

Правительство Российской Федерации

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

УДК 515.14  
№ госрегистрации 115072070031  
Инв. №

УТВЕРЖДАЮ

Проректор НИУ ВШЭ  
канд. экон. наук, доц.

\_\_\_\_\_ М.М. Юдкевич  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ г.

ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

(заключительный)

Руководители темы:

научный руководитель Международной  
лаборатории теории представлений  
и математической физики  
канд. физ.-мат. наук

\_\_\_\_\_ А.Ю. Окуньков  
подпись, дата

зав. Международной лабораторией  
теории представлений и математической  
физики д-р физ.-мат. наук, проф.

\_\_\_\_\_ Б.Л. Фейгин  
подпись, дата

Москва 2015

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководители		
Научный руководитель лаборатории, к.ф.-м.н	_____	Окуньков А.Ю. общая координация работы
Заведующий лабораторией д.ф.-м.н	_____	Фейгин Б.Л. общая координация работы
Заместитель заведующего лабораторией, д.ф.-м.н	_____	Забродин А. В. введение, заключение, реферат
Заместитель заведующего лабораторией, к.ф.-м.н	_____	Поволоцкий А.М. введение, заключение, реферат
Заместитель заведующего лабораторией, к.ф.-м.н	_____	Рыбников Л.Г. введение, заключение, реферат
Менеджер научного , проекта	_____	Жингель Е.А. введение, заключение, реферат
Исполнители		
Стажер-исследователь,	_____	Ахмедова В.Э. раздел 1
Главный научный сотрудник, Ph.D.	_____	Безрукавников Р.В. общая координация работы
Научный сотрудник, к.ф.-м.н.	_____	Берштейн М.А. раздел 1
Научный сотрудник, к.ф.-м.н.	_____	Бурман Ю.М. раздел 1
Научный сотрудник, д.ф.-м.н.	_____	Буфетов А.И. раздел 1
Стажер-исследователь, к.ф.-м.н.	_____	Буфетов А.И. раздел 1
Стажер-исследователь,	_____	Бычков Б.С. раздел 1
Младший научный , сотрудник	_____	Гавриленко П.Г. раздел 1
Стажер-исследователь,	_____	Гонин Р.Р. раздел 1
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	_____	Горский Е.А. раздел 1
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	_____	Дунин-Барковский П.И. раздел 1
Научный сотрудник,		Маршалл Й.

Ph.D.	_____ <small>подпись, дата</small>	раздел 1
Стажер-исследователь,	_____ <small>подпись, дата</small>	Матушко М.Г. раздел 1
Стажер-исследователь,	_____ <small>подпись, дата</small>	Махлин И.Ю. раздел 1
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Орлов А.Ю. раздел 1
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Побережный В.А. раздел 1
Стажер-исследователь,	_____ <small>подпись, дата</small>	Попов П.П. раздел 1
Стажер-исследователь,	_____ <small>подпись, дата</small>	Попов Ф.К. раздел 1
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Пятов П.Н. раздел 1
Стажер-исследователь,	_____ <small>подпись, дата</small>	Руденко Д.Г. раздел 1
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Сапонов П.А. раздел 1
Научный сотрудник, д.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Сергеев А.Н. раздел 1
Научный сотрудник, Ph.D.	_____ <small>подпись, дата</small>	Такаши Т. раздел 1
Стажер-исследователь,	_____ <small>подпись, дата</small>	Трофимова А.А. раздел 1
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Хорошкин А.С. раздел 1
Стажер-исследователь,	_____ <small>подпись, дата</small>	Шаталова А.В. раздел 1
Стажер-исследователь,	_____ <small>подпись, дата</small>	Щечкин А.И. раздел 1

## РЕФЕРАТ

Отчет на 156 страниц, 2 части, 12 рис., 194 источников.

Перечень ключевых слов: ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ РЕКУРСИЯ, ЧИСЛА ГУРВИЦА, СИСТЕМА ШЛЕЗИНГЕРА, УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ,  $\tau$ -ФУНКЦИЯ, КОНФОРМНЫЙ БЛОК, АЛГЕБРА ВИРАСОРО, ПРЕПОТЕНЦИАЛЫ, ИНСТАНТОННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ, ВЕРТЕКСНЫЕ АЛГЕБРЫ, РАЗДУТИЕ НАКАДЖИМЫ-ЁШИОКИ, АФФИННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ, ПОДПРОСТРАНСТВА ФЕЙГИНА-СТОЯНОВСКОГО, ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА, ГРАВИТАЦИОННЫЙ КОЛЛАПС, ПЕТЛЕВЫЕ ПОПРАВКИ, МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ, СВОБОДНО БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ МЕРЫ, КВАНТОВО-КЛАССИЧЕСКОЕ СООТВЕТСТВИЕ, МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ, СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ, ФУНКЦИЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ, КЛАСС УНИВЕРСАЛЬНОСТИ КАРДАРА-ПАРИЗИ - ЖАНГА, АНЗАЦ БЕТЕ, ПРОЦЕСС С ПРОСТЫМИ ЗАПРЕТАМИ, ГОМОЛОГИИ ХЕГОРА-ФЛОЕРА, АЛГЕБРЫ ЧЕРЕДНИКА, ИНВАРИАНТЫ УЗЛОВ, ГОМОЛОГИИ ХОВАНОВА-РОЗАНСКОГО, ГОМОЛОГИЙ КОШУЛЯ, ФОРМУЛЫ БУСКЕ-МЕЛУ-ШЕФФЕРА

Цели работы: развитие общего подхода к разнообразным вопросам, находящимся на стыке теории интегрируемых систем с теорией представлений квантовых и бесконечномерных групп и алгебр.

Задачи: Основными задачами Международной лаборатории теории представлений и математической физики являются:

- изучение и обобщение отечественного и мирового опыта по направлениям научных исследований, проводимых Лабораторией;
- распространение результатов научных исследований;
- содействие развитию научных исследований в России по направлению исследования;
- содействие участию преподавателей, аспирантов и студентов НИУ ВШЭ в научной деятельности Лаборатории, их контактам с зарубежными исследователями;
- содействие развитию международного научного сотрудничества НИУ ВШЭ.

Объекты научного исследования: квантовые когомологии в теории интегрируемых систем, вопросы зеркальной симметрии, многомерные гипергеометрические функции и геометрическая теория представлений, эллиптические конформные блоки и эллиптические гипергеометрические функции, геометрическое соответствие Ленглендса.

Методы исследований: алгебраический и теоретико-представленческий анализ классических и квантовых теорий поля, статистической физики и случайных процессов, исследование интегрируемых структур стоящих за калибровочными киверными

теориями и анализ их соответствия с двумерными конформными теориями поля, развитие комбинаторных, гомологических и геометрических методов в теории пространств модулей различных геометрических и аналитических структур с приложениями к проблемам математической физики.

Полученные результаты:

— Получено принципиально доказательство топологической рекурсии для случая орбиifoldных чисел Гурвица, основанное на комбинаторном доказательстве квазиполиномиальности этих чисел.

— Предложено новое выражение изомонодромной  $\tau$ -функции системы Шлезингера для 4-точечной  $\mathfrak{sl}_N$  изомонодромной задачи в терминах двумерной конформной теории поля за пределами известного  $N = 2$  случая.

— Установлен изоморфизм между двумя конформными вертексными алгебрами, которые естественно возникают в связи с уравнениями раздутия Накаджимы-Ёшиоки, и доказана основная теорема, относящиеся к представлениям алгебр и к случаю специальных значений центрального заряда (минимальные модели).

— Дано альтернативное доказательство формулы для характера подпространства Фейгина-Стойновского интегрируемого представления аффинной алгебры Ли  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C})$ .

— Получены средние значения тензора энергии импульса при гравитационном коллапсе тонкой оболочки в скалярной теории поля. На древесном уровне найден термальный поток, соответствующий излучению Хокинга. Посчитаны двухпетлевые поправки к древесной корреляционной функции и показано, что они растут со временем, тем самым ломая теорию возмущений.

— Показано, что секулярный рост петлевых поправок к двухточечным корреляционным функциям не зависит от калибровки, а ток от рожденных пар во внешнем постоянном электрическом поле растет со временем и нарушает трансляционную и инверсионную инвариантности КЭД во внешнем постоянном электрическом поле.

— Доказано, что собственные значения случайных эрмитовых матриц, распределенных по мерам, которые являются эргодическими относительно действия сопряжениями бесконечномерной унитарной группой, удовлетворяют закону больших чисел, а также установлена связь таких моделей случайных матриц и объектов свободной вероятности — свободно безгранично делимых мер.

— В предположении установленного недавно соответствия Пенлеве-Калоджеро найдены потенциалы, форма которых определяется из условия совместности линейных задач, ассоциированных с соответствующей обратной задачей. Показано, что квантово-классическое соответствие может быть принято за альтернативное определение уравнений Пенлеве.

— Установлено замечательное соответствие между квантовыми суперсимметричными спиновыми цепочками и классическими интегрируемыми системами многих частиц типа Руйсенаарса-Шнайдера.

— Построена функция больших уклонений потока частиц в модели обобщенного полностью асимметричного процесса с запретами, объединяющая два универсальных режима: класс универсальности Кардара-Паризи-Жанга и гауссовское случайное блуждание единого кластера, и описан переход между этими режимами.

— Вычислены гомологии Хегора-Флоера алгебраических зацеплений.

— Получена явная общая формула для характеров представлений рациональных алгебр Чередника с минимальным носителем, и доказано, что инвариант Решетихина-Тураева для произвольного торического узла совпадает с характером некоторого представления такого типа.

— Доказана эквивалентность определений Аганаджич-Шакирова и Чередника  $t$ -деформированных полиномиальных инвариантов торических узлов.

— Предложено гипотетическое описание для стабильных  $sl(3)$ -гомологий Хованова-Розанского торических узлов в терминах гомологий Кошуля некоторой явной нерегулярной последовательности.

— Предложено новое доказательство формулы Буске-Мелу-Шеффера для случая разложений циклической перестановки, которое, как можно надеяться, допускает обобщение на положительные рода.

#### Организационные результаты:

— подготовка к изданию научных докладов, статей и других публикаций, содержащих результаты научной деятельности Лаборатории;

— организация и проведение школы-конференции, летних школ и научных семинаров

— организация визитов в Лабораторию зарубежных специалистов

— организация курсов лекций

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	8
1 Основные научные результаты . . . . .	14
1.1 Полиномиальность орбифолдных чисел Гурвица, спектральная кривая и новое доказательство формулы Джонсона-Пандхарипанде-Ценга	15
1.2 Изомонодромные $\tau$ -функции и $W_N$ конформные блоки . . . . .	36
1.3 Сцепление двух конформных теорий и уравнения раздутия Накаджимы-Ёшиоки . . . . .	57
1.4 Характеры подпространств Фейгина-Стойновского и теорема Бриона	67
1.5 Излучение Хокинга и секулярно растущие петлевые вклады . . . . .	81
1.6 Унитарно-инвариантные эргодические матрицы и свободная вероятность	85
1.7 Эллиптическая параметризация Пфаффовых интегрируемых иерархий в пределе нулевой дисперсии . . . . .	93
1.8 Интегрируемые квантовые магнетики и классические системы частиц	105
1.9 Возникновение макроскопических кластеров в обобщенном полностью асимметричном процессе с простыми запретами . . . . .	113
ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	144
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ . . . . .	146

## ВВЕДЕНИЕ

Теория представлений групп и алгебр — это центральная часть математики, имеющая множество как математических, так и физических приложений. Различные аспекты этой теории находят свои проявления в таких далеких друг от друга областях, как алгебраическая и перечислительная геометрия, стохастические процессы, теория нелинейных дифференциальных уравнений, квантовая механика и теория поля, топология узлов и т.д. С точки зрения математической физики теория представлений является ядром теории интегрируемых систем, которая в последние двадцать лет привлекает все больше исследователей, ставит новые задачи и является источником множества идей, зачастую приводящих к появлению новых областей математики и физики.

Исследования проводившиеся в международной лаборатории теории представлений и математической физики в 2015 следовали передовым научным тенденциям развития этих областей и были направлены на разработку новых методов и концепций в теории представлений полупростых алгебр Ли и их деформаций, основанных на идеях теории интегрируемых систем, симплектической геометрии и теории эквивариантных квантовых когомологий колчаных многообразий, развитие комбинаторных, гомологических и геометрических методов в теории пространств модулей алгебраических кривых и их отображений с приложениями к проблемам математической физики, развитие нового подхода в теории интегрируемых систем, связанного с квантовыми когомологиями пространств флагов, нахождение и исследование зеркальной симметрии для кокасательных расслоений пространств флагов, дальнейшее изучение и развитие связей между общими гипергеометрическими функциями и фробениусовыми структурами, ассоциированными с квантовыми когомологиями, изучение связей между динамическими квантовыми группами и геометрией аффинных грассманианов, вычисление характеристических классов глобальных локусов сингулярностей в пространствах модулей отображений алгебраических кривых и развитие связей с интегрируемыми иерархиями, выявление геометрической и теоретико-представленческой природы обнаруженного недавно нетривиального соответствия между квантовыми интегрируемыми системами и классическими интегрируемыми иерархиями, развитие теории представлений и геометрической теории эллиптических деформаций алгебр Ли с приложениями к интегрируемым системам с эллиптическими  $R$ -матрицами, алгебраический анализ интегрируемых иерархий солитонных уравнений, интегрируемых моделей классической и квантовой теории поля и статистической физики, анализ интегрируемых структур конформных теорий поля, суперсимметричных калибровочных теорий поля и их деформаций.

В соответствии с возложенными на неё задачами Лаборатория провела следующие мероприятия:



1. подготовила и опубликовала 28 статей, 1 обзор, 9 препринтов и главу в монографии, научные доклады и другие публикации, содержащие результаты научной деятельности Лаборатории;

2. организовала и провела международную конференцию "Классические и квантовые интегрируемые системы" (г.Протвино), международную конференцию "Particles, Fields and Strings" (г.Баку), Азербайджан, международную школу-конференцию "Интегрируемые структуры в квантовой теории поля" (г. Дубна) и международную школу-конференция «Геометрические инварианты и спектральные кривые» (г. Лейден, Нидерланды), школу «Дифференциальные уравнения в квантовой механике и изомонодромные деформации» (г.Москва), а также проводила еженедельный семинар по математической физике, семинары в сотрудничестве с ведущими зарубежными специалистами и другие мероприятия, содействующие активизации научной работы по направлению научных исследований Лаборатории, в частности, ориентированных на молодых учёных, аспирантов и студентов;

3. пригласила и приняла ведущих зарубежных специалистов в количестве 11 человек из стран: Франции, Великобритании, США, Нидерланд, Швейцарии. Специалистами были прочитаны курсы лекций, которые позволили сотрудникам Лаборатории познакомиться с последними достижениями в области теории представлений и математической физики, а также связать эти направления со своими исследованиями, привлекли к научной работе и научным мероприятиям Лаборатории работников, аспирантов и студентов НИУ ВШЭ, специализирующихся по направлению научных исследований Лаборатории;

Наша исследовательская работа была сосредоточена на алгебраическом и теоретико-представленном анализе интегрируемых систем классической и квантовой теорий поля, статистической физики и случайных процессов, исследованиях интегрируемых структур, лежащих в основе колчаных теорий поля. Ниже приведено краткое описание основных научных результатов полученных в процессе работы лаборатории:

Представлен пример вывода формулы типа ELSV через топологическую рекурсию. А именно, для случая орбифолдных чисел Гурвица получено новое доказательство топологической рекурсии, в смысле Чехова, Эйнара и Орантэна, причем, принципиально новым шагом по сравнению с существующими доказательствами является непосредственное комбинаторное доказательство квазиполиномиальности этих чисел. Из топологической рекурсии на спектральной кривой для этой задачи следует формула для орбифолдных чисел Гурвица в терминах теории пересечений на пространстве модулей кривых, которая в данном случае оказывается частным случаем формулы Джонсона –Пандхарипанде – Ценга.

Изучено решение системы Шлезингера для 4-точечной  $\mathfrak{sl}_N$  изомонодромной задач и предложено выражение для изомонодромной  $\tau$ -функции в терминах двумерной

конформной теории поля за пределами известного  $N = 2$  случая, соответствующего Пенлеве VI. Показано, что это соотношение может быть использовано как альтернативное определение конформных блоков  $W_N$  алгебры и что бесконечное количество произвольных констант, возникающих в алгебраической конструкции  $W_N$  конформного блока могут быть выражены в терминах только конечного множества параметров монодромии Фуксовой системы ранга  $N$  с тремя регулярными особыми точками. Это определение непосредственно проверено для известных конформных блоков  $W_3$  алгебры и показываем его согласованность для угаданного вида структурных констант.

Установлен изоморфизм двух конформных вертексных алгебр. Одна из них представлена в виде расширенного произведения двух вертексных алгебр Вирасоро с согласованными центральными зарядами, другая является произведением одной алгебры Вирасоро и некоторой рациональной вертексной алгебры  $\mathcal{U}$ . Эта алгебра  $\mathcal{U}$  является новой, как вертексная алгебра это просто решетчатая алгебра, но имеет нестандартный тензор энергии-импульса. Доказаны также версии основной теоремы относящиеся к представлениям алгебр и к случаю специальных значений центрального заряда (минимальные модели). Эти результаты применяются для доказательства билинейных соотношений на конформные блоки, которые совпадают с уравнениями раздутия Накаджимы-Ёшиоки после АГТ соответствия.

При помощи теоремы Бриона о выпуклых многогранниках дано альтернативное доказательство формулы для характера подпространства Фейгина-Стояновского интегрируемого представления аффинной алгебры Ли  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C})$ . Наш подход состоит в том, чтобы сопоставить векторам, образующим мономиальный базис подпространства, целые точки некоторого политопа. После этого характер вычисляется при помощи теоремы Бриона.

Изучены петлевые поправки к излучению Хокинга. Описываемая модель — звезда с фиксированным радиусом, внутри которой метрика плоская, а за её пределами метрика описывается решением Шварцшильда. В некоторый момент, у звезды заканчивается ядерное топливо и она начинает коллапсировать. На данном гравитационном фоне, который называется гравитационный коллапс, рассматривается массивное скалярное поле с самодействием. При помощи диагонализации гамильтониана в состоянии когда не было никакого коллапса выбирается начальное состояние, так называемое ин-состояние. При помощи условий сшивки и решение уравнений Кляйна-Гордона на данном нетривиальном гравитационном фоне были найдены как меняются гармоники в случае, когда звезда начинает коллапсировать. Тем самым результат Хокинга, который изначально был получен только для безмассовых полей, был проверен и для массивных и были получены гармоники, которые можно удобно использовать для различных вычислений. В частности, были подсчитаны однопетлевые поправки к Келдышевскому пропагатору и показано что он также линейно расходится. Данный результат может быть использован для решения информационного парадокса.

Кроме того показано, что секулярный рост петлевых поправок к двухточечным корреляционным функциям не зависит от калибровки: такой же рост обнаружен и в статической калибровке для постоянного внешнего электрического поля. Далее решается кинетическое уравнение, которое описывает рождение фотонов за счет внешних полей и позволяет просуммировать лидирующие секулярно растущие вклады во всех петлях. Помимо этого, показано, что ток от рожденных пар во внешнем постоянном электрическом поле не равен нулю: он тоже растет со временем и нарушает трансляционную и инверсионную инвариантности КЭД во внешнем постоянном электрическом поле.

Рассмотрены вероятностные меры на пространстве эрмитовых матриц, которые являются эргодическими относительно действия сопряжениями бесконечномерной унитарной группой. Доказывалось, что собственные значения случайных матриц, распределенных по этим мерам, удовлетворяют закону больших чисел. Мы также устанавливаем связь таких моделей случайных матриц и объектов свободной вероятности — свободно безгранично делимых мер.

В свете установленного недавно квантового соответствия Пенлеве-Калоджеро исследуется обратная задача. В предположении, что данное соответствие имеет место, найдены потенциалы, форма которых определяется из условия совместности ассоциированных линейных задач. Эти последние условия представлены в виде функциональных соотношений для потенциалов, которые зависят от единственной функции, входящей в левый верхний элемент матрицы Лакса. Условия квантового соответствия Пенлеве-Калоджеро налагают определенные ограничения на эту функцию. В частности, она должна удовлетворять теплому уравнению. Показано, что все естественные возможности выбора этой функции (рациональная, тригонометрическая или эллиптическая) дают в точности список уравнений Пенлеве. В этом смысле квантово-классическое соответствие может быть принято за альтернативное определение уравнений Пенлеве.

Вводится управляющий  $T$ -оператор для интегрируемых неоднородных суперсимметричных спиновых цепочек (обобщенных градуированных магнетиков), построенных с помощью  $Y(\mathfrak{gl}(N|M))$ -инвариантных  $R$ -матриц в конечномерных представлениях. Управляющий  $T$ -оператор представляет собой своего рода производящую функцию для семейства коммутирующих трансфер-матриц. Любое его собственное значение является тау-функцией классической модифицированной иерархии Кадомцева-Петвиашвили (мКП). Как функция спектрального параметра управляющий  $T$ -оператор является полиномом. Сам спектральный параметр отождествляется при этом с  $0$ -м временем интегрируемой иерархии мКП. Отсюда вытекает существование замечательного соответствия между квантовыми суперсимметричными спиновыми цепочками и классическими интегрируемыми системами многих частиц типа Руйсенаарса-Шнайдера. Как следствие получены алгебраические уравнения для спектра гамильтонианов квантовых спиновых цепочек.

Показано, что секулярный рост петлевых поправок к двухточечным корреляционным функциям не зависит от калибровки: такой же рост обнаружен и в статической калибровке для постоянного внешнего электрического поля. Далее мы решаем кинетическое уравнение, которое описывает рождение фотонов за счет внешних полей и позволяет просуммировать лидирующие секулярно растущие вклады во всех петлях. Помимо этого, мы показываем, что ток от рожденных пар во внешнем постоянном электрическом поле не равен нулю: он тоже растет со временем и нарушает трансляционную и инверсионную инвариантности КЭД во внешнем постоянном электрическом поле.

Рассмотрено интегрируемое обобщение простейшей точнорешаемой модели, на примере которой можно поведение систем, принадлежащих классу универсальности Кардара-Паризи-Жанга (КПЖ), асимметричного процесса с простыми запретами (АП-ПЗ), в котором введено дополнительное взаимодействие, позволяющее контролировать степень кластеризации частиц. В этой модели построено распределение величины потока частиц, которое в зависимости от значения параметра взаимодействия демонстрирует два типа универсального скейлингового поведения. Либо при конечной плотности кластеров частиц распределение имеет вид, характерный для класса универсальности КПЖ, либо все частицы образуют единый кластер, и их поток описывается распределением Гаусса. Впервые построена функция, объединяющая два универсальных режима и описан переход между ними.

Исследованы представления рациональных алгебр Чередника с минимальным носителем. Получена явная общая формула для характеров таких представлений, и доказано, что инвариант Решетихина-Тураева для произвольного торического узла совпадает с характером некоторого представления такого типа. Как следствие, доказано, что все коэффициенты разложения инварианта Решетихина-Тураева по параметрам  $a$  и  $q$  неотрицательны. Кроме того, установлены изоморфизмы между некоторыми изотипическими компонентами представлений с параметрами  $m/n$  и  $n/m$ , соответствующие топологической эквивалентности торических узлов типа  $(m,n)$  и  $(n,m)$ .

В статье вычисляются гомологии Хегора-Флоера алгебраических зацеплений. Доказано, что последние совпадают с гомологиями пространств алгебраических функций, имеющих заданные порядки на компонентах соответствующей особенности плоской кривой, установлена связь этих гомологий с коэффициентами мотивного ряда Пуанкаре особенности.

Исследованы  $t$ -деформированные полиномиальные инварианты торических узлов. Эти инварианты были введены М. Аганаджич и Ш. Шакировым, они параметризуются типом торического узла  $(m,n)$  и диаграммой Юнга, соответствующей неприводимому представлению алгебры Ли  $sl(N)$ . И. Чередник предложил другое определение этих инвариантов, основанное на двойных аффинных алгебрах Гекке. В работе доказано, что определения Аганаджич-Шакирова и Чередника эквивалентны, и что при

подходящей перенормировке инвариант не зависит от  $N$ . Для простейшей диаграммы Юнга размера 1 и произвольного торического узла получена явная формула для инварианта.

В работе предлагается гипотетическое описание для стабильных  $sl(3)$ -гомологий Хованова-Розанского торических узлов в терминах гомологий Кошуля некоторой явной нерегулярной последовательности. Ответ сравнивается с недавно полученными вторым автором результатами компьютерных экспериментов. Кроме того, для конечных  $(3, m)$  торических узлов дается явная формула для гомологий в терминах категорифицированных проекторов Джонса-Венцля.

В 2000 г. М. Буске-Мелу и Ж. Шеффер получили элегантную формулу для количества разложений перестановки в произведение заданного числа перестановок, отвечающих накрытиям рода 0. Обобщения их формулы на накрытия сферы поверхностями старших родов неизвестны до сих пор. Нами предложено новое доказательство формулы Буске-Мелу–Шеффера для случая разложений циклической перестановки, которое, как можно надеяться, допускает обобщение на положительные рода.

Подробное изложение полученных результатов представлено в основной части отчета. Все результаты тематически отнесены к одной из двух частей: «Развитие теории представлений полупростых алгебр Ли и их деформаций» и «Алгебраический анализ интегрируемых моделей классической и квантовой теории поля, интегрируемые структуры в калибровочных теориях, моделях статистической механики и случайных процессов». Каждая часть разделена на разделы, в которых содержится подробное описание полученных результатов. Каждый раздел содержит собственное введение, где определяются основные понятия, вводятся определения и ставится задача, после чего следует подробное описание методов исследования и полученных результатов. Ссылки на литературу собраны в списке использованных источников. Полученные результаты опубликованы в статьях [1]-[36].

## 1 Основные научные результаты

## 1.1 Полиномиальность орбиформальных чисел Гурвица, спектральная кривая и новое доказательство формулы Джонсона-Пандхарипанде-Ценга

### 1.1.1 Введение

#### 1.1.1.1 Основная цель

Основной целью данной работы является построение нового важного примера процедуры, которая позволяет связать однородным образом обретенный класс комбинаторных задач с теорией пересечений на пространстве модулей кривых. Опишем данную процедуру. Общая логика ее такова:

– Пусть имеется комбинаторная задача, зависящая естественным образом от параметра "рода"  $g \geq 0$  и вектора  $\vec{\mu} \in \mathbb{Z}_{>0}^n$ .

