φ^+ – положительные корни, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – простые корни, $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ – фундаментальные веса, $(\cdot,\cdot)$ – инвариантное скалярное произведение такое, что $(\alpha, \alpha) = 2$ для коротких простых корней, $\mathfrak{g}_\alpha$ – соответствующие корневые подпространства алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, x_\alpha^- \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ такие, что $(x_\alpha, x_\alpha^-) = 1$, $t_{\omega_i} \in \mathfrak{h}$ – элемент, соответствующий ω_i при помощи инвариантного скалярного произведения. Аналогично h_i – это элемент соответствующий α_i. Положим $d_i = \frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2}$. Наконец, пусть $e^\alpha \in \mathbb{C}[T]$ – мономиальная функция, заданная корнем α.

1.6.1.3 Определение янгиана

Янгиан $Y(\mathfrak{g})$ – это исторически один из первых примеров квантовых групп, то есть некоммутативных и некокоммутативных алгебр Хопфа, см. [184]. Точнее, янгиан – это единственная однородная деформация универсальной обёртывающей алгебры $U(\mathfrak{g}[t])$ в классе алгебр Хопфа. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{C}$. Положим $V[[h]] = \{\sum_{n \geqslant 0} v_n h^n\}$. Ясно, что $V[[h]]$ естественным образом является $\mathbb{C}[[h]]$-модулем.

Определение 1. Модуль M над $\mathbb{C}[[h]]$ называется топологически свободным, если $M \simeq V[[h]]$ для некоторого векторного пространства V.

Определение 2. Пусть A – алгебра Хопфа над полем комплексных чисел. Деформацией A в классе алгебр Хопфа называется алгебра Хопфа A_0 над кольцом формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[h]]$, такая что
1) A_0 – топологически свободный $\mathbb{C}[[h]]$-модуль;
2) $A_0/hA_0 \simeq A$ как алгебра Хопфа.

Пусть (A, Δ) – деформация алгебры Хопфа $U(\mathfrak{g}_1)$, где $\mathfrak{g}_1$ – произвольная алгебра Ли.

Предложение 1.6.1. Алгебра Ли g_1 обладает естественной структурой биалгебры Ли

$$\delta(x) = \frac{\Delta(\tilde{x}) - \Delta^{op}(\tilde{x})}{h} \pmod{h},$$

где $\tilde{x}$ – произвольное поднятие x в A.

Пусть теперь $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}[t]$. Известно, что на алгебре Ли $\mathfrak{g}[t]$ имеется естественная структура биалгебры Ли, которую в дальнейшем будем обозначать δ. А именно, пусть $x \in \mathfrak{g}[t]$. Тогда

$$\delta(x)(u,v) = \left(\mathrm{ad}_{x(u)} \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_{x(v)}\right)\left(\frac{\Omega}{u-v}\right).$$

Здесь Ω – элемент Казимира $U(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$, т.е. $\Omega = \sum_\lambda x_\lambda \otimes x_\lambda$, где $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – произвольный ортонормированный базис $\mathfrak{g}$.

Будем называть деформацию универсальной обёртывающей алгебры $U(\mathfrak{g}[t])$ деформацией биалгебры Ли $(\mathfrak{g}[t],\delta)$, если индуцированная структура биалгебры Ли на $\mathfrak{g}[t]$ совпадает с δ.

Заметим, что $\mathfrak{g}[t]$ – градуирована степенями t и δ является однородным отображением степени -1.

Определение 3. Деформация $U_h(\mathfrak{g}[t])$ биалгебры Ли $(\mathfrak{g}[t], \delta)$ называется однородной, если она

1) Градуирована над кольцом $\mathbb{C}[[h]](\deg h = 1)$;

2) $U_h(\mathfrak{g}[t])/hU_h(\mathfrak{g}[t]) \simeq U(\mathfrak{g}[t])$ как градуированная алгебра.

Теперь мы можем сформулировать утверждение об единственности.

Теорема 1.6.1. Существует единственная однородная деформация $U_h(\mathfrak{g}[t])$ биалгебры Ли $(\mathfrak{g}[t], \delta)$. Как ассоциативная алгебра с единицей эта алгебра топологически порождена $\{x, J(x) \,|\, x \in \mathfrak{g}\}$ со следующими соотношениями:

$$xy - yx = [x,y], \qquad J([x,y]) = [J(x), y],$$

$$J(cx + dy) = cJ(x) + dJ(y),$$

$$[J(x),[J(y),z]] - [x,[J(y),J(z)]] = h^2 \sum_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} ([x,x_\lambda], [[y,x_\mu],[z,x_\nu]])\{x_\lambda, x_\mu, x_\nu\},$$

$$[[J(x),J(y)],[z,J(w)]] + [[J(z),J(w)],[x,J(y)]] =$$
$$= h^2 \sum_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} \left(([x,x_\lambda],[[y,x_\mu],[[z,w],x_\nu]]) + ([z,x_\lambda],[[w,x_\mu],[[x,y],x_\nu]])\right)\{x_\lambda,x_\mu,J(x_\nu)\}$$

для всех $x,y,z,w \in \mathfrak{g}$ и $c,d \in \mathbb{C}$, где $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ некоторый ортонормированный базис $\mathfrak{g}$, $\{x_1,x_2,x_3\} = \frac{1}{24}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_3} x_{\pi(1)}x_{\pi(2)}x_{\pi(3)}$ для всех $x_1,x_2,x_3 \in U_h(\mathfrak{g}[t])$.

Пусть $\Omega = \sum_\lambda x_\lambda \otimes x_\lambda \in U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}), \omega = \sum_\lambda x_\lambda^2 \in U(\mathfrak{g})$ – элементы Казимира, $c_\mathfrak{g}$ – значение элемента Казимира ω на присоединенном представлении.

Структура алгебры Хопфа на $U_h(\mathfrak{g}[t])$ задаётся следующими формулами:

$$\Delta_h(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x,$$
$$\Delta_h(J(x)) = J(x) \otimes 1 + 1 \otimes J(x) + \frac{1}{2}h[x \otimes 1, \Omega],$$
$$S_h(x) = -x, S_h(J(x)) = -J(x) + \frac{1}{4}c_{\mathfrak{g}}x,$$
$$\varepsilon_h(x) = \varepsilon_h(J(x)) = 0.$$

Градуировка на $U_h(\mathfrak{g}[t])$:

$$\deg(x) = 0, \deg(J(x)) = 1.$$

Заметим, что определяющие соотношения и отображения $\Delta_h, S_h, \varepsilon_h$ не содержат степенных рядов, поэтому мы можем положить h равным любому комплексному числу. Если $h = 0$, то $U_0(\mathfrak{g}[t]) \simeq U(\mathfrak{g}[t])$. Если $h \neq 0$, то очевидно, что для любых $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ имеет место изоморфизм $U_{c_1}(\mathfrak{g}[t]) \simeq U_{c_2}(\mathfrak{g}[t])$. Положим $h = 1$ и обозначим через $Y(\mathfrak{g})$ алгебру $U_1(\mathfrak{g}[t])$.

1.6.1.4 J-реализация и универсальная R-матрица.

Алгебра $Y(\mathfrak{g})$ – это J-реализация янгиана. Выбирая произвольный базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ мы видим, что янгиан $Y(\mathfrak{g})$ – конечнопорожденная алгебра.

Для любого $c \in \mathbb{C}$ определим автоморфизм τ_c алгебры $Y(\mathfrak{g})$ следующим образом:

$$x \mapsto x, J(x) \mapsto J(x) + cx \quad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

Для любых $a,b \in \mathbb{C}$ положим $\tau_{a,b} := \tau_a \otimes \tau_b$.

Одной из ключевых в теории янгианов и для наших целей является следующая

Теорема 1.6.2. Существует единственный ряд

$$\hat{R}(u) = Id + \sum_{k \geqslant 1} R^{(k)} u^{-k} \in (Y(\mathfrak{g}) \otimes Y(\mathfrak{g}))[[u^{-1}]],$$

удовлетворяющий следующим свойствам
1) $(\mathrm{id} \otimes \Delta)\hat{R}(u) = \hat{R}_{12}(u)\hat{R}_{13}(u)$;
2) $\tau_{0,u}\Delta^{op}(x) = \hat{R}(u)^{-1}(\tau_{0,u}\Delta(x))\hat{R}(u)$ для любого $x \in Y(\mathfrak{g})$, где $\Delta^{op} = \Delta \circ P$, $P(a \otimes b) = b \otimes a$ для всех $a,b \in Y(\mathfrak{g})$.

Этот ряд называется универсальной R-матрицей и удовлетворяет квантовому уравнению Янга-Бакстера

$$\hat{R}_{12}(u-v)\hat{R}_{13}(u)\hat{R}_{23}(v) = \hat{R}_{23}(v)\hat{R}_{13}(u)\hat{R}_{12}(u-v),$$

а также

$$\hat{R}_{12}(u)\hat{R}_{21}(-u) = 1, \quad \tau_{a,b}\hat{R}(u) = \hat{R}(u+b-a),$$

$$\hat{R}(u) = 1 + \Omega u^{-1} + \sum_{\lambda} \left(J(x_\lambda) \otimes x_\lambda - x_\lambda \otimes J(x_\lambda) \right) u^{-2} + \frac{1}{2}\Omega^2 u^{-2} + O(u^{-3}).$$

Замечание. Пусть (ρ, V) – некоторое представления янгиана. Заметим, что вычисление универсальной R-матрицы в любом представлении янгиана дает решение уравнения Янга-Бакстера с коэффициентами в $\mathrm{End}\,(V) \otimes \mathrm{End}\,(V)[[h^{-1}]]$. Известно, что с точностью до умножения на элемент кольца $\mathbb{C}[[u]]$ ряд $(\rho \otimes \rho)\hat{R}(u)$ – рациональная функция, см. [183]. Описание того, какие рациональные решения уравнения Янга-Бакстера получаются таким образом, см. [183] или [181].

1.6.1.5 Новая или токовая реализация янгиана.

J-реализация янгиана позволяет задать янгиан конечным числом образующих и определить коумножение, но плохо подходит для изучения представлений. В связи с этим В. Дринфельд в своей работе [185] вводит новую или токовую реализацию янгиана.

Определение 4. Янгиан $Y_{new}(\mathfrak{g})$ – это алгебра Хопфа с единицей над полем $\mathbb{C}$ порождённая элементами $\{e_i^{(r)}, f_i^{(r)}, h_i^{(r)} \,|\, i = 1, \ldots, n; r \geqslant 1\}$ и следующими определяющими соотношениями:

$$[h_i^{(s)}, h_j^{(s)}] = 0,$$

$$[e_i^{(r)}, f_j^{(s)}] = \delta_{ij} h_i^{(r+s-1)},$$

$$[h_i^{(1)}, e_j^{(s)}] = (\alpha_i, \alpha_j) e_j^{(s)},$$

$$[h_i^{(r+1)}, e_j^{(s)}] - [h_i^{(r)}, e_j^{(s+1)}] = \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2} (h_i^{(r)} e_j^{(s)} + e_j^{(s)} h_i^{(r)}),$$

$$[h_i^{(1)}, f_j^{(s)}] = -(\alpha_i, \alpha_j) f_j^{(s)},$$

$$[h_i^{(r+1)}, f_j^{(s)}] - [h_i^{(r)}, f_j^{(s+1)}] = -\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2} (h_i^{(r)} f_j^{(s)} + f_j^{(s)} h_i^{(r)}),$$

$$[e_i^{(r+1)}, e_j^{(s)}] - [e_i^{(r)}, e_j^{(s+1)}] = \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2} (e_i^{(r)} e_j^{(s)} + e_j^{(s)} e_i^{(r)}),$$

$$[f_i^{(r+1)}, f_j^{(s)}] - [f_i^{(r)}, f_j^{(s+1)}] = -\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2} (f_i^{(r)} f_j^{(s)} + f_j^{(s)} f_i^{(r)}),$$

$$i \neq j, N = 1 - a_{ij} \Rightarrow \mathrm{sym}[e_i^{(r_1)}, [e_i^{(r_2)}, \cdots [e_i^{(r_N)}, e_j^{(s)}] \cdots]] = 0,$$

$$i \neq j, N = 1 - a_{ij} \Rightarrow \mathrm{sym}[f_i^{(r_1)}, [f_i^{(r_2)}, \cdots [f_i^{(r_N)}, f_j^{(s)}] \cdots]] = 0.$$

Недостатком этой реализации служит тот факт, что в этих образующих не известны явные формулы для коумножения. Тем не менее, эти образующие хорошо подходят для изучения представлений янгиана.

Определение 5. Пусть $H \subset Y(\mathfrak{g})$ – подалгебра, порожденная всеми $h_i^{(r)}, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant r$. Следуя [184], будем называть H картановской подалгеброй янгиана.

Рассмотрим следующие элементы алгебры $Y_{new}(\mathfrak{g})$:

$$e_{\alpha_i}^{(r)} = e_i^{(r)},$$

$$[e_{\hat{\alpha}}^{(r)}, e_{\check{\alpha}}^{(1)}] = e_\alpha^{(r)},$$

$$f_{\alpha_i}^{(r)} = f_i^{(r)},$$

$$[f_{\hat{\alpha}}^{(r)}, f_{\check{\alpha}}^{(1)}] = f_\alpha^{(r)}.$$

Здесь $\check{\alpha}$ – это минимальный положительный корень такой, что $\hat{\alpha} = \alpha - \check{\alpha}$ снова положительный корень.

Теорема 1.6.3. ([199, Предложение 3.2]) Упорядоченные мономы от переменных $e_\alpha^{(r)}, h_i^{(r)}, f_\alpha^{(r)}$, где $\alpha \in \Phi^+$, $i \in \Delta$, $r \in \mathbb{Z}_{>0}$, образуют базис янгиана $Y_{new}(\mathfrak{g})$.

Отметим, что теорема 1.6.3 определяет вложение $U(\mathfrak{g}) \to Y_{new}(\mathfrak{g})$. Иными словами, элементы $e_\alpha^{(1)}, h_i^{(1)}, f_\alpha^{(1)}$, где $\alpha \in \Phi^+,\ i \in \Delta,\ r \in \mathbb{Z}_{>0}$ порождают подалгебру, изоморфную $U(\mathfrak{g})$.

Теорема 1.6.3 также позволяет задать фильтрацию на алгебре $Y_{new}(\mathfrak{g})$ следующей формулой

$$\deg e_\alpha^{(r)} = \deg f_\alpha^{(r)} = \deg h_i^{(r)} = r.$$

Предложение 1.6.2. Подалгебра H является максимальной коммутативной подалгеброй янгиана. Ряд Пуанкаре подалгебры H имеет вид

$$\prod_{r \geqslant 1} \frac{1}{(1-t^r)^n}.$$

1.6.1.6 Теория конечномерных представлений $Y_{new}(\mathfrak{g})$.

Следуя [181], кратко напомним теорию конечномерных представлений янгианов.

Пусть $\underline{\lambda} = \{\lambda_{i,r} \,|\, i = 1, \ldots, n, r \geqslant 0, \lambda_{i,r} \in \mathbb{C}\}$ – это множество комплексных чисел, V – представление янгиана $Y(\mathfrak{g})$. $\underline{\lambda}$-весовое пространство – это по определению подпространство $V_{\underline{\lambda}}$ модуля V

$$V_{\underline{\lambda}} = \{v \in V \,|\, h_i^{(r)} v = \lambda_{i,r} v \text{ для всех } i,r\}.$$

Определение 6. $Y(\mathfrak{g})$-модуль называется модулем старшего веса $\underline{\lambda}$, если существует вектор $w \in V_{\underline{\lambda}} \subset V$ такой, что $e_i^{(r)} \cdot w = 0$ для всех i,r и $V = Y(\mathfrak{g}) \cdot w$.

Предложение 1.6.3. Любой конечномерный неприводимый $Y(\mathfrak{g})$-модуль – это модуль старшего веса.

Используя технику модулей Верма, несложно построить неприводимый модуль $V(\underline{\lambda})$ старшего веса $\underline{\lambda}$.

Теорема 1.6.4. Неприводимый $Y(\mathfrak{g})$-модуль $V(\underline{\lambda})$ конечномерный тогда и только тогда, когда существуют многочлены $P_i(u) \in \mathbb{C}[u]$ такие, что

$$\frac{P_i(u+d_i)}{P_i(u)} = 1 + \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_{i,r} u^{-r-1},$$

где равенство понимается в том смысле, что разложение Лорана левой части в точке $u = \infty$ равно правой части. Многочлены $P_i(u)$ называются многочленами Дринфельда.