– Рассмотрим производящие функции, решающие данную комбинаторную задачу. Часто можно доказать, что из можно получить разложением определенных симметрических дифференциалов  $\omega_{g,n}$ , которые являются ответом в матрично-модельной топологической рекурсии [48, 47] для определенной спектральной кривой.

– В некоторых относительно слабых предположениях, разложение симметрических дифференциалов, полученных в результате применения процедуры топологической рекурсии, может быть представлено (с точностью до некоторых констант) как

$$\sum_{l(\vec{\mu})=n} \sum_{a_1, \dots, a_r=1}^r \left[ \int_{\mathcal{M}_{g,n}} \frac{S(a_1, \dots, a_r)}{\prod_{j=1}^n (1 - \psi_j \frac{d}{dx_j})} \right] \prod_{j=1}^n \xi_{a_j}(x_j).$$

Здесь  $r$  – число точек ветвления на спектральной кривой,  $S(a_1, \dots, a_r)$  – определенный тавтологический класс на пространстве модулей кривых, а  $\xi_a(x)$  – некоторые вспомогательные функции,  $a = 1, \dots, r$ , также определенные явным образом [44, 46].

– Таким образом, комбинаторная задача решается в терминах чисел пересечений тавтологических классов на пространстве модулей кривых, а полученная формула является формулой типа ELSV [45].

Первый пример такого способа доказательства формулы типа ELSV был приведен в работе [43], где это привело к новому доказательству исходной формулы ELSV для обыкновенных чисел Гурвица.

В данной работе данная процедура проделана для т.н. орбиформальных чисел Гурвица [52, 50, 42, 41]. Орбиформальные числа Гурвица являются частным случаем двойных чисел Гурвица [51], где индексы ветвления в одном особом слое заданы произвольным разбиением  $\mu$ , а во всех остальных особых слоях они все равны  $r$ . Формула пересечений, которая получается в результате применения данной процедуры, ранее была выведена Джонсоном, Пандхарипанде и Ценгом [52], таким образом в текущей работе получено ее новое доказательство.

### 1.1.1.2 Известные факты о числах Гурвица

Перечислим известные факты об орбифолдных числах Гурвица.

Факт 1: (*Формула JPT*) Орбифолдные числа Гурвица даются числами пересечений на пространстве модулей алгебраических кривых с помощью формулы Джонсона-Пандхарипанде-Ценга.

Факт 2: (*Квазиполиномиальность*) Орбифолдные числа Гурвица могут быть представлены, с точностью до определенного комбинаторного множителя, как значения полинома от  $n$  переменных  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , коэффициенты которого зависят только от  $\vec{\mu} \bmod r$ .

Факт 3: (*Разрезание и склейка*) Орбифолдные числа Гурвица удовлетворяют простому соотношению рекурсии с ясным топологическим смыслом, называемому уравнением разрезания и склейки [49].

Факт 4: (*Топологическая рекурсия*)  $n$ -точечные производящие функции орбифолдных чисел Гурвица могут быть представлены в виде разложений корреляционных дифференциалов получаемых с помощью процедуры топологической рекурсии Чехова-Эйнара-Орантана.

Опишем связи между вышеперечисленными фактами. Во-первых, результат Джонсона - Пандхарипанде - Ценга [52] обозначим следующим образом:

(Определение)  $\Rightarrow$  (Формула JPT)

Основные результаты [41] и [42] могут быть описаны следующим образом:

(Формула JPT)  $\Rightarrow$  (Квазиполиномиальность)

(Квазиполиномиальность) и (Разрезание и склейка)  $\Rightarrow$  (Топологическая рекурсия).

Здесь первое следствие очевидно; однако до сих пор других доказательств полиномиальности помимо ее вывода из структуры формулы Джонсона-Пандхарипанде-Ценга известно не было. Таким образом, видно, что в указанных статьях формула JPT используется довольно слабым образом, а именно используется только ее общая структура.

В работе [53] формула JPT используется в полном объеме; в результате доказано, что

(JPT formula)  $\Leftrightarrow$  (Topological Recursion)

В текущей работе дается явное доказательство квазиполиномиальности чисел Гурвица, использующее только их определение. Это позволяет использовать результаты [41, 42], чтобы доказать топологическую рекурсию, что, в свою очередь, позволяет использовать результаты [53], чтобы получить новое доказательство формулы JPT. Таким образом, структура текущей работы может быть сформулирована следующим



образом:

(Определение)  $\xrightarrow{\text{[текущая работа]}}$  (Квазиполиномиальность)  
 (Квазиполиномиальность) и (Разрезание и склейка)  
 $\xrightarrow{\text{следуя [41, 42]}}$  (Топологическая рекурсия)  
 (Топологическая рекурсия)  $\xrightarrow{\text{используя [53]}}$  (Формула JPT)

Первый шаг здесь оригинален и является основным техническим результатом данной работы; второй шаг производится следуя [41, 42], хотя в текущей работе больше внимания уделяется структурам формул, выражающих абстрактные петлевые уравнения, чем явным вычислениям; в третьем шаге используются результаты работы [53].

### 1.1.1.3 Структура работы

В разделе 1.1.2 описывается формализм полубесконечного внешнего произведения, являющийся основным техническим средством в данной работе. В разделе 1.1.3 производится развитие данного формализма, в частности, выводится определение орбиформальных чисел Грувица через него, где они выражаются через т.н.  $\mathcal{A}$ -операторы. В разделе 1.1.4 производится дальнейший анализ формулы для орбиформальных чисел Грувица через  $\mathcal{A}$ -операторы для доказательства из квазиполиномиальности. В разделе 1.1.5 воспроизводится описание топологической рекурсии. В разделе 1.1.6 показывается, как, используя квазиполиномиальность и уравнение разрезания и склейки для орбиформальных чисел Грувица, доказать для них топологическую рекурсию. В разделе 1.1.7 используются результаты [53] для получения нового доказательства формулы JPT.

Во всей работе выбрано фиксированное целое число  $r \geq 1$ .

### 1.1.2 Формализм полубесконечного внешнего произведения

В данном разделе описан формализм полубесконечного внешнего произведения. Это позволяет в разделе 1.1.3 выразить  $r$ -орбиформальные числа Грувица через средние от операторов, действующих на пространстве полубесконечного внешнего произведения. Более полное введение в данный формализм см. в [54, 56, 51].

Пусть  $V$  – бесконечномерное векторное пространство с базисом, пронумерованным полуцелыми числами. Обозначим базисный вектор соответствующий  $m/2$  как  $\underline{m/2}$ , т.е.  $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} i$ .

**Определение 1.** *Пространство полубесконечного внешнего произведения  $\bigwedge^{\infty}_{\frac{1}{2}}(V) = \mathcal{V}$  определяется как линейная оболочка всех полубесконечных внешних произведений вида*

$$\underline{i_1} \wedge \underline{i_2} \wedge \cdots$$

для всех убывающих последовательностей полуцелых чисел  $(i_k)$  таких, что существует целое число  $c$  такое, что  $i_k + k - \frac{1}{2} = c$  для всех достаточно больших  $k$ . Константа  $c$  называется зарядом. Определим на  $\mathcal{V}$  скалярное произведение  $(\cdot, \cdot)$ , положив все его базисные элементы ортонормальными.

**Примечание 1.** По определению 1 подпространство нулевого заряда  $\mathcal{V}_0$  пространства  $\mathcal{V}$  получается как линейная оболочка полубесконечных внешних произведений вида

$$\underline{\lambda_1 - \frac{1}{2}} \wedge \underline{\lambda_2 - \frac{3}{2}} \wedge \dots$$

для некоторого целочисленного разбиения  $\lambda$ . Таким образом можно отождествить целочисленные разбиения с базисом данного пространства:

$$\mathcal{V}_0 = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bigoplus_{\lambda \vdash n} v_\lambda$$

Пустое разбиение  $\emptyset$  играет особую роль. Будем называть

$$v_\emptyset = \underline{-\frac{1}{2}} \wedge \underline{-\frac{3}{2}} \wedge \dots$$

вакуумным вектором и обозначать его  $|0\rangle$ . Похожим образом, будем называть ковакуумным вектором дуальных к нему вектор относительно скалярного произведения  $(\cdot, \cdot)$  и обозначать его как  $\langle 0|$ .

**Определение 2.** Вакуумное среднее или несвязный коррелятор  $\langle \mathcal{P} \rangle^\bullet$  оператора  $\mathcal{P}$  действующего на  $\mathcal{V}_0$  определяется как

$$\langle \mathcal{P} \rangle^\bullet := (|0\rangle, \mathcal{P}|0\rangle) =: \langle 0|\mathcal{P}|0\rangle$$

Также определим

$$\zeta(z) = e^{z/2} - e^{-z/2} = 2 \sinh(z/2)$$

**Определение 3.** Приведем список операторов, которые будут использоваться:

i) Для полуцелого  $k$  оператор  $\psi_k: (\underline{i_1} \wedge \underline{i_2} \wedge \dots) \mapsto (\underline{k} \wedge \underline{i_1} \wedge \underline{i_2} \wedge \dots)$  увеличивает заряд на 1. Сопряженный к нему оператор  $\psi_k^*$  относительно  $(\cdot, \cdot)$  уменьшает заряд на 1.

ii) Нормально-упорядоченные произведения  $\psi$ -операторов

$$E_{i,j} := \begin{cases} \psi_i \psi_j^*, & \text{if } j > 0 \\ -\psi_j^* \psi_i & \text{if } j < 0. \end{cases}$$

сохраняют заряд и тем самым могут быть ограничены на подпространство  $\mathcal{V}_0$ , где они действуют следующим образом. Для  $i \neq j$   $E_{i,j}$  проверяет, содержит ли  $v_\lambda$   $\underline{j}$  как множитель  $u$ , если содержит, заменяет его на  $\underline{i}$ . В противном случае данный оператор возвращает 0. В случае  $i = j > 0$ , имеем  $E_{i,j}(v_\lambda) = v_\lambda$  если  $v_\lambda$  содержит  $\underline{j}$  и 0, если не содержит; в случае  $i = j < 0$ , имеем  $E_{i,j}(v_\lambda) = -v_\lambda$  если  $v_\lambda$  не содержит  $\underline{j}$  и 0 в противном случае.

iii) Диагональные операторы собираются в операторы

$$\mathcal{F}_n := \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \frac{k^n}{n!} E_{k,k}$$

В текущей работе будет особенно интересен оператор  $\mathcal{F}_2$ . Оператор  $\mathcal{F}_0$  называется оператором заряда, в то время как  $\mathcal{F}_1$  называется оператором энергии. Заметим, что  $\mathcal{F}_0$  тождественно обращается в ноль на  $\mathcal{V}_0$ , тогда как для  $\mathcal{F}_1$  базисные векторы  $v_\lambda$  являются собственными векторами с собственными значениями  $|v_\lambda|$  (будем называть  $|v_\lambda|$  энергией базисного вектора  $v_\lambda$ ). Оператор  $\mathcal{P}$ , определенный на  $\mathcal{V}_0$ , будем называть оператором с энергией  $c \in \mathbb{Z}$ , если  $-\mathcal{F}_1, \mathcal{P}$  пропорционален  $\mathcal{P}$  с коэффициентом пропорциональности  $c$ , т.е. если

$$-\mathcal{F}_1, \mathcal{P} = c\mathcal{P}$$

Другими словами, если  $\mathcal{P}$  оператор с энергией  $c$ , то он переводит базисный элемент энергии  $k$  в линейную комбинацию базисных элементов, каждый из которых имеет энергию  $k - c$ .

В дальнейшем будет важно, что операторы с положительной энергией обращают вакуумный вектор в ноль, в то время как операторы с отрицательной энергией обращают в ноль ковакуум. Более конкретно, пусть  $\mathcal{M}$  – некторый оператор, пусть  $\mathcal{P}$  – оператор с положительной энергией, а  $\mathcal{N}$  – оператор с отрицательной энергией, тогда  $\langle \mathcal{M}\mathcal{P} \rangle^\bullet = 0$  и  $\langle \mathcal{N}\mathcal{M} \rangle^\bullet = 0$ . Оператор  $E_{i,j}$  имеет энергию  $j - i$ , следовательно все операторы  $\mathcal{F}_n$  имеют нулевую энергию.

iv) Для любого целого  $n$  и формальной переменной  $z$  определим следующие операторы с энергией  $n$ :

$$\mathcal{E}_n(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z} + 1/2} e^{z(k - \frac{n}{2})} E_{k-n, k} + \frac{\delta_{n,0}}{\zeta(z)}.$$

v) Для любого целого  $n$  также определим следующие операторы с энергией  $n$ :

$$\alpha_n = \mathcal{E}_n(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z} + 1/2} E_{k-n, k}$$

Коммутационное соотношение для операторов  $\mathcal{E}$  имеет следующий вид:

$$[\mathcal{E}_a(z), \mathcal{E}_b(w)] = \zeta(\det \begin{bmatrix} a & z \\ b & w \end{bmatrix}) \mathcal{E}_{a+b}(z+w) \quad (1.1.1)$$

Заметим, что:

$$\mathcal{E}_k(z)|0\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\zeta(z)}|0\rangle, & \text{if } k = 0 \\ 0 & \text{if } k > 0. \end{cases}$$

### 1.1.3 Операторы $\mathcal{A}$

Пусть  $r$  – положительное целое число.  $r$ -орбиформные числа Гурвица  $h_{g,\mu}^{\bullet,[r]}$  перечисляют разветвленные накрытия 2-сферы поверхностями рода  $g$  (возможно, несвязными), такими, что профиль ветвления над бесконечностью задан разбиением  $\mu =$

$(\mu_1, \dots, \mu_{l(\mu)})$ , а профиль ветвления над нулем задан как  $(r, \dots, r)$ , при этом имеются простые ветвления над

$$b := 2g - 2 + l(\mu) + \sum_{i=1}^{l(\mu)} \frac{\mu_i}{r}$$

точками, а больше ветвлений нет. Легко видеть, что  $r$  должно быть делителем степени накрытия  $d = |\mu|$ .

**Определение 4.** Производящая функция несвязных  $r$ -орбифолдных чисел Гурвица по родам определяется как следующий формальный ряд:

$$H^{\bullet, [r]}(\vec{\mu}, u) = \sum_{g \geq 0} h_{g, \vec{\mu}}^{\bullet, [r]} \frac{u^b}{b!}$$

Несвязные  $r$ -орбифолдные числа Гурвица могут быть записаны как вакуумные средние следующим образом (см. [56, 51, 55]) :

$$H^{\bullet, [r]}(\vec{\mu}, u) = \sum_{g \geq 0} \left\langle e^{\frac{\alpha r}{r}} \mathcal{F}_2^b \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{\alpha_{-\mu_i}}{\mu_i} \right\rangle \frac{u^b}{b!} = \left\langle e^{\frac{\alpha r}{r}} e^{u \mathcal{F}_2} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{\alpha_{-\mu_i}}{\mu_i} \right\rangle \quad (1.1.2)$$

Перепишем данные вакуумные средние более удобным образом, используя т.н.  $\mathcal{A}$ -операторы, введенные в работе [56]. Для этого нужны следующие определения:

**Обозначение 1.** Символом Похгаммера называется

$$(x+1)_n = \frac{(x+n)!}{x!} = \begin{cases} (x+1)(x+2) \cdots (x+n) & n \geq 0 \\ (x(x-1) \cdots (x+n+1))^{-1} & n \leq 0 \end{cases}.$$

По определению,  $(x+1)_n$  обращается в ноль для целого  $-n \leq x \leq -1$ , а  $1/(x+1)_n$  обращается в ноль для целого  $0 \leq x \leq -(n+1)$ . Пусть

$$\mathcal{S}(z) = \zeta(z)/z = \frac{\sinh(z/2)}{z/2}$$

, а также введем следующие обозначения для разбиения рационального числа на целую и дробную часть: для  $x \in \mathbb{Q}$  имеем

$$x = [x] + \langle x \rangle,$$

где  $[x] \in \mathbb{Z}$ , а  $0 \leq \langle x \rangle < 1$ .

**Определение 5.** Следующие операторы будут играть центральную роль в данной работе:

$$\mathcal{A}_\eta^{[r]}(z, u) = r^{-\eta/r} (\mathcal{S}(ruz))^{z-\eta} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(\mathcal{S}(ruz))^k z^k}{\left(\frac{z-\eta}{r} + 1\right)_k} \mathcal{E}_{kr-\eta}(uz) \quad (1.1.3)$$

Обозначим коэффициенты их разложения по  $z$  следующим образом:  $\mathcal{A}_\eta^{[r]}(z, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_\eta^{[r], (k)} z^k$ .

**Примечание 2.** Определенные выше  $\mathcal{A}$ -операторы совпадают со частным случаем  $\mathcal{A}$ -операторов, определенных Джонсоном в работе [50] (их будем обозначать  ${}_J\mathcal{A}$ ), и в то же время являются обобщением операторов, введенных Ожуньковым и Пандхарипанде в статье [56]. Специализация результатов Джонсона из [50] достигается путем использования следующего предположения (в терминах Джонсона) во всей текущей работе:

$$K = \{e\} \quad R = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \quad (1.1.4)$$

Из этого следует, что всякой неприводимое представление  $K$  – это тождественно единица. При этих условиях уравнение (5.5) в [50] принимает следующий вид:

$${}_J\mathcal{A}_{\frac{a}{r}}^1(z, u) = \frac{zr^{a/r}}{z+a} \mathcal{S}(ruz) \frac{z+a}{r} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(\mathcal{S}(ruz))^k z^k}{\left(\frac{z+a}{r} + 1\right)_k} \mathcal{E}_{kr+a}(uz)$$

Данные два оператора совпадают в следующем смысле (для целочисленных  $\mu$ ):

$${}_J\mathcal{A}_{1-\langle \frac{\mu}{r} \rangle}^1(\mu, u) = \mathcal{A}_{r\langle \frac{\mu}{r} \rangle}^{[r]}(\mu, u) = r^{-\langle \frac{\mu}{r} \rangle} (\mathcal{S}(r\mu)) \left\lfloor \frac{\mu}{r} \right\rfloor \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(\mathcal{S}(r\mu))^k \mu^k}{\left(\left\lfloor \frac{\mu}{r} \right\rfloor + 1\right)_k} \mathcal{E}_{kr-r\langle \frac{\mu}{r} \rangle}(u\mu)$$

Джонсон определяет свое пространство полубесконечного внешнего произведения как тензорное произведение обычного такого пространства и группы  $K$ . При  $K$  – тривиальной группе, данные определения совпадают.

**Утверждение 1.** Производящая функция несвязных орбиформных чисел Гурвица может быть выражена через  $\mathcal{A}$ -операторы следующим образом:

$$H^{\bullet, [r]}(\vec{\mu}, u) = r^{\sum_{i=1}^{l(\vec{\mu})} \langle \frac{\mu_i}{r} \rangle} \prod_{i=1}^{l(\vec{\mu})} \frac{u^{\frac{\mu_i}{r}} \mu_i^{\left\lfloor \frac{\mu_i}{r} \right\rfloor - 1}}{\left\lfloor \frac{\mu_i}{r} \right\rfloor!} \left\langle \prod_{i=1}^{l(\vec{\mu})} \mathcal{A}_{r\langle \frac{\mu_i}{r} \rangle}^{[r]}(\mu_i, u) \right\rangle^{\bullet} \quad (1.1.5)$$

*Доказательство.* Операторы  $\alpha_r$  и  $\mathcal{F}_2$  обращают вакуум в ноль, следовательно можно сопрячь каждый из операторов  $\alpha_{-\mu_i}$  в (1.1.2) их экспонентами, получив

$$H^{\bullet, [r]}(\vec{\mu}, u) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{l(\vec{\mu})} \mu_i} \left\langle \prod_{i=1}^{l(\vec{\mu})} e^{\frac{\alpha_r}{r}} e^{u\mathcal{F}_2} \alpha_{-\mu_i} e^{-u\mathcal{F}_2} e^{-\frac{\alpha_r}{r}} \right\rangle^{\bullet} \quad (1.1.6)$$

Вспомним уравнение (2.14) из [56]:

$$e^{u\mathcal{F}_2} \alpha_{-\mu} e^{-u\mathcal{F}_2} = \mathcal{E}_{-\mu}(u\mu)$$

Заметим, что энергия сохраняется равной  $-\mu$ . Коммутационное соотношение (1.1.1) дает:

$$[\alpha_r, \mathcal{E}_{-\mu}(u\mu)] = \zeta(r\mu) \mathcal{E}_{r-\mu}(u\mu)$$

Имеем:

$$e^{\frac{\alpha_r}{r}} \mathcal{E}_{-\mu}(u\mu) e^{-\frac{\alpha_r}{r}} = \sum_{k \geq 0} \left( \frac{\zeta(r\mu)}{r} \right)^k \frac{1}{k!} \mathcal{E}_{kr-\mu}(u\mu) = \sum_{k \geq 0} \frac{u^k \mu^k (\mathcal{S}(r\mu))^k}{k!} \mathcal{E}_{kr-\mu}(u\mu)$$

Умножив на  $k - \lfloor \frac{\mu}{r} \rfloor \mapsto k$  и использовав свойства обращения в ноль символа Похгаммера, перепишем последнее выражение как

$$\frac{(u\mu)^{\lfloor \frac{\mu}{r} \rfloor}}{\lfloor \frac{\mu}{r} \rfloor!} (\mathcal{S}(ru\mu))^{\lfloor \frac{\mu}{r} \rfloor} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{u^k (\mathcal{S}(ru\mu))^k \mu^k}{(\lfloor \frac{\mu}{r} \rfloor + 1)_k} \mathcal{E}_{kr - \langle \frac{\mu}{r} \rangle_r}(u\mu)$$

Чтобы согласовать степени  $u$  сопряжем выражение экспонентой оператора энергии  $u^{\mathcal{F}_1/r}$ . Т.к.  $\mathcal{F}_1$  и сопряженный к нему оператор сохраняют вакуум, это не влияет на средние от произведений  $\mathcal{A}$ -операторов. Т.к.  $\mathcal{E}_j$  имеет энергию  $j$ , сопряжение убирает  $u^k$  изнутри суммы и добавляет множитель  $u^{\langle \frac{\mu}{r} \rangle}$  снаружи. Таким образом, среднее операторов в (1.1.6) можно заменить на среднее от произведения

$$\frac{u^{\frac{\mu_i}{r}} \mu_i^{\lfloor \frac{\mu_i}{r} \rfloor}}{\lfloor \frac{\mu_i}{r} \rfloor!} (\mathcal{S}(ru\mu_i))^{\lfloor \frac{\mu_i}{r} \rfloor} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(\mathcal{S}(ru\mu_i))^k \mu_i^k}{(\lfloor \frac{\mu_i}{r} \rfloor + 1)_k} \mathcal{E}_{kr - \langle \frac{\mu_i}{r} \rangle_r}(u\mu_i)$$

for  $i = 1, \dots, l(\vec{\mu})$ . Тогда, используя уравнение (1.1.3), можно переписать всю формулу (1.1.6) в целом как (1.1.5).  $\square$

Следующая [56], определим следующий ряд, бесконечный в обе стороны:

$$\delta(z, -w) = \frac{1}{w} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( -\frac{z}{w} \right)^k$$

Он получается взятием разности следующих двух разложений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+w} &= \frac{1}{w} - \frac{z}{w^2} + \frac{z^2}{w^3} - \dots, & |z| < |w| \\ \frac{1}{z+w} &= \frac{1}{z} - \frac{w}{z^2} + \frac{w^2}{z^3} - \dots, & |z| > |w| \end{aligned}$$

Ряд  $\delta(z, -w)$  является формальной  $\delta$ -функцией в  $z + w = 0$  в том смысле, что

$$(z + w)\delta(z, -w) = 0$$

Вспомним формулу для коммутаторов операторов  $\mathcal{A}$ , которая будет важна для доказательства полиномиальности. Ниже за  $\delta_r(\eta)$  будет обозначаться функция целых чисел, дающая значение 1 при  $\eta \equiv 0 \pmod r$  и обращающаяся в ноль в противном случае.

**Утверждение 2** (Частный случай леммы V.4. работы [50]). Пусть  $\eta_1, \eta_2$  – целые числа, удовлетворяющие  $0 \leq \eta_1, \eta_2 \leq r - 1$ . Имеем:

$$[\mathcal{A}_{\eta_1}^{[r]}(z, u), \mathcal{A}_{\eta_2}^{[r]}(w, u)] = \delta_r(\eta_1 + \eta_2) zw \delta(z, -w)$$

или, эквивалентно:

$$[\mathcal{A}_{\eta_1}^{[r],(k)}, \mathcal{A}_{\eta_2}^{[r],(l)}] = \delta_r(\eta_1 + \eta_2) (-1)^l \delta_{k+l-1}. \quad (1.1.7)$$

Определим  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$  как

$$\Omega = \left\{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \left| \forall k, |z_k| > \sum_{i=1}^{k-1} |z_i| \right. \right\}.$$

Специализируя теорему V.2 статьи [50] в предположении (1.1.4) (см. также раздел 2.4 в работе [43]) имеем:

**Утверждение 3.** Для любых целых  $\eta_1, \dots, \eta_n$ ,  $0 \leq \eta_1, \dots, \eta_n \leq r-1$ , ряд Лорана для выражения

$$\left\langle \mathcal{A}_{\eta_1}^{[r]}(z_1, u) \cdots \mathcal{A}_{\eta_n}^{[r]}(z_n, u) \right\rangle^\bullet$$

по  $u, z_1, \dots, z_n$  сходится к аналитической функции для  $(z_1, \dots, z_n) \in \Omega$  и достаточно малого  $u \neq 0$ .

**Обозначение 2.** Для краткости в дальнейшем будем вместо  $\mathcal{A}_{\eta}^{[r]}(z, u)$  писать  $\mathcal{A}_{\eta}(z)$ .

#### 1.1.4 Квазиполиномиальность

В данном разделе выводится квазиполиномиальность  $r$ -орбиформных чисел Гурвица (теорема 1). Используемое доказательство является обобщением доказательства из статьи [43].

##### 1.1.4.1 Связные вакуумные средние

Утверждение 1 выражает производящую функцию для несвязных орбиформных чисел Гурвица через вакуумное среднее  $\mathcal{A}$ -операторов. Первой целью текущего раздела является получение подобной формулы для связных орбиформных чисел Гурвица.

**Определение 6.** Определим связные корреляторы  $\langle \mathcal{A}_{\eta_1}(z_1) \cdots \mathcal{A}_{\eta_n}(z_n) \rangle^\circ$  через несвязные  $\langle \cdots \rangle^\bullet$  с помощью формулы включения-исключения.

Обратная форма формулы включения-исключения может быть записана как (ср. с [43]):

$$\langle \mathcal{A}_{\eta_1}(z_1) \cdots \mathcal{A}_{\eta_n}(z_n) \rangle_k^\bullet = \sum_{y \in \mathcal{Y}_{n,k}} \prod_{i=1}^{h(y)} \left\langle \mathcal{A}_{\eta_{c_{i,1}(y)}}(z_{c_{i,1}(y)}) \cdots \mathcal{A}_{\eta_{c_{i,l_i}(y)}}(z_{c_{i,l_i}(y)}) \right\rangle_{\lambda_i(y)}^\circ \quad (1.1.8)$$

Здесь  $\mathcal{Y}_{n,k}$  – конечное множество  $\{1, \dots, n\}$ -таблиц Юнга  $y$  со следующими свойствами:

а) Числа в рядах должны быть возрастающими: если  $c_{i,j}(y)$  – число в  $i$ -м ряду и  $j$ -м столбце, то для любых  $i$  и любых  $j_1 < j_2$  должно быть  $c_{i,j_1}(y) < c_{i,j_2}(y)$ . Каждый ряд соответствует отдельному связному коррелятору

б) Для рядов одинаковой длины в первом столбце числа должны возрастать: если  $l_i(y)$  – длина  $i$ -го ряда, то если  $l_{i_1}(y) = l_{i_2}(y)$  и  $i_1 < i_2$ , то должно быть  $c_{i_1,1}(y) < c_{i_2,1}(y)$ .

в)  $h(y)$  – общее число рядов. Рядам сопоставляются вектора  $\{\lambda_i(y) \in \{-1, 0, 1, \dots\}\}_i$ , где  $\sum_{i=1}^{h(y)} \lambda_i(y) = k$ . Вектор  $\vec{\lambda}$  соответствует вектору Эйлеровых характеристик корреляторов с противоположным знаком.

Тривиальный пример	Более сложный пример (допустимая неупорядоченность закрашена)	Неверный пример (ошибки закрашены)															
-1 <table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>	1	2	3	4	5	-1 <table border="1"><tr><td>2</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr></table>	2	5	6	7	8	-1 <table border="1"><tr><td>2</td><td>5</td><td>7</td><td>6</td><td>8</td></tr></table>	2	5	7	6	8
1	2	3	4	5													
2	5	6	7	8													
2	5	7	6	8													
0 <table border="1"><tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr></table>	6	7	8	9	0 <table border="1"><tr><td>1</td><td>9</td><td>12</td><td>13</td></tr></table>	1	9	12	13	0 <table border="1"><tr><td>4</td><td>9</td><td>12</td><td>13</td></tr></table>	4	9	12	13			
6	7	8	9														
1	9	12	13														
4	9	12	13														
1 <table border="1"><tr><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td></tr></table>	10	11	12	13	1 <table border="1"><tr><td>4</td><td>10</td><td>11</td><td>14</td></tr></table>	4	10	11	14	1 <table border="1"><tr><td>1</td><td>10</td><td>11</td><td>14</td></tr></table>	1	10	11	14			
10	11	12	13														
4	10	11	14														
1	10	11	14														
2 <table border="1"><tr><td>14</td></tr></table>	14	2 <table border="1"><tr><td>3</td></tr></table>	3	2 <table border="1"><tr><td>3</td></tr></table>	3												
14																	
3																	
3																	

**Примечание 3.** Для  $n = 1$  связанные и несвязные корреляторы совпадают, поэтому будем их обозначать просто  $\langle \mathcal{A}_\eta(z) \rangle$ .

Связные корреляторы можно использовать для записи производящей функции связанных орбиформных чисел Гурвица:

$$H^{\circ, [r]}(\vec{\mu}, u) := \sum_{g \geq 0} h_{g, \vec{\mu}}^{\circ, [r]} \cdot \frac{u^b}{b!}$$

**Утверждение 4.** Производящая функция связанных орбиформных чисел Гурвица равна

$$H^{\circ, [r]}(\vec{\mu}, u) = r^{\sum_{i=0}^{l(\vec{\mu})} \langle \frac{\mu_i}{r} \rangle} \prod_{i=1}^{l(\vec{\mu})} \frac{u^{\frac{\mu_i}{r}} \mu_i^{\lfloor \frac{\mu_i}{r} \rfloor - 1}}{\lfloor \frac{\mu_i}{r} \rfloor!} \left\langle \prod_{i=1}^{l(\vec{\mu})} \mathcal{A}_{r \langle \frac{\mu_i}{r} \rangle}(\mu_i) \right\rangle^{\circ} \quad (1.1.9)$$

*Доказательство.* Доказательство следует из (1.1.5) и наблюдения, что взятие коэффициента при  $u^b$  в  $H^{\circ}$  соответствует взятию коэффициента при  $u^{2g-2+l(\vec{\mu})}$  в  $\langle \prod \mathcal{A} \rangle^{\circ}$ .  $\square$

#### 1.1.4.2 Нестабильные члены

В данном разделе вычислим явным образом коэффициенты связанных вакуумных средних, соответствующих орбиформным числам Гурвица для  $g = 0$  и  $n = 1, 2$ .

Сначала введем некоторые удобные обозначения.

**Обозначение 3.** Для произвольного оператора  $\mathcal{P}(u)$  определим

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}(u) \rangle_k^{\bullet} &:= [u^k] \langle \mathcal{P}(u) \rangle^{\bullet} && \text{(the coefficient of } u^k \text{ in } \langle \mathcal{P}(u) \rangle^{\bullet}) \\ \langle \mathcal{P}(u) \rangle_k^{\circ} &:= [u^k] \langle \mathcal{P}(u) \rangle^{\circ} && \text{(the coefficient of } u^k \text{ in } \langle \mathcal{P}(u) \rangle^{\circ}) \end{aligned}$$

**Обозначение 4.** Обозначим за  $\mathcal{A}_{\eta,+}(z)$  часть разложения по  $z$  оператора  $\mathcal{A}_\eta(z)$  с положительными степенями, т.е.

$$\mathcal{A}_{\eta,+}(z) := \sum_{k \geq 1} \mathcal{A}_\eta^{(k)} z^k \quad (1.1.10)$$

Необходимо вычислить следующие выражения:

$$\langle \mathcal{A}_{\eta_i}(z_i) \rangle_{-1}^{\circ} \quad \text{and} \quad \langle \mathcal{A}_{\eta_i}(z_i) \mathcal{A}_{\eta_j}(z_j) \rangle_0^{\circ}$$



**Лемма 1.** Пусть  $\eta, \eta_1, \eta_2$  целые числа,  $0 \leq \eta \leq r - 1$ . имеем:

$$\langle \mathcal{A}_\eta(z) \rangle_{-1}^\circ = \frac{\delta_{\eta,0}}{z}, \quad (1.1.11)$$

$$\langle \mathcal{A}_{\eta_1}(z_1) \mathcal{A}_{\eta_2}(z_2) \rangle_0^\circ = \delta_r(\eta_1 + \eta_2) z_1 \sum_{k \geq 0} \left( -\frac{z_1}{z_2} \right)^k. \quad (1.1.12)$$

*Доказательство.* В вакуумном среднем отдельного оператора  $\mathcal{A}_\eta(z)$  только член с нулевой энергией может дать ненулевой вклад. Поскольку  $\mathcal{E}_i$  имеет энергию  $i$ , имеем:

$$\langle \mathcal{A}_\eta(z) \rangle = \delta_{\eta,0} \frac{\zeta(ruz)^{z/r}}{(ruz)^{z/r}} \frac{1}{\zeta(uz)} = \left[ \frac{1}{uz} + \frac{z(rz-1)}{24} u + O(u^2) \right] \delta_{\eta,0}$$

Таким образом получается формула для одноточечного коррелятора в роде ноль. Остаток доказательства посвящен двухточечному коррелятору в роде ноль.

Заметим, что верна следующая формула для действия  $\mathcal{A}_\eta(z)$  на ковакуум:

$$\langle 0 | \mathcal{A}_\eta(z) = \frac{\delta_{\eta,0}}{uz} \langle 0 | + \langle 0 | \mathcal{A}_{\eta,+}(z); \quad (1.1.13)$$

она следует напрямую из уравнения (1.1.3) и следующих двух наблюдений:

- $\mathcal{E}_{kr-\eta}(uz)$  обращает ковакуум в ноль при  $kr - \eta < 0$
- среди членов, которые не обращают ковакуум в ноль, только член с  $\mathcal{E}_0(uz)$  имеет особенность по  $z$  при  $z = 0$

Из уравнения (1.1.8) следует, что

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_{\eta_1}(z_1) \mathcal{A}_{\eta_2}(z_2) \rangle_0^\circ &= \langle \mathcal{A}_{\eta_1}(z_1) \mathcal{A}_{\eta_2}(z_2) \rangle_0^\bullet - \langle \mathcal{A}_{\eta_1}(z_1) \rangle_{-1} \langle \mathcal{A}_{\eta_2}(z_2) \rangle_1 \\ &\quad - \langle \mathcal{A}_{\eta_1}(z_1) \rangle_1 \langle \mathcal{A}_{\eta_2}(z_2) \rangle_{-1} \end{aligned}$$

Применяя (1.1.13) к первому члену правой части, получим:

$$\langle \mathcal{A}_{\eta_1}(z_1) \mathcal{A}_{\eta_2}(z_2) \rangle_0^\bullet = \langle \mathcal{A}_{\eta_1,+}(z_1) \mathcal{A}_{\eta_2}(z_2) \rangle_0^\bullet + \langle \mathcal{A}_{\eta_1}(z_1) \rangle_{-1} \langle \mathcal{A}_{\eta_2}(z_2) \rangle_1$$

Аналогично, имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_{\eta_1,+}(z_1) \mathcal{A}_{\eta_2}(z_2) \rangle_0^\bullet &= \langle [\mathcal{A}_{\eta_1,+}(z_1), \mathcal{A}_{\eta_2}(z_2)] \rangle_0^\bullet + \langle \mathcal{A}_{\eta_2,+}(z_2) \mathcal{A}_{\eta_1,+}(z_1) \rangle_0^\bullet \\ &\quad + \langle \mathcal{A}_{\eta_1}(z_1) \rangle_1 \langle \mathcal{A}_{\eta_2}(z_2) \rangle_{-1} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\langle \mathcal{A}_{\eta_1}(z_1) \mathcal{A}_{\eta_2}(z_2) \rangle_0^\circ = \langle \mathcal{A}_{\eta_2,+}(z_2) \mathcal{A}_{\eta_1,+}(z_1) \rangle_0^\bullet + \langle [\mathcal{A}_{\eta_1,+}(z_1), \mathcal{A}_{\eta_2}(z_2)] \rangle_0^\bullet$$

Второй член здесь равен правой части уравнения (1.1.12) (это следует из коммутационного соотношения для коэффициентов, выраженного уравнением (1.1.7)). Чтобы завершить доказательство леммы остается доказать, что первый член обращается в ноль.

Другими словами, рассмотрим

$$r^{\frac{\eta_1+\eta_2}{r}} \langle \mathcal{A}_{\eta_2}(z_2) \mathcal{A}_{\eta_1}(z_1) \rangle^\bullet = (\mathcal{S}(ruz_2))^{\frac{z_2-\eta_2}{r}} (\mathcal{S}(ruz_1))^{\frac{z_1-\eta_1}{r}} \times \\ \times \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \frac{(\mathcal{S}(ruz_2))^k z_2^k (\mathcal{S}(ruz_1))^l z_1^l}{\left(\frac{z_2-\eta_2}{r} + 1\right)_k \left(\frac{z_1-\eta_1}{r} + 1\right)_l} \langle \mathcal{E}_{kr-\eta_2}(uz_2) \mathcal{E}_{lr-\eta_1}(uz_1) \rangle^\bullet \quad (1.1.14)$$

Необходимо показать, что коэффициент при  $u^0$  в данном выражении не содержит членов разложения по  $z_1, z_2$  с положительными степенями по обоим переменным. Из этого напрямую следует, что  $\langle \mathcal{A}_{\eta_2,+}(z_2) \mathcal{A}_{\eta_1,+}(z_1) \rangle_0^\bullet = 0$ .

Имеется два случая:

—  $kr - \eta_2 = lr - \eta_1 = 0$ , т.е.  $k = l = \eta_1 = \eta_2 = 0$ . В данном случае выражение (1.1.14) равно

$$\frac{\mathcal{S}(ruz_2)^{\frac{z_2}{r}} \mathcal{S}(ruz_1)^{\frac{z_1}{r}}}{\zeta(uz_2)\zeta(uz_1)} = \frac{1}{u^2 z_1 z_2} + \frac{1}{24 z_1 z_2} (r z_1^3 + r z_2^3 - z_1^2 - z_2^2) + O(u^2),$$

следовательно все члены коэффициента при  $u^0$  имеют отрицательную степень либо по  $z_1$ , либо по  $z_2$ .

—  $kr - \eta_2 \neq 0$  и  $lr - \eta_1 \neq 0$ , откуда следует  $kr - \eta_2 + lr - \eta_1 = 0$ . В данном случае все множители являются формальными рядами по  $u$ , т.е. можно разложить все множители по  $u$  до  $O(u^1)$ . Слагаемое с определенными  $k$  и  $l$  в (1.1.14) имеет вид

$$\frac{z_2^k z_1^l}{\left(\frac{z_2-\eta_2}{r} + 1\right)_k \left(\frac{z_1-\eta_1}{r} + 1\right)_l} + O(u)$$

Условие  $kr - \eta_2 + lr - \eta_1 = 0$  удовлетворяется в одном из двух возможных случаев:

- $\eta_1 = \eta_2 = 0$ ,  $k + l = 0$ ,  $k, l \neq 0$ ;
- $\eta_1 + \eta_2 = r$ ,  $k + l = 1$ .

В обоих случаях либо  $k$ , либо  $l$  неположительно. Без потери общности предположим, что  $l \leq 0$  (второй случай аналогичен). Тогда

$$\frac{z_1^l}{\left(\frac{z_1-\eta_1}{r} + 1\right)_l} = z_1^l \left( \frac{z_1 - \eta_1}{r} \dots \left( \frac{z_1 - \eta_1}{r} + l + 1 \right) \right)$$

не содержит положительных степеней по  $z_1$ .

□

### 1.1.4.3 Вакуумные средние без нестабильных членов

В данном разделе выводится формула для несвязных вакуумных средних, где все нестабильные члены, т.е.  $\langle \mathcal{A}_\eta(z) \rangle_{-1}^\circ$  и  $\langle \mathcal{A}_{\eta_1}(z_1) \mathcal{A}_{\eta_2}(z_2) \rangle_0^\circ$ , отброшены. Данная формула является непосредственным обобщением аналогичной формулы из [43], и основана на следующих простых рекуррентных соотношениях:

**Лемма 2.** Несвязные корреляторы рекуррентно раскладываются следующим образом:

$$\langle \mathcal{A}_\eta(z) \prod_i \mathcal{A}_{\eta_i}(z_i) \rangle_k^\bullet = \langle \mathcal{A}_\eta(z) \rangle_{-1}^\circ \langle \prod_i \mathcal{A}_{\eta_i}(z_i) \rangle_{k+1}^\bullet + \langle \mathcal{A}_{\eta,+}(z) \prod_i \mathcal{A}_{\eta_i}(z_i) \rangle_k^\bullet \quad (1.1.15)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_{\eta,+}(z) \mathcal{A}_\sigma(w) \prod_i \mathcal{A}_{\eta_i}(z_i) \rangle_k^\bullet &= \langle \mathcal{A}_\eta(z) \mathcal{A}_\sigma(w) \rangle_0^\circ \langle \prod_i \mathcal{A}_{\eta_i}(z_i) \rangle_k^\bullet \\ &+ \langle \mathcal{A}_\sigma(w) \mathcal{A}_{\eta,+}(z) \prod_i \mathcal{A}_{\eta_i}(z_i) \rangle_k^\bullet \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

*Доказательство.* Из уравнения (1.1.13) совместно с формулой для одноточечных корреляторов (1.1.11) следует первое равенство. Второе равенство следует из выражения для двухточечных корреляторов (1.1.12).  $\square$

Из этого следует следующее утверждение.

**Утверждение 5.** *Имеем:*

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{A}_{\eta_1,+}(z_1) \cdots \mathcal{A}_{\eta_k,+}(z_k) \rangle_k^\bullet \\ &= \sum_{y \in \mathcal{Y}_{n,k}^{stab}} \prod_{i=1}^{h(y)} \left\langle \mathcal{A}_{\eta_{c_{i,1}(y)}}(z_{c_{i,1}(y)}) \cdots \mathcal{A}_{\eta_{c_{i,l_i}(y)}}(z_{c_{i,l_i}(y)}) \right\rangle_{\lambda_i(y)}^\circ. \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

где

$$\mathcal{Y}_{n,k}^{stab} = \{y \in \mathcal{Y}_{n,k} \mid l_i(y) = 1 \Rightarrow \lambda_i(y) \neq -1, l_i(y) = 2 \Rightarrow \lambda_i(y) \neq 0\}$$

Другими словами,  $\langle \mathcal{A}_{\eta_1,+}(z_1) \cdots \mathcal{A}_{\eta_n,+}(z_n) \rangle_k^\bullet$  равен  $\langle \mathcal{A}_{\eta_1}(z_1) \cdots \mathcal{A}_{\eta_n}(z_n) \rangle_k^\bullet$ , в котором отброшены все нестабильные члены.

*Доказательство.* Доказательство данного утверждения полностью аналогично доказательству утверждения 2.21 из [43]. Оно основано на рекурсии, которая выражает

$$\langle \mathcal{A}_{\eta_1}(z_1) \cdots \mathcal{A}_{\eta_n}(z_n) \rangle_k^\bullet$$

через нестабильные вакуумные средние и операторы  $\mathcal{A}_+$  с использованием только уравнений (1.1.15) и (1.1.16). Хотя в текущем случае рассматриваются более общие операторы, рекуррентные соотношения на них те же самые, поэтому может быть применено то же доказательство.  $\square$

**Примечание 4.** Приведем пример для иллюстрации различия между  $\mathcal{Y}_{n,k}$  и  $\mathcal{Y}_{n,k}^{stab}$ . Первый пример ниже принадлежит  $\mathcal{Y}_{3,-1}$ , но не  $\mathcal{Y}_{3,-1}^{stab}$ , а второй пример принадлежит  $\mathcal{Y}_{3,-1}^{stab}$ .

Нестабильный	Стабильный
$0 \begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$	$-1 \begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$
$-1 \begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline \end{array}$	$0 \begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline \end{array}$

#### 1.1.4.4 Полиномиальность

В данном разделе доказывается квазиполиномиальность орбифолдных чисел Гурвица. Для этого сначала показано, что  $\langle \mathcal{A}_{\eta_1,+}(z_1) \dots \mathcal{A}_{\eta_n,+}(z_n) \rangle_k^\bullet / (z_1 \dots z_n)$  – симметрический полином по  $z_1, \dots, z_n$  (кроме нестабильных случаев  $k = -1, n = 1$ , и  $k = 0, n = 2$ ). Из этого следует, что  $\langle \mathcal{A}_{\eta_1}(z_1) \dots \mathcal{A}_{\eta_n}(z_n) \rangle_k^\circ / (z_1 \dots z_n)$  – симметрический полином по  $z_1, \dots, z_n$  (опять-таки, за исключением нестабильных случаев). Из этого, в свою очередь, следует квазиполиномиальность орбифолдных чисел Гурвица.

**Утверждение 6.** *Функция*

$$\frac{\langle \mathcal{A}_{\eta_1,+}(z_1) \dots \mathcal{A}_{\eta_n,+}(z_n) \rangle_k^\bullet}{z_1 \dots z_n}$$

*является симметрическим полиномом по  $z_1, \dots, z_n$  for  $(n, k) \neq (1, -1), (2, 0)$ .*

*Доказательство.* Будем следовать доказательству утверждения 9 из [56]. Имеем:

i) Ограниченность снизу:  $\langle \mathcal{A}_{\eta_1,+}(z_1) \dots \mathcal{A}_{\eta_n,+}(z_n) \rangle_k^\bullet$  содержит члены только положительных степеней по всем переменным  $z_1, \dots, z_n$ , как следует из определения  $\mathcal{A}_{\eta,+}(z)$ , выраженного формулой (1.1.10). Таким образом, можно поделить данное выражение на  $\prod_{i=1}^n z_i$ , и все равно получить только неотрицательные степени по  $z_1, \dots, z_n$  в разложении частного.

ii) Симметричность следует из того, что операторы  $\mathcal{A}_+$  коммутируют друг с другом, что является прямым следствием коммутационного соотношения (1.1.7).

iii) Ограниченность сверху: Т.к. функция симметрическая, то достаточно доказать ограниченность сверху степени только по  $z_n$ . Из определения  $\mathcal{A}$  имеем

$$\mathcal{A}_\eta(z)|0\rangle = r^{-\eta/r} \mathcal{S}(ruz)^{(z-\eta)/r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{S}(ruz)^{-k} z^{-k}}{\left(\frac{z-\eta}{r} + 1\right)_{-k}} \mathcal{E}_{-kr-\eta}(uz)|0\rangle \quad (1.1.18)$$

где была произведена замена индекса  $k \mapsto -k$ , т.к. операторы  $\mathcal{E}_i$  для положительных  $i$  обращают вакуум в ноль.

Поскольку каждый множитель в каждом слагаемом в (1.1.18) имеет полюс по  $u$  не более первого порядка, достаточно проделать следующее. Разложим каждый множитель каждого слагаемого (1.1.18) по  $u$  до  $O(u^{m+1})$ , и покажем, что степень  $z$  в данном разложении ограничена сверху. Действительно, в данном случае наибольшая степень  $z$  в  $\mathcal{E}_{-kr-\eta}(uz)$  – это  $m$ ; в  $\mathcal{S}(ruz)^{-k}$  это снова  $m$ ; в  $\mathcal{S}(ruz)^{(z-\eta)/r}$  она равна  $2m$  (одно  $m$  приходит из аргумента  $\mathcal{S}$ , в то время как другое является оценкой степени  $z$  в биномиальном коэффициенте разложения  $(1+x)^{(z-\eta)/r}$ ; наконец, наивысшая степень  $z$  в  $z^{-k} / \left(\frac{z-\eta}{r} + 1\right)_{-k}$  равна 0.

□

**Утверждение 7.** Для  $(n, k) \neq (1, -1), (2, 0)$ , функция

$$\frac{\langle \mathcal{A}_{\eta_1}(z_1) \dots \mathcal{A}_{\eta_n}(z_n) \rangle_k^\circ}{z_1 \dots z_n}$$

является симметрическим полиномом по  $z_1, \dots, z_n$ .

*Доказательство.* Будем следовать доказательству утверждения 2.23 из [43]. Докажем имеющееся утверждение по индукции по числу операторов в вакуумном среднем. Оно верно для  $n = 1$ . Предположим, что оно верно для вакуумных средних с числом операторов, меньшим, чем  $n$ . Докажем, что оно верно также и для вакуумного среднего  $n$  операторов. Пусть  $y'$  – таблица Юнга, состоящая из одного ряда. Рассмотрим разбиение  $\mathcal{Y}_{n,k}^{stab} = \{y'\} \cup (\mathcal{Y}_{n,k}^{stab} \setminus \{y'\})$ . Тогда из уравнения (1.1.17) следует:

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathcal{A}_{\eta_1}(z_1) \dots \mathcal{A}_{\eta_n}(z_n) \rangle_k^\circ}{z_1 \dots z_n} &= \frac{\langle \mathcal{A}_{\eta_{1,+}}(z_1) \dots \mathcal{A}_{\eta_{n,+}}(z_n) \rangle_k^\bullet}{z_1 \dots z_n} \\ &- \sum_{y \in \mathcal{Y}_{n,k}^{stab} \setminus \{y'\}} \prod_{i=1}^{h(y)} \frac{\langle \mathcal{A}_{\eta_{z_{c_{i,1}}(y)}}(z_{c_{i,1}}(y)) \dots \mathcal{A}_{\eta_{c_{i,l_i}(y)}(y)}(z_{c_{i,l_i}(y)}(y)) \rangle_{\lambda_i(y)}^\circ}{z_{c_{i,1}}(y) \dots z_{c_{i,l_i}(y)}(y)}. \end{aligned}$$

Первый член в правой части является симметрическим полиномом по  $z_1, \dots, z_n$  согласно утверждению 6, второй член является симметрическим полиномом по гипотезе индукции.  $\square$

Теперь можно доказать квазиполиномиальность орбиформальных чисел Гурвица.

**Теорема 1.** Орбиформальные числа Гурвица  $h_{g,\mu}^{\circ,[r]}$  для  $(g, n) \neq (0, 1), (0, 2)$  могут быть выражены следующим образом:

$$h_{g,\mu}^{\circ,[r]} = (2g - 2 + l(\mu) + |\mu|/r)! \left( \prod_{i=1}^n \frac{\mu_i^{\lfloor \frac{\mu_i}{r} \rfloor}}{\lfloor \frac{\mu_i}{r} \rfloor!} \right) P_{g,n}^{\langle \frac{\mu}{r} \rangle}(\mu_1, \dots, \mu_n),$$

где  $P_{g,n}^{\vec{\epsilon}}(\mu_1, \dots, \mu_n)$  – некоторые полиномы по  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , чьи коэффициенты зависят от параметров  $\vec{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ ,  $0 \leq \epsilon_1, \dots, \epsilon_n \leq r - 1$  (имеем  $\epsilon_i = \langle \frac{\mu_i}{r} \rangle$ ).

*Доказательство.* Данная теорема является прямым следствием уравнения (1.1.9) и утверждения 7.  $\square$

### 1.1.5 Топологическая рекурсия

В данном разделе воспроизведем определение топологической рекурсии Чехова, Эйнара и Орантана, приспособленное под нужды текущей работы. Более подробное введение в топологическую рекурсию см. в [48, 47].

**Определение 7.** Спектральной кривой называется тройка  $(\Sigma, x, y)$ , где  $\Sigma$  – Риманова поверхность (ниже будем предполагать, что это  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ ), а  $x, y: \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  – мероморфные

функции, такие, что нули  $dx$  не совпадают с нулями  $dy$ , а кроме того нули  $dx$  простые.

В окрестности точки  $\alpha \in \Sigma$  такой, что  $dx(\alpha) = 0$ , можно определить инволюцию  $\tau_\alpha$ , которая сохраняет функцию  $x$ .