Определение 7. Конечномерный неприводимый $Y(\mathfrak{g})$-модуль называется фундаментальным, если соответствующие многочлены Дринфельда имеют вид

$$P_j(u) = \begin{cases} 1, & j \neq i, \\ u - a, & j = i, \end{cases}$$

для некоторых $i = 1, \ldots n$. Обозначим этот модуль через $V(\omega_i,a)$.

Замечание. Название фундаментальный можно мотивировать следующим наблюдением: любой неприводимый конечномерный модуль есть фактор некоторого подмодуля тензорного произведения фундаментальных модулей.

В дальнейшем, мы будем рассматривать модули $V(\omega_i,0)$. Известно, что при ограничении на $U(\mathfrak{g})$ эти модули имеют вид

$$V(\omega_i,0) = V_{\omega_i} \oplus \bigoplus_{\mu<\omega_i} V_\mu^{\oplus k_\mu},$$

где модуль V_μ — это неприводимый $U(\mathfrak{g})$-модуль старшего веса μ, а $\mu < \omega_i$ означает, что $\omega_i - \mu$ – это сумма положительных корней.

1.6.1.7 RTT-реализация.

Третья реализация янгиана также была представлена в работе В. Дринфельда [183]. Тем не менее доказательство того, что заданная таким образом алгебра изоморфна $Y(\mathfrak{g})$ стало доступно лишь недавно в работе C. Wendlandt [216].

Пусть V – произвольное нетривиальное конечномерное представление янгиана, т.е. не сумма одномерных, ρ – соответствующий гомоморфизм $Y(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}\,(V)$. Положим $R(u) = (\rho \otimes \rho)\hat{R}(-u) \in \mathrm{End}\,(V) \otimes \mathrm{End}\,(V)[[u^{-1}]]$.

Определение 8. $Y_V(\mathfrak{g})$ – это ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{C}$ с образующими $t_{ij}^{(r)}, 1 \leqslant i, j \leqslant \dim V; r \geqslant 1$ и определяющими соотношениями

$$R(u-v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)R(u-v) \quad \text{в } \mathrm{End}\,(V)^{\otimes 2} \otimes Y_V(\mathfrak{g})[[u^{-1}, v^{-1}]],$$

$$S^2(T(u)) = T\left(u + \frac{1}{2}c_{\mathfrak{g}}\right),$$

где $T(u) = (t_{ij}(u))_{i.j=1,\dots \dim V}, t_{ij}(u) = \delta_{ij} + \sum_{r \geqslant 1} t_{ij}^{(r)}$, $c_{\mathfrak{g}}$ — значение элемента Казимира алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на присоединенном представлении.

Структура алгебры Хопфа задаётся следующим образом:

$$\Delta(T(u)) = T_{[1]}(u)T_{[2]}(u),$$

$$\varepsilon(T(u)) = \mathrm{Id}\,,$$

$$S(T(u)) = T(u)^{-1}.$$

Определение 9. Если в определении опустить соотношение $S^2(T(u)) = T\left(u + \frac{1}{2}c_{\mathfrak{g}}\right)$, то полученная алгебра Хопфа называется расширенным янгианом и обозначается через $X_V(\mathfrak{g})$.

Теорема 1.6.5. [216] Расширенный янгиан $X_V(\mathfrak{g})$ изоморфен алгебре $Y_V(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[x_1^{(r)}, \dots, x_k^{(r)}]$, где $r \in \mathbb{Z}_{>0}$, $k = \dim \mathrm{End}\,_{Y(\mathfrak{g})}V$.

1.6.1.8 Теоремы об изоморфизме.

Теорема 1.6.6. ([185], [191]) Отображение $\phi : Y_{new}(\mathfrak{g}) \to Y(\mathfrak{g})$ такое, что

$$\begin{aligned} \phi(h_i^{(1)}) &= h_i, & \phi(h_i^{(2)}) &= J(h_i) - v_i, \\ \phi(e_i^{(1)}) &= x_{\alpha_i^+}, & \phi(e_i^{(2)}) &= J(x_{\alpha_i}^+) - w_i^+, \\ \phi(f_i^{(1)}) &= x_{\alpha_i^-}, & \phi(f_i^{(2)}) &= J(x_{\alpha_i}^-) - w_i^-. \end{aligned}$$

задает изоморфизм между $Y(\mathfrak{g})$ и $Y_{new}(\mathfrak{g})$. Здесь

$$v_i = \frac{1}{4} \sum_{\alpha \in \Phi^+} (\alpha, \alpha_i)\{x_\alpha^+, x_\alpha^-\} - \frac{1}{2}h_i^2,$$

$$w_i^\pm = \pm\frac{1}{4} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \{[x_i^\pm, x_\alpha^\pm], x_\alpha^\mp\} - \frac{1}{4}\{x_i^\pm, h_i\},$$

$$\{x_\alpha, x_{-\alpha}\} = x_\alpha x_{-\alpha} + x_{-\alpha}x_\alpha.$$

Пусть пространство V – произвольное нетривиальное конечномерное представление янгиана, т.е. не сумма одномерных, ρ – соответствующий гомоморфизм $Y(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}\,(V)$, а $R(u) = (\rho \otimes \rho)\hat{R}(u) \in \mathrm{End}\,(V) \otimes \mathrm{End}\,(V)[[u^{-1}]]$.

Теорема 1.6.7. ([183], [216]) Отображение $\psi : Y_V(\mathfrak{g}) \to Y(\mathfrak{g})$ такое, что

$$\psi : T(u) \mapsto (\rho \otimes 1)\hat{R}(-u)$$

задаёт изоморфизм между $Y_V(\mathfrak{g})$ и $Y(\mathfrak{g})$.

В дальнейшем мы будем отождествлять янгианы $Y(\mathfrak{g}), Y_{new}(\mathfrak{g}), Y_V(\mathfrak{g})$.

1.6.1.9 Янгиан для подалгебры Леви $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$.

Пусть Q – диаграмма Дынкина алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Любой поддиаграмме $I \subset Q$ сопоставим алгебру Ли $\mathfrak{l}$ порожденную картановской подалгеброй и элементами, соответствующими простым корням подмножества I. Легко видеть, что $\mathfrak{l}$ – редуктивная алгебра Ли. Обозначим через $\mathfrak{g}_I$ полупростую часть $\mathfrak{l}$, то есть $\mathfrak{g}_I = [\mathfrak{l},\mathfrak{l}]$.

Определим янгиан $Y_{new}(\mathfrak{l})$ как подалгебру $Y_{new}(\mathfrak{g})$ порожденную элементами $e_i^{(r)}, f_i^{(r)}$ для всех $i \in I, r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $h_i^{(r)}, r \geqslant 1, i = 1, \dots, n$.

Предложение 1.6.4. ([196, Предложение 3.1]) Алгебра $Y_{new}(\mathfrak{l})$ изоморфна $Y_{new}(\mathfrak{g}_I) \otimes \mathbb{C}[a_j^{(r)}]_{j \in \Delta \setminus I, r \in \mathbb{Z}_{>0}}$.

Заметим, что алгебра Ли $\mathfrak{l}$ является централизатором элемента $x = \sum_{j \in \Delta \setminus I} a_j^{(1)}$ и x – центральный элемент алгебры $Y_{new}(\mathfrak{l})$. Используя элемент x можно разложить V в сумму $Y_{new}(\mathfrak{l})$-подмодулей $V = V_I \oplus W$, см. [196, Раздел 3].

Теорема 1.6.8. ([196, Предложение 3.3]) Пусть $Y_V(\mathfrak{l})$ — подалгебра янгиана $Y_V(\mathfrak{g})$, порожденная всеми коэффициентами Фурье элементов $t_{\beta,v}(u)$, где $v \in V_I, \beta \in V_I^*$. Тогда образ алгебры $Y_V(\mathfrak{l})$ в янгиане $Y_{new}(\mathfrak{g})$ – это $Y_{new}(\mathfrak{l})$.

Таким образом реализуется вложение $Y_{new}(\mathfrak{l}) \subset Y_{new}(\mathfrak{g})$ в RTT-реализации.

1.6.2 Подалгебры Бете

Мы определяем семейство коммутативных подалгебр Бете $B(C) \subset Y(\mathfrak{g}), C \in G$. Доказывается, что если элемент $C \in G$ – регулярный, то подалгебры являются свободными, а если элемент $C \in G$ – регулярный полупростой, то максимальными коммутативными подалгебрами янгиана. Подалгебры Бете в янгиане $\mathfrak{sl}_n$ определены в работе [204]. В янгианах ортогональной и симплектической алгебр Ли эти подалгебры рассматривались в работе [202]. Постановка задачи описания предельных подалгебр восходит к работе Э. Б. Винберга [215].

Исследуются два способа компактифицировать пространство параметров G^{reg} подалгебр Бете – конструкция предельных подалгебр, дающая плоское семейство подалгебр и чудесная компактификация группы G, которая дает неплоское семейство подалгебр. Описываются подалгебры, соответствующие общим точкам в каждом страте чудесной компактификации группы G.

В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ описано пространство параметров замыкания семейства подалгебр, параметризованных регулярными полупростыми элементами. Также описано устройство предельных подалгебр в терминах подалгебр Бете меньшего янгиана и алгебр сдвига аргумента универсальной обёртывающей алгебры.

В процессе доказательства также исследуются некоторые вопросы теории янгианов, недостаточно освещенные в литературе: связь различных фильтраций, вложение янгиана для подалгебры Леви в RTT-реализации, связь с ABC-образующими янгиана (по поводу последнего см. [190]).

Подалгебры Бете в янгиане $Y(\mathfrak{g})$ определяются в работе [196]. Работа [194] посвящена исследованию общих свойств подалгебр Бете в янгианах.

1.6.2.1 Определение подалгебр Бете

Пусть G (соотв. $\tilde{G}$) – соответствующая алгебре Ли $\mathfrak{g}$ присоединенная (соотв. односвязная) группа, т.е. группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ такая, что $Z(G) = \{e\}$, где $Z(G)$ – центр группы G соотв. фундаментальная группа тривиальна). Определим $T \subset G$ – максимальный тор, а также множества $T^{reg} \subset T$ и $G^{reg} \subset G$ регулярных элементов, то есть таких элементов, что размерность их централизатора в группе G – минимальна.

Подалгебры Бете в янгиане представляют собой семейство коммутативных подалгебр, параметризованных группой G. Коммутативные подалгебры Бете в янгиане для $\mathfrak{gl}_n$ и скрученных янгианах исследовались в работе М. Назарова и Г. Ольшанского [204].

Положим $V = \bigoplus_i V(\omega_i, 0)$ – сумма фундаментальных представлений янгиана. Пусть $\rho_i : Y(\mathfrak{g}) \to \operatorname{End} V(\omega_i,0)$ – i-ое фундаментальное представление янгиана $Y(\mathfrak{g})$. Пусть

$$\pi_i : V \to V(\omega_i,0)$$

– проекция на i-ое фундаментальное представление.

Пусть $T^i(u) = \pi_i T(u)\pi_i$ – подматрица $T(u)$, соответствующая i-му фундаментальному представлению янгиана.

Определение 10. ([196, Определение 4.2]) Пусть $C \in \tilde{G}$. Подалгебра $B(C) \subset Y_V(\mathfrak{g})$ это подалгебра, порождённая всеми коэффициентами Фурье следующих рядов с коэффициентами в $Y_V(\mathfrak{g})$

$$\tau_i(u,C) = \operatorname{tr}_{V(\omega_i,0)} \rho_i(C) T^i(u), \;\; 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Замечание. Заметим, что $B(C)$ зависит только от класса элемента C в факторе $\tilde{G}/Z(\tilde{G})$. Таким образом, подалгебры Бете параметризованы элементами присоединённой группы G.

1.6.2.2 Результаты о подалгебрах Бете

Предложение 1.6.5. Коэффициенты рядов $\tau_i(u,C)$ попарно коммутируют.

Зададим фильтрацию на алгебре $Y_V(\mathfrak{g})$ формулой

$$\deg t_{ij}^{(r)} = r.$$

Теорема 1.6.9. ([196, Теорема 4.9]) Для любого элемента $C \in G^{reg}$ подалгебра $B(C) \subset Y_V(\mathfrak{g})$ является свободной полиномиальной алгеброй. Кроме того, ряд Пуанкаре алгебры $B(C)$ совпадает с рядом Пуанкаре подалгебры H.

Теорема 1.6.10. ([194, Теорема 1]) Для любого $C \in T^{reg}$ подалгебра $B(C)$ – максимальная коммутативная подалгебра $Y_V(\mathfrak{g})$.

Отсюда получаем следующее описание подалгебр Бете для $C \in T^{reg}$.

Следствие. ([194, Следствие 2]) Для любого $C \in T^{reg}$ подалгебра $B(C)$ янгиана $Y(\mathfrak{g})$ порождена

$$\operatorname{tr}_V \rho(C)(\rho \otimes 1)\hat{R}(u),$$

где (ρ, V) пробегает все конечномерные представления $Y(\mathfrak{g})$.

По аналогии с работой [207] эту теорему можно уточнить. Через $Q(C)$ обозначим квадратичную часть подалгебры $B(C)$, то есть $B(C) \cap F^2 Y_V(\mathfrak{g})$, где $F^2 Y_V(\mathfrak{g})$ – подпространство элементов степени не выше 2 алгебры $Y_V(\mathfrak{g})$.

Теорема 1.6.11. ([194, Теорема 3]) Пусть $C \in T^{reg}$. Подалгебра $B(C)$ совпадает с централизатором подпространства $Q(C)$.

Пространство $Q(C)$ может быть явно описано.

Предложение 1.6.6. ([194, Предложение 4]) Рассмотрим элементы

$$\sigma_i(C) = 2J(t_{\omega_i}) - \sum_{\alpha\in\Phi^+} \frac{e^\alpha(C)+1}{e^\alpha(C)-1}(\alpha,\alpha_i)x_\alpha x_\alpha^- \in Y(\mathfrak{g}),$$

$i = 1,\dots,n$. Тогда $Q(C)$ – линейная оболочка элементов $\sigma_i(C)$ и подпространства $\mathfrak{h}\cdot\mathfrak{h}+\mathfrak{h}$.

1.6.2.3 Основные методы

В основе доказательства теорем предыдущего раздела лежат теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта для янгианов. Определим фильтрацию на янгиане $Y_V(\mathfrak{g})$ формулой:

$$\deg t_{ij}^{(r)} = r-1.$$

Теорема 1.6.12. ([216]) Присоединенная градуированная алгебра $\operatorname{gr} Y_V(\mathfrak{g})$ изоморфна $U(\mathfrak{g}[t])$.

Эта фильтрация используется в работе [194]. В частности,

Предложение 1.6.7. ([194, Доказательство теоремы 1]) Пусть $C\in T^{reg}$. Тогда $\operatorname{gr} B(C) = U(\mathfrak{h}[t])$.

Вернемся к первой фильтрации на янгиане $Y_V(\mathfrak{g})$, которая заданна формулой

$$\deg t_{ij}^{(r)} = r.$$

Обозначим через gr' присоединенную градуированную по этой фильтрации.

Теорема 1.6.13. ([199]) Присоединенная градуированная алгебра $\operatorname{gr}' Y_V(\mathfrak{g})$ изоморфна $\mathcal{O}(G_1[[t^{-1}]])$.

Для доказательства теоремы 1.6.9 изучаются образы подалгебр $B(C), C\in G^{reg}$ в алгебре $\mathcal{O}(G_1[[t^{-1}]])$. Пусть $G[[t^{-1}]]$ – группа $\mathbb{C}[[t^{-1}]]$-точек группы G. Определим $G_1[[t^{-1}]]$ как ядро гомоморфизма $G[[t^{-1}]]\to G$. Алгебра $\mathcal{O}(G_1[[t^{-1}]])$ – это алгебра полиномиальных функций на группе $G_1[[t^{-1}]]$. В итоге доказательство теоремы сводится к следующему утверждению.

Предложение 1.6.8. ([211]) Дифференциалы характеров фундаментальных представлений группы $\tilde{G}$ в регулярной точке линейно независимы.

1.6.2.4 Приложения и возможные направления исследований

Подалгебры Бете интересны по следующим причинам:

— Подалгебры Бете янгиана $Y(\mathfrak{sl}_n)$ связаны с КМОЗ (квантовый метод обратной задачи) и алгебраическим анзацем Бете, см., например, [214], [197];

— Образ подалгебр Бете для элемента $C \in T^{reg}$ при действии янгиана на когомологиях колчанных многообразий есть подалегбра порожденная операторами квантового умножения на классы, при этом элемент C – это квантовый параметр, см. [201];

— Ожидается, что подалгебры Бете для вещественного значения аргумента имеют простой спектр в некоторых неприводимых представлениях, см. [200]. Следуя работам [208] и [192], естественно ожидать возможность получить кристаллы Кириллова-Решетихина с помощью предельных подалгебр Бете.