Кроме того,  $\Sigma \times \Sigma$  снабжается мероморфным симметрическим 2-дифференциалом с полюсом второго порядка на диагонали, который называется ядром Бергмана. В случае  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  ядро Бергмана единственно и в глобальной координате  $z$  записывается как

$$B = \frac{dz_1 dz_2}{(z_1 - z_2)^2}.$$

**Определение 8.** Топологической рекурсией называется рекуррентная процедура, которая сопоставляет спектральной кривой  $(\Sigma, x, y, B)$  семейство симметрических мероморфных дифференциалов, называемых корреляционными дифференциалами  $\omega_{g,n}(z_1, \dots, z_n)$ , определенных на  $\Sigma^n$ ,  $g \geq 0$ ,  $n \geq 1$ .

Первые два корреляционных дифференциала задаются явными формулами:

$$\omega_{0,1}(z) = \frac{y dx}{x} \quad \omega_{0,2}(z_1, z_2) = \frac{dz_1 dz_2}{(z_1 - z_2)^2}$$

Корреляционные дифференциалы  $\omega_{g,n}$ ,  $2g - 2 + n > 0$  задаются как

$$\omega_{g,n}(z_1, z_S) = \sum_{\substack{\alpha \in \Sigma \\ dx(\alpha)=0}} \operatorname{Res}_{z=\alpha} K(z_1, z) \left[ \omega_{g-1, n+1}(z, \tau_\alpha(z), z_S) + \sum'_{\substack{g_1+g_2=g \\ I \sqcup J=S}} \omega_{g_1, |I|+1}(z, z_I) \omega_{g_2, |J|+1}(\tau_\alpha(z), z_J) \right],$$

где  $S = \{2, \dots, n\}$ , а во втором слагаемом исключены члены, где  $(g_1, |I| + 1)$  or  $(g_2, |J| + 1)$  равно  $(0, 1)$ . Ядро рекурсии  $K$  определяется в окрестности точки  $\alpha$ ,  $dx(\alpha) = 0$  формулой

$$K(z_1, z) := \frac{\int_z^{\tau_\alpha(z)} \omega_{0,2}(\cdot, z_1)}{2(\omega_{0,1}(\tau_\alpha(z)) - \omega_{0,1}(z))}$$

В нашем случае ( $\Sigma = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ ,  $z$  – глобальная координата), поэтому можно использовать следующую формулу:

$$K(z_1, z) = \frac{x(z)}{2(y(\tau_\alpha(z)) - y(z))x'(z)} \left( \frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{\tau_\alpha(z) - z_1} \right) \frac{dz_1}{dz}$$

В стабильных случаях,  $2g - 2 + n > 0$ , корреляционные дифференциалы  $\omega_{g,n}$  имеют полюса только в нулях  $dx$ . Они могут быть выражены через суммы их главных частей:

$$\omega_{g,n}(z_1, z_S) = \sum_{\substack{\alpha \in \Sigma \\ dx(\alpha)=0}} [\omega_{g,n}(z_1, z_S)]_\alpha \quad (1.1.19)$$

где под взятием главной части  $[\eta(z_1)]_\alpha$  1-формы  $\eta(z_1)$  подразумевается проекция, определяемая видоизмененной формулой Коши, где вместо ядра Коши используется  $B$ :

$$[\eta(z_1)]_\alpha := \operatorname{Res}_{z=\alpha} \eta(z) \int_\alpha^z B(\cdot, z_1).$$

На самом деле, существует также другой эквивалентный способ формулировки топологической рекурсии. Согласно ему, симметрические мероморфные дифференциалы удовлетворяют топологической рекурсии, если они удовлетворяют свойству (1.1.19) для  $2g - 2 + n > 0$ , а также являются решениями абстрактных петлевых уравнений:

$$\omega_{g,n}(z, z_S) + \omega_{g,n}(\tau_\alpha(z), z_S) \text{ is holomorphic for } z \rightarrow \alpha \quad (1.1.20)$$

$$\omega_{g-1, n+1}(z, \tau_\alpha(z), z_S) + \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I \sqcup J = S}} \omega_{g_1, 1+|I|}(z, z_I) \omega_{g_2, 1+|J|}(\tau_\alpha(z), z_J) \quad (1.1.21)$$

is holomorphic for  $z \rightarrow \alpha$  with at least double zero at  $\alpha$ .

Доказательство можно найти в [39, 40].

### 1.1.6 Спектральная кривая

В данном разделе выводится спектральная кривая для орбиформных чисел Гурвица с использованием свойства квазиполиномиальности, доказанного в разделе 1.1.4 и уравнения разрезания и склейки. Важно отметить, что формула Джонсона-Пандхарипанде-Ценга [52] не используется.

Рассмотрим  $n$ -точечную функцию для орбиформных чисел Гурвица для фиксированного рода  $g$ :

$$H_{g,n}^{\circ, [r]}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\vec{\mu}: l(\mu)=n} \frac{h_{g;\mu}^{\circ, [r]}}{b!} x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n}.$$

**Теорема 2.** *Рассмотрим корреляционные дифференциалы  $\omega_{g,n}$ ,  $g \geq 0$ ,  $n \geq 1$ , для спектральной кривой  $(\Sigma = \mathbb{CP}^1, z, y)$ , где*

$$x(z) = z \exp(-z^r) \quad \text{and} \quad y(z) = z^r$$

в некоторой глобальной координате  $z$ . Они имеют следующие аналитические разложения около  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ :

$$\omega_{g,n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} H_{g,n}^{\circ, [r]}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \otimes \dots \otimes dx_n.$$

для всех  $(g, n) \neq (0, 2)$ . Для  $(g, n) = (0, 2)$  имеем:

$$\begin{aligned} \omega_{0,2}(x_1, x_2) &= \frac{dz(x_1) \otimes dz(x_2)}{(z(x_1) - z(x_2))^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} H_{0,2}^{\circ, [r]}(x_1, x_2) dx_1 \otimes dx_2 + \frac{dx_1 \otimes dx_2}{(x_1 - x_2)^2}. \end{aligned}$$

Данная теорема доказана в [42] и [41] с использованием формулы ЖРТ и уравнения разрезания и склейки для орбифолдных чисел Гурвица. Ниже в данном разделе показано, что для доказательства этой теоремы достаточно использовать только свойство квазиполиномиальности, доказанное в теореме 1, вместо формулы ЖРТ.

Поскольку, помимо нескольких первых шагов, которые требуют изменения, доказательства из работ [42] и [41] по-прежнему работают, будем ссылаться на данные работы за подробными вычислениями. В текущей работе, помимо тщательного анализа следствий квазиполиномиальности, приведены только основные шаги данных вычислений, чтобы было понятно, как в этом контексте возникают абстрактные петлевые уравнения.

*Доказательство теоремы 2.* Во-первых, необходимо проверить формулы для  $\omega_{0,1}$  и  $\omega_{0,2}$ . Это может быть сделано путем непосредственной проверки, см. [41, 42].

Для связанных чисел имеем следующее выражение, где сумма по  $\vec{j} \in \mathbb{Z}_+^n$  конечна из-за свойства квазиполиномиальности:

$$h_{g,\mu}^{\circ,[r]} = \left(2g - 2 + l(\mu) + \frac{|\mu|}{r}\right)! \cdot \prod_{i=1}^n \frac{\mu_i^{\lfloor \frac{\mu_i}{r} \rfloor}}{\lfloor \frac{\mu_i}{r} \rfloor!} \sum_{\vec{j} \in \mathbb{Z}_+^n} c_{g,n,\vec{j}}^{\langle \frac{\vec{\mu}}{r} \rangle} \mu_1^{j_1} \cdots \mu_n^{j_n}.$$

Здесь  $c_{g,n,\vec{j}}^{\langle \frac{\vec{\mu}}{r} \rangle}$  – коэффициенты полинома  $P_{g,n}^{\langle \frac{\vec{\mu}}{r} \rangle}(\mu_1, \dots, \mu_n)$  из теоремы 1. Тогда для производящей функции имеем:

$$H_{g,n}^{\circ,[r]}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{\vec{\mu} \\ l(\vec{\mu})=n}} \sum_{\vec{j} \in \mathbb{Z}_+^n} c_{g,n,\vec{j}}^{\langle \frac{\vec{\mu}}{r} \rangle} \left( \prod_{i=1}^n \frac{\mu_i^{\lfloor \frac{\mu_i}{r} \rfloor + j_i}}{\lfloor \frac{\mu_i}{r} \rfloor!} \right) x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}$$

Поделим каждое  $\mu_i$  с остатком, используя обозначения

$$\mu_i = r \left\lfloor \frac{\mu_i}{r} \right\rfloor + r \left\langle \frac{\mu_i}{r} \right\rangle \quad \sigma_i = \left\lfloor \frac{\mu_i}{r} \right\rfloor, \quad \eta_i = r \left\langle \frac{\mu_i}{r} \right\rangle$$

Коэффициенты  $c_{g,n,\vec{j}}^{\langle \frac{\vec{\mu}}{r} \rangle}$  зависят только от остатка от  $\mu_i$  по модулю  $r$ . Обозначая  $\{0, \dots, r-1\}$  за  $[r-1]$  имеем:

$$H_{g,n}^{\circ,[r]}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\vec{\beta} \in [r-1]^n} \sum_{\vec{j} \in \mathbb{Z}_+^n} c_{g,n,\vec{j}}^{\beta} \prod_{i=1}^n \sum_{r\sigma_i + \eta_i > 0} \frac{(r\sigma_i + \eta_i)^{\sigma_i + j_i}}{\sigma_i!} x_i^{r\sigma_i + \beta_i}$$

**Лемма 3.**  *$n$ -точечные функции  $H_{g,n}^{\circ,[r]}(x_1, \dots, x_n)$  являются разложениями в  $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$  рациональных функций по  $(z_1, \dots, z_n)$ , где*

$$x(z) = ze^{-z^r}.$$

*Доказательство.* В уравнении (46) из [57] доказано, что

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{(r\sigma + \eta')^{\sigma}}{\sigma!} x^{r\sigma + \eta'} = \frac{z^{\eta'}}{1 - rz^r}, \quad \eta' = 1, \dots, r$$



(заметим, что здесь используется  $\eta' = 1, \dots, r$  вместо  $\eta = 0, \dots, r-1$ , чтобы суммировать по  $\sigma \geq 0$  вместо  $r\sigma + \eta > 0$ ). Это, очевидным образом, рациональная функция по  $z$ , так же как и

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{(r\sigma + \eta)^{\sigma+j}}{\sigma!} x^{r\sigma+\eta} = \left(x \frac{d}{dx}\right)^j \frac{z^\eta}{1-rz^r} = \left(\frac{z}{1-rz^r} \frac{d}{dz}\right)^j \frac{z^\eta}{1-rz^r}. \quad (1.1.22)$$

Таким образом,  $H_{g,n}^{\circ,[r]}(x_1, \dots, x_n)$  – разложение конечной линейной комбинации произведений функций, рациональных по  $z_1, \dots, z_n$ .  $\square$

Обозначим за  $p_1, \dots, p_r$  критические точки функции  $x(z)$ . Очевидно, что каждая функция  $z^{\eta'}/(1-rz^r)$  является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами функций  $1/(z - z(p_i))$ ,  $i = 1, \dots, r$ , с точностью до аддитивной константы (которая нас не интересует, поскольку мы имеем дело с дифференциалами данных функций). Из этого следует, что все функции, заданные уравнением (1.1.22) являются линейными комбинациями  $1/(z - z(p_i))^a$ ,  $i = 1, \dots, r$ ,  $a \geq 1$ . Итак, имеем:

**Лемма 4.** *Симметрические дифференциалы  $\omega_{g,n} := (d_1 \otimes \dots \otimes d_n) H_{g,n}^{\circ,[r]}(x_1, \dots, x_n)$  равны сумме своих главных частей по переменной  $z$  в точках  $p_1, \dots, p_n$ .*

Из данной леммы непосредственно следует уравнение (1.1.19) для ядра Коши по переменной  $z$  заданного как  $B(z_1, z_2) = dz_1 dz_2 / (z_1 - z_2)^2$ .

**Лемма 5.** *Дифференциалы  $\omega_{g,n}(z_1, \dots, z_n)$  удовлетворяют линейному петлевому уравнению (1.1.20), а именно,  $\omega_{g,n}(z_1, \dots, z_n) + \omega_{g,n}(\tau_i z_1, z_2, \dots, z_n)$  голоморфна при  $z_1 \rightarrow p_i$ , где за  $\tau_i$  обозначается инволюция, сохраняющая функцию  $x$ , около точки  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ .*

*Доказательство.* Достаточно доказать данную лемму для дифференциалов функций из уравнения (1.1.22). Заметим, что оператор  $x \frac{d}{dx}$  сохраняет данное свойство, а именно, если  $df(z) + df(\tau_i z)$  голоморфна при  $z \rightarrow p_i$ , то  $d(x \frac{d}{dx})f(z) + d(x \frac{d}{dx})f(\tau_i z)$  также голоморфна при  $z \rightarrow p_i$ . В уравнении (4.5) [57] доказано, что

$$\frac{z^{\eta'}}{1-rz^r} = \left(x \frac{d}{dx}\right) \frac{z^{\eta'}}{\eta'}, \quad \eta' = 1, \dots, r.$$

Функции  $z^{\eta'}$  голоморфны, поэтому их дифференциалы удовлетворяют линейному петлевому уравнению. Таким образом, дифференциалы всех функций, заданных в уравнении (1.1.22), также удовлетворяют этому свойству.  $\square$

Теперь необходимо объяснить, как выводится квадратичное петлевое уравнение (1.1.21). Уравнение разрезания и склейки для двойных чисел Гурвица [49] (см. также [42]) может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned}
0 &= -(2g - 2 + n)H_{g,n}^{\circ,[r]}(x_{[n]}) - \sum_{i=1}^n (x_i \frac{d}{dx_i})H_{g,n}^{\circ,[r]}(x_{[n]}) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left[ \frac{x_i}{x_j - x_i} (x_j \frac{d}{dx_j})H_{g,n-1}^{\circ,[r]}(x_{[n] \setminus \{i\}}) + \frac{x_j}{x_i - x_j} (x_i \frac{d}{dx_i})H_{g,n-1}^{\circ,[r]}(x_{[n] \setminus \{j\}}) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ (x' \frac{d}{dx'}) (x'' \frac{d}{dx''}) H_{g-1,n+1}^{\circ,[r]}(x', x'', x_{[n] \setminus \{i\}}) \right]_{x'=x''=x_i} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{g_1+g_2=g, I \sqcup J = [n] \setminus \{i\}} \left[ (x_i \frac{d}{dx_i}) H_{g_1, |I|+1}^{\circ,[r]}(x_i, x_I) \right] \left[ (x_i \frac{d}{dx_i}) H_{g_2, |J|+1}^{\circ,[r]}(x_i, x_J) \right].
\end{aligned} \tag{1.1.23}$$

Рассмотрим симметризацию данного выражения по переменной  $x_1$  относительно инволюции около точки  $p_i$ . Применим к выражению оператор  $\prod_{j=2}^n (\frac{d}{dx_j})$  и исключим все члены, которые не вносят вклад в полюс данного выражения при  $z(x_1) \rightarrow p_i$ . Препятствие для его голоморфности в  $p_i$  это в точности квадратичное петлевое уравнение (1.1.21).

Данное вычисление содержится в неявном виде в [42] и [41] как первый шаг к выведению топологической рекурсии, см. также частный случай в [43]. Также необходимо сослаться на [40, раздел 2.4], где показано, как выводить топологическую рекурсию из абстрактных петлевых уравнений в общем случае; именно этот метод применен в [42] для данного случая.  $\square$

### 1.1.7 Формула Джонсона-Пандхарипанде-Ценга

В данном разделе дается новое доказательство частного случая формулы Джонсона-Пандхарипанде-Ценга для орбиформных чисел Гурвица. Оно является простым следствием теоремы 2, и результатов статьи [53].

Рассмотрим пространство  $\overline{\mathcal{M}}_{g,-\vec{\mu}}(B\mathbb{Z}_r)$  стабильных отображений в классифицирующее пространство  $B\mathbb{Z}_r$  циклической группы порядка  $r$ , где вектор  $-\vec{\mu}$  в обозначениях соответствует фиксированию монодромии  $(-\mu_1 \bmod r, \dots, -\mu_n \bmod r)$  в отмеченных точках отображаемых кривых. Элементы данного пространства можно понимать как допустимые накрытия кривых из  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  с заданной монодромией в отмеченных точках. Обозначим за  $p$  отображение забывания  $\overline{\mathcal{M}}_{g,-\vec{\mu}}(B\mathbb{Z}_r) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ .

Рассмотрим действие  $\mathbb{Z}_r$  на  $H^0(C, \omega_C)$ , где  $C$  – накрывающая кривая. Рассмотрим ее неприводимую компоненту, которая соответствует характеру  $U: \mathbb{Z}_r \rightarrow \mathbb{C}^*$ , который сопоставляющему генератору  $\exp(2\pi i/r)$ . Данная компонента задает векторное расслоение над  $\overline{\mathcal{M}}_{g,-\vec{\mu}}(B\mathbb{Z}_r)$ , чьи классы Черна обозначим  $\lambda_i$ ,  $i \geq 0$ . Обозначим за  $S(\vec{\mu})$  класс

$$S(\langle \vec{\mu}/r \rangle) := r^{1-g+\sum \langle \frac{\mu_i}{r} \rangle} p_* \sum_{i \geq 0} (-r)^i \lambda_i.$$

**Теорема 3.** *Имеем:*

$$\frac{h_{g;\vec{\mu}}^{\circ,[r]}}{b!} = \prod_{i=1}^{l(\vec{\mu})} \frac{\mu_i \lfloor \frac{\mu_i}{r} \rfloor!}{\lfloor \frac{\mu_i}{r} \rfloor!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,l(\vec{\mu})}} \frac{S(\langle \vec{\mu}/r \rangle)}{\prod_{j=1}^{l(\vec{\mu})} (1 - \mu_j \psi_j)} \tag{1.1.24}$$

**Примечание 5.** Данная формула – частный случай формулы Джонсона-Пандхарипанде-Ценга, доказанной в [52], см. также [50, 42, 41], где подробно объяснен используемый в ней класс  $S(\vec{\mu})$ .

**Примечание 6.** Заметим, что данная формула выглядит в точности как формула (1), где коэффициенты полинома  $P_{g,n}^{(\frac{\vec{\mu}}{r})}(\mu_1, \dots, \mu_n)$  выражены явным образом через числа пересечений.

Приведем новое доказательство теоремы 3.

*Доказательство.* Доказательство состоит из двух простых наблюдений. С одной стороны, теорема 2 утверждает, что выражения

$$d_1 \otimes \cdots \otimes d_n \sum_{l(\vec{\mu})=n} \frac{h_{g;\vec{\mu}}^{\circ,[r]}}{b!} x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}$$

являются разложениями симметрических дифференциалов  $\omega_{g,n}(z_1, \dots, z_n)$ , которые удовлетворяю топологической рекурсии на спектральной кривой  $(\mathbb{CP}^1, x = ze^{-z^r}, y = z^r)$ . С другой стороны, в [53] доказано, что разложения корреляционных дифференциалов для этой спектральной кривой могут быть выражены как

$$d_1 \otimes \cdots \otimes d_n \sum_{l(\vec{\mu})=n} \int_{\mathcal{M}_{g,n}} \frac{S(\langle \vec{\mu}/r \rangle)}{\prod_{j=1}^n (1 - \mu_j \psi_j)} \prod_{i=1}^n \frac{\mu_i^{\lfloor \frac{\mu_i}{r} \rfloor}}{\lfloor \frac{\mu_i}{r} \rfloor!} x^{\mu_i}$$

Из этого следует равенство левой и правой части уравнения (1.1.24). □

## 1.2 Изомонодромные $\tau$ -функции и $W_N$ конформные блоки

### 1.2.1 Введение

Есть два направления в математической физике, долгое время независимые: теория изомонодромных деформаций, основанная Р. Фуксом, П. Пенлеве и Л. Шлезингером в начале 20 столетия (см. [58] и ссылки внутри ), и двумерная конформная теория поля (СФТ) основанная А. Белавиным, А. Поляковым и А. Замолодчиковым в 1984 [85]. Обе теории поля имеют много применений. Конформная теория поля описывает пертурбативную теорию струн и фазовые переходы второго рода в двумерных системах. Теория изомонодромных деформаций приводит в нелинейным спецфункциям, таким как трансценденты Пенлеве, которые возникают в разных задачах математической физики: например, в теории случайных матриц и общей теории относительности.

Первые соотношения между теорией изомонодромных деформаций и двумерной квантовой теорией поля было установлено в 1978-80 М. Сато, М. Джимбо и Т. Мива [60]. В довольно недавней работе А. Гамаюн, Н. Иоргов и О. Лисовой открыли, что  $\tau$ -функция уравнения Пенлеве VI (связанная с фуксовой системой ранга 2 с тремя регулярными особыми точками на римановой сфере) может быть выражена как сумма  $c = 1$  конформных блоков, домноженных на некоторые отношения функций Барнса – типичное выражение для корреляционной функции в СФТ [61]. Их формула даёт общее решение уравнения Пенлеве VI. Эта гипотеза уже доказана двумя способами: одно доказательство полностью теоретико-представленческое и приспособлено изначально для четырёхточечной  $\tau$ -функции [62] но может снабдить набором нетривиальных билинейных соотношений для  $n$ -точечных конформных блоков, в то время как другое основано на вычислении монодромий конформных блоков с вырожденным полем и позволяет рассматривать произвольное количество регулярных особых точек на римановой сфере [63]. Соответствие также расширяется на иррегулярный случай: например, оно даёт точное решение для уравнений Пенлеве V и III [64], [65], о которых известно, что они описывают корреляционные функции в некоторых *массивных* теориях поля.

В настоящей статье рассматривается расширение изомонодромно-СФТ'шного соответствия для старшего ранга. Уже в [61] была идея о том, что изомонодромные деформации фуксовых систем ранга  $N$  должны соответствовать двумерным СФТ с центральным зарядом  $c = N - 1$ . Одним очевидным и естественным кандидатом такой теории является тодовская СФТ с  $W_N$  расширенной алгеброй конформной симметрии. Мы показываем, что действительно  $N \times N$  изомонодромная задача соответствует  $W_N$  алгебре, чья вирасоровская часть имеет центральный заряд  $c = N - 1$ . Эти алгебры были впервые введены А. Замолодчиковым в [66], и их изучение значительно развито в [67] (для первого нетривиального  $W_3$ -случая) и в [68] (для общей  $W_N$ ). Другие результаты в теории  $W$ -алгебр обсуждаются в обзоре [69].

Наиболее компактный вид коммутационных соотношений в  $W_3$  даётся операторным разложением (ОРЕ) тензора энергии-импульса  $T(z)$   $W$ -тока  $W(z)$ :

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= \frac{c}{2(z-w)^4} + \frac{2T\left(\frac{z+w}{2}\right)}{(z-w)^2} + \text{reg.}, \\ T(z)W(w) &= \frac{3W(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial W(w)}{z-w} + \text{reg.}, \\ W(z)W(w) &= \frac{c}{3(z-w)^6} + \frac{2T\left(\frac{z+w}{2}\right)}{(z-w)^4} + \\ &+ \frac{1}{(z-w)^2} \left( \frac{32}{22+5c} \Lambda\left(\frac{z+w}{2}\right) + \frac{1}{20} \partial^2 T\left(\frac{z+w}{2}\right) \right) + \text{reg.} \end{aligned}$$

где  $\Lambda(z) = (TT)(z) - \frac{3}{10} \partial^2 T(z)$ .

Теория представлений этой алгебры очень похожа на теорию представлений алгебры Вирасоро. В общем случае мы имеем модуль Верма со старшим вектором  $|\Delta, w\rangle$  таким что  $L_0|\Delta, w\rangle = \Delta|\Delta, w\rangle$ ,  $W_0|\Delta, w\rangle = w|\Delta, w\rangle$ . Таким образом, пространство представления натянуто на вектора

$$L_{-m_1} L_{-m_2} \dots L_{-m_k} W_{-n_1} W_{-n_2} \dots |\Delta, w\rangle, \quad m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_k, n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k,$$

в то время как множество старших векторов соответствует примарным полям (вертексным операторам) в двумерной СФТ. Как и в вирасоровском случае, эти поля могут быть определены их ОРЕ с токами высших спинов  $T(z)$  и  $W(z)$ :

$$\begin{aligned} T(z)\phi(w) &= \frac{\Delta\phi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\phi(w)}{z-w} + \text{reg.} \\ W(z)\phi(w) &= \frac{w\phi(w)}{(z-w)^3} + \frac{(W_{-1}\phi)(w)}{(z-w)^2} + \frac{(W_{-2}\phi)(w)}{z-w} + \text{reg.} \end{aligned}$$

Однако  $W$ -потомки, такие как  $(W_{-1}\phi)$  и  $(W_{-2}\phi)$  в общем случае не определены (это отличается от случая алгебры Вирасоро, где у нас было, например,  $(L_{-1}\phi)(w) = \partial\phi(w)$ ), что означает, что 3-точечные функции, включающие такие поля, на самом деле не определены. Как следствие, нельзя выразить матричные элементы

$$\langle \Delta_\infty, w_\infty | \phi(1) L_{-m_1} L_{-m_2} \dots L_{-m_k} W_{-n_1} W_{-n_2} \dots | \Delta_0, w_0 \rangle$$

в только терминах  $\langle \Delta_\infty, w_\infty | \phi(1) | \Delta_0, w_0 \rangle$ . В статье [70] было показано достаточно красивым способом, что все такие трёхточечные функции могут быть выражены через бесконечный набор неизвестных констант

$$C_k = \langle \Delta_\infty, w_\infty | \phi(1) W_{-1}^k | \Delta_0, w_0 \rangle, \quad k = 1, 2, \dots$$

Проблема в том, что имея этот бесконечный набор констант, (который для четырёхточечного конформного блока на самом деле становится, на самом деле, дважды

бесконечным) можно подобрать их так, чтобы получить в результате *любую* функцию. В этой статье мы показываем, что изомонодромный подход может зафиксировать эту неопределённость таким образом, что все эти параметры становятся функциями на пространстве модулей плоских связностей на сфере с 3 проколами. В  $\mathfrak{sl}_3$  случае это пространство двумерно (мы обозначим соответствующие координаты  $\mu$  и  $\nu$ ), значит все  $C_k = C_k(\mu, \nu)$ .

Отметим, что для  $W_N$  алгебры был бы набор констант  $C_{k_1, \dots, k_l}$  с  $l = \frac{1}{2}(N - 1)(N - 2)$  неотрицательными индексами (например, это просто следует из анализа в [70]), что является половиной размерности пространства модулей  $\mathfrak{sl}_N$  плоских связностей на сфере с 3 проколами.

Эта статья организована следующим образом. В разделе 2 мы кратко обсуждаем происхождение системы Шлезингера и пространство плоских связностей на римановой сфере с проколами. Затем мы вводим набор удобных локальных координат на этом пространстве, которые связаны с разрезанием сферы на штаны. В разделе 3 предложен итеративный алгоритм решения системы Шлезингера. Потом мы представляем набор нетривиальных свойств этого решения, найденных экспериментально, и формулируем гипотезу об изомонодромно-СФТ'шном соответствии в старшем ранге, которая связывает  $W_N$  конформные блоки с изомонодромной тау-функцией. В частности, для набора известных  $W_3$  конформных блоков мы представляем трёхточечные функции, которые могут быть использованы для построения  $\tau$ -функции в виде явного разложения. В разделе 4 мы описываем проблемы определения общего  $W_3$  конформного блока и обсуждаем, как они могут быть решены при использовании глобальной аналитической структуры, происходящей из кроссинг-симметрии. Заканчиваем мы кратким обсуждением общих вопросов.

### 1.2.2 Изомонодромные деформации и пространства модулей плоских связностей

Основным объектом нашего изучения будет фуксова линейная система

$$\frac{d}{dz}\Phi(z) = \sum_{\nu=1}^n \frac{A_\nu}{z - z_\nu} \Phi(z) = A(z)\Phi(z),$$

$$\sum_{\nu} A_\nu = 0.$$

Здесь  $A_\nu$  – бестрейсовые матрицы с различными собственными значениями,  $\Phi(z)$  это матрица из  $N$  независимых решений системы, нормированная как  $\Phi(z_0) = 1$ . Очевидно, что при аналитическом продолжении решения вдоль контура  $\gamma_\nu$ , обходящего  $z_\nu$  они преобразуются в некоторые линейные комбинации себя же:

$$\gamma_\nu : \Phi(z) \mapsto \Phi(z)M_\nu,$$

где  $M_\nu \in GL_N(\mathbb{C})$ . Соотношение  $\gamma_n \dots \gamma_1 = 1$  из  $\pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus \{z_1, \dots, z_n\}, z_0)$  накладывает условие

$$M_1 \dots M_n = 1.$$

Известная задача Римана-Гильберта заключается в нахождении соответствия

$$\{M_1, \dots, M_n\} \rightarrow \{A_1, \dots, A_n\}.$$

Легко видеть, что классы сопряжённости  $M_\nu$  будут

$$M_\nu \sim \exp(2\pi i A_\nu).$$

Собственные значения  $A_\nu$  определяют асимптотику фундаментальной матрицы возле особенностей, потому мы можем даже зафиксировать эту асимптотику и изучать соответствующую обобщённую задачу Римана-Гильберта. Мы будем работать только с бестрейсовыми матрицами  $A_\nu$  т.к. скалярная часть тривиально отщепляется.

### 1.2.2.1 Система Шлезингера

Поскольку сложно решить общую задачу Римана-Гильберта точно, можно сначала задать более простой вопрос: как одновременно деформировать положения особенностей  $z_\nu$  и матрицы  $A_\nu$ , при этом сохраняя монодромии  $M_\nu$ ? Ответ получается из инфинитезимального калибровочного преобразования

$$\begin{aligned} \Phi(z) &\mapsto \left(1 + \epsilon \frac{A_\nu}{z - z_\nu}\right) \Phi(z), \\ A(z) &\mapsto A(z) + \epsilon \frac{A_\nu}{(z - z_\nu)^2} - \epsilon \left[ \frac{A_\nu}{z - z_\nu}, A(z) \right], \end{aligned}$$

т.е.,

$$\begin{aligned} z_\nu &\mapsto z_\nu + \epsilon, \\ A_{\mu \neq \nu} &\mapsto A_\mu + \epsilon \frac{[A_\nu, A_\mu]}{z_\nu - z_\mu}, \\ A_\nu &\mapsto A_\nu - \epsilon \sum_{\mu \neq \nu} \frac{[A_\nu, A_\mu]}{z_\nu - z_\mu}, \end{aligned}$$

что приводит к система нелинейных дифференциальных, системе Шлезингера

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\mu}{\partial z_\nu} &= \frac{[A_\mu, A_\nu]}{z_\mu - z_\nu}, \\ \frac{\partial A_\nu}{\partial z_\nu} &= - \sum_{\mu \neq \nu} \frac{[A_\mu, A_\nu]}{z_\mu - z_\nu}. \end{aligned}$$

Заметим, что мы можем зафиксировать  $z_n = \infty$ , тогда соответствующая матрица  $A_\infty = - \sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu$  будет постоянной. Нетривиальное утверждение заключается в том, что соотношения

$$\frac{\partial}{\partial z_\mu} \log \tau = \sum_{\nu \neq \mu} \frac{\text{tr} A_\mu A_\nu}{z_\mu - z_\nu}$$

согласованы и определяют  $\tau$ -функцию  $\tau(z_1, \dots, z_n)$  системы Шлезингера. Легко видеть, что 3-точечная  $\tau$ -функция даётся простым выражением:

$$\tau(z_1, z_2, z_3) = \text{const} \cdot (z_1 - z_2)^{\Delta_3 - \Delta_1 - \Delta_2} (z_2 - z_3)^{\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3} (z_1 - z_3)^{\Delta_2 - \Delta_1 - \Delta_3},$$

где  $\Delta_\nu = \frac{1}{2} \text{tr} A_\nu^2$ . Давайте сейчас попробуем решить систему Шлезингера для 4-точечного случая и вычислить соответствующую  $\tau$ -функцию в виде некоторого разложения.

### 1.2.2.2 Пространства модулей плоских связностей

Главным объектом нашего изучения будет  $\tau$ -функция. Она зависит от данных монодромии, дающих полный набор интегралов движения системы Шлезингера. Будет полезно начать с определения удобной параметризации этого пространства.

Мы начинаем с  $n$  матриц  $M_\nu \in SL_N$  с фиксированными невырожденными собственными значениями, т.е., есть  $n(N^2 - N)$  параметров. Эти матрицы связаны одним уравнением (1.2.2) и рассматриваются с точностью до общего  $SL_N$  сопряжения, которое уменьшает количество параметров на  $2(N^2 - 1)$ . Таким образом, пространство параметров будет

$$\dim \mathcal{M}_n^{\mathfrak{sl}_N}(\theta_1, \dots, \theta_n) = (n - 2)N^2 - nN + 2.$$

Здесь  $\theta_\nu \in \mathfrak{h}$  ( $\mathfrak{h}$  это подалгебра Картана) определяют классы сопряжённости:  $M_\nu \sim e^{2\pi i \theta_\nu}$ . Очевидно, что  $\theta_\nu$  эквивалентно  $\theta_\nu + \mathbf{h}_\nu$ , где для всех весов первого фундаментального представления  $e_i$  должно быть  $(e_i, \mathbf{h}_\nu) \in \mathbb{Z}$ . Это значит, что  $\mathbf{h}_\nu \in \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z} \alpha_i^\vee$ , где  $\alpha_i^\vee \in \mathfrak{h}$  это простые ко-корни (для диаграмм Дынкина с одинарными связями они совпадают с корнями).

Для общей алгебры Ли эта формула может быть записана как

$$\dim \mathcal{M}_n^{\mathfrak{g}}(\theta_1, \dots, \theta_n) = (n - 2) \dim \mathfrak{g} - n \cdot \text{rank } \mathfrak{g}.$$

В частности, для  $n = 3$  проколов на сфере

$$\dim \mathcal{M}_3^{\mathfrak{g}}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \dim \mathfrak{g} - 3 \cdot \text{rank } \mathfrak{g}.$$

Эта формула даёт число непростых корней  $\mathfrak{g}$ . В  $\mathfrak{sl}_N$  случае она специализируется в

$$\dim \mathcal{M}_3^{\mathfrak{sl}_N}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (N - 1)(N - 2).$$

Это выражение зануляется для  $\mathfrak{sl}_2$ , что сильно упрощает изучение соответствующей изомонодромной задачи. Однако уже в  $\mathfrak{sl}_3$  случае эта размерность равна 2, т.е., ненулевая. Один из способов упростить задачу это положить  $\theta_2 = ae_1$ : в этом случае орбита присоединённого действия

$$e^{2\pi i ae_1} \mapsto g^{-1} e^{2\pi i ae_1} g$$

имеет размерность  $\dim \mathcal{O}_{ae_1} = \dim \mathfrak{g} - \dim \text{stab}(e_1) = N^2 - 1 - (N - 1)^2 = 2N - 2$ . Полная размерность  $2(N^2 - N) + (2N - 2) - 2(N^2 - 1) = 0$ . В этом вычислении первые два члена



соответствуют размерностям орбит: двух общих и одной с большим стабилизатором. Последний член соответствует одному уравнению и одной факторизации. Значит

$$\dim \mathcal{M}_3^{\mathfrak{sl}_N}(\theta_1, ae_1, \theta_3) = 0.$$

Этот случай наиболее известен на стороне  $W$ -алгебр [71], [72], [73]. В математическом подходе эта ситуация соответствует жестким локальным системам.

### 1.2.2.3 Разложение на штаны для $\mathcal{M}_4^{\mathfrak{g}}$

Мы начинаем рассмотрение для произвольной группы Ли  $G$ , содержащей картановский тор  $H \subset G$ . Соответствующие алгебры Ли будут  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{h}$ , соответственно. В какой-то момент мы перейдём к  $G = SL_N(\mathbb{C})$  случаю.

Пространство модулей  $\mathcal{M}_4^{\mathfrak{g}}$  описывается 4 матрицами, удовлетворяющими  $M_1 M_2 M_3 M_4 = 1$  и определёнными с точностью до сопряжения:

$$\mathcal{M}_4^{\mathfrak{g}} = \{(M_1, M_2, M_3, M_4)\} / G.$$

Давайте введём  $S = M_1 M_2$  и рассмотрим две тройки

$$\{(M_1, M_2, S^{-1}), (S, M_3, M_4)\}.$$

Заметим, что произведение внутри каждой тройки равно единице. Давайте теперь выберем некоторое подмногообразие с фиксированными собственными значениями  $M_1, \dots, M_4, S$ . Мы также можем использовать свободу присоединённого действия для того, чтобы диагонализировать  $S$

$$S = e^{2\pi i \sigma},$$

где  $\sigma \in \mathfrak{h}$ . Таким образом, мы получили подмногообразие

$$\mathcal{M}_4^{\mathfrak{g}}(\theta_1, \theta_2; \sigma; \theta_3, \theta_4) = \{(M_1, M_2, e^{-2\pi i \sigma}), (e^{2\pi i \sigma}, M_3, M_4)\} / H \subset \mathcal{M}_4^{\mathfrak{g}}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4),$$

где оставшаяся параметризация проводится по картановскому тору  $H \subset G$ . Это очень похоже на то, что происходит для  $\mathcal{M}_3^{\mathfrak{g}}$ :

$$\mathcal{M}_3^{\mathfrak{g}} = \{(M_1, M_2, M_3)\} / G = \{(M_1, M_2, e^{2\pi i \theta_3})\} / H,$$

за исключением того, что сопряжение происходит одновременно для обеих троек. Для того, чтобы избавиться, от этого условия, давайте определим дополнительный картановский тор, действующий на  $\mathcal{M}_4^{\mathfrak{g}}$ :

$$h : \{(M_1, M_2, e^{-2\pi i \sigma}), (e^{2\pi i \sigma}, M_3, M_4)\} \mapsto \{(M_1, M_2, e^{-2\pi i \sigma}), h^{-1}(e^{2\pi i \sigma}, M_3, M_4)h\},$$

что выглядит как относительная скрутка одной части сферы относительно другой (в  $\mathfrak{sl}_2$  случае это будет в точности геодезический поток). Следовательно, мы можем сказать, что

$$\mathcal{M}_4^{\mathfrak{g}}(\theta_1, \theta_2; \sigma; \theta_3, \theta_4) / H = \mathcal{M}_3^{\mathfrak{g}}(\theta_1, \theta_2, -\sigma) \times \mathcal{M}_3^{\mathfrak{g}}(\sigma, \theta_3, \theta_4).$$

Действие тора свободное, потому локально это выглядит как произведение (на самом деле, это правда даже глобально, потому что расслоение  $(M_1, M_2, M_3) \mapsto (M_1, M_2, M_3)/G$  тривиально: мы можем задать алгебраическую параметризацию представителя каждого класса сопряжённости). Следовательно мы имеем равенство для открытых подмножеств (обозначенное  $\approx$ ):

$$\mathcal{M}_4^{\mathfrak{g}}(\theta_1, \theta_2; \sigma; \theta_3, \theta_4) \approx \mathcal{M}_3^{\mathfrak{g}}(\theta_1, \theta_2, -\sigma) \times H \times \mathcal{M}_3^{\mathfrak{g}}(\sigma, \theta_3, \theta_4).$$

Преыдущие рассмотрения предлагают следующий выбор координат на  $\mathcal{M}_4^{\mathfrak{g}}$ :

- Параметры склейки  $\sigma$ :  $\text{rank } \mathfrak{g}$  штук.
- Инвариантные функции на  $\mathcal{M}_3^{\mathfrak{g}} \times \mathcal{M}_3^{\mathfrak{g}}$  (например,  $\text{tr} M_1 M_2^{-1}$ ,  $\text{tr} M_3^{-1} M_4$ ). Они инвариантны относительно действия “относительны скруток”: таких функций будет  $2 \dim \mathcal{M}_3^{\mathfrak{g}}$ .
- Параметры относительных скруток, которые меняются при действии скрутки (например,  $\text{tr} M_2 M_3^{-1}$ ,  $\text{tr} M_2^{-1} M_3$ ),  $\text{rank } \mathfrak{g}$  штук. Эти координаты будут обозначены  $\beta \in \mathfrak{h}$ .

Эта процедура схематически изображена на Рис.1 для  $\mathfrak{sl}_3$  случая, где  $\dim \mathcal{M}_3^{\mathfrak{sl}_3} = 2$ ,  $\dim \mathcal{M}_4^{\mathfrak{sl}_3} = 8$ . Координаты на каждой копии  $\mathcal{M}_3^{\mathfrak{sl}_3}$  обозначены  $\mu, \nu$ . Индексы  $\{1, 2, 3, 4\}$  матриц заменены на  $\{0, t, 1, \infty\}$

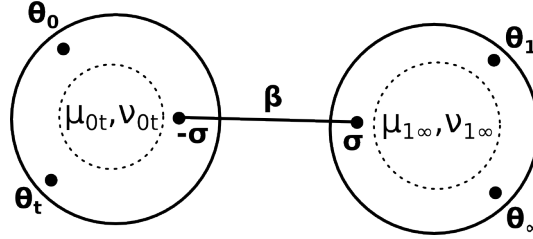


Рисунок 1 — Координаты на  $\mathcal{M}_4^{\mathfrak{g}}$ : восемь = два  $\sigma$  + два  $\beta$  +  $\mu_{0t} + \nu_{0t} + \mu_{1\infty} + \nu_{1\infty}$

#### 1.2.2.4 Разрезание на штаны для $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{g}}$

Предположим, что координаты на  $\mathcal{M}_{n-1}^{\mathfrak{g}}$  выбраны при помощи разрезания на штаны. Разобьём матрицы на две группы и определим

$$\begin{aligned} S_{n-3} &= M_1 \dots M_{n-2}, \\ \mathcal{M}_n^{\mathfrak{g}} &= \{(M_1, \dots, M_{n-2}, S_{n-3}^{-1}), (S_{n-3}, M_{n-1}, M_n)\} / G = \\ &= \{(M_1, \dots, M_{n-2}, e^{-2\pi i \sigma}), (e^{2\pi i \sigma}, M_{n-1}, M_n)\} / H \approx \mathcal{M}_{n-1}^{\mathfrak{g}} \times H \times \mathcal{M}_3^{\mathfrak{g}}. \end{aligned}$$

Итеративно повторяя эту процедуру получим следующий выбор координат на  $\mathcal{M}_n^{\mathfrak{g}}$ :

- $(n-3) \text{rank } \mathfrak{g}$  параметров склейки  $\sigma_i$ ,
- $(n-3) \text{rank } \mathfrak{g}$  параметров относительных скруток  $\beta_i$ ,
- $\sum_{i=1}^{n-2} \dim \mathcal{M}_3^{\mathfrak{g}}(\sigma_{i-1}, \theta_{i+1}, -\sigma_i)$  3-точечные модули плоских связностей (здесь мы идентифицируем  $\sigma_0 = \theta_1$  и  $\sigma_{n-2} = -\theta_n$ ).

Предвидя результат, давайте отметим, что эти координаты удобны с точки зрения СФТ:  $\sigma_i$  будет параметризовать промежуточные заряды в коноформном блоке, а  $\beta_i$  будет параметрами преобразования Фурье. Было показано, что это описание подходит в  $\mathfrak{sl}_2$  случае [61], [63] и недавно было показано, что оно сохраняется для  $\mathfrak{sl}_N$  случая при  $\dim \mathcal{M}_3^g = 0$  [74]. С более концептуальной точки зрения это разложение иллюстрирует, что все дополнительные параметры в  $\tau$ -функции приходят из 3-точечных функций.

### 1.2.3 Итеративное решение системы Шлезингера

Для того, чтобы решить общую систему Шлезингера, давайте следовать подходу, предложенному в оригинальной статье М. Джимбо [147] и в [60, part 2].

Давайте возьмём 4-точечную систему Шлезингера и расположим особенности в точках  $0, t, 1, \infty$ . Система становится

$$\begin{aligned} t\partial_t A_0 &= [A_t, A_0], \\ t\partial_t A_1 &= \frac{t}{t-1}[A_t, A_1], \\ \partial_t A_t &= -\frac{1}{t}[A_t, A_0] - \frac{1}{t-1}[A_t, A_1]. \end{aligned}$$

Фиксируя интеграл движения  $A_\infty = -A_0 - A_t - A_1$ , получаем

$$\begin{aligned} t\partial_t A_0 &= [A_0, A_1 + A_\infty], \\ t\partial_t A_1 &= t(1-t)^{-1}[A_0 + A_\infty, A_1]. \end{aligned}$$

Изомонодромная  $\tau$ -функция определена как

$$\partial_t \log \tau = \frac{1}{t} \text{tr} A_t A_0 + \frac{1}{t-1} \text{tr} A_t A_1.$$

Давайте изучим решение системы (1.2.3) для случая когда  $A_1(t)$  конечная в пределе  $t \rightarrow 0$ :  $A_1(t) = A_1(0) + O(t^{\epsilon > 0})$ . В этом допущении мы имеем

$$t\partial_t A_0(t) = [A_0, A_\infty + A_1(0) + O(t^{\epsilon > 0})].$$

Если бы последнее слагаемое отсутствовало, то решение было бы  $A_0 = t^{-A_\infty - A_1(0)} \tilde{A}_0 t^{A_\infty + A_1(0)}$ . Следовательно естественно ввести

$$\begin{aligned} B &= -A_1(0) - A_\infty = \lim_{t \rightarrow 0} (A_0(t) + A_t(t)), \\ \tilde{A}_0(t) &= t^{-B} A_0(t) t^B, \end{aligned}$$

где  $\tilde{A}_0(t)$  имеет хорошо определённый предел при  $t \rightarrow 0$ . Мы видим, что в силу своего определения  $B$  описывает полную монодромию вокруг 0 и  $t$  в пределе  $t \rightarrow 0$ . Поскольку деформация изомонодромная, эта монодромия постоянна и даётся формулой  $M_0 M_t = M_{0t} \sim e^{2\pi i B}$ . Это позволяет идентифицировать

$$B = \sigma.$$

Наша система тогда становится

$$\begin{aligned} t\partial_t\tilde{A}_0(t) &= [\tilde{A}_0(t), t^{-\sigma}(A_1(t) - A_1(0))t^\sigma], \\ t\partial_t A_1 &= t(1-t)^{-1}[t^\sigma\tilde{A}_0(t)t^{-\sigma} + A_\infty, A_1(t)]. \end{aligned}$$

Здесь мы видим оператор  $t^{ad_\sigma}$ , который производит некоторые дробные степени  $t$ . Удобно наложить условие что  $(\sigma, \sigma) \ll 1$ , или, по крайней мере, что для всех корней  $\alpha$  должно выполняться  $|(\sigma, \alpha)| < \frac{1}{2}$ . Это позволяет упорядочить члены разложения по степеням  $t$  в соответствии с их порядком малости. Если необходимо, то можно сделать аналитическое продолжение решения в область маленьких  $\sigma$ .

Мы знаем, что в алгебре Ли оператор  $t^{ad_\sigma}$  действует как

$$\begin{aligned} t^\sigma E_\alpha t^{-\sigma} &= t^{(\sigma, \alpha)} E_\alpha, \\ t^\sigma H_\alpha t^{-\sigma} &= H_\alpha, \end{aligned}$$

где  $\alpha \in \mathfrak{g}^*$  – корень, а  $E_\alpha, H_\alpha$  – элементы базиса Картана-Вейля. Давайте определим градуировку на пространстве мономов

$$\deg[t^{k+(\sigma, \mathbf{w})}] = (k, \mathbf{w}),$$

где  $\mathbf{w} \in Q_{\mathfrak{g}}$  – элемент решётки корней  $Q_{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{i=1}^{\text{rank } \mathfrak{g}} \mathbb{Z}\alpha_i$  алгебры  $\mathfrak{g}$ . Удобно определить фильтрацию

$$Q_{\mathfrak{g}}^0 \subset Q_{\mathfrak{g}}^1 \subset Q_{\mathfrak{g}}^2 \subset \dots \subset Q_{\mathfrak{g}}$$

на этой решётке корней, через следующее рекуррентное построение:  $Q_{\mathfrak{g}}^0 = \{0\}$ ,  $Q_{\mathfrak{g}}^1$  – множество всех корней  $\mathfrak{g}$  и 0, а

$$Q_{\mathfrak{g}}^{i+1} = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} | \mathbf{x} \in Q_{\mathfrak{g}}^i, \mathbf{y} \in Q_{\mathfrak{g}}^1\} = Q_{\mathfrak{g}}^1 + \dots + Q_{\mathfrak{g}}^1.$$

Определим также двойную фильтрацию  $V_{n,m}$  на пространстве всех дробно-степенных рядов:

$$t^{k+(\sigma, \mathbf{w})} \in V_{n,m} \Leftrightarrow (k \geq n) \wedge (\mathbf{w} \in Q_{\mathfrak{g}}^m), V_{n+1,m} \subset V_{n,m}, \quad V_{n,m} \subset V_{n,m+1}.$$

Каждый член фильтрации порождён этими мономами. Это определение оказывается удобным, т.к. properties

$$\begin{aligned} t \cdot : V_{n,m} &\rightarrow V_{n+1,m}, \\ t^{ad_\sigma} : V_{n,m} &\rightarrow V_{n,m+1}, \\ V_{n_1,m_1} \cdot V_{n_2,m_2} &\rightarrow V_{n_1+n_2,m_1+m_2}. \end{aligned}$$

Также мы видим, что степени, присутствующие в  $V_{n+1,m+k}$  больше степеней, присутствующих в  $V_{n,m}$  если  $\sigma$  достаточно мало ( $\forall \alpha \in Q_{\mathfrak{g}}^1 : |(\sigma, \alpha)| < \frac{1}{k}$ ). Также мы определим немого неоднозначное обозначение  $V_{n,\mathbf{w}}$  by

$$t^{k+(\sigma, \mathbf{w})} \in V_{n,\mathbf{w}} \Leftrightarrow (k \geq n).$$

Сейчас у нас есть все ингредиенты, необходимые для построения итеративного решения системы (1.2.3). Наши начальные данные будут даны тройкой матриц  $\sigma$ ,  $\tilde{A}_0(0)$  and  $A_1(0)$ . Символически система (1.2.3) может быть записана как

$$\tilde{A}_0(t) = F_0(\tilde{A}_0(t), A_1(t)), A_1(t) = F_1(\tilde{A}_0(t), A_1(t)),$$

где “аффинно” билинейные (в смысле  $f(x, y) = axy + bx + cy + d$ ) функции  $F_0, F_1$  имеют следующие свойства:

$$\begin{aligned} F_0 &: V_{n_0, m_0} \times V_{0,0} \rightarrow 0, \\ F_0 &: V_{n_0, m_0} \times V_{n_1, m_1} \rightarrow V_{n_0+n_1, m_0+m_1+1} \subset V_{n_0+n_1, \infty}, \\ F_1 &: V_{n_0, m_0} \times V_{n_1, m_1} \rightarrow V_{n_0+n_1+1, m_0+m_1+1} + V_{n_1+1, m_1} \subset V_{n_1+1, \infty}. \end{aligned}$$

Давайте подставим в систему (1.2.3) выражения

$$\tilde{A}_0(t) = \tilde{A}_0(0) + \sum_{k=1}^{\infty} t^k \tilde{A}_0^k(t), A_1(t) = A_1(0) + \sum_{k=1}^{\infty} t^k A_1^k(t), t^k \tilde{A}_0^k(t), t^k A_1^k(t) \in V_{k, \infty}.$$

Из (1.2.3) мы сразу видим, что (1.2.3) принимает форму

$$\tilde{A}_0^k(t) = f_0^k(\tilde{A}_0^{<k}(t), A_1^{<k}(t)), A_1^k(t) = f_1^k(\tilde{A}_0^{<k}(t), A_1^{<k}(t)).$$

Из-за знака  $\leq$  наш алгоритм решения будет заключаться в том, чтобы сначала считать  $A_1^k(t)$ , а затем уже  $\tilde{A}_0^k(t)$ . Также можно записать явные формулы для билинейных функций  $f_1^k$  и  $f_0^k$ , являющиеся непосредственным (хотя и громоздким) следствием системы (1.2.3).

Теперь давайте определим, какие степени  $(k, \mathbf{w})$  будут на самом деле присутствовать в решении. Это снова будет сделано итеративно, только с применением свойств (1.2.3):

- Беря  $\tilde{A}_0(0) \in V_{0,0}$  и  $A_1(0) \in V_{0,0}$ , и вычисляя  $F_1, V_{1,1}$ , следовательно  $A_1 \in V_{0,0} + V_{1,1} + \dots$
- Беря  $\tilde{A}_0(0) \in V_{0,0}$  и  $A_1 \in V_{0,0} + V_{1,1} + \dots$ , получаем  $\tilde{A}_0 \in V_{0,0} + V_{1,2} + \dots$
- Для  $\tilde{A}_0 \in V_{0,0} + V_{1,2} + \dots$  и  $A_1 \in V_{0,0} + V_{1,1} + \dots$  находим  $A_1 \in V_{0,0} + V_{1,1} + V_{2,3} + \dots$
- Выбирая  $\tilde{A}_0 \in V_{0,0} + V_{1,2} + \dots$  и  $A_1 \in V_{0,0} + V_{1,1} + V_{2,3} + \dots$  получаем  $\tilde{A}_0 \in V_{0,0} + V_{1,2} + V_{2,4} + \dots$
- ...