1.6.3 Подалгебры Бете и чудесная компактификация

Наша работа [196] посвящена определению подалгебр Бете в янгианах, а также связи подалгебр Бете с чудесной компактификацией присоединённой группы. Есть по крайней мере два естественных способа расширить пространство параметров для подалгебр Бете. Опишем один из них – чудесную компактификацию группы.

1.6.3.1 Чудесная компактификация присоединенной группы

Следуя [187], напомним конструкцию $\overline{G}$, чудесной компактификации Де Кончини-Прочези присоединенной группы Ли G. Пусть V – представление группы $\tilde{G}$. Отсюда получаем отображение

$$G \to \mathbb{P}(\operatorname{End} V).$$

Известно, что если $V = V_\lambda$, где V_λ – неприводимое представление с регулярным старшим весом λ, то замыкание образа G в пространстве $\mathbb{P}(\operatorname{End} V)$ не зависит от λ и является гладким проективным многообразием, которое называется чудесной компактификацией Де Кончини-Прочези $\overline{G}$.

Известно, что замыкание G в $\prod_i \mathbb{P}(\operatorname{End}(V(\omega_i,0)))$ изоморфно $\overline{G}$, см. обсуждение в [196, 5.4]. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n) \in \overline{G} \subset \prod_i \mathbb{P}(\operatorname{End}(V(\omega_i,0)))$.

Определение 11. Подалгебра Бете $B(X)$ порождена коэффициентами Фурье рядов

$$\tau_i(u,X) = \operatorname{tr}_{V(\omega_i,0)} \hat{X}_i T^i(u), \ \ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

где $\hat{X}_i$ – произвольный представитель X_i в пространстве $\operatorname{End}(V(\omega_i,0))$.

Легко видеть, что все подалгебры вида $B(X), X \in \overline{G}$ – коммутативны, см. [196].

1.6.3.2 Описание общих подалгебр Бете, параметризованных $\overline{G}$

Чтобы сформулировать утверждение, необходимо обсудить стратификацию пространства $\overline{G}$. Пусть $I \subset \Delta$. Обозначим через $P_I, P_I^- \subset G$ соответствующие противоположные параболические подгруппы, через $\mathfrak{p}_I, \mathfrak{p}_I^-$ – их алгебры Ли, $L_I = P_I \cap P_I^-$ – соответствующая подгруппа Леви, $G_I = L_I/Z(L_I)$. Имеется естественное действие $G \times G$ на $\overline{G}$:

$$(g_1,g_2) \cdot x = g_1 x g_2^{-1}.$$

Орбиты этого действия описываются следующим образом: имеется ровно 2^l орбит, каждая орбита S_I^0 соответствует подмножеству I, при этом $S_I^0 \simeq (G \times G) \times_{P_I \times P_I^-} G_I \to S_I^0, (g_1,g_2,x) \mapsto g_1 x g_2^{-1}$, т.е. S_I^0 – это однородное расслоение над $G/P_I \times G/P_I$ со слоем G_I. Обозначим через $\varphi : S_I^0 \to G/P_I \times G/P_I^-$ проекцию, а также отождествим G/P_I (соотв. G/P_I^-) с множеством параболических подалгебр, сопряженных $\mathfrak{p}_I$ (соотв. $\mathfrak{p}_I^-$). Определим

$$S_I^{00} = \bigcup_{\exists g \in G: \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I, \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{p}^- = \mathfrak{p}_I^-} \varphi^{-1}(\mathfrak{p},\mathfrak{p}^-).$$

В последней формуле Ad – это присоединенное действие группы на своей алгебре Ли.

В работе [196] показано, что замыкание тора $\overline{T} \subset \overline{G}$ принадлежит $\bigcup_I S_I^{00}$. Более того, дано описание подалгебр Бете, соответствующих точкам $\bigcup_I S_I^{00}$, в частности, $\overline{T}$.

Пусть $X = (g,g,x) \in S_I^{00}$, где $g \in G$, $x = \tilde{x} \circ \mathrm{pr}_I \in \mathbb{P}(\mathrm{End}\,(V_I)), \tilde{x} \in G_I$. Здесь V_I это L_I-подпредставление в V, порожденное старшим вектором. Отображение $\mathrm{pr}_I : V \to V_I$ – это $\tilde{G}$-инвариантное вложение. Пусть $\mathfrak{l} = \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{p}_I \cap \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{p}_I^-$ – соответствующая подалгебра Леви.

Теорема 1.6.14. ([196, Теорема 5.7]) Для любого $X = (g, g, x) \in S_I^{00}$, соответствующая подалгебра $B(X)$ совпадает с подалгеброй $B(g\hat{x}g^{-1}) \subset Y_V(\mathfrak{l}) \subset Y_V(\mathfrak{g})$, где $\hat{x} \in L_I$ такое, что класс $[\hat{x}]$ в $L_I/Z(L_I)$ совпадает с $\tilde{x}$.

1.6.4 Предельные подалгебры

Второй способ естественно расширить пространство параметров – это рассматривать предельные подалгебры. Здесь мы следуем работам [215], [210].

1.6.4.1 Определение предельных подалгебр

Пусть C – элемент множества G^{reg}. Напомним, что формула $\deg t_{ij}^{(r)} = r$ задаёт фильтрацию на $Y_V(\mathfrak{g})$. Пусть $FY_V^{(r)}$ – r-ая фильтрованная компонента. Рассмотрим $B^{(r)}(C) := FY_V^{(r)} \cap B(C)$. В работе [196] показано, что образы $\tau_1(u,C), \ldots, \tau_n(u,C)$ свободно порождают подалгебру $\bar{B}(C) = \operatorname{gr} B(C) \subset \operatorname{gr} Y_V(\mathfrak{g})$. Поэтому размерность $d(r)$ пространства $B^{(r)}(C)$ не зависит от C. Таким образом, для каждого $r \geqslant 1$ получаем отображение θ_r из G^{reg} в $\prod_{i=1}^r \mathrm{Gr}(d(i), \dim Y_V^{(i)})$ такое, что $C \mapsto (B^{(1)}(C), \ldots, B^{(r)}(C))$. Здесь $\mathrm{Gr}(d(i), \dim Y_V^{(i)})$ – грассманиан подпространств размерности $d(i)$ векторного пространства размерности $\dim FY_V^{(i)}$. Обозначим замыкание $\theta_r(G^{reg})$ (в топологии Зарисского) через Z_r. Рассмотрим проекции $\zeta_r : Z_r \to Z_{r-1}$ для всех $r \geqslant 1$. Обратный предел $Z = \varprojlim Z_r$ – это про-алгебраическая схема, которая естественно расширяет пространство параметров для подалгебр Бете.

Действительно, каждая точка $z \in Z$ – это последовательность $\{z_r\}_{r\in\mathbb{N}}$, где $z_r \in Z_r$ такая что $\zeta_r(z_r) = z_{r-1}$. Здесь z_r – это точка в $\prod_{i=1}^r \mathrm{Gr}(d(i), \dim Y_V^{(i)})$, т.е. набор подпространств $B_r^{(i)}(z) \subset Y_V^{(i)}$ такой что $B_r^{(i)}(z) \subset B_r^{(i+1)}(z)$ для всех $i < r$. Так как $\zeta_r(z_r) = z_{r-1}$, то $B_r^{(i)}(z) = B_{r-1}^{(i-1)}(z)$ для всех $i < r$. Определим подалгебру, отвечающую $z \in Z$ через $B(z) := \bigcup_{r=1}^\infty B_r^{(r)}(z)$.

Предложение 1.6.9. ([196, Предложение 4.11]) Для любого $z \in Z$ $B(z)$ является коммутативной подалгеброй янгиана $Y_V(\mathfrak{g})$. Ряд Пуанкаре $B(z)$ не меньше (лексикографически), чем ряд Пуанкаре подалгебры $B(C)$ при $C \in G^{reg}$. Мы называем подалгебры вида $B(z)$ предельными подалгебрами.

Обозначим через $\tilde{Z}$ замыкание G^{reg} в $Z \times \overline{G}$.

Предложение 1.6.10. ([196, Предложение 5.6]) Для любой точки $(z,X) \in \tilde{Z} \subset Z \times \overline{G}$ верно, что $B(X) \subseteq B(z)$.

Гипотеза состоит в том, что схема Z является разрешением чудесной компактификации $\overline{G}$. Точная формулировка следующая:

Гипотеза 1. Проекция $\tilde{Z}$ на первую компоненту схемы $Z \times \overline{G}$ задает изоморфизм $\tilde{Z} \tilde{\to} Z$. Проекция на вторую компоненту задаёт бирациональное собственное отображение $\tilde{Z} \to \overline{G}$.

1.6.5 Предельные подалгебры в случае $\mathfrak{gl}_n$

Наша работа [195] посвящена изучению предельных подалгебр в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$.

1.6.5.1 Янгиан для gl_n

Янгиан $Y(\mathfrak{gl}_n)$ для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$ получается как расширенный янгиан $X_V(\mathfrak{sl}_n)$, если в определении 9 в качестве положить $V = \mathbb{C}^n$ – тавтологическое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$. Тогда, с точностью до умножения на ряд $f(u) \in \mathbb{C}[[u]]$, верно, что $\hat{R}(u) = 1 - Pu^{-1}$, где P – оператор перестановки, т.е. $P(u \otimes v) = v \otimes u$ для любых $u,v \in V$.

Определим подалгебру Бете для расширенного янгиана как произведение подалгебры Бете в $Y_V(\mathfrak{g})$ и центра алгебры $X_V(\mathfrak{g})$. Из определения также следует, что задачи описания предельных подалгебр Бете в случае $Y(\mathfrak{gl}_n)$ и $Y(\mathfrak{sl}_n)$ эквивалентны. Подробное обсуждение подалгебр Бете в $Y(\mathfrak{gl}_n)$ содержится в разделе 2 работы [195], а связь между общим определением подалгебр Бете и определением подалгебр Бете янгиана $Y(\mathfrak{gl}_n)$ в разделе 6 работы [196].

1.6.5.2 Некоторые гомоморфизмы янгиана $Y(\mathfrak{gl}_n)$

Определим два различных вложения $Y(\mathfrak{gl}_n)$ в янгиан $Y(\mathfrak{gl}_{n+k})$:

$$i_k : Y(\mathfrak{gl}_n) \to Y(\mathfrak{gl}_{n+k})\ t_{ij}^{(r)} \mapsto t_{ij}^{(r)},$$

$$\varphi_k : Y(\mathfrak{gl}_n) \to Y(\mathfrak{gl}_{n+k})\ t_{ij}^{(r)} \mapsto t_{k+i,k+j}^{(r)}.$$

Из ПБВ теоремы следует, что эти отображения инъективны.

Определим гомоморфизм

$$\pi_n : Y(\mathfrak{gl}_n) \to U(\mathfrak{gl}_n);\ t_{ij}(u) \mapsto \delta_{ij} + E_{ij}u^{-1}.$$

Здесь E_{ij} стандартные образующие $\mathfrak{gl}_\mathfrak{n}$. Отображение π_n – это сюръективный гомоморфизм $Y(\mathfrak{gl}_n) \to U(\mathfrak{gl}_n)$, называемый гомоморфизмом вычисления.

Положим

$$\omega_n : Y(\mathfrak{gl}_n) \to Y(\mathfrak{gl}_n);\ T(u) \mapsto (T(-u-n))^{-1}.$$

Легко видеть, что отображение ω_n – инволютивный автоморфизм янгиана $Y(\mathfrak{gl}_n)$. Наконец, определим гомоморфизм

$$\psi_k = \omega_{n+k} \circ \varphi_k \circ \omega_n : Y(\mathfrak{gl}_n) \to Y(\mathfrak{gl}_{n+k}).$$

Отметим, что гомоморфизм ψ_k инъективен.

1.6.5.3 Алгебры сдвига аргумента в $S(\mathfrak{g})$ и $U(\mathfrak{g})$

Для того, чтобы сформулировать результаты о предельных подалгебрах нам потребуется определить семейство подалгебр в алгебрах $S(\mathfrak{g})$ и $U(\mathfrak{g})$.

Введём фильтрацию на алгебре $U(\mathfrak{g})$: $\deg x = 1$, $\forall\, x \in \mathfrak{g}$. По теореме Пуанкаре-Биркгофа-Витта $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$. Более того, алгебра $S(\mathfrak{g})$ превращается в алгебру Пуассона. Скобка Пуассона задаётся на образующих следующим образом

$$\{x,y\} = [x,y] \ \forall\ x,y \in \mathfrak{g}.$$

Известно, что пуассонов центр алгебры $S(\mathfrak{g})$ свободно порождён $\operatorname{rk}\mathfrak{g}$ однородными образующими $P_1, \ldots, P_n$ некоторых степеней $s_1, \ldots, s_n$. Пусть $\chi \in \mathfrak{g}$ – произвольный элемент.

Определение 12. Подалгебра $S(\mathfrak{g})$, порождённая элементами

$$\partial_\chi^{c_i} P_i, 1 \leqslant c_i \leqslant s_i - 1,$$

называется алгеброй сдвига аргумента и обозначается через $F(\chi)$.

Элемент алгебры Ли называется регулярным, если размерность его централизатора в алгебре Ли минимальна. Обозначим через $\mathfrak{g}^{reg} \subset \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}^{reg} \subset \mathfrak{h}$ множества регулярных и регулярных полупростых элементов соответственно.

Теорема 1.6.15. ([188]) Если $\chi \in \mathfrak{g}^{reg}$, то алгебра $F(\chi)$ свободно порождается своими образующими, имеет максимальную возможную степень трансцендентности $\dim \mathfrak{b}$ среди коммутативных подалгебр $S(\mathfrak{g})$.

Теорема 1.6.16. ([212], [206]) Если $\chi \in \mathfrak{g}^{reg}$, то алгебра $F(\chi)$ максимальная пуассоново-коммутативная подалгебра $S(\mathfrak{g})$.

Будем называть поднятием алгебры $F(\chi)$ такую алгебру $\hat{F}(\chi) \subset U(\mathfrak{g})$, что $\operatorname{gr} \hat{F}(\chi) = F(\chi)$.

Теорема 1.6.17. ([188], [213]) Для любого элемента $\chi \in \mathfrak{g}^{reg}$ существует поднятие $\hat{F}(\chi)$. Алгебра $F(\chi)$ является максимальной коммутативной подалгеброй $U(\mathfrak{g})$. Более того, в типе A такое поднятие – единственно.

На самом деле известно, что в типе A поднятие существует и единственно для любого $\chi \in \mathfrak{g}$, см. [189].

Наконец, отметим, что в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ алгебра сдвига аргумента $\hat{F}(\chi)$ для $\chi \in \mathfrak{h}^{reg}$ может быть получена из подалгебры Бете как образ гомоморфизма вычисления, т.е. $\pi_n(B(\chi)) = \hat{F}(\chi)$, см. [204].

1.6.5.4 Компактификация Делиня-Мамфорда

Подробно конструкция замыкания Делиня- Мамфорда $\overline{M_{0,n}}$ описана в работе [182], см. также [193]. В этом разделе мы дадим комбинаторное описание точек замыкания Делиня-Мамфорда. Пусть $n \geqslant 3$ – целое число. Определим пространство $M_{0,n}$ рациональных кривых рода 0 с n отмеченными точками, т.е. $\mathbb{CP}^1$ с n отмеченными точками. $\overline{M_{0,n}}$ – пространство Делиня-Мамфорда стабильных рациональных кривых с n отмеченными точками – это гладкое многообразие, компактификация пространства $M_{0,n}$.

Точки $\overline{M_{0,n}}$ – это классы изоморфизма кривых рода 0 с n отмеченными точками и, возможно, с точками простого самопересечения, так, что каждая компонента содержит по крайней мере три различных точки (отмеченных или особых).

1.6.5.5 Пределы алгебр сдвига аргумента

По поводу предельных подалгебр сдвига аргумента, см. [215], [210]. Описание замыкания семейства алгебр сдвига аргумента, параметризованных $\mathfrak{h}^{reg}$ было найдено в работе В. Шувалова [210]. В работе [192] было найдено многообразие, параметризующее все предельные подалгебры этого семейства. Мы опишем эти результаты только в типе A.

Обозначим через $\mathcal{T}$ семейство подалгебр сдвига аргумента в алгебре $S(\mathfrak{gl}_n)$, зависящих от параметра $C \in \mathfrak{h}^{reg}$. Легко видеть, что алгебра сдвига аргумента не меняется при замене переменных $C \mapsto aC + bE$, где $a,b \in \mathbb{C}^*, a \neq 0$. Поэтому пространство параметров семейства $\mathcal{T}$ можно рассматривать как пространство $M_{0,n+1}$, то есть каждой диагональной матрице с с различными ненулевыми собственными значениями $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ сопоставим кривую с отмеченными точками $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \infty$.

Теорема 1.6.18. ([192]) Пространство параметров замыкания семейства $\mathcal{T}$ изоморфно $\overline{M_{0,n+1}}$.

Теорема 1.6.19. ([213]) Пусть $X \in \overline{M_{0,n+1}}$. Существует единственное поднятие $\hat{F}(X)$ алгебры $F(X)$.

Из этой теоремы, вообще говоря, еще не следует, что пределы семейства подалгебр сдвига аргумента в $U(\mathfrak{gl}_n)$ параметризуются тем же многообразием, что и пределы соответствующего семейства в $S(\mathfrak{gl}_n)$. Это доказывается в работе [192].

1.6.5.6 Основные результаты

Рассмотрим задачу нахождения пространства, параметризующего все предельные подалгебры, где пределы берутся только по тору T, т.е. в определении предельных подалгебр 1.6.4.1 получим про-алгебраическую схему Z как замыкание множества T^{reg} регулярных элементов тора.

Теорема 1.6.20. ([195, Теорема 5.1]) Замыкание T^{reg}, параметризующее семейство предельных подалгебр изоморфно компактификации Делиня-Мамфорда $\overline{M_{0,n+2}}$. Все предельные подалгебры являются свободными полиномиальными алгебрами, а также максимальными коммутативными подалгебрами $Y(\mathfrak{gl}_n)$.

Предельные подалгебры Бете можно описать рекурсивно, аналогично алгебрам сдвига аргумента, см. [210], [192]. Пусть X_∞ – это неприводимая компонента $X \in \overline{M_{0,n+2}}$, содержащая точку ∞. Отождествим X_∞ с пространством $\mathbb{CP}^1$ так, что отмеченная точка ∞ отождествляется с ∞, а точка, в которой кривая с отмеченной точкой 0 касается X_∞ – с 0. Каждой точке $\lambda \in X_\infty$ сопоставим число k_λ отмеченных ненулевых точек на максимальной кривой X_λ, касающейся X_∞ в точке λ (положим $k_\lambda = 1$ если X_λ – отмеченная точка).

Пусть C – диагональная $(n-k_0)\times(n-k_0)$-матрица с собственными значениями λ кратности k_λ для всех различных точек $0 \neq \lambda \in X_\infty$. Тогда подалгебра $i_{k_0}(B(C))$ коммутирует с подалгеброй Ли $\bigoplus\limits_{\lambda\neq 0} \mathfrak{gl}_{k_\lambda}$ в $\mathfrak{gl}_{n-k_0} \subset i_{k_0}(Y(\mathfrak{gl}_{n-k_0})) \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$, а также с янгианом $\psi_{n-k_0}(Y(\mathfrak{gl}_{k_0}))$.

Теорема 1.6.21. ([195, Теорема 5.2])

а) Предельная подалгебра Бете, соответствующая $X \in \overline{M_{0,n+2}}$ является произведением следующих коммутирующих подалгебр: $i_{k_0}(B(C)) \subset i_{k_0}(Y(\mathfrak{gl}_{n-k_0})) \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$, подалгебры, соответствующей X_0 в янгиане $\psi_{n-k_0}(Y(\mathfrak{gl}_{k_0})) \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$ и алгебр сдвига аргумента $\hat{F}(X_\lambda)$ в $U(\mathfrak{gl}_{k_\lambda}) \subset i_{k_0}(Y(\mathfrak{gl}_{n-k_0})) \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$ для всех точек $\lambda \neq 0$ (как и прежде, мы определяем точке ∞ на каждой X_λ как пересечение с X_∞).

б) $i_{k_0}(B(C))$ содержит центр каждой $U(\mathfrak{gl}_{k_\lambda}) \subset i_{k_0}(Y(\mathfrak{gl}_{n-k_0}))$. Произведение из пункта 1 теоремы на самом деле является тензорным произведением

$$\psi_{n-k_0}(B(X_0)) \otimes_{\mathbb{C}} i_{k_0}(B(C)) \otimes_{ZU(\bigoplus_{\lambda\neq 0}\mathfrak{gl}_{k_\lambda})} \bigotimes_{\lambda\neq 0} \hat{F}(X_\lambda).$$

Основная идея доказательства – это централизаторная конструкция Ольшанского [205], а также результаты [210] и [179]. А именно, пусть $A_0 = \mathbb{C}[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots]$ – это фильтрованная алгебра многочленов от счётного числа переменных, $\deg \mathcal{E}_i = i$. Справедливо следующее предложение

Предложение 1.6.11. ([205]) Существует последовательность гомоморфизмов алгебр $\eta_k : Y(\mathfrak{gl}_n) \otimes A_0 \to U(\mathfrak{gl}_{n+k})^{\mathfrak{gl}_k}$ являющаяся асимптотическим изоморфизмом. Последнее означает, что для любого N существует K такое, что для любого $k > K$ ограничение η_k на N-ую фильтрованную компоненту $(Y(\mathfrak{gl}_n) \otimes A_0)_N$ – изоморфизм векторных пространств $(Y(\mathfrak{gl}_n) \otimes A_0)_N \simeq U(\mathfrak{gl}_{n+k})^{\mathfrak{gl}_k}_N$.

Определение семейства гомоморфизмов $\{\eta_k\}$ см., например, [195].

Предложение 1.6.12. ([195, Предложение 6.7]) Для любого $C \in T^{reg}$ ограничение η_k на $B(C)$ задает асимптотический изоморфизм между $B(C)$ и $\hat{F}(C^{(k)})$.
Здесь $C^{(k)} := \operatorname{diag}(C, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k})$.

Предложение 1.6.13. ([195, Лемма 4.11]) Пусть $\mathfrak{A}$ – семейство подалгебр вида $\hat{F}(\operatorname{diag}(C, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}))$, $C \in T^{reg} \subset GL_n$. Замыкание пространства параметров семейства $\mathfrak{A}$ есть $\overline{M_{0,n+2}}$. Все предельные подалгебры семейства $\mathfrak{A}$ – максимальные коммутативные подалгебры $U(\mathfrak{gl}_{n+k})^{\mathfrak{gl}_k}$.

1.6.5.7 Гипотеза о связи с чудесной компактификацией в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$

Пусть Z – пространство, параметризующее замыкание семейства подалгебр, параметризованных T^{reg}, то есть $\overline{M_{0,n+2}}$. Рассмотрим замыкание $\tilde{Z}$ множества T^{reg} в $Z \times \overline{T}$. Здесь $\overline{T} = \overline{T}^{reg}$ – замыкание тора в чудесной компактификации группы.

Пусть $(z,X) \in \tilde{Z}$. Нам известно, что $B(X) \subseteq B(z)$. Из обсуждения в [196, Разделе 6], следует, что точка $z \in \overline{M_{0,n+2}}$ однозначно определяет точку X. Таким образом проекция на первый фактор – изоморфизм. Из того же обсуждения следует, что проекция на второй фактор – бирациональное собственное отображение. Таким образом, в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ и замыкания семейства, параметризованного T^{reg}, гипотеза 1 становится теоремой.

1.6.5.8 Замыкание тора для произвольной алгебры Ли $\mathfrak{g}$

Естественным обобщением компактификации тора $\overline{M_{0,n+2}}$ для произвольной алгебры Ли является компактификация Де Кончини-Прочези набора подмногообразий в многообразии. А именно, пусть $\overline{T}$ – чудесная компактификация тора $T \subset G$. Тогда

$T^{reg} = \overline{T} \setminus C$, где C – это набор гиперповерхностей в $\overline{T}$. Следуя работе [180] по этим данным можно построить компактификацию $M_{\mathfrak{g}}$ множества T^{reg}.

Гипотеза 2. $M_{\mathfrak{g}}$ является пространством параметров замыкания семейства подалгебр Бете $B(C) \subset Y(\mathfrak{g}), C \in T^{reg}$. Все предельные подалгебры – свободные, максимальные коммутативные подалгебры янгиана и имеют тот же ряд Пуанкаре, что и $B(C), C \in G^{reg}$.

Заметим, что это согласуется с геометрическим описанием алгебр Бете как подалгебр квантового умножения в квантовых когомологиях.

Дальнейшее направление исследований — это изучение спектров подалгебр Бете в представлениях янгианов.

Гипотеза 3. Подалгебры Бете $B(C), C \in G^{reg}$ имеют простой спектр в некотором классе представлений $Y(\mathfrak{g})$.

Предстоит придать точный смысл словам «некоторый класс». Из некоторых соображений этим классом могут быть модули Кириллова-Решетихина. В качестве отправной точки интересно решить этот вопрос в случае неприводимых конечномерных представлений $Y(\mathfrak{sl}_2)$.

Доказательство этого факта позволит, аналогично [192], определить накрытие пространства параметров, параметризующих подалгебры Бете с простым спектром, решениями уравнений анзаца Бете и таким образом получить действие фундаментальной группы пространства параметров на множестве собственных подпространств подалгебр Бете. Ожидается, что это действие может быть описано в терминах кристаллов.

1.6.6 Максимальность подалгебр Бете

Остановимся чуть подробнее на доказательстве максимальности подалгебр Бете в янгиане. Пусть $\mathfrak{g}$ – простая комплексная алгебра Ли, G – соответствующая связная односвязная группа Ли, T – максимальный тор, T^{reg} — множество регулярных элементов тора, $\mathfrak{h}$ – соответствующая картановская подалгебра, $n = \operatorname{rk} \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h}$.

Пусть Φ обозначает соответствующую алгебре Ли $\mathfrak{g}$ систему корней, Φ^+ – положительные корни, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ – простые корни, $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ – фундаментальные веса, $(,)$ – инвариантное скалярное произведение, такое что $(\alpha, \alpha) = 2$ для коротких простых корней, $\mathfrak{g}_\alpha$ – соответствующие корневые подпространства алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, x_\alpha^- \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ такие, что $(x_\alpha, x_\alpha^-) = 1$, $t_{\omega_i} \in \mathfrak{h}$ – элемент, соответствующий ω_i при помощи инвариантного скалярного произведения. Аналогично h_i – это элемент соответствующий α_i.

Положим $d_i = \frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2}$. Определим также

$$\Omega = \sum_{\alpha\in\Phi^+} (x_\alpha^+ \otimes x_\alpha^- + x_\alpha^- \otimes x_\alpha^+) + \frac{1}{d_i}\sum_i t_{\omega_i} \otimes h_i \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}.$$

Наконец, пусть $e^\alpha \in \mathbb{C}[T]$ – мономиальная функция, заданная α.

Янгиан $Y(\mathfrak{g})$ – это ассоциативная алгебра, деформация универсальной обертывающей $U(\mathfrak{g}[t])$, где $\mathfrak{g}[t]$ – алгебра токов.

Определение 13. Янгиан $Y(\mathfrak{g})$ – это ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{C}$ порождённая элементами $\{x, J(x) \,|\, x \in \mathfrak{g}\}$ со следующими определяющими соотношениями:

$$xy - yx = [x,y], \qquad J([x,y]) = [J(x), y],$$

$$J(cx + dy) = cJ(x) + dJ(y),$$

$$[J(x),[J(y),z]] - [x,[J(y),J(z)]] = \sum_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} ([x,x_\lambda], [[y,x_\mu],[z,x_\nu]])\{x_\lambda, x_\mu, x_\nu\},$$

$$[[J(x),J(y)],[z,J(w)]] + [[J(z),J(w)],[x,J(y)]] =$$

$$= \sum_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} \left(([x,x_\lambda],[[y,x_\mu], [[z,w],x_\nu]]) + ([z,x_\lambda],[[w,x_\mu],[[x,y],x_\nu]])\right)\{x_\lambda,x_\mu,J(x_\nu)\}$$

для всех $x,y,z,w \in \mathfrak{g}$ и $c,d \in \mathbb{C}$, где $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ некоторый ортонормированный базис $\mathfrak{g}$, $\{x_1,x_2,x_3\} = \frac{1}{24}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_3} x_{\pi(1)}x_{\pi(2)}x_{\pi(3)}$ для всех $x_1,x_2,x_3 \in Y(\mathfrak{g})$.

Через

$$\hat{R}(u) = Id - \Omega u^{-1} + \sum_{k\geqslant 2} R^{(k)}u^{-k} \in (Y(\mathfrak{g})\otimes Y(\mathfrak{g}))[[u^{-1}]]$$

обозначим универсальную R-матрицу [216, Теорема 3.4]. Пусть V – произвольное нетривиальное конечномерное представление янгиана, ρ – соответствующий гомоморфизм $Y(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}\,(V)$. В работе [216] янгиан $Y(\mathfrak{g})$ был задан следующими образующими (RTT-образующими) и соотношениями (см. также [183]):

Определение 14. $Y_V(\mathfrak{g})$ – это ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{C}$ с образующими $t_{ij}^{(r)}, 1 \leqslant i,j \leqslant \dim V; r \geqslant 1$ и определяющими соотношениями

$$R(u-v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)R(u-v) \quad \text{в } \mathrm{End}\,(V)^{\otimes 2}\otimes Y_V(\mathfrak{g})[[u^{-1},v^{-1}]],$$

$$S^2(T(u)) = T\left(u + \frac{1}{2}c_{\mathfrak{g}}\right),$$

где $T(u) = (t_{ij}(u))_{i.j=1,\dots\dim V}, t_{ij}(u) = \delta_{ij} + \sum_{r\geqslant 1} t_{ij}^{(r)}$, $R(u-v) = (\rho\otimes\rho)\hat{R}(u-v)$, $S(T(u)) = T(u)^{-1}$, $c_{\mathfrak{g}}$ – значение элемента Казимира алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на присоединенном представлении.

Теорема 1.6.22. [216] Отображение $\psi : Y_V(\mathfrak{g}) \to Y(\mathfrak{g})$, такое что $T(u) \mapsto (\rho \otimes 1)\hat{R}(-u)$ задаёт изоморфизм $Y_V(\mathfrak{g})$ и $Y(\mathfrak{g})$.

Далее считаем, что $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V(\omega_i,0)$ – сумма фундаментальных представлений янгиана. Известно, что как представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ представление $V(\omega_i,0) = V_{\omega_i} \oplus \bigoplus_{\mu<\omega_i} V_\mu^{\oplus k_\mu}$, где $k_\mu \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Здесь V_μ – неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ старщего веса μ и $\mu < \omega_i$ означает, что $\omega_i - \mu$ – сумма положительных корней. Также мы в дальнейшем будем отождествлять $Y_V(\mathfrak{g})$ и $Y(\mathfrak{g})$ посредством изоморфизма ψ теоремы.

Пусть $C \in G$ – регулярный элемент. Пусть $\pi_i : V \to V(\omega_i, 0)$ – проекция, $T^i(u) = \pi_i T(u) \pi_i$. Рассмотрим ряды

$$\tau_i(u,C) = \operatorname{tr}_{V(\omega_i,0)} \rho_i(C) T^i(u), 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Коэффициенты рядов $\tau_i(u,C)$ попарно коммутируют и алгебраически независимы [195]. Порожденную ими подалгебру обозначим через $B(C)$. Подалгебры вида $B(C)$ называются подалгебрами Бете. Как показано в работе [195], в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ эти подалгебры совпадают с подалгебрами Бете, определенными в работе [204]. Основным нашим результатом является следующая

Теорема 1.6.23. Для любого $C \in T^{reg}$ подалгебра Бете $B(C)$ – максимальная коммутативная подалгебра $Y_V(\mathfrak{g})$.

Так как для любых двух представлений янгиана W_1, W_2 коэффициенты рядов $\operatorname{tr}_{W_i} \rho(C)(\rho \otimes 1)\hat{R}(u), i = 1{,}2$ попарно коммутируют [195], получаем описание подалгебр Бете в $Y(\mathfrak{g})$:

Следствие. Для любого $C \in T^{reg}$ подалгебра Бете $B(C)$ в $Y(\mathfrak{g})$ порождена

$$\operatorname{tr}_V \rho(C)(\rho \otimes 1)\hat{R}(u),$$

где (ρ, V) пробегает все конечномерные представления $Y(\mathfrak{g})$.

Доказательство теоремы. Зададим фильтрацию на $Y_V(\mathfrak{g})$: $\deg t_{ij}^{(r)} = r - 1$. Зададим градуировку на $U(\mathfrak{g}[t])$: $\deg(x \cdot t^r) = r - 1$ для любого $x \in \mathfrak{g}$. Тогда известно, что $\operatorname{gr} Y_V(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}[t])$, см. [216]. Наша цель – доказать, что $\operatorname{gr} B(C) = U(\mathfrak{h}[t])$. Отсюда будет следовать требуемое утверждение, так как $U(\mathfrak{h}[t])$ – максимальная коммутативная подалгебра в $U(\mathfrak{g}[t])$, см. например [203, Лемма 1.7.4].