Продолжая эту процедуру находим следующую структуру

$$\begin{aligned} \tilde{A}_0(t) &\in \sum_{k=0}^{\infty} V_{k, 2k}, \\ A_1(t) &\in V_{0,0} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{k, 2k-1}. \end{aligned}$$

Теперь легко проверить, что эти пространства инварианты относительно действия  $(F_0, F_1)$  описываемого правилами (1.2.3). Это в некотором смысле похоже на утверждение о том, то конус инвариантен относительно операции сложения.

Действительно, давайте попробуем найти элемент  $\tilde{A}_0(t)$  лежащий в  $V_{k,2k+1}$ . Для этого нам нужно было бы иметь  $n_0 + n_1 \leq k$ ,  $m_0 + m_1 \geq 2k$ , значит  $m_0 + m_1 \geq 2(n_0 + n_1)$ . Поскольку  $m_1 \leq 2n_1 - 1$  для  $n_1 \neq 0$  (когда  $F_0$  зануляется) и  $m_0 \leq 2n_0$ , такой элемент не может существовать. Аналогично, для  $A_1$  давайте возьмём элемент, лежащий в  $V_{k,2k}$ . Нужно удовлетворить условиям  $n_1 \leq k - 1$ ,  $m_1 \geq 2k$  (невозможно) или  $n_0 + n_1 + 1 \leq k$  и  $m_0 + m_1 + 1 \geq 2k$ , что приводит к  $m_0 + m_1 \geq 2n_0 + 2n_1 + 1$ . Но  $m_1 \leq 2n_1$  и  $m_0 \leq 2n_0$ , следовательно мы также не можем получить такой элемент.

Теперь давайте вычислим  $\tau$ -функцию и попробуем понять, в каких элементах фильтрации она лежит. Поскольку мы имеем

$$t\partial_t \log \tau(t) = -\text{tr}[t^{-\sigma}(A_1 + A_\infty)t^\sigma \tilde{A}_0 + \tilde{A}_0^2] + t(1-t)^{-1} \text{tr}[(A_1 + A_\infty + t^\sigma \tilde{A}_0 t^{-\sigma})A_1],$$

то наивно должен быть член в  $V_{0,1}$ . Однако, вычисляя постоянную часть, можно найти

$$\begin{aligned} t\partial_t \log \tau(t) &= \text{tr}(B\tilde{A}_0 - \tilde{A}_0^2) + \dots = \text{tr}(A_t A_0) + \dots = \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(A_t + A_0)^2 - \frac{1}{2} \text{tr} A_0^2 - \frac{1}{2} \text{tr} A_t^2 + \dots = \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_0) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}_t, \boldsymbol{\theta}_t) + \dots, \end{aligned}$$

где  $A_\nu \sim \boldsymbol{\theta}_\nu$ . Для удобства давайте введём обозначение

$$\chi = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_0) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}_t, \boldsymbol{\theta}_t)$$

Члены из  $\text{tr}(t^{-\sigma} A_1(t) t^\sigma \tilde{A}_0(t))$ , наиболее близкие к границе, происходят из постоянной части  $A_1(t)$ . Эти члены относятся к  $\sum_{k=0}^{\infty} V_{k,2k}$ , следовательно

$$\log \tau(t) \in \sum_{k=0}^{\infty} V_{k,2k}$$

Отметим, что эти оценки слишком грубые, так как мы не учли, что большое количество коммутаторов, на самом деле, обнуляется. Настоящий результат оказывается одинаковым для всех трёх функций

$$\log \tau, \tilde{A}_0, A_1 \in \sum_{k=0}^{\infty} V_{k,k},$$

и может быть проверен численно. Более того, оказывается, что разложение  $\tau$ -функции само по себе ещё более ограниченное:

$$t^{-\chi} \tau(t) \in \sum_{\boldsymbol{w} \in Q_{\mathfrak{g}}} V_{\frac{1}{2}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}), \boldsymbol{w}},$$

что на самом деле указывает на наличие описания в терминах CFT: разные дробные степени приходят из  $t^\Delta$  для разных  $\Delta$ , при этом конформные размерности  $\Delta = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{w})$  квадратичные функции  $\boldsymbol{w}$ , что приводит к структуре (1.2.3).

### 1.2.3.1 $\mathfrak{sl}_2$ case

В этом случае мы проиллюстрируем все процедуры, определения и утверждения, используя точное решение из [61].

Алгебра Ли  $\mathfrak{sl}_2$  задана 3 генераторами  $E_\alpha, E_{-\alpha}, H_\alpha$ , такими что

$$\begin{aligned} [E_\alpha, E_{-\alpha}] &= H_\alpha, \\ [H_\alpha, E_{\pm\alpha}] &= \pm 2E_{\pm\alpha}. \end{aligned}$$

Решётка корней  $Q_{\mathfrak{sl}_2}$  показана на Рис.2. Она натянута на один корень  $\alpha$ .  $Q_{\mathfrak{sl}_2}^0$  это пустой квадрат,  $Q_{\mathfrak{sl}_2}^1$  красный прямоугольник,  $Q_{\mathfrak{sl}_2}^2$  зелёный, а  $Q_{\mathfrak{sl}_2}^3$  – синий.

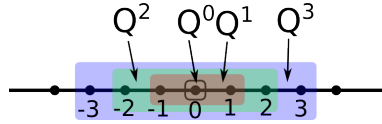


Рисунок 2 — Фильтрация  $Q_{\mathfrak{sl}_2}^\bullet$

Все мономы имеют вид  $t^{n+(\sigma, w)} = t^{n+m(\sigma, \alpha)}$ , и следовательно могут быть обозначены точками двумерной решётки. Заметим, что в нашей нормировке  $(\alpha, \alpha) = 2$ . Несколько примеров элементов этой фильтрации представлены на Рис.3.

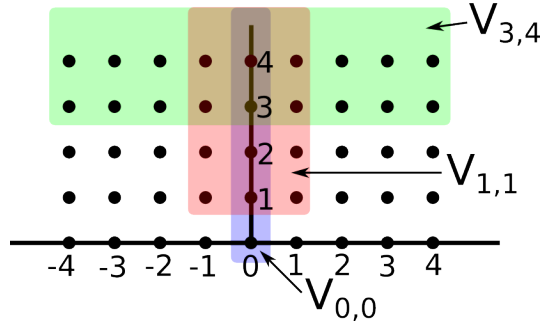


Рисунок 3 — Фильтрация  $V_{\bullet, \bullet}$

Здесь синяя область представляет  $V_{0,0}$ , красная соответствует  $V_{1,1}$ , а зелёная –  $V_{3,4}$ .

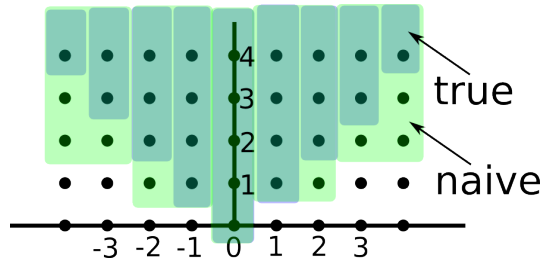


Рисунок 4 — Support of the solutions

Мы также можем показать “настоящий” и “наивный” решёточные носители величин  $\tilde{A}_0(t)$ ,  $A_1(t)$ ,  $\log \tau(t)$  и  $t^{-x}\tau(t)$ . См. Рис.4: зелёная область это “наивный” носитель  $A_1(t)$ , синяя область это настоящий носитель  $\tilde{A}_0(t)$ ,  $A_1(t)$ ,  $\log \tau(t)$ , который может быть

найден экспериментально. Сейчас можно использовать точную формулу для разложения тау-функции [61] (см. (1.2.3.1) ниже) для того, чтобы увидеть, что

$$\tau(t) = t^{\sigma^2 - \theta_0^2 - \theta_t^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} t^{2\sigma k} t^{k^2} f_k(t),$$

что в свою очередь означает

$$t^{\theta_0^2 + \theta_t^2 - \sigma^2} \tau(t) \in \sum_{k=0}^{\infty} V_{k^2, k}.$$

Это выглядит чудом и означает, что огромное количество слагаемых сокращается когда мы экспоненцируем, но этот ответ подтверждает гипотезу (1.2.3). Это явление проиллюстрировано на Рис.5 двумя способами. Верхние жирные числа отвечают за степени в  $\tau(t)$  (синяя область), нижние числа отвечают степеням в  $\log \tau(t)$  (зелёная область). Горизонтальная координата отвечает положению в  $\mathfrak{sl}_2$  решётке корней.

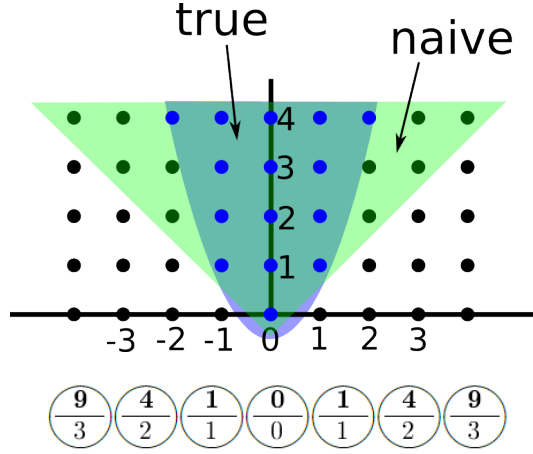


Рисунок 5 — Носители  $\tau(t)$  и  $\log \tau(t)$ : кружочки отвечают целым точкам оси  $x$ , числа внутри показывают  $y$ -координаты конуса и параболы.

Давайте возьмём основную формулу из [61]:

$$\tau(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s^n C_n^{(0t)}(\theta_0, \theta_t, \sigma_{0t}) C_n^{(1\infty)}(\theta_1, \theta_\infty, \sigma_{0t}) t^{(\sigma_{0t} + n)^2 - \theta_0^2 - \theta_t^2} \mathcal{B}(\{\theta_i\}, \sigma_{0t} + n; t),$$

где  $\mathcal{B}(\dots; t)$  это  $c = 1$  вирасоровский конформный блок, а

$$C_n^{(0t)}(\theta_0, \theta_t, \sigma_{0t}) C_n^{(1\infty)}(\theta_1, \theta_\infty, \sigma_{0t}) = \tag{1.2.1}$$

$$= \frac{\prod_{\epsilon=\pm, \epsilon'=\pm} G(1 + \theta_t + \epsilon\theta_0 + \epsilon'(\sigma_{0t} + n)) G(1 + \theta_1 + \epsilon\theta_\infty + \epsilon'(\sigma_{0t} + n))}{G(1 - 2\sigma_{0t}) G(1 + 2\sigma_{0t})}. \tag{1.2.2}$$

Здесь  $(\theta_\nu, -\theta_\nu)$  это собственные значения матриц  $A_\nu$  из линейной системы (1.2.2),  $(e^{2\pi i \sigma_{\mu\nu}}, e^{-2\pi i \sigma_{\mu\nu}})$  это собственные значения  $M_\mu M_\nu$ ,  $s$  – единственная переменная, зависящая от  $\sigma_{1t}$  (сложным образом). Основные свойства (1.2.3.1) и (1.2.2) могут быть подытожены следующим образом:



- а) Носитель  $\tau(t)$  показан на (1.2.3.1).
- б) Параметры относительной скрутки входят только через фактор  $s^n$  в структурных константах.
- в) Трёхточечные коэффициента  $C_n$  факторизуются в соответствии с разрезанием на штаны.

Сейчас мы собираемся проверить эти важные свойства в  $\mathfrak{sl}_3$  случае.

### 1.2.3.2 $\mathfrak{sl}_3$ случай

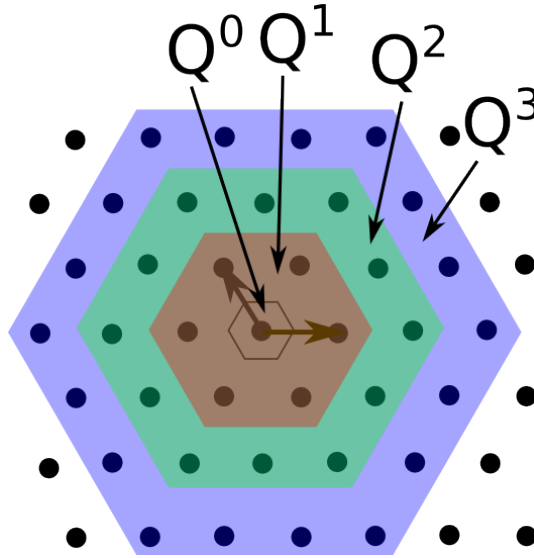


Рисунок 6 — Фильтрация  $Q_{\mathfrak{sl}_3}^\bullet$

Рис.6 иллюстрирует фильтрацию на  $\mathfrak{sl}_3$  решётке корней. Красный шестиугольник соответствует  $Q_{\mathfrak{sl}_3}^1$ ,  $Q_{\mathfrak{sl}_3}^2$  обозначена зелёным, а  $Q_{\mathfrak{sl}_3}^3$  – синим. Сложно визуализировать  $V_{m,n}$ , поскольку для этого нужна трёхмерная картинка. Можно, тем не менее, думать о  $\sum_{k=0}^{\infty} V_{k,k}$  как о конусе с шестиугольным сечением.

Давайте исследуем численно  $3 \times 3$  систему Шлезингера. Сначала определим, какие степени  $(k, \mathbf{w})$  присутствуют в  $\log \tau(t)$  и в  $\tau(t)$  (Рис.7).

Как и выше, верхние жирные числа соответствуют степеням, присутствующим в  $t^{-\chi} \tau(t)$ , а нижние – в  $\log \tau(t)$ . Мы отмечаем знаком “?” те переменные, которые получаются на пределе машинной точности, или те, которые больше 7 (так как они не видны в решении до 7 порядка). Внимательно анализируя эту картинку, можно установить, что

$$\log \tau(t) \in \sum_{k=0}^{\infty} V_{k,k},$$

$$t^{-\chi} \tau(t) \in \sum_{\mathbf{w} \in Q_{\mathfrak{sl}_3}} V_{\frac{1}{2}(\mathbf{w}, \mathbf{w}), \mathbf{w}}.$$

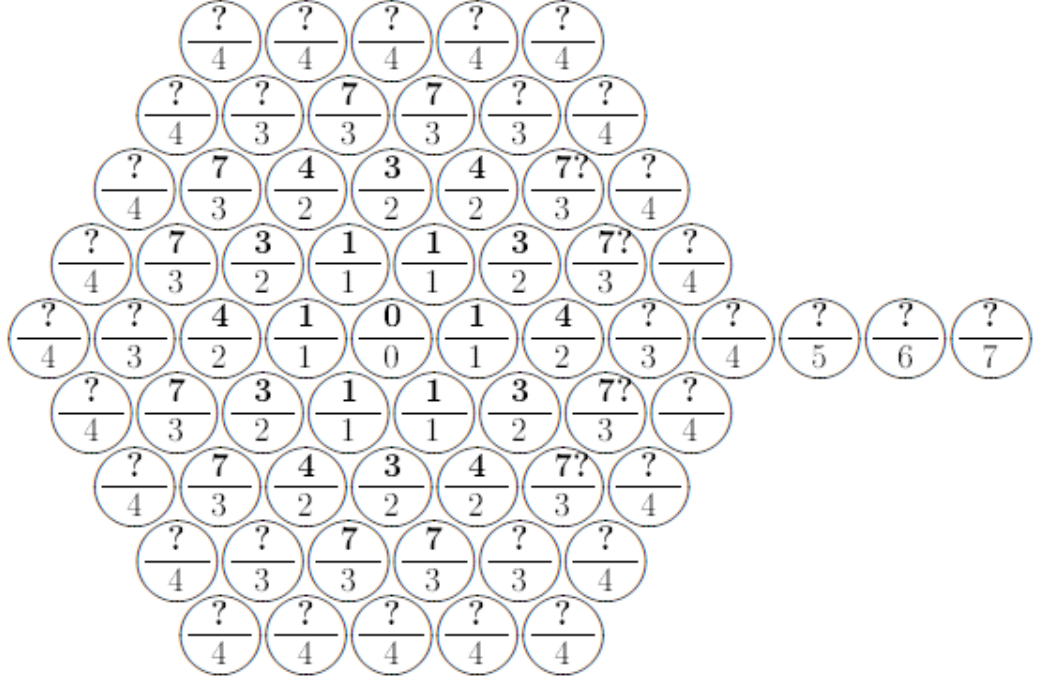


Рисунок 7 — Степени, имеющиеся в  $t^{-\chi}\tau(t)$  и в  $\log \tau(t)$ . Число  $\chi$  даётся формулой (1.2.3).

Это значит, что ненулевые мономы в  $\tau(t)$  заполняют параболоид, а не наивно ожидаемый конус. Другими словами, происходит много нетривиальных сокращений, что даёт подтверждение гипотезе (1.2.3). Сейчас мы приведём список других нетривиальных свойств  $\tau(t)$  найденный в результате экспериментального изучения.

а) Разложение имеет вид

$$\tau(t) = \sum_{\mathbf{w} \in Q} e^{(\beta, \mathbf{w})} C_{\mathbf{w}}^{(0t)}(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_t, \boldsymbol{\sigma}_{0t}, \mu_{0t}, \nu_{0t}) C_{\mathbf{w}}^{(1\infty)}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_{\infty}, \boldsymbol{\sigma}_{0t}, \mu_{1t}, \nu_{1t}) \times \quad 1.2.3$$

$$\times t^{\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_{0t} + \mathbf{w}, \boldsymbol{\sigma}_{0t} + \mathbf{w}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_0) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}_t, \boldsymbol{\theta}_t)} \mathcal{B}_{\mathbf{w}}(\{\boldsymbol{\theta}_i\}, \boldsymbol{\sigma}_{0t}, \mu_{0t}, \nu_{0t}, \mu_{1\infty}, \nu_{1\infty}; t). \quad 1.2.4$$

б) Ненулевые коэффициенты разложения начинаются с  $t^{\frac{1}{2}(\mathbf{w}, \mathbf{w})}$ .

в) Вся зависимость от параметров относительной скрутки спрятана в  $\beta \in \mathfrak{h}$ , которая входит тривиальным образом.

г) Зависимость структурных констант от 3-точечных данных монодромии факторизуется.

д) Первый член в разложении конформного блока имеет вид

$$\mathcal{B}_0 = 1 + [\alpha + \beta C_1(\mu_{0t}, \nu_{0t}) + \gamma \tilde{C}_1(\mu_{1\infty}, \nu_{1\infty}) + \delta C_1(\mu_{0t}, \nu_{0t}) \tilde{C}_1(\mu_{1\infty}, \nu_{1\infty})] t + \dots$$

Это свойство новое относительно  $N = 2$  случая, позже мы увидим, что оно очень важное.

Все эти факты говорят нам о том, что почти все свойства  $\mathfrak{sl}_2$  случая сохраняются в  $\mathfrak{sl}_3$  случае. Это приводит нас к

**Главной гипотезе:**

$$\boxed{\mathcal{B}_0(\{\theta_i\}, \sigma_{0t}, \mu_{0t}, \nu_{0t}, \mu_{1\infty}, \nu_{1\infty}; t) \text{ является конформным блоком } W_3 \text{ алгебры}}$$

Соответствующая конформная размерность и  $W$ -заряд даны формулами

$$\Delta_\nu = \frac{1}{2}(\theta_\nu, \theta_\nu)$$

$$w_\nu = \sqrt{\frac{3}{2}} \prod_i (\theta_\nu, e_i).$$

Основным достоинством данного выше определения конформного блока является то, что оно зависит только от 4 дополнительных переменных вместо дважды бесконечного множества.

Легко проверить это определение для случая, когда  $W_3$ -блок может быть определён алгебраически. Это становится возможным когда  $\theta_t = a_t e_1$  и  $\theta_1 = a_1 e_1$ , где  $e_1$  это вес первого фундаментального представления. Наилучший способ представить этот конформный блок это использовать формулы Некрасова [76] которые могут быть применены к СГТ ввиду обобщённого АГТ соответствия [77], впервые установленного в [78], [79]. Наиболее удобное (для  $c = 2$ ) выражение для конформного блока может быть найдено в [73]:

$$\mathcal{B}_w(\theta_\infty, a_1, \sigma, a_t, \theta_0; t) = \mathcal{B}(\theta_\infty, a_1, \sigma + w, a_t, \theta_0; t) \quad 1.2.5$$

$$\mathcal{B}(\theta_\infty, a_1, \sigma, a_t, \theta_0; t) = (1-t)^{\frac{1}{3}a_t a_1} \sum_{\vec{Y}} t^{|\vec{Y}|} Z_{bif}(-\theta_\infty, a_1, \sigma | \vec{0}, \vec{Y}) \times \quad 1.2.6$$

$$\times \frac{1}{Z_{bif}(\sigma, 0, \sigma | \vec{Y}, \vec{Y})} Z_{bif}(\sigma, a_t, \theta_0 | \vec{Y}, \vec{0}), \quad 1.2.7$$

где

$$Z_{bif}(\theta, a, \theta' | \vec{\nu}, \vec{\nu}') = \prod_{i,j=1}^3 \prod_{s \in \nu'_i} \left( -E_{\nu'_i, \nu_j}(i(\theta, e_j) - i(\theta', e_i)|s) - i\frac{a}{3} \right) \times \quad 1.2.8$$

$$\times \prod_{t \in \nu_j} \left( E_{\nu_j, \nu'_i}(i(\theta', e_i) - i(\theta, e_j)|t) - i\frac{a}{3} \right), \quad 1.2.9$$

а величины  $E$  определены как

$$E_{\lambda, \mu}(x|s) = x - il_\mu(s) - ia_\lambda(s) - i.$$

Это приводит в точности к тому же результату, что и наши вычисления с использованием итеративного решения системы Шлезингера.

Мы также угадали и проверили экспериментально формулу для структурных констант, которая является непосредственным обобщением (1.2.2):

$$C_w^{(0t)}(\theta_0, a_t, \sigma) C_w^{(1\infty)}(\sigma, a_1, \theta_\infty) = \quad 1.2.10$$

$$= \frac{\prod_{ij} G[1 - \frac{a_t}{N} + (e_i, \theta_0) - (e_j, \sigma + w)] G[1 - \frac{a_1}{N} + (e_i, \sigma + w) + (e_j, \theta_\infty)]}{\prod_i G[1 + (\alpha_i, \sigma + w)]}. \quad 1.2.11$$

Здесь  $e_i$  обозначают веса первого фундаментального представления, а  $\alpha_i$  это все корни  $\mathfrak{sl}_N$  (в нашем случае  $N = 3$ ). Эта формула была недавно доказана [74] для общего  $N$ . Можно также заметить сходство между этой формулой и тодовской трёхточечной функцией, вычисленной в [71].

## 1.2.4 Замечания о $W_3$ конформных блоках

### 1.2.4.1 Общий конформный блок

Здесь мы рассматриваем для простоты  $c = 2$  случай, но обобщение на произвольный  $c$  делается непосредственно. Сначала мы объясним, как  $W_N$  конформный блок определяется алгебраически. Для этого давайте вычислим следующее выражение:

$$\mathcal{B}(\theta_\infty, \theta_1, \sigma, \theta_t, \theta_0; t) = \langle -\theta_\infty | \phi_{\theta_1}(1) P_\sigma \phi_{\theta_t}(t) | \theta_0 \rangle,$$

где  $|\theta_0\rangle$  и  $\langle -\theta_\infty|$  это вектора старшего веса с зарядами, заданными (1.2.3.2),  $P_\sigma$  это проектор на весь модуль Верма (1.2.1) с данным старшим весом. Этот конформный блок может быть вычислен путём вставки разложения единицы в модуле Верма. Можно взять, например, наивный базис (1.2.1), или (если мы не хотим обязательно сохранить  $L_0$  градуировку) базис из [70], или (если мы хотим добавить алгебру Гейзенберга) АГТ-базис из [73], [80]. Давайте обозначим вектора этого базиса  $|\sigma, \vec{Y}\rangle$  и предположим, что

$$L_0 |\sigma\rangle = (\Delta(\sigma) + |\vec{Y}|) |\sigma, \vec{Y}\rangle.$$

Их скалярное произведение будет  $K_\sigma(\vec{Y}, \vec{Y}') = \langle \sigma, \vec{Y} | \sigma, \vec{Y}' \rangle$ . Это позволяет выразить конформный блок как

$$\mathcal{B}(\theta_\infty, \theta_1, \sigma, \theta_t, \theta_0; t) = t^\chi \sum_{\vec{Y}, \vec{Y}'} t^{|\vec{Y}|} \langle -\theta_\infty | \phi_{\theta_1}(1) | \sigma, \vec{Y} \rangle K^{-1}(\vec{Y}, \vec{Y}') \langle \sigma, \vec{Y}' | \phi_{\theta_t}(1) | \theta_0 \rangle = \quad 1.2.12$$

$$= t^\chi \sum_{\vec{Y}} t^{|\vec{Y}|} Q(\vec{Y}) \tilde{Q}(\vec{Y}), \quad 1.2.13$$

где  $\tilde{Q}(\vec{Y}) = \sum_{\vec{Y}'} K^{-1}(\vec{Y}, \vec{Y}') \langle \sigma, \vec{Y}' | \phi_{\theta_t}(1) | \theta_0 \rangle$  and  $Q(\vec{Y}) = \langle \theta_\infty | \phi_{\theta_1}(1) | \sigma, \vec{Y} \rangle$ , а  $\chi$  даётся (1.2.3).