Обозначим через $\tau_i^{(r)}$ коэффициент при u^{-r} ряда $\tau_i(u,C)$, через $\mathfrak{h}^{(r)}$ и $\mathfrak{g}^{(r)}$ подпространства $\mathfrak{h} \cdot t^r \subset \mathfrak{g}[t]$ и $\mathfrak{g} \cdot t^r \subset \mathfrak{g}[t]$ соответственно. Заметим, что старшая часть $\tau_i^{(r)}$ –

линейна относительно заданной фильтрации, а так же инвариантна относительно сопряжения элементом $C \in T^{reg}$. Отсюда следует, что старшая часть каждого коэффициента $\tau_i^{(r)}$ при u^{-r} ряда $\tau_i(u,C)$ попадает в $\mathfrak{h}^{(r)}$.

Отождествим $\mathfrak{g}^{(r)}$ для каждого $r \geqslant 1$ с касательным пространством в точке C группы G. При этом отождествлении коэффициенты $\tau_i^{(r)}, i = 1, \dots, n$ являются дифференциалами характеров представлений $V(\omega_i,0)$ как представлений группы Ли G в точке $C \in T^{reg}$, что следует из задания $U(\mathfrak{g}[t])$ образующими и соотношениями, см. [216, Предложение 4.4], и из [216, Теорема 6.5]. Но дифференциалы характеров фундаментальных представлений в регулярной точке – линейно независимы, см. например [211]. Принимая во внимание то, что любое неприводимое представление может быть реализовано как старшее подпредставление тензорного произведения фундаментальных представлений, получаем, что дифференциалы характеров представлений $V(\omega_i,0)$ выражаются через характеры фундаментальных представлений группы G верхнетреугольным образом. Следовательно, $\operatorname{gr} B(C) = U(\mathfrak{h}[t])$. Теорема доказана.

По аналогии с работой [207] теорему можно уточнить. Зададим другую фильтрацию на $Y_V(\mathfrak{g})$: $\deg t_{ij}^{(r)} = r$. Через $Q(C)$ обозначим квадратичную часть подалгебры $B(C)$, то есть $B(C) \cap F^2 Y_V(\mathfrak{g})$, где $F^2 Y_V(\mathfrak{g})$ – подпространство элементов степени не выше 2 алгебры $Y_V(\mathfrak{g})$.

Теорема 1.6.24. Пусть $C \in T^{reg}$. Подалгебра $B(C)$ совпадает с централизатором подпространства $Q(C)$.

Доказательство. Рассмотрим $\operatorname{gr} Q(C) \subset U(\mathfrak{g}[t])$. Заметим, что $\operatorname{gr} Q(C) \supset \mathfrak{h}^{(2)}$. С другой стороны, централизатор $\mathfrak{h}^{(2)}$ в $U(\mathfrak{g}[t])$, совпадает с $U(\mathfrak{h}[t])$, см. доказательство Предложения 2.6 [195]. □

Пространство $Q(C)$ может быть явно описано.

Предложение 1.6.14. Рассмотрим элементы

$$\sigma_i(C) = 2J(t_{\omega_i}) - \sum_{\alpha \in \Phi^+} \frac{e^\alpha(C)+1}{e^\alpha(C)-1}(\alpha, \alpha_i) x_\alpha x_\alpha^- \in Y(\mathfrak{g}),$$

$i = 1, \dots, n$. Тогда $Q(C)$ – линейная оболочка элементов $\sigma_i(C)$ и подпространства $\mathfrak{h}\cdot\mathfrak{h}+\mathfrak{h}$.

Доказательство. Элементы $\sigma_i(C)$ – это с точностью до $\mathfrak{h} + \mathfrak{h} \cdot \mathfrak{h}$ и невырожденного линейного преобразования “старшие части” коэффициентов при u^{-2} рядов $\tau_i(u,C)$, что легко следует из явного вида коэффициента $R^{(2)}$ универсальной R-матрицы:

$$R^{(2)} = -\sum_{\lambda \in \Phi^+} (x_\alpha^\pm \otimes J(x_\alpha^\mp) - J(x_\alpha^\pm) \otimes x_\alpha^\mp) - \frac{1}{d_i} \sum_{i=1}^n (h_i \otimes J(t_{\omega_i}) - J(h_i) \otimes t_{\omega_i}) + \frac{1}{2}\Omega^2.$$

Проверка представляет собой прямое вычисление, которое сводится к сравнению коэффициентов при $x_\alpha x_\alpha^-$. Эти коэффициенты в свою очередь зависят только от соответствующей корню α $\mathfrak{sl}_2$-тройки. □

Следствие. Подалгебра Бете $B(C)$ совпадает с централизатором линейной оболочки элементов $\sigma_i(C), i = 1, \ldots, n$.

1.6.7 Подалгебра Бете в обобщенном янгиане

Пусть V – конечномерное векторное пространство над основным полем (далее рассматриваем поле комплексных или вещественных чисел) размерности N. Мы будем называть твистом линейный оператор $R \in \mathrm{End}(V^{\otimes 2})$, который является решением следующего соотношения кос:

$$R_1 R_2 R_1 = R_2 R_1 R_2.$$

Кроме того, будем дополнительно требовать выполнения либо квадратичного условия Гекке

$$(R - q\, I)(R + q^{-1}\, I) = 0, \quad q \in C \setminus \{0, \pm 1\}$$

либо условия

$$R^2 = I.$$

Оператор R называется соответственно симметрией Гекке или инволютивной симметрией. Имея такие симметрии мы строим токовые операторы $R(u,v)$, котоые удовлетворяют квантовому уравнению Янга-Бакстера со спектральным параметром

$$R_1(u,v) R_2(u,w) R_1(v,w) = R_2(v,w) R_1(u,w) R_2(u,v).$$

Ранее в работах Д.Гуревича и П.Сапонова был определн так назваемый обобщенный янгиан. Это ассоциативная бесконечномерная алгебра, порожденная счетным набором образующих. Перестановочные соотношения на образующие удобно записывать в терминах $N \times N$ токовой матрицы $L(u)$, матричные элементы которой удовлетворяют квадратичным перестановочным соотношениям:

$$R_1(u,v)\, L_{\overline{1}}(u)\, L_{\overline{2}}(v) - L_{\overline{1}}(v)\, L_{\overline{2}}(u)\, R_1(u,v) = 0.$$

Эта токовая или производящая матрица $L(u)$ является формальным рядом по обратным степеням спектрального параметра u

$$L(u) = I + \sum_{k=1}^{\infty} L[k]\, u^{-k}.$$

Таким образом, квадратичное матричное уравнение на токовую матрицу $L(u)$ приводит к бесконечной системе соотношений на лорановские коэффициенты $L[k]$. Для обобщенного янгиана будет использоваться обозначение $\mathbf{Y}(R)$.

Заметим, что если положить $R = P$, где P – обычная матрица перестановки, то обобщенный янгиан перейдет в известный янгиан $\mathbf{Y}(gl(N))$, введенный Дринфельдом.

Янгианоподобные алгебры можно определить и в более широком контексте, взяв за основу совместную пару твистов (R,F). По определению, совместная пара есть упорядоченная пара решений соотношений кос (твистов), удовлетворяющая дополнительным соотношениям:

$$R_1F_2F_1 = F_2F_1R_2, \qquad R_2F_1F_2 = F_1F_2R_1.$$

Зафиксировав такую пару, мы можем определить обобщенный янгиан квадратичным соотношением на производящую матрицу, аналогичным вышеприведенному. Различие будет состоять в конструкции копий производящей матрицы: матрицы $L_{\overline{k}}(u)$ теперь задаются с помощью твиста F:

$$L_{\overline{1}}(u) = L_1(u), \quad L_{\overline{k+1}}(u) = F_kL_{\overline{k}}(u)F_k^{-1}, \quad k \geq 1.$$

Как нетрудно убедиться, полагая $F = P$ или $F = R$ мы получим совместную пару (R,F) для любого твиста R. Эти важные частные случаи будут выделяться специальной терминологией: если $F = R$, мы будем называть соответствующую алгебры $\mathbf{Y}(R)$ янгианом уравнения отражений, а при $F = P$ – янгианом RTT-типа. Если симметрия Гекке R приходит из квантовой группы $U_q(sl(N))$, то соответствующий обобщенный янгиан $\mathbf{Y}(R)$ RTT типа иногда называют q-янгианом.

Аналоги некоторых симметрических полиномов, подалгебр Бете, тождеств Ньютона и матричных тождеств Гамильтона-Кэли можно построить в любом обобщенном Янгиане. Однако обобщенные янгианы уравнения отражений обладают рядом специфических особенностей, которые выделяют этот класс алгебр среди других обобщенных янгианов. Например, теория конечномерных представлений янгиана уравнения отражений весьма схожа с теорией конечномерных представлений дринфельдовского янгинана $gl(n)$-типа. Кроме того, квантовый детерминант (элементарный симметрический полином старшего порядка) всегда принадлежит центру обобщенного янгиана уравнения отражений, тогда как для других типов обобщенных янгианов это, вообще говоря, неверно.

Мы доказываем важный структурный результат, а именно, если твист R представляет собой четную симметрию, то элементарные симметрические полиномы в соответствующем обобщенном янгиане уравнения отражений коммутируют друг с другом и порождают коммутативную подалгебру, называемую подалгеброй Бете.

1.7 Закон больших чисел в модели RPM

Статистическая RPM модель (от английского теримина raise and peel model) представляет собой неравновесную модель флуктуирующего интерфейса, определенную как Марковский процесс с непрерывным временем. Ее генератор дается стохастической версией гамильтониана Темперли-Либа, который, в свою очередь, является высокоанизотропным пределом трансфер-матрицы модели $O(1)$ плотных петель. В общем случае, модель $O(n)$ петель активно изучалась в контексте теории критических явлений, поскольку она была введена как графическая решеточная модель и ожидалось, что она попадает в тот же класс универсальности, что и $O(n)$ векторная модель. Интерес к частному случаю $O(1)$ модели значительно возрос после открытия А.Разумовым и Ю.Строгановым замечательной комбинаторной структуры основного состояния квантовой XXZ цепочки в специфической комбинаторной точке. Дальнейшие исследования привели к формулировке знаменитой гипотезы Разумова-Строганова о загадочной связи основного состояния трансфер-матрицы модели $O(1)$ плотных петель и набором конфигураций модели плотно упакованных петель, которые, в свою очередь, связаны со знакопеременными матрицами. Затем был выдвинут еще целый ряд гипотез о связях RPM модели с шестивершинной моделью. XXZ моделью, моделью плотно упакованных петель, моделью $O(1)$ плотных петель и знакопеременными матрицами. Некоторые из этих гипотез, включая саму гипотезу Разумова-Строганова, уже доказаны, но большая их часть еще остаются в ранге предположений.

Многие из этих утверждений касаются структуры вектора основного состояния трансфер-матрицы или гамильтонианов. Термин "комбинаторная точка" отражает тот факт, что при специальных значениях параметров координаты вектора основного состояния в подходящем базисе могут быть выбраны целыми положительными числами. Суммы этих чисел оказываются связанными с комбинаторными числами возникающими в перечислении знакопеременных матриц. Если трактовать надлежащим образом нормированные координаты как распределение вероятностей, то можно оценить вероятности или значения корреляционных функций по этим распределениям. На основе анализа конечномерных систем были предложены некоторые гипотезы относительно точной нормировки основного состояния и корреляционных функций модели $O(1)$ плотных петель с различными типами граничных условий.

Мы обратимся к доказательству двух упомянутых гипотеж в контексте RPM. Мы рассматриваем RPM модель на сегменте с периодическими граничными условиями. Модель формулируется в терминах $1-d$ интерфейса, который представляет собой верхнюю границу плотно упакованного множества плиток в форме ромба, помещенных на данную подложку. Модель эволюционирует посредством стохастического добавления новых плиток сверху на существующую конфигурацию. В зависимости от локальной формы конфигурации в месте добавления плитки, она либо сохраняется (адсорбция), либо уходит (отражение), либо вызывает нелокальную лавину, которая удаляет плитки из текущей конфигурации (десорбция). Глобальные и локальные лавины различаются тем, распрастраняются ли они по всей системе или нет. В пределе больших времен этот стохастический процесс эволюционирует к стационарному состоянию. Вектор стационарных вероятностей каждой конфигурации есть собственный вектор стохастического генератора в конфигурационном базисе, отвечающий нулевому наибольшему собственному значению. Компоненты собственного вектора нормализованы так, что они задаются натуральными числами и обладают хорошими комбинаторными свойствами, упомянутыми ранее. Выдвинуто несколько предположений комбинаторного характера относительно наблюдаемых стационарного состояния модели RPM, а также сделаны предсказания о простанственных и временных корреляционных функциях с использованием конформной теории поля.

Эволюция модели RPM была недавно проанализирована за пределами стационарного состояния в рамках теории больших отклонений. Эта теория позволяет изучать статистику так называемых аддитивных функционалов от траекторий Марковских процессов в пределе больших времен. Изучались две величины: количество плиток, удаляемых лавинами за данный промежуток времени t и общее число глобальных лавин за это же время. В частности, получены асимптотики нескольких перенормированных кумулянтов этих величин в пределе системы больших размеров до второго и первого порядка по обратному размеру системы соответственно. Заметим, что в общем случае кумулянты аддитивных величин нетривиально зависят от временных корреляций и, таким образом, не могут быть получены из наблюдаемых стационарного состояния. Исключение составляют только кумулянты первого порядка, то есть, средние значения, которые относятся к специфическим наблюдаемым стационарного состояния. Действительно, усредненные по большому промежутку времени величины связаны со стационарным вероятностями специфичекских конфигураций интерфейса. Показано, что в лидирующем порядке они совпадают с раннее предсказанными точными выражениями этих вероятностей. Целью настоящей работы является нахождение явных законов больших чисел для этих величин при произвольном размере системы и в доказательстве соответствующих гипотез для корреляционных функций стационарного состояния. Практически это означает вычисление вышеуказанных пределов, что приводит к нашему утверждению о законе больших чисел в сильном смысле.

1.8 Графическая техника в теории интегрируемых моделей

Графические методы широко применются во многих разделах теоретической и математической физики. Прежде всего, это метод диаграмм Фейнмана, который является основным рабочим инструментом квантовой теории поля. Достаточно развитые графические методы используются в квантовой теории углового момента, общей теории относительности и физических приложениях теории групп. Графические методы, используемые в теории квантовых интегрируемых моделей статистической физики успешно применяются к задачам перечислительной комбинаторики.

Нами был систематизирован и развит графический подход к исследованию интегрируемых вершинных статистических моделей и соответствующих квантовых спиновых цепочек. Здесь наиболее распространенной вершинной моделью является двумерная квадратная решетка, образованная вершинами, соединенными ребрами. Вершины имеют веса, определяемые состояниями смежных ребер. Рассмотрение таких систем начинается с определения объектов интегрируемости, обладающих необходимыми свойствами. Исходными объектами здесь являются R-операторы и операторы монодромии, кодирующие веса вершин. R-оператор действует в тензорном квадрате векторного пространства, называемого вспомогательным пространством, а оператор монодромии действует в тензорном произведении вспомогательного пространства и некоторого дополнительного, называемого квантовым пространством. Чтобы обеспечить интегрируемость модели, R-оператор должен удовлетворять уравнению Янга-Бакстера, а оператор монодромии – так называемому RMM-уравнению, которое в случае совпадения вспомогательного пространства с квантовым, сводится к уравнению Янга-Бакстера. Необходимые уравнения удовлетворяются автоматически если используются интегрируемые объекты, полученные с использованием квантового группового подхода, сформулированного в наиболее четкой форме Бажановым, Лукьяновым и Замолодчиковым. Метод оказался эффективным для построения R-операторов, операторов монодромии и L-операторов, а также для доказательства функциональных соотношений .

Квантовая группа представляет собой особый вид алгебры Хопфа, возникающей как деформация универсальной обертывающей алгебры Каца-Муди. Понятие квантовой группы было введено Дринфельдом и Джимбо. Любая квантовая группа обладает универсальной R-матрицей, соединяющей два ее коумножения. Универсальная R-матрица является элементом тензорного квадрата двух копий квантовой группы. В рамках квантово-группового подхода объекты интегрируемости получены путем выбора представлений для факторов этого тензорного произведения и применения их к универсальной R-матрице. Первый фактор отождествляется со вспомогательным пространством, а второй — с квантвым. Универсальная R-матрица удовлетворяет универсальному уравнению Янга-Бакстера. Это приводит к тому, что полученные объекты интегрируемости обладают требуемыми свойствами. Кроме того, такие объекты удовлетворяют некоторым дополнительным соотношениям, таким как унитарность и кроссинг-симметрия, которые вытекают из общих свойств универсальной R-матрицы и используемых представлений.

Мы рассматриваем квантовые алгебры петель, которые применяются в квантово-групповом подходе к изучению интегрируемых вершинных моделей статистической физики. На примере алгебры $U_q(\mathcal{L}(sl_{l+1})$ мы описываем некоторые конечномерные представления и получаем выражение для R-оператора, связанного с первым фундаментальным представлением $U_q(\mathcal{L}(sl_{l+1})$ и явно вводим графическое представление для соотношений унитарности и кроссинг-симметри. Графические методы успешно применены для получения условий коммутации матриц переноса на решетках с границей. Такими условиями являются отношения, связывающие соответствующий R-оператор с операторами левой и правой границы. Впервые условия коммутации решеток с границами приведены Скляниным на основе работ Чередника. Вначале использовались достаточно ограничительные условия по форме R-операторов, но затем в ряде последующих исследований эти ограничения были ослаблены соответствующей модификацией условий коммутации. Наконец, Влаар дал условие коммутации в форме, которая не требует существенных ограничений для R-оператора. Именно эта форма получается с помощью нашего графического метода.

1.9 Редуцированное уравнение Книжника-Замолодчикова: функциональные соотношения

Нами выведено функциональное уравнение разностного типа, называемое дискретным редуцированным квантовым уравнением Книжника-Замолодчикова, для оператора плотности квантовой интегрируемой вершинной модели, связанной с произвольной комплексной простой алгеброй Ли. Наш подход позволяет изучать корреляционные функции при конечной и нулевой температуре в термодинамическом пределе или, в качестве альтернативы, корреляторы основного состояния в конфигурациях как конечного кольца, так и и бесконечной цепочки.

В работе используются методы, основанные на понятии квантовой группы, введенной Дринфельдом и Джимбо. Точнее, мы рассматриваем квантовые интегрированные системы, относящиеся к специальному классу квантовых групп, а именно квантовых алгебр петель. Наша работа представляет собой дальнейшее развитие полученных ранее результатов, связанных с системами, основанными на квантовой алгебре петель $U_q(\mathcal{L}(sl_2))$, с помощью простой кроссинг-симметрии, основанной на эквивалентности любого представления и двойственного к нему. Исследования системы, основанной на первом фундаментальном представлении $U_q(\mathcal{L}(sl_2))$, позволили вычислить соседние и следующие за соседними корреляторы для квантовой спиновой цепочки типа XXX в основном состоянии. В этих работах стала очевидной необходимость одновременного обращения по крайней мере с двумя различными представлениями одной квантовой группы. Кроме того, появились условия унитарности, связанные с различными представлениями, и кроссинг-отношения для дуальных представлений. Здесь мы придаем таким конструкциям строгое систематическое обоснование, справедливое для произвольных представлений любых квантовых групп. Наши конструкции позволят провести единообразное исследование корреляционных функций, что делает временные конструкции устаревшими.

Центральным объектом квантово-группового подхода является универсальная R-матрица, являющаяся элементом тензорного произведения двух копий квантовой алгебры петель. Объекты интегрируемости строятся путем выбора представлений для факторов этого тензорного произведения. Последовательное применение метода построения объектов интегрируемости и доказательств их свойств было инициировано Бажановым, Лукьяновым и Замолодчиковым. Они изучали квантовую версию теории КдВ. Позже метод оказался эффективным для изучения других квантовых интегрируемых моделей. Соответственно, в рамках этого подхода были построены R-операторы, операторы монодромии и L-операторы, а также найдены и доказаны соответствующие наборы функциональных отношений.

Для получения редуцированного квантового уравнения Книжника-Замолодчикова необходимы специальные свойства объекта интегрируемости, относящиеся к рассматриваемой квантовой алгебре петель. А именно, используются соотношения унитарности, кроссинг-соотношения и так называемое начальное условие. Оказывается, что эти соотношения, кроме начального условия, вытекают из свойств универсальной R-матрицы. Мы вводим квантовую алгебру петель, ее универсальную R-матрицу, и определяем основные объекты интегрируемости, называемые R-операторами. Далее описаны свойства R-операторов, такие как унитарность и кроссинг-соотношения, необходимые для последующего вывода редуцированного уравнения Книжника-Замолодчикова. Кроме того, приводится вид операторов монодромии и операторов переноса. Затем производится построение гамильтониана системы, как одного из объектов системы коммутирующих величин. Также мы приводим явный вид вышеупомянутого начального условия. Мы предлагаем удобную нормализацию R-операторов, которая приводит к простой форме кроссинг-соотношений и соотношений унитарности. Начальное условие также принимает простой вид. Затем мы вводим оператор плотности и представляем его как предел Троттера некоторой последовательности операторов. Такое представление позволяет связать оператор плотности со статистической суммой некоторой квадратной решетки со свободными горизонтальными границами. Кроме того, мы приводим графическое построение редуцированного уравнения Книжника-Замолодчиква.

1.10 Фермионный предел системы Калоджеро-Сазерленда

Эффективная и математически строгая конструкция пределов квантовой системы Калоджеро-Сазерленда (КС) привлекает внимание математиков в течение многих лет. В фундаментальной работе Углова был определен и исследован индуктивный предел фермионной системы КС. В последнее время эта конструкция вновь привлекла внимание в связи с исследованиями Назарова и Склянина, которые предложили точную конструкцию высших гамильтонианов для скалярной КС системы используя детерминант Секигучи и технику симметрических фунций. В недавних работах Веселова и Сергеева предложено определять бозонный предел КС системы как проективный предел конечных моделей. Точная конструкция бозонных гамильтонианов была представлена в работрах Склянина, Назарова, Веселова и Сергеева. Важнейшая составляющая этих конструкций — эквивариантное семейство операторов Хекмана-Данкла, играющих роль L-операторов КС системы.

Наша работа является дальнейшим развитием изложенных идей в применении к КС системе, ограниченной на антисимметрические волновые функции. В бозонном случае оба подхода трактуют пространство $C[x_1] \otimes \Lambda^+[x_2, \ldots ,x_N]$ как область действия квантового L-оператора, который эффективно совпадает с операторами Данкла. Пространство $C[x_1] \otimes \Lambda^+[x_2, \ldots ,x_N]$ состоит из полиномов, симметрических по всем переменным за исключением x_1, инвариантных относительно действия оператора Данкла D_1. В бесконечном пределе действие оператора Данкла определено на пространстве $C[z] \otimes \hat{\Lambda}$ операторами вида

$$V_+(z) = \exp \sum_{n \geq 0} z^n \frac{\partial}{\partial p_n}.$$

Здесь $\hat{\Lambda}$ есть неприводимое представление алгебры Гейзенберга, генераторами которой являются p_n и $\partial/\partial p_n$, трактуемые как операторы рождения и уничтожения соответственно.

Как и в бозонном случае, мы начинаем с описания КС системы, ограниченной на простанство антисимметрических полиномов $\Lambda^{-}[x_1,\ldots,x_N]$ в терминах операторов Хекмана-Данкла. Затем мы выражаем эти операторы через конечные аналоги вершинных операторов $\Psi(z)$ и $\Psi^{*}(z)$, где

$$\Psi(z) = z^{p_0} \exp\left(-\sum_{n>0} z^n \frac{p_n}{nz^n}\right) \exp\left(\sum_{n\geq 0} z^n \frac{\partial}{\partial p_n}\right).$$

С этой целью мы представляем любой антисимметрический полином от N переменных в виде произведения

$$\prod_{i>j}(x_i - x_j) f(p_1^{(N)},p_2^{(N)},p_3^{(N)}\ldots)$$

так что применение оператора $V_{-}(x_1)V_{+}(x_1)$ к анитсимметрическому полиному дает его разложение в ряд Тейлора по переменной x_1.

Пусть $\hat{\Lambda} = \Lambda[p_0]$ обозначает кольцо симметрических функций, расширенное свободной переменной p_0. Пространство $\hat{\Lambda}$ есть неприводимое представление алгебры Гейзенберга, порожденной элементами p_n и $\partial/\partial p_n$, и может трактоваться как полиномиальная версия пространства Фока. Оно содержит вакуумный вектор $|0\rangle$, такой, что

$$\frac{\partial}{\partial p_n}|0\rangle = 0.$$

Каждому вектору $|v\rangle$ пространства $\hat{\Lambda}$ мы сопоставляем семейство антисимметрических функций от N переменных, определяемых матричными элементами следующего вида:

$$\pi_N(v) = \langle 0|\Psi(x_N)\ldots\Psi(x_1)|v\rangle.$$

Основная цель состоит в построении операторов на пространстве $\hat{\Lambda}$, которые совместны с конечными гамильтонианами КС системы по отношению к вычисляющему отображению, выписанному выше. Это делается в духе идеологии, предложенной Е.Скляниным: мы вводим вспомогательное пространство U и его отображения в пространства функций, антисимметрических по всем аргументам, за исключением одного. Мы предъявляем операторы на пространстве U, которые совместны с определенными выше вычисляющими отображениями. Эти операторы оказываются пределами операторов Хекмана-Данкла, а предельные гамильтонианы конструируются посредством некоторых интегральных усреднений от них. Построенные операторы образуют коммутативное семейство в пространстве $\hat{\Lambda}$.

В отличие от кольца симметрических функций, пространство не является проективным пределом пространств антисимметрических функций вследствие наличия нулевой моды p_0. С другой стороны, гамильтонианы КС системы не образуют проетивное семейство, поскольку они не сохраняются при естественной проекции λ_N : $\Lambda^-[x_1, \ldots, x_{N+1}] \to \Lambda^-[x_1, \ldots, x_N]$. Однако, каждый конечный гамильтониан может быть восстановлен из его предела формальной заменой p_0 оператором умножения на число частиц.

Построенные гамильтонианы обрзуют коммутативное семейство в пространстве $\hat{\Lambda}$. Кроме того, они коммутируют внутри алгебры Гейзенберга и, таки образом, могут использоваться и в других представлениях этой алгебры, например, в бозонном пространстве Фока. Мы можем определить проекцию $\tilde{\pi}_N$ аналогично тому, как это сделано выше

$$\tilde{\pi}_N(v) = \langle 0|\Psi(x_N)\ldots\Psi(x_1)|v\rangle.$$

Это отображение не нулевое только на N частичном секторе пространства Фока. Теперь построенные гамильтонианы совместны с отображениями $\tilde{\pi}_N$ и коммутативность их проекций на N-частичном секторе пространства Фока представляет собой нетривиальный факт. Мы переформулируем этот результат для фермионного пространства Фока, определив проекции, аналогичные проекциям $\tilde{\pi}_N$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение кратко суммируем полученные в 2019 году результаты исследований по проекту:

— Рассмотрены эллиптические решения интегрируемых нелинейных дифференциальных и разностных уравнений — уравнения Кадомцева-Петвиашвили, B-версии уравнения Кадомцева-Петвиашвили, двумеризованной цепочки Тода, и получены уравнения движения для их полюсов.

— Изучен специальный класс квантовых нединамических R-матриц со спектральным параметром и в фундаментальном представлении группы GL_N, которые представляют собой тригонометрические решения ассоциативного уравнения Янга-Бакстера. Эти R-матрицы использованы для построения интегрируемых моделей релятивистских волчков типа Эйлера-Арнольда, для которых предъявлены пары Лакса со спектральным параметром, тензоры инерции и пуассоновы структуры.

— Для квантовых интегрируемых моделей, разрешимых вложенным алгебраическим анзацем Бете и обладающих $gl(N)$-инвариантной R-матрицей, доказана эквивалентность (с точностью донормировочного множителя и перестановки параметров) векторов Бете двух типов. Эта эквивалентность позволяет доказать новые комбинаторные соотношения для скалярных произведений векторов Бете.

— Для квантовой тороидальной алгебры gl_1 при $q = t$ представленя явная конструкция твистованных фоковских модулей с произвольным наклоном n'/n. В качестве приложения, доказано соотношение на q-деформированные конформные блоки, которое было выдвинуто в качестве гипотезы при изучении q-деформации соответствия между изомонодромной деформацией и CFT.

— Исследованы обобщения соответствия между уравнениями Пенлеве и калибровочными теориями на специальный случай $SU(2)$ $\mathcal{N} = 2^*$ теории. Показано, что статсумма Некрасова-Окунькова этой клибровочной теории даёт явное комбинаторное выражение и формулу в виде детерминанта Фредгольма для тау-функции, описывающей изомонодромные деформации SL_2 плоских связностей на торе с одним проколом. Эти результаты обобщены на случай $SL(N)$ плоских связностей на торе с произпольным количеством проколов.

— Построено соответствие между классом кластерных интегрируемых систем и спиновыми цепочками в контексте их соответствия 5-мерным суперсимметричным калибровочным теориям. Показано, что $\mathfrak{gl}_N$ цепочки XXZ-типа на M узлах изоморфны кластерным интегрируемым системам с многоугольниками Ньютона в виде прямоугольника размера $N \times M$ и двудольным графом в форме сетки-рабицы.

— Определено семейство коммутативных подалгебр Бете $B(C) \subset Y(\mathfrak{g}), C \in G$. Доказано, что если элемент $C \in G$ – регулярный, то подалгебры являются свободными, а если элемент $C \in G$ – регулярный полупростой, то максимальными коммутативными подалгебрами янгиана. Исследованы два способа компактифицировать пространство параметров G^{reg} подалгебр Бете – конструкция предельных подалгебр, дающая плоское семейство подалгебр и чудесная компактификация группы G, которая даёт неплоское семейство подалгебр. Описаны явно подалгебры, соответствующие общим точкам в каждом страте чудесной компактификации группы G.

— Для широкого класса бесконечномерных ассоциативных алгебр (обобщенных янгианов) построены производящие функции, являющиеся аналогами элементарных симметрических функций и доказана их коммутативность при произвольных значениях спектральных параметров. Таким образом показано, что коэффициенты разложения элементарных симметрических функций по обратным степеням параметра генерируют коммутативную подалгебру Бете в обобщенном янгиане.

— Установлены точные законы больших чисел для двух аддитивных по времени величин в статистической модели RPM (raise and peel model). Найдено число плиток, удаляемых лавинами за заданный промежуток времени, а также вычислено общее число глобальных лавин за этот промежуток.

— Систематизирован и развит графический подход к исследованиям квантовых интегрируемых вершинных статистических моделей и соответсвующим квантвым спиновым цепочкам. Предъявлены графческие формы условия унитарности и кроссинг-соотношений. Условия коммутативности операторов переноса на решетках с граничными условиями выведены графическим методом.

— Для неоднородной редуцированной матрицы плотности и произвольной простой алгебры Ли найдены функциональные уравнения в виде редуцированного квантового уравнения Книжника-Замолодчикова. Это уравнение позволяет проводить исследования корреляционных функций при произвольной температуре, а также изучать основное состояние модели.

— Предложена конструкция интегрируемой модели через проективный предел модели Калоджеро-Сазерленда N фермионных частиц при стремлении числа частиц к бесконечности. Получены явные формулы для предела операторов Данкла и для коммутирующих гамильтонианов в терминах вершинных операторов.

Полученные результаты составили содержание 26 опубликованных и 4 принятых к печати в международных рецензируемых журналах статей, а также послужили основой для подготовки более 40 докладов на международных научных конференциях. При участии лаборатории было организовано две международных конференции и две международных школы-конференции. Кроме того были организованы визиты в лабораторию иностранных ученых, которые прочли 4 курса лекций для студентов и специалистов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 H. Airault, H.P. McKean, and J. Moser, Rational and elliptic solutions of the Korteweg-De Vries equation and a related many-body problem, Commun. Pure Appl. Math., 30 (1977) 95-148.

2 F. Calogero, Solution of the one-dimensional N-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials, J. Math. Phys. 12 (1971) 419—436.

3 F. Calogero, Exactly solvable one-dimensional many-body systems, Lett. Nuovo Cimento 13 (1975) 411-415.

4 J. Moser, Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations, Adv. Math. 16 (1975) 197-220.

5 M.A. Olshanetsky and A.M. Perelomov, Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras, Phys. Rep. 71 (1981) 313-400.

6 I.M. Krichever, Rational solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation and integrable systems of N particles on a line, Funct. Anal. Appl. 12:1 (1978) 59-61.