Утверждение [70] заключается в том, что  $Q(\vec{Y})$  и  $\tilde{Q}(\vec{Y})$

$$Q(\vec{Y}) = Q(\vec{Y} | C_1, \dots, C_{|\vec{Y}|}) = \gamma_0(\vec{Y}) + \sum_{k=1}^{|\vec{Y}|} \gamma_k(\vec{Y}) C_k, \quad 1.2.14$$

$$\tilde{Q}(\vec{Y}) = Q(\vec{Y} | \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_{|\vec{Y}|}) = \tilde{\gamma}_0(\vec{Y}) + \sum_{k=1}^{|\vec{Y}|} \tilde{\gamma}_k(\vec{Y}) \tilde{C}_k, \quad 1.2.15$$

это “треугольные” “аффинные” линейные функции бесконечно большого количества параметров  $C_k, \tilde{C}_k$  определённых как

$$C_k = \langle -\boldsymbol{\theta}_\infty | \phi_{\boldsymbol{\theta}_1}(1) W_{-1}^k | \boldsymbol{\sigma} \rangle, \quad \tilde{C}_k = \langle \boldsymbol{\sigma} | W_1^k \phi_{\boldsymbol{\theta}_t}(1) | \boldsymbol{\theta}_0 \rangle.$$

#### 1.2.4.2 Вырожденное поле

Давайте рассмотрим случай  $\boldsymbol{\theta}_t = e_1$  (вес первого фундаментального представления). Правила слияния для таких полей известны и выглядят даются формулой

$$[e_1] \otimes [\boldsymbol{\theta}] = \bigoplus_k [\boldsymbol{\theta} + e_k].$$

Давайте также сдвинем  $\boldsymbol{\theta}_0 \mapsto \boldsymbol{\theta}_0 - e_n$ , домножим конформный блок на  $t^{\frac{2}{3}} = t^{(e_1, e_1)}$  и определим величину

$$\begin{aligned} \Phi_{nk}(t) &= t^{(e_1, e_1)} \mathcal{B}(\boldsymbol{\theta}_\infty, \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_0 + e_k - e_n, e_1, \boldsymbol{\theta}_0 - e_n; t) = \\ &= t^{(\boldsymbol{\theta}_0, e_k) + (1 - \delta_{kn})} \sum_{\vec{Y}} t^{|\vec{Y}|} Q(\vec{Y}, C_1, \dots, C_{|\vec{Y}|}) \tilde{q}(\vec{Y}), \end{aligned}$$

где  $\tilde{q}(\vec{Y})$  не содержит никаких свободных параметров [70].

Теперь обозначим вырожденное поле  $\phi_{e_1}(t)$  by  $\psi(t)$  и рассмотрим корреляционную функцию

$$t^{(e_1, e_1)} \langle -\boldsymbol{\theta}_\infty | \phi_{\boldsymbol{\theta}_1}(1) \psi(t) | \boldsymbol{\theta}_0 - e_k \rangle.$$

В области  $t \rightarrow 0$  (s-канал) она может быть разложена по базису конформных блоков, написанных выше. Но если мы положим  $t \rightarrow 1$  или  $t \rightarrow \infty$  (t- и u-каналы), то получим следующие ОРЕ

$$\begin{aligned} \psi(t) \phi_{\boldsymbol{\theta}_1}(1) &= \sum_k C_{e_1, \boldsymbol{\theta}_1}^{\boldsymbol{\theta}_1 + e_k} \cdot (t - 1)^{(\boldsymbol{\theta}_1, e_k)} (\phi_{\boldsymbol{\theta}_1 + e_k}(1) + \text{потомки}), \\ t^{(e_1, e_1)} \langle -\boldsymbol{\theta}_\infty | \psi(t) &= \sum_k C_{\boldsymbol{\theta}_\infty, e_1}^{\boldsymbol{\theta}_\infty + e_k} \cdot t^{-(\boldsymbol{\theta}_\infty, e_k)} (\langle -\boldsymbol{\theta}_\infty - e_k | + \text{потомки}). \end{aligned}$$

Эти формулы предполагают, что пространство конформных блоков, содержащих  $\psi(t)$ , трёхмерно, и возле каждой точки у нас есть базис с асимптотиками, заданными  $\boldsymbol{\theta}_\nu$ . Понятно, что в результате аналитического продолжения  $\Psi_{1k}(t)$  вокруг 0, 1,  $\infty$  получатся некоторые линейные комбинации базисных элементов

$$\gamma_0 : \Phi_{1k}(t) \mapsto \sum_{k'} \Phi_{1k'}(t) (M_0)_{k'k}, \quad 1.2.16$$

$$\gamma_1 : \Phi_{1k}(t) \mapsto \sum_{k'} \Phi_{1k'}(t) (M_1)_{k'k}, \quad 1.2.17$$

$$\gamma_\infty : \Phi_{1k}(t) \mapsto \sum_{k'} \Phi_{1k'}(t) (M_\infty)_{k'k}. \quad 1.2.18$$

В нашем случае  $M_0 = \text{diag}(e^{2\pi i(\boldsymbol{\theta}_0, e_1)}, e^{2\pi i(\boldsymbol{\theta}_0, e_2)}, e^{2\pi i(\boldsymbol{\theta}_0, e_3)})$ . То, что эти формулы *должны* выполняться, следует из общих принципов (кроссинг-симметрия) и из того факта, что

пространство трёхмерно. Однако, глядя на формулу (1.2.4.2), можно увидеть, что свобода выбора  $C_k$  может дать  $\Phi_{1k} = t^{(\theta_0, e_1) + (1 - \delta_{k1})} \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k$  с произвольными  $f_n$ 's. Это значит, что  $W$ -алгебра сама по себе не учитывает глобальной структуры конформных блоков, и эта информация должна быть добавлена в качестве дополнительных условий.

Теперь предположим, что у нас есть некоторые глобально определённые многозначные функции  $\Phi_{1k}$ . Тогда у нас есть три монодромии  $M_0, M_1, M_\infty$  и мы можем решить соответствующую обобщённую трёхточечную задачу Римана-Гильберта. Предположим, что её решение даётся матрицей  $F(t)$ , такой что

$$\frac{d}{dt} F(t) = \left( \frac{A_0}{t} + \frac{A_1}{t-1} \right) F(t),$$

$A_0 = \text{diag}((\theta_0, e_1), (\theta_0, e_2), (\theta_0, e_3))$  and  $F(t)$  is normalized in such a way that  $F(t) = t^{A_0}(1 + O(t))$ . Затем давайте сосчитаем  $R_i(t) = \sum_k \Phi_{1k}(t)(F(t)^{-1})_{ki}$ . Этот вектор имеет тривиальную монодromию вокруг всех особых точек, регулярен возле них, и  $R(0) = (1, 0, 0)$ , поэтому  $R(t) = (1, 0, 0)$ . Это означает, что

$$\boxed{\Phi_{1k}(t) = F_{1k}(t)}.$$

Эта формула позволяет нам зафиксировать все константы  $C_k$ . Это делается следующим образом: мы решаем трёхточечную задачу Римана-Гильберта, берём  $F_{11}(t)$  и считываем коэффициенты конформного блока из его разложения в ряд. Эти коэффициенты будут треугольными линейными комбинациями (1.2.15) из  $C_k$  (т.е.,  $k$ -й член разложения конформного блока содержит только  $C_{j \leq k}$ ). Эта конструкция выражает, таким образом,  $C_k$  через модули  $(\mu, \nu)$  плоских связностей на сфере с тремя проколами.

$$\boxed{C_k = C_k(\mu, \nu)}.$$

Все константы выражаются в терминах только двух параметров. Если мы вспомним 5-е экспериментальное свойство  $\tau$ -функции, то его происхождение теперь понятно: первый член конформного блока (со структурными константами зафиксированными выше) зависит только от  $C_1(\mu, \nu)$  и  $\tilde{C}_1(\mu, \nu)$ , и эта зависимость не более чем билинейная.

## Операторы петель Верлинде

Здесь мы немного модифицируем нашу точку зрения: сейчас все возможные вертексные операторы, определенные с помощью (1.2.1) и (1.2.1), должны рассматриваться независимо. Они образуют некоторое бесконечномерное векторное пространство, которое может быть отождествлено с пространством трёхточечных конформных блоков (которое одномерно в вирасоровском случае). Можно определить действие операторов петель Верлинде на этом пространстве тем же способом, что и в [81]. Это действие дано некоторыми операторами  $\hat{V}(\gamma)$ , зависящими от петли  $\gamma$ .

Если сейчас мы посмотрим на результаты [63], то поймём, что (1.2.3.1) может быть альтернативно определено как общий собственный вектор всех возможных петель Верлинде. Можно поступить таким же образом и в случае трёхточечных конформных блоков

$$\hat{V}(\gamma) \cdot \langle Y | \phi_{\theta_1, \mu, \nu}(1) | Y' \rangle = M_\gamma(\mu, \nu) \cdot \langle Y | \phi_{\theta_1, \mu, \nu}(1) | Y' \rangle$$

Эта процедура определяет базис “правильных” вертексных операторов  $\phi_{\theta_1, \mu, \nu}(1)$ , задаваемых некоторыми  $C_k(\mu, \nu)$ . Выглядит естественным, что в этом подходе  $\tau$ -функция, построенная из таких операторов, должна решать задачу Римана-Гильберта.

Вопрос об интерпретации в случае  $c \neq N - 1$  всё ещё открыт: проблема заключается в некоммутативности алгебры  $\hat{V}(\gamma)$ . Более того, даже в случае, подобном минимальным моделям,  $c = N - 1 - N(N^2 - 1) \frac{(k-1)^2}{k}$  для целых значений  $k$ , когда алгебра снова коммутативна, связь с изомонодромными деформациями становится непонятной (см. “concluding remarks” в [62] для обсуждения в вирасоровском случае).

### 1.2.5 Выводы

Мы нашли несколько важных свойств изомонодромных  $\tau$ -функций в старшем ранге, которые могут быть интерпретированы как указание на изомонодромно - СФТ-соответствие в  $W_N$  случае. Это позволяет дать определение общего  $W_N$  конформного блока, зависящего только от конечного числа параметров. Также можно доказать [74], что алгебраический способ определить известные конформные блоки полувыврожденных полей согласуется с данным определением.

Мы также рассмотрели частный конформный блок с вырожденным полем и показали, что его глобальная структура не зафиксирована алгебраически. Требование правильного глобального поведения этого объекта приводит к выражению всего бесконечного ряда констант в  $W_3$  конформном блоке в терминах решения трёхточечной задачи Римана-Гильберта.

Эти выражения могут быть написаны в терминах координат на пространстве модулей плоских связностей на сфере с 3 проколами. Ожидается, что это универсальное явление, возникающее для любого конформного блока (не только с вырожденными полями). Мы проверили экспериментально некоторые свойства, подтверждающие эту гипотезу.

Наконец, давайте приведём список открытых задач:

- Нужно проверить, что процедура фиксации  $C_k$  самосогласована.
- Если константы  $C_k$  могут быть зафиксированы таким образом, мы можем пробовать доказывать, что  $\tau$ -функция может быть выражена через сумму общих  $W_N$  конформных блоков.
- Всё ещё необходимо конструктивное решение трёхточечной задачи Римана-Гильберта.

— Было бы интересно понять смысл  $Z_{bif}(\boldsymbol{\theta}_t, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}_0; \mu, \nu | \vec{Y}, \vec{Y}')$  в контексте изомонодромно-CFT'шного соответствия. Это может быть сделано в случае  $\vec{Y}' = \vec{0}$ , интересно понять, что происходит для произвольных диаграмма Юнга.

— Есть подход к определению конформных блоков лёгких полей в пределе  $c \rightarrow \infty$  [82]. В том случае получены явные выражения для конформных блоков. Вся информация о трёхточечных функциях входит в это определение через несколько функций одной переменной. Открытая задача состоит в том, чтобы получить монодромию таких конформных блоков и отождествить выбор трёхточечных функций, который даёт конформные блоки, возникающие в нашем подходе.

— Также важно понять значение результатов [83] о статсуммах  $T_N$  теорий без лагранжевого описания (которые считаются соответствующими общим  $W_N$  трёхточечным функциям) с изомонодромной точки зрения.



### 1.3 Сцепление двух конформных теорий и уравнения раздутия Накаджимы-Ёшиоки

#### 1.3.1 Введение

##### 1.3.1.1

Обозначим через  $M(r, N)$  многообразие модулей свободных от кручения пучков на  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  ранга  $r$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = N$ , оснащенных тривиализацией на бесконечности. Это многообразие является гладкой, частичной компактификацией многообразия модулей  $U(r)$  инстантонов.

Существует естественное действие  $r+2$  мерного тора  $T$  на  $M(r, N)$  где  $(\mathbb{C}^*)^2$  действует на базе  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  и  $(\mathbb{C}^*)^r$  действует на тривиализации на бесконечности. Некрасовская статсумма для калибровочной теории без материи определяется как эквивариантный объем:

$$Z(\epsilon_1, \epsilon_2, \vec{a}; q) = \sum_{N=0}^{\infty} q^N \int_{M(r, N)} 1,$$

где  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_r)$  и  $\epsilon_1, \epsilon_2, a_1, \dots, a_r$  — это координаты на  $\mathfrak{t} = \text{Lie } T$ . Эти интегралы могут быть вычислены при помощи формулы локализации и имеют вид суммы по вкладкам неподвижных точек (которые занумерованы наборами из  $r$  диаграмм Юнга  $\lambda_1 \dots, \lambda_r$ ).

Накаджима и Ёшиока в работе [90] доказали так называемые уравнения раздутия на функцию  $Z(\epsilon_1, \epsilon_2, \vec{a}; q)$ . Для  $r = 1, 2$  эти уравнения имеют вид

$$Z(\epsilon_1, \epsilon_2, a; q) = Z(\epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1, a; q) \cdot Z(\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2, a; q) \quad (1.3.1)$$

$$Z(\epsilon_1, \epsilon_2, a_1, a_2; q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{q^{k^2}}{1_k} Z(\epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1, a_1 + k\epsilon_1, a_2 - k\epsilon_1; q) Z(\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2, a_1 + k\epsilon_2, a_2 - k\epsilon_2; q) \quad (1.3.2)$$

Геометрический смысл этих уравнений заключается в связи между  $M$  и  $\widehat{M}$  — многообразием модулей свободных от кручения и тривиализованных на бесконечности пучков на раздутии  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ . Измененные эквивариантные параметры  $(\epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1)$  и  $(\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2)$  — это веса действия тора в касательном пространстве к неподвижным точкам на раздутии  $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ .

Для  $r = 1$  функция  $Z(\epsilon_1, \epsilon_2, a; q) = \exp\left(\frac{q}{\epsilon_1 \epsilon_2}\right)$  (см [90, Sec 5]) поэтому уравнение (1.3.1) становится тривиальным. Но для  $r = 2$  функция  $Z(\epsilon_1, \epsilon_2, a_1, a_2; q)$  совпадает с некоторым пределом четырехточечного конформного блока (по АГТ гипотезе [84]) для конформной теории с центральным зарядом  $c = 1 + \frac{6(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2}{\epsilon_1 \epsilon_2}$ . Поэтому уравнение (1.3.2) должно означать какое-то соотношение в конформной теории. Это соотношение и является нашей главной целью.

##### 1.3.1.2

Мы, в основном, ограничимся случаем  $r = 2$  в котором алгебра симметрий соответствующей конформной теории это алгебра Вирасоро. Обозначим через  $V_{\Delta, c}$  —

модуль Верма над алгеброй Вирасоро и через  $\mathbb{L}_{\Delta,c}$  его неприводимый фактор. Вакуумный модуль  $\mathbb{L}_{0,c}$  имеет структуру вакуумного модуля конформной вертексной алгебры. Соответствующие операторы это тензор энергии-импульса  $T(z)$ , его производные и произведения. Мы запаараметризуем центральный заряд  $c = c(b) = 1 + 6(b + b^{-1})^2$  и обозначим это конформную вертексную алгебру через  $\mathcal{M}_b$ , по аналогии с минимальными моделями. Представления  $\mathbb{L}_{\Delta,c}$  являются представлениями алгебры  $\mathcal{M}_b$ .

Мы знаем из АГТ соответствия, что левая часть (1.3.2) это конформный блок <sup>1</sup> для алгебры  $\mathcal{M}_b$ , где  $b = \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_2}$ . С правой стороны (1.3.2) стоит линейная комбинация конформных блоков в  $\mathcal{M}_{b_1} \otimes \mathcal{M}_{b_2}$ , для  $b_1 = b/\sqrt{b^2 - 1}$ ,  $b_2 = \sqrt{1 - b^2}$ . Естественно считать, что правая часть это конформный блок для какой-то вертексной алгебры  $\mathcal{A}_b$ . Эта алгебра  $\mathcal{A}_b$  должна быть расширением произведения  $\mathcal{M}_{b_1} \otimes \mathcal{M}_{b_2}$  при помощи поля  $\Phi_{1,3} \cdot \Phi_{3,1}$  (в обозначениях [85]).

Геометрически, две алгебры Вирасоро  $\mathcal{M}_{b_1}$  and  $\mathcal{M}_{b_2}$  отвечают двум неподвижным относительно тора точкам на раздутии  $\mathbb{C}^2$ . Алгебраически, произведение  $\mathcal{M}_{b_1} \otimes \mathcal{M}_{b_2}$  может быть расширено до вертексной алгебры благодаря соотношению между центральными зарядами. В нашем случае это соотношение имеет вид  $b_1^2 + b_2^2 = -1$ .

Равенство (1.3.2) означает связь между конформными вертексными алгебрами  $\mathcal{M}_b$  и  $\mathcal{A}_b$ . Мы докажем, что для общих  $b$  выполняется  $\mathcal{A}_b \cong \mathcal{M}_b \otimes \mathcal{U}$  для некоторой конформной вертексной алгебры  $\mathcal{U}$ , см Теорему 4.

Эта алгебра  $\mathcal{U}$  является одним из главных объектов в нашей работе. Оказывается, что  $\mathcal{U}$  может быть построено в терминах одного бозонного поля  $\varphi(z)$ . Точнее говоря как вертексная алгебра  $\mathcal{U}$  изоморфна решетчатой алгебре  $V_{\sqrt{2}\mathbb{Z}}$  или аффинной алгебре  $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$  на уровне 1. Но  $\mathcal{U}$  имеет нестандартный (деформированный) тензор энергии импульса, его центральный заряд равен -5, см уравнение (1.3.4).

Алгебра  $\mathcal{U}$  содержит в себе две коммутирующие подалгебры Вирасоро с центральными зарядами  $\frac{-22}{5}$  и  $\frac{-3}{5}$ . Эти центральные заряды соответствуют минимальным моделям (2,5) и (5,3). Сумма соответствующих тензоров энергии-импульса  $T_{2/5} + T_{3/5}$  равняется полному тензору энергии импульса  $T_{\mathcal{U}}$ . Как следствие можно представить  $\mathcal{U}$  как произведение минимальных моделей (см. Теорему 7 и тождества для характеров (1.3.8)).

## 1.3.2 Результаты

### 1.3.2.1 Вертексные алгебры.

Мы будем использовать язык вертексных алгебр, см. например [88]. Напомним, векторное пространство  $V$  называется вакуумным представлением вертексной алгебры если любому вектору  $v \in V$  соответствует степенной ряд из операторов  $Y(v; z) = \sum Y_n z^{-n}$ ,  $Y \in \text{End}(V)$ . Это соответствие  $v \leftrightarrow Y(v; z)$  называется *соответствием опера-*

<sup>1</sup>точнее, предел Уиттекера-Гайотто конформного блока

*торы-состояния*. В определении вертексной алгебры соответствие  $v \longleftrightarrow Y(v; z)$  должно удовлетворять некоторым условиям: аксиоме вакуума, аксиоме сдвига и аксиоме локальности.

Напомним, что вертексная алгебра  $V$  называется *конформной* если существует ненулевой *конформный вектор*  $\omega \in V$  такой, что соответствующий степенной ряд из операторов  $T(z)$  удовлетворяет

$$T(z)T(w) = \frac{c}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{(z-w)}\partial T(w) + \text{reg.} \quad (1.3.3)$$

Этот  $T(z)$  называется *тензором энергии-импульса*, параметр  $c$  называется *центральным зарядом*. Если мы разложим  $T(z)$  по степеням  $z$ :  $T(z) = \sum_n L_n z^{-n-2}$  то уравнение (1.3.3) будет эквивалентно соотношениям в алгебре Вирасоро:

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{n^3-n}{12}c\delta_{n,-m}.$$

### 1.3.2.2 Алгебра $\mathcal{U}$ .

Сначала напомним, конструкцию решетчатой вертексной алгебры для одномерной решетки  $\sqrt{2} \cdot \mathbb{Z}$  (см. [88, Сес 5.2]). Пусть  $a_n$  — образующие алгебры Гейзенберга

$$[a_n, a_m] = n\delta_{m+n,0}.$$

Удобно рассматривать операторы  $a_n$  как моды бозонного поля  $\varphi(z)$

$$\varphi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus 0} \frac{a_n}{-n} z^{-n} + a_0 \log z + \widehat{Q},$$

где оператор  $\widehat{Q}$  является сопряженным оператору  $\widehat{P} = a_0$ , т.е. удовлетворяет соотношению  $[\widehat{P}, \widehat{Q}] = 1$ . Соотношения в алгебре Гейзенберга могут быть записаны в терминах операторного произведения

$$\varphi(z)\varphi(w) = \log(z-w) + \text{reg.}$$

Ниже мы будем сокращать такие формулы до  $\varphi(z)\varphi(w) \sim \log(z-w)$ .

Обозначим через  $F_\lambda$  Фоковское представление алгебры Гейзенберга со старшим весом  $v_\lambda$

$$a_n v_\lambda = 0 \text{ for } n > 0, \quad a_0 v_\lambda = \lambda v_\lambda.$$

Обозначим через  $S_\lambda$  оператор сдвига  $S_\lambda: F_\mu \rightarrow F_{\mu+\lambda}$  определенный по формуле

$$S_\lambda v_\mu = v_{\mu+\lambda}, \quad [S_\lambda, a_n] = 0, \text{ for } n \neq 0$$

Естественно считать, что  $S_\lambda$  это просто экспонента  $\exp(\lambda \widehat{Q})$ .

Прямая сумма  $V_{\sqrt{2}\mathbb{Z}} := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} F_{k\sqrt{2}}$  имеет структуру вертексной алгебры. Эта алгебра называется *решетчатой вертексной алгеброй* для решетки  $\sqrt{2} \cdot \mathbb{Z}$ . При соответствии состояния-операторы старшие вектора  $v_\lambda$ ,  $\lambda = k\sqrt{2}$  соответствуют

$$Y(v_\lambda; z) =: e^{\lambda\varphi} := S_\lambda z^{\lambda a_0} \exp\left(\lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} \frac{a_{-n}}{n} z^n\right) \exp\left(\lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} \frac{a_n}{-n} z^{-n}\right),$$

Здесь и далее  $: \dots :$  обозначает нормальное произведение по отношению к операторам рождения и уничтожения. Для более общих векторов в виде  $v = a_{-m}^{n_m} \dots a_{-1}^{n_1} v_\lambda$  соответствующие операторы имеют вид

$$Y(v; z) =: (\partial^m \varphi)^{n_m} \dots (\partial \varphi)^{n_1} e^{\lambda\varphi} :$$

Более подробное изложение этой конструкции написано например в [88, Sec. 5.2].

Алгебра  $V_{\sqrt{2}\mathbb{Z}}$  изоморфна вертексной алгебре аффинной алгебры Ли  $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$  на уровне 1. Мы обозначим стандартные образующие  $\widehat{\mathfrak{sl}}(2) = \mathfrak{sl}(2) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$  через  $e_n = e \otimes t^n$ ,  $f_n = f \otimes t^n$ ,  $h_n = h \otimes t^n$ , и центральный элемент через  $K$ . Через  $\mathcal{L}_{h,k}$  мы обозначим неприводимое представление  $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$  порожденное старшим вектором  $v$  таким, что

$$e_n v = 0, \text{ for } n \geq 0; \quad f_n v = h_n v = 0, \text{ for } n > 0; \quad h_0 v = h v, K v = k v.$$

Значение  $k$  центрального элемента называется уровнем представления.

Модуль  $\mathcal{L}_{0,k}$  имеет структуру вакуумного модуля над вертексной алгеброй. Эта алгебра для общих  $k$  используется при доказательствах наших теорем. Если  $k = 1$  то вертексная алгебра  $\mathcal{L}_{0,1}$  изоморфна решетчатой алгебре  $V_{\sqrt{2}\mathbb{Z}}$ . Действие образующих  $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$  определено по формулам

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e_n z^{-n-1} =: e^{\sqrt{2}\varphi} :, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n z^{-n-1} =: e^{-\sqrt{2}\varphi} :, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n z^{-n-1} = \sqrt{2} \partial \varphi(z).$$

Стандартный конформный вектора для алгебры  $V_{\sqrt{2}\mathbb{Z}} = \mathcal{L}_{0,1}$  это  $\omega_0 = \frac{1}{2} a_{-1}^2 v_0$ , соответствующий тензор энергии-импульса равен  $T(z) = \frac{1}{2} (\partial \varphi)^2$ , и имеет центральных заряд 1 1. Эта вертексная алгебра имеет два представления: вакуумное представление и еще одно  $\bigoplus_{k \in \mathbb{Z} + 1/2} F_{k\sqrt{2}} = \mathcal{L}_{1,1}$ . Их характеры, т.е. след  $q^{L_0}$  равны

$$\chi(\mathcal{L}_{0,1}) = \chi\left(\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} F_{k\sqrt{2}}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{k^2} / (q)_\infty = 1 + 3q + 4q^2 + 7q^4 + \dots,$$

$$\chi(\mathcal{L}_{1,1}) = \chi\left(\bigoplus_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} F_{k\sqrt{2}}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} q^{k^2} / (q)_\infty = 2q^{1/4} + 2q^{5/4} + 6q^{9/4} + \dots,$$

где мы использовали, что  $L_0 v_\lambda = (\lambda^2/2) v_\lambda$  и  $(q)_\infty = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)$ .

Существуют другие конформные векторы в  $V_{\sqrt{2}\mathbb{Z}}$ . А именно, локальные операторы  $\frac{1}{2} (\partial \varphi)^2 + u (\partial^2 \varphi)$  удовлетворяющие соотношению на тензор энергии импульса (1.3.3)

с центральным зарядом  $c = 1 - 12u^2$ . Добавление члена  $u(\partial^2\varphi)$  меняет собственные значения  $L_0$  на  $L_0 - ua_0$ . В частности, собственные значения нового  $L_0$  являются целыми если и только если  $u \in \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{Z}$ .

Теперь мы готовы определить  $\mathcal{U}$ .