7 D.V. Chudnovsky, G.V. Chudnovsky, Pole expansions of non-linear partial differential equations, Nuovo Cimento 40B (1977) 339-350.

8 I.M. Krichever, Elliptic solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation and integrable systems of particles, Funk. Anal. i Ego Pril. 14:4 (1980) 45-54 (in Russian); English translation: Functional Analysis and Its Applications 14:4 (1980) 282—290.

9 A. Abanov, E. Bettelheim and P. Wiegmann, Integrable hydrodynamics of Calogero-Sutherland model: Bidirectional Benjamin-Ono equation, J. Phys. A 42 (2009) 135201.

10 I. Krichever, O. Babelon, E. Billey and M. Talon, Spin generalization of the Calogero-Moser system and the matrix KP equation, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 170 (1995) 83-119.

11 D. Rudneva and A. Zabrodin, Dynamics of poles of elliptic soltuions to BKP equation, arXiv:1903.00968.

12 S. Manakov, Method of inverse scattering problem and two-dimensional evolution equations, Uspekhi Mat. Nauk 31 (1976) 245-246.

13 S.N.M. Ruijsenaars and H. Schneider, A new class of integrable systems and its relation to solitons, Annals of Physics 146 (1986) 1–34.

14 I. Krichever and A. Zabrodin, Spin generalization of the Ruijsenaars-Schneider model, non-abelian 2D Toda chain and representations of Sklyanin algebra, Uspekhi Mat. Nauk 50 (1995) 3-56 (in Russian) (English translation: Russ. Math. Surv., 50 (1995) 1101-1150).

15 A. Zabrodin and A. Zotov, Self-dual form of Ruijsenaars-Schneider models and ILW equation with discrete Laplacian, Nuclear Physics B 927 (2018) 550-565.

16 E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, Transformation groups for soliton equations: Nonlinear integrable systems – classical theory and quantum theory (Kyoto, 1981). Singapore: World Scientific, 1983, 39-119.

17 M. Jimbo and T. Miwa, Solitons and infinite dimensional Lie algebras, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto 19 (1983) 943-1001.

18 E. Date, M. Jimbo and T. Miwa, Method for generating discrete soliton equations I, II, Journ. Phys. Soc. Japan 51 (1982) 4116-4131.

19 F.W. Nihhoff and G.D. Pang, A time-discretized version of the Calogero-Moser model, Phys. Lett. A 191 (1994) 101-107.

20 E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, Transformation groups for soliton equations IV. A new hierarchy of soliton equations of KP type, Physica D 4D (1982) 343-365.

21 E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, Quasi-periodic solutions of the orthogonal KP equation. Transformation groups for soliton equations V, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 18 (1982) 1111-1119.

22 I. Loris and R. Willox, Symmetry reductions of the BKP hierarchy, Journal of Mathematical Physics 40 (1999) 1420-1431.

23 M.-H. Tu, On the BKP Hierarchy: Additional Symmetries, Fay Identity and Adler—Shiota—van Moerbeke Formula, Letters in Mathematical Physics 81 (2007) 93-105.

24 K. Ueno and K. Takasaki, Toda lattice hierarchy, Adv. Studies in Pure Math. 4 (1984) 1-95.

25 I. Krichever, P. Wiegmann and A. Zabrodin, Elliptic solutions to difference non-linear equations and related many-body problems, Commun. Math. Phys. 193 (1998) 373-396.

26 T. Shiota, Calogero-Moser hierarchy and KP hierarchy, J. Math. Phys. 35 (1994) 5844-5849.

27 F. Calogero, Solution of a three-body problem in one dimension, J. Math. Phys. 10 (1969) 2191–2196.

28 B. Sutherland, Exact results for a quantum many-body problem in one dimension, Physical Review A, 4:5 (1971) 2019–2021.

29 M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras, Inventiones mathematicae, 37:2 (1976) 93–108.

30 J. Gibbons, T. Hermsen, A generalization of the Calogero-Moser systems, Physica D: Nonlinear Phenomena 11 (1984) 337–348.

31 S. Wojciechowski, An integrable marriage of the Euler equations with the Calogero-Moser system, Physics Letters A, 111 (1985) 101–103.

32 В.И. Арнольд, (1979). ”Математические методы классической механики”. Рипол Классик.

33 L. Fehér, B.G. Pusztai, Spin Calogero models obtained from dynamical r-matrices and geodesic motion, Nuclear Physics B, 734 [FS] (2006) 304–325.

34 L. Fehér, ”An application of the reduction method to Sutherland type many-body systems”, Geometric Methods in Physics. Birkhauser, Basel, 2013. 109-117.

35 S. Kharchev, A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, JETP Letters, Vol. 106, No. 3 (2017) 179–183.

36 S. Kharchev, A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, Journal of Mathematical Physics, 59:10 (2018), 103509.

37 Н.Я. Виленкин, (1994), ”Специальные функции и теоря представлений групп”, из-во ”Наука”, гл VI.5.

38 S. Helgason, (1978), Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Academic press.

39 N. Hitchin, The self-duality equations on a Riemann surface, Proceedings of the London Mathematical Society, s3-55:1 (1987) 59–126.

40 N. Hitchin, Stable bundles and integrable systems, Duke Math. J., 54:1 (1987), 91–114.

41 A. Kapustin, E. Witten, Electric-magnetic duality and the geometric Langlands program, arXiv hep-th/0604151.

42 S. Gukov, E. Witten, Gauge theory, ramification, and the geometric Langlands program, arXiv hep-th/0612073.

43 D. Baraglia, L.P. Schaposnik, (2016), Real structures on moduli spaces of Higgs bundles, Adv. Theor. Math. Phys. 20:3 525–551; arXiv:1309.1195 [math.AG]

44 N. Nekrasov, Holomorphic bundles and many-body systems, Commun. Math. Phys., 180 (1996), 587–603.

45 D.V. Talalaev, A.V. Chervov, Hitchin system on singular curves, Theoret. and Math. Phys, 140:2 (2004) 1043–1072.

46 M. Toda, Vibration of a chain with nonlinear interaction, J. Phys. Soc. Japan 22(2), (1967), 431–436.

47 M. Toda, Wave propagation in anharmonic lattices, J. Phys. Soc. Japan 23(3), (1967), 501–506.

48 M. Henon, Integrals of the Toda lattice, Phys. Rev. B9, (1974), 1921–1923.

49 H. Flaschka, The Toda lattice. I. Existence of integrals, Phys. Rev. B 9(4), (1974), 1924–1925.

50 H. Flaschka, On the Toda lattice II. Prog. Theor. Phys. 51(3), (1974), 703–716.

51 С.В. Манаков, Журн. Эксперим. и Теор. Физики, (1975) 269–274 (Sov. Phys. 40 (2) (1975) 269-274).

52 Yu.B. Chernyakov, G.I. Sharygin, A.S. Sorin, Bruhat Order in Full Symmetric Toda System, Commun. Math. Phys. 330, 367–399 (2014).

53 Yu.B. Chernyakov, G.I. Sharygin, A.S. Sorin, Bruhat Order in the Full Symmetric $\mathfrak{sl}_n$ Toda Lattice on partial flag space, SIGMA, 12 (2016), 084.

54 Yu.B. Chernyakov, G.I. Sharygin, A.S. Sorin, Phase portraits of the generalized full symmetric Toda systems on rank 2 groups, Theor. Math. Phys. 193 (2017) 2, 1574–1592.

55 A.M. Bloch, R.W. Brockett and T.S. Ratiu, Completely Integrable Gradient Flows, Comm. Math. Phys, 147 (1992), 57–74.

56 Y. Kodama, J. Ye Iso-spectral deformations of general matrix and their reductions on Lie algebras. Commun. Math. Phys. 178 (1996), 765–788.

57 P. Deift, T. Nanda, and C. Tomei, Ordinary Differential Equations and the Symmetric Eigenvalue Problem. SIAM J. Numer. Anal., 20 (1983), 1–20.

58 P. Fre, A.S. Sorin, The arrow of time and the Weyl group: all supergravity billiards are integrable, Nucl. Phys. B, 815 (2009), 430.

59 P. Fre, A. S. Sorin and M. Trigiante, Integrability of Supergravity Black Holes and New Tensor Classifiers of Regular and Nilpotent Orbits, JHEP 1204 (2012) 015.

60 Y. Kodama, L. Williams, The full Kostant-Toda hierarchy on the positive flag variety, arXiv:1308.5011.

61 W. Fulton, Young Tableaux, Cambridge University Press, 1997.

62 A. Bjorner, F. Brenti, Combinatorics of Coxeter groups, Springer, 2005.

63 M. Brion, Lectures on the geometry of flag varieties, Lecture notes, Varsovie, 2003.

64 F. De Mari, M. Pedroni, Toda flows and real Hessenberg manifolds. J. Geom. Anal., 9 no.4 (1999), 607–625.

65 P. Deift, L. C. Li, T. Nanda, and C. Tomei, The Toda flow on a generic orbit is integrable, CPAM 39 (1986), 183–232.

66 N. Ercolani, H. Flaschka, and S. Singer, The geometry of the full Kostant-Toda lattice In: Integrable Systems, Vol. 115 of Progress in Mathematics, Birkhauser (1993), 181–226.

67 M. Adler, On a trace functional for pseudo-differential operators and the symplectic structure of the Korteweg-de Vries equation, Invent. Math., 50 (1979), 219–248.

68 B. Kostant, The solution to a generalized Toda lattice and representation theory, Adv. in Math. 34 (1979), 195–338.

69 W. W. Symes, Systems of Toda type, inverse spectral problems, and representation theory, Invent. Math. 59 (1980), no. 1, 13–51.

70 Kenneth I. Gross, The Plancherel transform on the nilpotent part of G_2 and some applications to the representation theory of G_2, Transactions Amer. Math. Soc. 132 (1968), 411–446.

71 Yu. B. Chernyakov, A. S. Sorin, Explicit Semi-invariants and Integrals of the Full Symmetric $\mathfrak{sl}_n$ Toda Lattice, Lett. Math. Phys. 104 (2014) 1045–1052.

72 M. Bershtein, P. Gavrylenko and A. Marshakov, Cluster Toda chains and Nekrasov functions Theoret. and Math. Phys., 198:2 (2019), 157—188.

73 M. Bershtein and A. Shchechkin, q-deformed Painlevé tau function and q-deformed conformal blocks, J. Phys. A. 50 8 (2017) 085202.

74 M. Bershtein and A. Shchechkin, Bäcklund transformation of Painlevé III(D_8) τ function, J. Phys. A. 50 11 (2017) 115205.

75 G. Bonelli, A. Grassi, A. Tanzini, Quantum curves and q-deformed Painlev? equations Lett. Math. Phys. (2019).

76 I. Burban, O. Schiffmann On the Hall algebra of an elliptic curve Duke Math. J. 161 7 (2012), 1171–1231.

77 E. Carlsson, A. Mellit A proof of the shuffle conjecture J. Amer. Math. Soc. 31 (2018), no. 3, 661–697.

78 B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, and E. Mukhin, Quantum continuous gl_∞: Semi-infinite construction of representations Kyoto J. Math. 51 2 (2011), 337–364.

79 B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, and E. Mukhin, Quantum continuous gl_∞: Tensor products of Fock modules and W_n-characters Kyoto J. Math. 51 2 (2011), 365–392.

80 B. Feigin, E. Frenkel Quantum W-algebras and Elliptic Algebras Comm. Math. Phys., 178 (3), 653–677 (1996).

81 B. Feigin, A. Hoshino, J. Shibahara, J. Shiraishi, S. Yanagida, Kernel function and quantum algebras, RIMS Kokyuroku 1689, 133-152 (2010).

82 B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi, S. Yanagida, A commutative algebra on degenerate $\mathbb{CP}^1$ and Macdonald polynomials, J. Math. Phys., 50, 095215 (2009).

83 B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin, Branching rules for quantum toroidal $\mathfrak{gl}_n$, Adv. Math. 300 (2016), 229–274.

84 I. B. Frenkel, V. G. Kac, Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models, Invent. Math. 62 (1980/81), no. 1.

85 S. Fujii, S. Minabe A Combinatorial Study on Quiver Varieties SIGMA 13 (2017).

86 O. Gamayun, N. Iorgov, O. Lisovyy, Conformal field theory of Painlevé VI, JHEP 1210, (2012), 38.

87 P. Gavrylenko and A. Marshakov, Free fermions, W-algebras and isomonodromic deformations, Theor. Math. Phys. 187 (2016) 649.

88 M. Golenishcheva-Kutuzova, D. Lebedev, Vertex operators representation of Some Quantum Tori Lie algebras

89 E. Gorsky, A. Negut, Refined knot invariants and Hilbert schemes.

90 E. Gorsky, A. Negut, Infinitesimal change of stable basis Selecta Mathematica 23 3 (2017), 1909–1930.

91 M. Jimbo, H. Nagoya and H. Sakai, CFT approach to the q-Painlevé VI equation, J. Int. Syst. 2 (2017) 1.

92 V. Kac, D. Kazhdan, J. Lepowsky, R. Wilson, Realization of the basic representations of the Euclidean Lie algebras, Adv. in Math 42 (1981) 83–112.

93 V. Kac, A. Raina, Bombay lectures on highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras, Adv. Ser. Math. Phys. 2 (World Scientific, 1987).

94 J. Lepowsky, R. L. Wilson, Construction of the affine Lie algebra $\mathfrak{sl}(2)$, Comm. Math. Phys. 62, (1978) 43.

95 I.G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials.

96 K. Miki, $A(q,\gamma)$ analog of the $W_{1+\infty}$ algebra, J. Math. Phys. 48 (2007).

97 H. Nagoya Irregular conformal blocks, with an application to the fifth and fourth Painlevé equations, J. Math. Phys. 56: 12 (2015) 123505.

98 A. Negut Moduli of Flags of Sheaves and their K-theory, Algebraic Geometry 2 (1) (2015) 19–43.

99 A. Negut Quantum Algebras and Cyclic Quiver Varieties, PhD Thesis.

100 A. Negut The q-AGT-W relations via shuffle algebras, Comm. Math. Phys. 358 1 101.

101 A. Negut W–algebras associated to surfaces.

102 J. Shiraishi, H. Kubo, H. Awata, S. Odake A Quantum Deformation of the Virasoro Algebra and the Macdonald Symmetric Functions.

103 J. Shiraishi Free field constructions for the elliptic algebra $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ and Baxter's eight-vertex model Internat. J. Modern Phys. A 19 (2004), May, suppl., 363–380.

104 M. Taki On AGT-W conjecture and q-deformed W-algebra, arXiv:1403.7016.

105 A. Tsymbaliuk The affine Yangian of $\mathfrak{gl}_1$ revisited, arXiv:1404.5240.

106 Al. Zamolodchikov, Conformal scalar field on the hyperelliptic curve and critical Ashkin–Teller multipoint correlation functions , Nucl. Phys. B285 (1987) 481–503.

107 N. Seiberg and E. Witten, Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in N=2 supersymmetric Yang-Mills theory, Nucl. Phys. B426 (1994) 19.

108 N. A. Nekrasov and S. L. Shatashvili, Quantization of Integrable Systems and Four Dimensional Gauge Theories, in Proceedings, 16th International Congress on Mathematical Physics (ICMP09): Prague, Czech Republic, August 3-8, 2009, pp. 265–289, 2009,

109 L. F. Alday, D. Gaiotto and Y. Tachikawa, Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories, Lett. Math. Phys. 91 (2010) 167.

110 N. Nekrasov, BPS/CFT correspondence: non-perturbative Dyson-Schwinger equations and qq-characters, JHEP 03 (2016) 181.

111 G. Bonelli, O. Lisovyy, K. Maruyoshi, A. Sciarappa and A. Tanzini, On Painlevé/gauge theory correspondence, Letters in Mathematical Physics 107 (2017) 2359.

112 O. Gamayun, N. Iorgov and O. Lisovyy, Conformal field theory of Painlevé VI, JHEP 10 (2012) 038.

113 O. Gamayun, N. Iorgov and O. Lisovyy, How instanton combinatorics solves Painlevé VI, V and IIIs, J. Phys. A46 (2013) 335203.

114 N. Iorgov, O. Lisovyy and J. Teschner, Isomonodromic tau-functions from Liouville conformal blocks, Commun. Math. Phys. 336 (2015) 671

115 M. A. Bershtein and A. I. Shchechkin, Bilinear equations on Painlevé τ functions from CFT, Commun. Math. Phys. 339 (2015) 1021.

116 P. G. Gavrylenko and A. V. Marshakov, Free fermions, W-algebras and isomonodromic deformations, Theor. Math. Phys. 187 (2016) 649.

117 P. Gavrylenko, N. Iorgov and O. Lisovyy, Higher rank isomonodromic deformations and W-algebras, arXiv:1801.09608.

118 H. Nagoya, Irregular conformal blocks, with an application to the fifth and fourth Painlevé equations, J. Math. Phys. 56 (2015) 123505.

119 H. Nagoya, Remarks on irregular conformal blocks and Painlevé III and II tau functions, The proceedings of 'Meeting for Study of Number theory, Hopf algebras and related topics, Toyama, 12-15 February 2017' (2018)

120 M. A. Bershtein and A. I. Shchechkin, q-deformed Painlevé τ function and q-deformed conformal blocks, J. Phys. A50 (2017) 085202 .

121 M. Bershtein, P. Gavrylenko and A. Marshakov, Cluster integrable systems, q-Painlevé equations and their quantization, JHEP 02 (2018) 077.

122 M. Bershtein, P. Gavrylenko and A. Marshakov, Cluster Toda chains and Nekrasov functions, arXiv:1804.10145.

123 A. Mironov and A. Morozov, q-Painlevé equation from Virasoro constraints, Phys. Lett. B785 (2018) 207.

124 M. Jimbo, H. Nagoya and H. Sakai, CFT approach to the q-Painlevé VI equation, Journal of Integrable Systems 2 (2017).

125 Y. Matsuhira and H. Nagoya, Combinatorial expressions for the tau functions of q-Painlevé V and III equations, arXiv:1811.03285.

126 A. Grassi, Y. Hatsuda and M. Marino, Topological Strings from Quantum Mechanics, Annales Henri Poincare 17 (2016) 3177.

127 G. Bonelli, A. Grassi and A. Tanzini, Seiberg Witten theory as a Fermi gas, Lett. Math. Phys. 107 (2017) 1.

128 G. Bonelli, A. Grassi and A. Tanzini, New results in $\mathcal{N} = 2$ theories from non-perturbative string, Annales Henri Poincare 19 (2018) 743.

129 G. Bonelli, A. Grassi and A. Tanzini, Quantum curves and q-deformed Painlevé equations, arXiv:1710.11603.

130 A. Grassi and J. Gu, Argyres-Douglas theories, Painlevé II and quantum mechanics, arXiv:1803.02320.

131 N. Nekrasov and A. Okounkov, Seiberg-Witten theory and random partitions, Prog. Math. 244 (2006) 525.

132 A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov and A. Morozov, Integrability and Seiberg-Witten exact solution, Phys. Lett. B355 (1995) 466.

133 A. M. Levin and M. A. Olshanetsky, Classical limit of the Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard equations as hierarchy of isomondromic deformations: Free fields approach, arXiv:hep-th/9709207.

134 J. D. Edelstein, M. Gomez-Reino, M. Marino and J. Mas, N=2 supersymmetric gauge theories with massive hypermultiplets and the Whitham hierarchy, Nucl. Phys. B574 (2000) 587.

135 G. Bonelli and A. Tanzini, Hitchin systems, N=2 gauge theories and W-gravity, Phys. Lett. B691 (2010) 111.

136 J. Teschner, Quantization of the Hitchin moduli spaces, Liouville theory, and the geometric Langlands correspondence I, Adv. Theor. Math. Phys. 15 (2011) 471.

137 A. Levin, M. Olshanetsky and A. Zotov, Classification of Isomonodromy Problems on Elliptic Curves, Russ. Math. Surveys 69 (2014) 35.

138 A. M. Levin, M. A. Olshanetsky and A. Zotov, Hitchin systems–symplectic hecke correspondence and two-dimensional version, Commun. Math. Phys. 236 (2003) 93.

139 A. Levin and M. Olshanetsky, Hierarchies of isomonodromic deformations and hitchin systems, Translations of the American Mathematical Society-Series 2 191 (1999) 223.

140 K. Takasaki, Elliptic Calogero–Moser systems and isomonodromic deformations, Journal of Mathematical Physics 40 (1999) 5787.

141 E. D'Hoker and D. H. Phong, Calogero-Moser systems in SU(N) Seiberg-Witten theory, Nucl. Phys. B513 (1998) 405.

142 E. D'Hoker and D. H. Phong, Lectures on supersymmetric Yang-Mills theory and integrable systems, in Theoretical physics at the end of the twentieth century. Proceedings, Summer School, Banff, Canada, June 27-July 10, 1999, pp. 1–125, 1999.

143 E. D'Hoker, I. M. Krichever and D. H. Phong, Seiberg-Witten theory, symplectic forms, and Hamiltonian theory of solitons, Conf. Proc. C0208124 (2002) 124.

144 P. Gavrylenko and O. Lisovyy, Fredholm Determinant and Nekrasov Sum Representations of Isomonodromic Tau Functions, Commun. Math. Phys. 363 (2018) 1.

145 M. Cafasso, P. Gavrylenko and O. Lisovyy, Tau functions as Widom constants, arXiv:1712.08546.

146 I. M. Krichever, Elliptic solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation and integrable systems of particles, Functional Analysis and Its Applications 14 (1980) 282.

147 L. Gavrilov and A. M. Perelomov, On the explicit solutions of the elliptic Calogero system, Journal of Mathematical Physics 40 (1999) 6339.

148 L.D. Faddeev, E.K. Sklyanin and L.A. Takhtajan, Quantum Inverse Problem. I, Theor. Math. Phys. 40 (1979) 688–706.

149 L.D. Faddeev and L.A. Takhtajan, The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model, Usp. Math. Nauk 34 (1979) 13; Russian Math. Surveys 34 (1979) 11 (Engl. transl.).

150 L.D. Faddeev, in: Les Houches Lectures Quantum Symmetries, eds A. Connes et al, North Holland, (1998) 149.

151 V.E. Korepin, N.M. Bogoliubov, A.G. Izergin, Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.

152 N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras, Correlation functions of the XXZ Heisenberg spin-1/2 chain in a magnetic field, Nucl. Phys. B 567 (2000) 554–582.

153 N. Kitanine, K. Kozlowski, J.M. Maillet, N.A. Slavnov, V. Terras, Form factor approach to dynamical correlation functions in critical models, J. Stat. Mech. 1209 (2012) P09001.

154 F. Göhmann, A. Klümper, A. Seel, Integral representations for correlation functions of the XXZ chain at finite temperature, J. Phys. A 37 (2004) 7625–7652.

155 P.P. Kulish, N.Yu. Reshetikhin, Generalized Heisenberg ferromagnet and the Gross–Neveu model, Zh. Eksp. Theor. Fiz. 80 (1981) 214–228; Sov. Phys. JETP, 53:1 (1981) 108–114 (Engl. transl.).

156 P.P. Kulish, N.Yu. Reshetikhin, GL(3)-invariant solutions of the Yang-Baxter equation and associated quantum systems, Zap. Nauchn. Sem. POMI. 120 (1982) 92–121; J. Sov. Math., 34:5 (1982) 1948–1971 (Engl. transl.).

157 P.P. Kulish, N.Yu. Reshetikhin, Diagonalization of $GL(N)$ invariant transfer matrices and quantum N-wave system (Lee model), J. Phys. A: 16 (1983) L591–L596.

158 N.Yu. Reshetikhin, Calculation of the norm of Bethe vectors in models with $SU(3)$-symmetry, Zap. Nauchn. Sem. LOMI 150 (1986) 196–213; J. Math. Sci. 46 (1989) 1694–1706 (Engl. transl.).

159 V. Tarasov, A. Varchenko, Jackson integral representations of solutions of the quantized Knizhnik–Zamolodchikov equation, Algebra and Analysis, 6:2 (1994) 90–137; St. Petersburg Math. J. 6:2 (1995) 275–313 (Engl. transl.).

160 V. Tarasov, A. Varchenko, Combinatorial formulae for nested Bethe vectors, SIGMA 9 (2013) 048.

161 S. Belliard and E. Ragoucy, The nested Bethe ansatz for 'all' closed spin chains., J. Phys. A 41 (2008) 295202.

162 S. Khoroshkin, S. Pakuliak, A computation of an universal weight function for the quantum affine algebra $U_q(\mathfrak{gl}(N))$, J. of Mathematics of Kyoto University, 48 n.2 (2008) 277–321.

163 S. Pakuliak, S. Khoroshkin, The weight function for the quantum affine algebra $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$, Theor. Math. Phys. 145 (2005) 1373.

164 S. Khoroshkin, S. Pakuliak, V. Tarasov, Off-shell Bethe vectors and Drinfeld currents, J. Geom. Phys. 57 (2007) 1713.

165 L. Frappat, S. Khoroshkin, S. Pakuliak, E. Ragoucy, Bethe Ansatz for the Universal Weight Function, Ann. H. Poincarre 10 (2009) 513.

166 S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, Bethe vectors of $GL(3)$-invariant integrable models, J. Stat. Mech. 1302 (2013) P02020.

167 A. Hutsalyuk, A. Liashyk, S. Z. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, Current presentation for the double super-Yangian $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$ and Bethe vectors, Russ. Math. Surv. 72:1 (2017) 33–99.

168 A.G. Izergin and V.E. Korepin, A lattice model related to the nonlinear Schrödinger equation, Sov. Phys. Dokl. 26 (1981) 653–654.

169 P.P. Kulish and E.K. Sklyanin, Quantum spectral transform method: recent developments, in Integrable Quantum Field Theories, Lecture Notes in Phys. 151 Springer, Berlin–Heidelberg, (1982) 61–119.

170 A. Molev, M. Nazarov and G. Olshanski, Yangians and classical Lie algebras, Russian Math. Surveys 51:2 (1996), 205–282.

171 A. Molev, Yangians and Classical Lie Algebras. Mathematical Surveys and Monographs, 143. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

172 S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. Slavnov, Bethe vectors of GL(3)-invariant integrable models, J. Stat. Mech. Theory Exp. 2013 (2013), P02020, 24 pages.

173 A. Hutsalyuk, A. Liashyk, S. Z. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, Scalar products of Bethe vectors in the models with $\mathfrak{gl}(m|n)$ symmetry, arXiv:1704.08173.

174 A.G. Izergin and V.E. Korepin, The Quantum Inverse Scattering Method Approach to Correlation Functions, Commun. Math. Phys. 94 (1984) 67–92.

175 S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, GL(3)-based quantum integrable composite models: 1. Bethe vectors, SIGMA 11 (2015) 063.

176 B. Enriquez, S. Khoroshkin, S. Pakuliak, Weight Functions and Drinfeld Currents, Commun. Math. Phys., 276:3 (2007) 691–725.

177 S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, Scalar products in models with $GL(3)$ trigonometric R-matrix. Highest coefficient, Theor. Math. Phys.„ 178:3 (2014) 314–335.

178 N. Gromov, F. Levkovich-Maslyuk, G. Sizov, New Construction of Eigenstates and Separation of Variables for $SU(N)$ Quantum Spin Chains, JHEP 1709 (2017) 111.

179 L. Aguirre, G. Felder, A. Veselov, Gaudin subalgebras and stable rational curves. Compositio Mathematica, 147 (2011) 1463–1478.

180 C. De Concini, G. Gaiffi Projective Wonderful Models for Toric Arrangements , Advances in Mathematics 327 (2018) 390-409.

181 V. Chari, A. Pressley A Guide to Quantum Groups, Cambridge University Press, 1995.

182 P. Deligne, D. Mumford The irreducibility of the space of curves of given genus, Publications Math?matiques de l'Institut des Hautes ?tudes Scientifiques, 36 (1969) 75–109.

183 В.Г. Дринфельд, Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга–Бакстера, Докл. АН СССР, 283:5 (1985) 1060–1064.

184 В.Г. Дринфельд, Квантовые группы, Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика VIII, Зап. научн. сем. ЛОМИ 155, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1986, 18–49.

185 В.Г. Дринфельд, Новая реализация янгианов и квантовых аффинных алгебр, ДАН СССР 36 (1988) 212—216.

186 P. Etingof, O. Schiffman, Lectures on Quantum Groups, International Press of Boston, 2001.

187 S. Evens, B. Jones, On the Wonderful Compactification, preprint arXiv:0801.0456.

188 B. Feigin, E. Frenkel and V. Toledano Laredo, Gaudin models with irregular singularities, Advances in Mathematics, 223 873-948.

189 V. Futorny, A. Molev, Quantization of the shift of argument subalgebras in type A, Advances in Mathematics 285 1358-1375.

190 A. Gerasimov, S. Kharchev, D. Lebedev, S. Oblezin, On a class of representations of the Yangian and moduli space of monopoles, Communications in Mathematical Physics, 260 (2005) 511-525.

191 N. Guay, V. Regelskis, C. Wendlandt, Equivalences between three presentations of orthogonal and symplectic Yangians, Letters in Mathematical Physics, 109 (2019) 327–379.

192 I. Halacheva, J. Kamnitzer, L. Rybnikov, A. Weekes, Crystals and monodromy of Bethe vectors, preprint arXiv:1708.05105.

193 W. J. Harvey, A. Lloyd-Philipps, Symmetry and moduli spaces for Riemann surfaces, Contemporary Mathematics 575 (2012).

194 А. Ильин О максимальности некоторых коммутативных подалгебр янгианов, Функциональный анализ и его приложения 53:4 (2019) 85-88.

195 A. Ilin, L. Rybnikov, Degeneration of Bethe subalgebras in the Yangian of $\mathfrak{gl}_n$, Letters in Mathematical Physics 108 (2018) 1083-1107.

196 A. Ilin, L. Rybnikov, Bethe Subalgebras in Yangians and the Wonderful Compactification, Commun. Math. Phys. (2019),

https://doi.org/10.1007/s00220-019-03509-1.

197 A.N. Kirillov, N.Yu. Reshetikhin, The Yangians, Bethe Ansatz and combinatorics, Letters in Mathematical Physics 12 (1986) 199–208.

198 F. Loebbert, Lectures on Yangian symmetry, Journal of Physics A: Math. and Theoretical 49.

199 J. Kamnitzer, B. Webster, A. Weekes, O. Yacobi, Yangians and quantizations of slices in the affine Grassmannian, Algebra Number Theory 8 (2014) 857-893.

200 I. Mashanova-Golikova Simplicity of spectra for Bethe subalgebras in $Y(\mathfrak{gl}_2)$, preprint arXiv:1906.09049.

201 D. Maulik, A. Okounkov, Quantum Groups and Quantum Cohomology, preprint arXiv:1211.1287.

202 A. Molev, Feigin-Frenkel center in types B, C and D. , Invent. Math. 191 (2013) 1-34.

203 А. Молев, Янгианы и классические алгебры Ли, МЦНМО, М., 2009.

204 M. Nazarov, G. Olshanski, Bethe Subalgebras in Twisted Yangians, Commun. Math. Phys. 178 (1996) 483–506.

205 Г.И. Ольшанский, Расширение алгебры $U(\mathfrak{g})$ для бесконечномерных классических алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и янгианы $Y(\mathfrak{gl}(m))$, Доклады Академии наук СССР 297 (1987) 1050-1054.

206 D. Panyushev, O.Yakimova, The argument shift method and maximal commutative subalgebras of Poisson algebras, Math. Res. Lett. 15 (2008) 239-249.

207 Л.Г. Рыбников, Централизаторы некоторых квадратичных элементов в алгебрах Пуассона–Ли и метод сдвига инвариантов, УМН 60:2 (2005) 173–174.

208 L. Rybnikov, Cactus group and monodromy of Bethe vectors, IMRN 2018 (2018) 202–235.

209 O. Schiffmann and E. Vasserot, On cohomological Hall algebras of quivers: Yangians, preprint arXiv:1705.07491.

210 В.В. Шувалов, О пределах подалгебр Мищенко–Фоменко в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли, Функц. анализ и его прил. 36:4 (2002) 55–64.

211 R. Steinberg, Conjugacy Classes in Algebraic Groups, Lecture Notes in Math., vol. 366, Springer, 1974.

212 А.А. Тарасов, Максимальность некоторых коммутативных подалгебр в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли, УМН, 57:5 (2002) 165–166.

213 А.А. Тарасов, О единственности поднятия максимальных коммутативных подалгебр из алгебры Пуассона–Ли в обертывающую алгебру, Матем. сб. 194:7 (2003) 155–160.

214 L. Takhtajan , L. Faddeev, Quantum inverse scattering method and the Heisenberg XYZ-model, Russian Math. Surv. 34 (1979) 11-68.

215 Э.Б. Винберг, О некоторых коммутативных подалгебрах универсальной обертывающей алгебры, Изв. АН СССР, Сер. матем., 54:1 (1990) 3–25.

216 C. Wendlandt, The R-matrix presentation for the Yangian of a simple Lie algebra, Communications in Mathematical Physics 363 (2018) 289-332.