**Определение 1.** Конформная вертексная алгебра  $\mathcal{U}$  совпадает с  $V_{\sqrt{2}\mathbb{Z}}$  as the как вертексная алгебра, но с другим тензором энергии импульса:

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{U}} &= \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial^2\varphi) + \epsilon \left( 2(\partial\varphi)^2 e^{\sqrt{2}\varphi} + \sqrt{2}(\partial^2\varphi) e^{\sqrt{2}\varphi} \right) = \\ &= \frac{1}{2}\partial_z\varphi(z)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_z^2\varphi(z) + \epsilon\partial_z^2 e(z), \quad \epsilon \neq 0 \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Легко видеть, что конформные вертексные алгебры  $\mathcal{U}$  изоморфны для различных значений  $\epsilon \neq 0$ . При  $\epsilon = 0$   $T_{\mathcal{U}}(z)$  имеет вид описанный выше при  $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$  и центральном заряде  $-5$ .

Дополнительное слагаемое в (1.3.4) соответствует вектору  $2e_{-3}v_0 = (2a_{-1}^2 + \sqrt{2}a_{-2})v_{\sqrt{2}}$ . Собственное значение оператора  $L_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}a_0$  на этом векторе равно 2. Операторное разложение соответствующего оператора  $\partial_z^2 e(z)$  не имеет сингулярных членов (так как  $e(z)e(w) \sim (z-w)^2$ ). Поэтому  $T_{\mathcal{U}}$  определенный в (1.3.4) удовлетворяет операторному разложению тензора энергии импульса (1.3.3) с центральным зарядом  $c_{\mathcal{U}} = -5$ .

Мы будем называть алгебру  $\mathcal{U}$  Уродом. Эта алгебра является одним из основных действующих лиц нашей работы.

Представления алгебры  $\mathcal{U}$  такие же как и у  $V_{\sqrt{2}\mathbb{Z}}$   $U_0 = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} F_{k\sqrt{2}}$  и  $U_1 = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}+1/2} F_{k\sqrt{2}}$ , но с другими характеристиками ввиду сдвига оператора  $L_0$ . Схематично этот сдвиг нарисован на следующей картинке

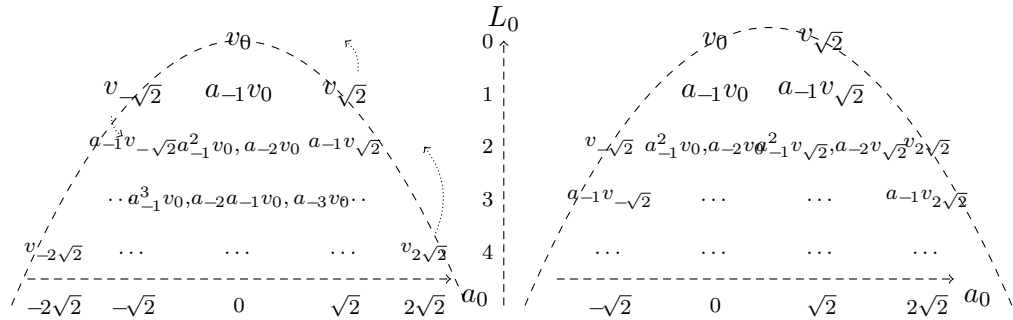


Рисунок 8 — Вектора базиса с самыми маленькими значениями  $L_0$ . Лечая часть соответствует вакуумному представлению  $V_{\sqrt{2}\mathbb{Z}}$ , правая часть соответствует вакуумному представлению  $\mathcal{U}$ . Пунктирные изгибающиеся линии показывают сдвиг  $L_0$  градуровки до

$$L_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}a_0.$$

Их характеры равны

$$\begin{aligned}\chi(U_0) &= \text{Tr}q^{L_0}|_{U_0} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{q^{k^2-k}}{(q)_\infty} = 2 + 2q + 6q^2 + 8q^3 + \dots, \\ \chi(U_1) &= \text{Tr}q^{L_0}|_{U_1} = \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \frac{q^{k^2-k}}{(q)_\infty} = q^{-1/4} + 3q^{3/4} + 4q^{7/4} + \dots.\end{aligned}$$

**Примечание 7.** Интересно заметить, что  $\chi(U_0) = q^{-1/4}\chi(\mathcal{L}_{1,1})$  и  $\chi(U_1) = q^{-1/4}\chi(\mathcal{L}_{0,1})$ .

### 1.3.2.3 Основная теорема.

Обозначим через  $V_{\Delta,c}$  модуль Верма над алгеброй Вирасоро порожденное старшим вектором  $v$

$$L_n v = 0, \text{ for } n > 0 \quad L_0 v = \Delta v, \quad C v = c v.$$

Через  $\mathbb{L}_{\Delta,c}$  мы обозначим его неприводимый фактор. Удобно запараметризовать  $\Delta$  и  $c$  через

$$\Delta = \Delta(P,b) = \frac{(b^{-1} + b)^2}{4} - P^2, \quad c = c(b) = 1 + 6(b^{-1} + b)^2$$

Мы обозначим соответствующие неприводимые представления через  $\mathbb{L}_{P,b}$  имея ввиду эту параметризацию. Пусть  $b$  — общее т.е.  $b^2 \notin \mathbb{Q}$ . Пусть  $m, n \in \mathbb{Z}$  и

$$P_{m,n} = (mb^{-1} + nb)/2. \quad (1.3.5)$$

Тогда, при  $P \notin \{P_{m,n}\}$  от  $P = P_{m,n}, mn \leq 0$  представление  $\mathbb{L}_{P,b}$  изоморфно модулю Верма и имеет характер  $\text{Tr}q^{L_0}|_{\mathbb{L}_{P,b}} = q^\Delta / (q)_\infty$  (см. например [87] или [89]). При  $P = P_{m,n}, mn > 0$  модулю Верма содержит сингулярный вектор на уровне  $mn$ . Неприводимое представление является фактором модуля Верма по подмодулю порожденному этим сингулярным вектором. Характер этого модуля (который мы будем обозначать через  $\mathbb{L}_{(m,n)}^b$  вместо  $\mathbb{L}_{P_{m,n},b}$ ) равен

$$\chi_{m,n}^b(q) = \text{Tr}q^{L_0}|_{\mathbb{L}_{(m,n)}^b} = q^\Delta \frac{1 - q^{mn}}{(q)_\infty}$$

Если  $P = P_{1,1}$ , то  $\Delta = 0$  и соответствующее неприводимое представление  $\mathbb{L}_{(1,1)}^b$  имеет структуру конформной вертексной алгебры. Конформный вектор равен  $L_{-2}v$ , а тензор энергии-импульса —  $T(z) = \sum_n L_n z^{-n-2}$ .

Векторные пространства  $\mathbb{L}_{P,b}$  являются представлениями этой вертексной алгебры. Мы обозначим эту алгебру через  $\mathcal{M}_b$ , а через  $T_b$  ее тензор энергии-импульса.

**Теорема 4.** *а) Пусть  $b_1 = b/\sqrt{1-b^2}$ ,  $b_2 = \sqrt{b^2-1}$ ,  $b$  — общее. Тогда векторное пространство*

$$\mathcal{A}_b = \bigoplus_{n \in 2\mathbb{N}-1} \mathbb{L}_{(1,n)}^{b_1} \otimes \mathbb{L}_{(n,1)}^{b_2}$$

имеет структуру вакуумного модуля конформной вертексной алгебры с тензором энергии-импульса  $T_{b_1} + T_{b_2}$ .

б) Эта алгебра изоморфна произведению  $\mathcal{U} \otimes \mathcal{M}_b$ , с тензором энергии-импульса  $T_U + T_b$ .

**Примечание 8.** Параметры  $b_1$  и  $b_2$  встречающиеся в теореме 4 удовлетворяют дополнительному соотношению.

$$b_1^2 + b_2^{-2} = -1$$

Это соотношение было уже упомянуто во введении.

**Примечание 9.** Прямая сумма  $\bigoplus_{n \in 2\mathbb{N}} \mathbb{L}_{(1,n)}^{b_1} \otimes \mathbb{L}_{(n,1)}^{b_2}$  имеет структуру представления алгебры  $\mathcal{A}_b$ . Это замечание может рассматриваться как дополнение к части а) теоремы 4. Можно еще говорить, что вся сумма  $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{L}_{(1,n)}^{b_1} \otimes \mathbb{L}_{(n,1)}^{b_2}$  является операторной алгеброй, но не локальной так как дробные степени такие как  $(z-w)^{1/2}$  возникают в операторной произведении.

Доказывать эту теорему мы сейчас не будем, но сделаем две простые проверки.

Во первых, мы проверим очевидное следствие из теоремы 4 которое заключается в том, что центральные заряды алгебр  $\mathcal{A}_b$  и  $\mathcal{U} \otimes \mathcal{M}_b$  совпадают.

$$c_1 + c_2 = \left(1 + 6\left(\frac{1}{b_1} + b_1\right)^2\right) + \left(1 + 6\left(\frac{1}{b_2} + b_2\right)^2\right) = -5 + \left(1 + 6\left(\frac{1}{b} + b\right)^2\right) = c_U + c$$

Во вторых, характер вакуумного модуля алгебры  $\mathcal{A}_b$  равен

$$\chi(\mathcal{A}_b) = \sum_{n \in 2\mathbb{N}-1} \chi_{1,n}^{b_1} \cdot \chi_{n,1}^{b_2} = \sum_{n \in 2\mathbb{N}-1} q^{\frac{(n-2)^2-1}{4}} \frac{(1-q^n)^2}{(q)_\infty^2} = \chi(U_0) \cdot \frac{1-q}{(q)_\infty}, \quad (1.3.6)$$

где последнее равенство это легкое комбинаторное утверждение Равенство (1.3.6) может быть переписано в виде  $\chi(\mathcal{A}_b) = \chi(U_0) \cdot \chi_{1,1}^b$  т.е. как равенство характеров вакуумных модулей из теоремы 4. Аналогично

$$\chi\left(\bigoplus_{n \in 2\mathbb{N}} \mathbb{L}_{(1,n)}^{b_1} \otimes \mathbb{L}_{(n,1)}^{b_2}\right) = \chi(U_1) \cdot \chi_{1,1}^b$$

Теперь мы рассмотрим представления алгебры  $\mathcal{A}_b$ . Используя изоморфизм  $\mathcal{A}_b = \mathcal{U} \otimes \mathcal{M}_b$  мы имеем представления построенные как тензорные произведения  $U_0 \otimes \mathbb{L}_{P,b}$  и  $U_1 \otimes \mathbb{L}_{P,b}$ . Следующая теорема описывает действие  $T_1(z)$  и  $T_2(z)$  на этих модулях

**Теорема 5.** Пусть  $P \notin \{P_{m,n}\}$ ,  $P_1 = \sqrt{b^{-1}/(b^{-1}-b)}P$ ,  $P_2 = \sqrt{b/(b-b^{-1})}P$ ,  $i = 0,1$ . Тогда модули  $U_i \otimes \mathbb{L}_{P,b}$  имеют следующее разложение относительно подалгебры  $\mathcal{M}_{b_1} \otimes \mathcal{M}_{b_2}$

$$U_i \otimes \mathbb{L}_{P,b} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1-i}{2}} \mathbb{L}_{(P_1+kb_1),b_1} \otimes \mathbb{L}_{(P_2+kb_2^{-1}),b_2}. \quad (1.3.7)$$

Легко проверить, что характеры модулей в левой и правой части (1.3.7) равны.

### 1.3.2.4 Минимальные модели.

В предыдущем разделе мы рассматривали общие значения центрального заряда алгебры Вирасоро  $c$ . Теперь положим  $b_{p/p'}^2 = -p/p'$ ,  $p, p' \in \mathbb{N}$ ,  $(p, p') = 1$ . Тогда центральный заряд равен  $c_{p/p'} = 1 - 6 \frac{(p-p')^2}{pp'}$ .

Сингулярные значения  $P$  (введенные в формуле (1.3.5)) теперь имеют симметрию

$$P_{m,m'} = -P_{p-m,p'-m'}.$$

Таким образом мы получаем равенство старших весов

$$\Delta(P_{m,m'}, b_{p/p'}) = \Delta(P_{p-m,p'-m'}, b_{p/p'}).$$

Поэтому, при  $0 < m < p$ ,  $0 < m' < p'$  соответствующий модуль Верма  $V_{\Delta,c}$  содержит два сингулярных вектора на уровнях  $mm'$  и  $(p-m)(p'-m')$  соответственно. Например, неприводимый модуль  $\mathbb{L}_{(1,1)}^b$  является фактором модуля Верма  $V_{0,c}$  по подмодулю порожденному сингулярными векторами на уровнях 1 и  $(p-1)(p'-1)$ .

Модуль  $\mathbb{L}_{(1,1)}^{b_{p/p'}}$  имеет структуру вакуумного модуля конформной вертексной алгебры, которая называется *минимальной моделью*. Мы обозначим ее через  $\mathcal{M}_{p/p'}$ . Эта вертексная алгебра является рациональной, все ее представления это  $\mathbb{L}_{(m,m')}^{b_{p/p'}}$  при  $0 < m < p$ ,  $0 < m' < p'$  с отождествлением  $\mathbb{L}_{(m,m')}^{b_{p/p'}} = \mathbb{L}_{(p-m,p'-m')}^{b_{p/p'}}$  показанным выше. Мы обозначим эти представления через  $\mathbb{L}_{(m,m')}^{p/p'}$ .

Мы хотим сформулировать аналоги теорема 4 и 5 для минимальных моделей. Отметим, что если  $b^2 = -p/p'$ , то  $b_1^2 = -p/(p+p')$  и  $b_2^2 = -(p+p')/p'$  т.е. они соответствуют минимальным моделям  $\mathcal{M}_{p/(p+p')}$  и  $\mathcal{M}_{(p+p')/p}$  соответственно.

**Теорема 6.** а) *Векторное пространство*

$$\bigoplus_{\substack{0 < n < p+p' \\ n \equiv 1 \pmod{2}}} \mathbb{L}_{(1,n)}^{p/(p+p')} \otimes \mathbb{L}_{(n,1)}^{(p+p')/p'}$$

имеет структуру вакуумного модуля конформной вертексной алгебры с тензором энергии-импульса  $T_{p/(p+p')} + T_{(p+p')/p'}$ . Эта алгебра изоморфна произведению  $\mathcal{U} \otimes \mathcal{M}_{p/p'}$ , с тензором энергии импульса  $T_U + T_{p/p'}$ .

б) Алгебра  $\mathcal{U} \otimes \mathcal{M}_{p/p'}$  имеет естественные представления  $U_i \otimes \mathbb{L}_{(m,m')}^{p/p'}$ , где  $i = 0, 1$ . Эти модули имеют следующее разложение:

$$U_i \otimes \mathbb{L}_{(m,m')}^{p/p'} \cong \bigoplus_{\substack{0 < n < p+p' \\ n \equiv m+m'+i-1 \pmod{2}}} \mathbb{L}_{(m,n)}^{p/(p+p')} \otimes \mathbb{L}_{(n,m')}^{(p+p')/p'}.$$

Обозначим через  $\chi_{(m,m')}^{p/p'}$  характер неприводимого модуля  $\mathbb{L}_{(m,m')}^{p/p'}$ . Следующие комбианторные тождества следуют из теоремы 6

$$\chi(U_i) \cdot \chi_{(m,m')}^{p/p'} = \sum_{\substack{0 < n < p+p' \\ n \equiv m+m'+i-1 \pmod{2}}} \chi_{(m,n)}^{p/(p+p')} \cdot \chi_{(n,m')}^{(p+p')/p'}.$$



Теорема 6 имеет замечательный частный случай. Пусть  $(p, p') = (2, 3)$ , тогда центральный заряд  $c_{2/3} = 0$ . Минимальная модель  $\mathcal{M}_{2/3}$  имеет только одно представление  $\mathbb{L}_{(1,1)}^{2/3}$  которое является тривиальным. Поэтому множитель  $\mathcal{M}_{2/3}$  может быть опущен.

**Теорема 7.** *Алгебра Урод  $\mathcal{U}$  имеет подалгебру  $\mathcal{M}_{2/5} \otimes \mathcal{M}_{5/3}$ . Представления  $U_0$  и  $U_1$  имеют следующее разложение:*

$$U_0 = \left( \mathbb{L}_{(1,1)}^{2/5} \otimes \mathbb{L}_{(1,1)}^{5/3} \right) \oplus \left( \mathbb{L}_{(1,3)}^{2/5} \otimes \mathbb{L}_{(3,1)}^{5/3} \right), \quad U_1 = \left( \mathbb{L}_{(1,2)}^{2/5} \otimes \mathbb{L}_{(2,1)}^{5/3} \right) \oplus \left( \mathbb{L}_{(1,4)}^{2/5} \otimes \mathbb{L}_{(4,1)}^{5/3} \right).$$

Две коммутирующие алгебры Вирасоро могут быть явно построены в терминах алгебры Гейзенберга

$$T_{2/5} = -\frac{1}{10\epsilon} e^{-\sqrt{2}\varphi} + \frac{1}{5}(\partial\varphi)^2 + \frac{3}{5\sqrt{2}}(\partial^2\varphi) + \frac{12\epsilon}{5}(\partial\varphi)^2 e^{\sqrt{2}\varphi} + \frac{3\sqrt{2}\epsilon}{5}(\partial^2\varphi) e^{\sqrt{2}\varphi} - \frac{12\epsilon^2}{5} e^{2\sqrt{2}\varphi},$$

$$T_{5/3} = \frac{1}{10\epsilon} e^{-\sqrt{2}\varphi} + \frac{3}{10}(\partial\varphi)^2 + \frac{2}{5\sqrt{2}}(\partial^2\varphi) - \frac{2\epsilon}{5}(\partial\varphi)^2 e^{\sqrt{2}\varphi} + \frac{2\sqrt{2}\epsilon}{5}(\partial^2\varphi) e^{\sqrt{2}\varphi} + \frac{12\epsilon^2}{5} e^{2\sqrt{2}\varphi}.$$

Можно проверить прямым вычислением, что  $T_{2/5}$  и  $T_{5/3}$  коммутируют и удовлетворяют (1.3.3) с центральными зарядами  $c_{2/5} = -\frac{22}{5}$  и  $c_{5/3} = -\frac{3}{5}$  соответственно. Легко видеть, что

$$T_{\mathcal{U}} = T_{2/5} + T_{5/3}.$$

**Примечание 10.** *Можно поставить такую задачу – найти все тензоры энергии-импульса в анзаце  $T(z)$*

$$T(z) = \alpha e^{-\sqrt{2}\varphi} + \beta_1(\partial\varphi)^2 + \beta_2(\partial^2\varphi) + \gamma_1(\partial\varphi)^2 e^{\sqrt{2}\varphi} + \gamma_2(\partial^2\varphi) e^{\sqrt{2}\varphi} + \delta e^{2\sqrt{2}\varphi}.$$

Тогда все решения уравнения (1.3.3) есть  $T_{\mathcal{U}}$ ,  $T_{2/5}$ ,  $T_{5/3}$ , стандартное решение  $T(z) = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + u(\partial^2\varphi)$  и еще две деформации  $T^{(1)}(z) = \alpha e^{-\sqrt{2}\varphi} + \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2$  и  $T^{(2)}(z) = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{3}{2\sqrt{2}}(\partial^2\varphi) + \delta e^{2\sqrt{2}\varphi}$ . Соответствующие центральные заряды равны  $c_{\mathcal{U}} = -5$ ,  $c_{2/5} = -\frac{22}{5}$ ,  $c_{5/3} = -\frac{3}{5}$ ,  $c = 1 - 12u^2$ ,  $c^{(1)} = 1$ ,  $c^{(2)} = -\frac{25}{2}$ . Мы можем из этого сделать вывод, что формулы для  $T_{2/5}$ ,  $T_{5/3}$  являются довольно выделенными.

В конце этого раздела мы отметим два тождества

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{L}_{0,1}) &= q^{-1/4} \left( \chi_{(1,2)}^{2/5} \cdot \chi_{(2,1)}^{5/3} + \chi_{(1,4)}^{2/5} \cdot \chi_{(4,1)}^{5/3} \right), \\ \chi(\mathcal{L}_{1,1}) &= q^{-1/4} \left( \chi_{(1,1)}^{2/5} \cdot \chi_{(1,1)}^{5/3} + \chi_{(1,3)}^{2/5} \cdot \chi_{(3,1)}^{5/3} \right). \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

Эти тождества связывают характеры представлений  $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$  уровня 1 и характеры минимальные моделей. Эти тождества следуют из теоремы 7 и замечания 7. У этих тождеств есть красивая комбинаторная интерпретация.

1.3.2.5  $c = -5$  описание.

Можно также изучать  $\mathcal{U}$  как представления алгебры Вирасоро с центральным зарядом  $c_{\mathcal{U}} = -5$ . Соответствующий параметр  $b_{\mathcal{U}} = i\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (см. параметризацию (1.3.2.3)) является общим в смысле  $b_{\mathcal{U}}^2 \notin \mathbb{Q}$ . Единственный сингулярный вектор в модуле Верма  $V_{(m,n)}^{b_{\mathcal{U}}}$  имеет  $L_0$  градуировку  $\Delta(P_{m,n}, b_{\mathcal{U}}) + mn = \Delta(P_{m,-n}, b_{\mathcal{U}})$ . Этот факт может быть также записан в виде короткой точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathbb{L}_{(m,-n)}^{b_{\mathcal{U}}} \rightarrow V_{(m,n)}^{b_{\mathcal{U}}} \rightarrow \mathbb{L}_{(m,n)}^{b_{\mathcal{U}}} \rightarrow 0$$

Там также понадобятся проективные модули в БГГ категории  $\mathcal{O}$  представлений алгебры Вирасоро с центральным зарядом  $-5$ . Через  $\mathcal{P}_{m,n}$  мы обозначим единственный проективный модуль такой, что  $\text{Hom}(\mathcal{P}_{m,n}, \mathbb{L}_{m,n}) \neq 0$ . Эти проективные модули имеют описание подобное описанию проективных модулей в категории  $\mathcal{O}$  для  $\mathfrak{sl}(2)$ . При  $mn \geq 0$  есть изоморфизм  $\mathcal{P}_{(m,n)}^{b_{\mathcal{U}}} \cong \mathbb{V}_{(m,n)}^{b_{\mathcal{U}}}$ . Если же  $mn < 0$ , то  $\mathcal{P}_{(m,-n)}^{b_{\mathcal{U}}}$  может быть определен при помощи короткой точной последовательности:

$$0 \rightarrow V_{(m,n)}^{b_{\mathcal{U}}} \rightarrow \mathcal{P}_{(m,-n)}^{b_{\mathcal{U}}} \rightarrow V_{(m,-n)}^{b_{\mathcal{U}}} \rightarrow 0.$$

Эта короткая точная последовательность также следует из теоремы двойственности для категории  $\mathcal{O}$ , см [86] или [89, Theorem 1.2].

**Теорема 8.** *Модули  $\mathbb{L}_{(1,n)}^{2/5} \otimes \mathbb{L}_{(n,1)}^{5/3}$ ,  $1 \leq n \leq 4$  имеют следующее разложение относительно диагональной алгебры Вирасоро  $L_n = L_n^{2/5} + L_n^{5/3}$*

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{(1,1)}^{2/5} \otimes \mathbb{L}_{(1,1)}^{5/3} &\cong \bigoplus_{n \in 2\mathbb{N}-1} \mathbb{L}_{(n,n)}^{b_{\mathcal{U}}}, & \mathbb{L}_{(1,3)}^{2/5} \otimes \mathbb{L}_{(3,1)}^{5/3} &\cong \bigoplus_{n \in 2\mathbb{N}-1} \mathcal{P}_{(n,-n)}^{b_{\mathcal{U}}}, \\ \mathbb{L}_{(1,2)}^{2/5} \otimes \mathbb{L}_{(2,1)}^{5/3} &\cong \mathcal{P}_{(0,0)}^{b_{\mathcal{U}}} \oplus \bigoplus_{n \in 2\mathbb{N}} \mathcal{P}_{(n,-n)}^{b_{\mathcal{U}}}, & \mathbb{L}_{(1,4)}^{2/5} \otimes \mathbb{L}_{(4,1)}^{5/3} &\cong \bigoplus_{n \in 2\mathbb{N}} \mathbb{L}_{(n,n)}^{b_{\mathcal{U}}}. \end{aligned}$$

В силу теоремы 7 первая строка дает разложение  $U_0$ , а вторая строка разложение для  $U_1$ .

Мы не будем доказывать это утверждение (и поэтому назвали его “теорема”).

## 1.4 Характеры подпространств Фейгина-Стойновского и теорема Бриона

### 1.4.1 Введение.

Начнем с введения обозначений, необходимых для формулировки основного результата.

Для начала рассмотрим конечномерную алгебру Ли  $L = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ . Фиксируем разложение Картана  $L = N^- \oplus H \oplus N^+$ , а также набор простых корней  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in H^*$ , упорядоченных стандартным образом. Для каждого положительного корня  $\alpha$  алгебры  $L$  определены образующие корневых подпространств  $e_\alpha, f_\alpha$  (с весами  $\alpha$  и  $-\alpha$  соответственно).

Теперь перейдем к соответствующей аффинной алгебре Ли

$$\hat{L} = \widehat{\mathfrak{sl}_n}(\mathbb{C}) = L \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d,$$

где элемент  $c$  – центральный элемент, а  $d$  – "оператор степени". Используемая нами теория аффинных алгебр Ли и их представлений изложена, например, в книге [103].

Введем следующее обозначение: для  $x \in L$  будем обозначать  $x \otimes t^m \in \hat{L}$  через  $x(m)$ .

Рассматривается неприводимое интегрируемое представление  $L(\lambda)$  алгебры  $\hat{L}$  со старшим весом  $\lambda$ . Пусть вес  $\lambda$  имеет координаты

$$(a_0, \dots, a_{n-1})$$

при разложении по базису, состоящему из фундаментальных весов. Другими словами,  $\lambda(h_{\alpha_i}(0)) = a_i$  для всех  $1 \leq i \leq n-1$  и, кроме того,

$$\lambda(c) = k = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$

( $k$  – уровень представления). Т.к. вес  $\lambda$  целочисленный доминантный, все  $a_i$  – целые неотрицательные числа.

Интерес представляет определенное подпространство модуля  $L(\lambda)$ , называемое подпространством Фейгина-Стойновского. Для его определения рассмотрим последовательность корней алгебры  $L$ , задаваемую

$$\gamma_i = \alpha_1 + \dots + \alpha_i,$$

с  $1 \leq i \leq n-1$ , и обозначим  $f_i = f_{\gamma_i}$ . Рассмотрим подалгебру  $P$  в  $\hat{L}$ , порожденную  $f_i(m)$  для всех  $1 \leq i \leq n-1$  и  $m \leq 0$ . Легко убедиться в том, что подалгебра  $P$  – абелева. Интересующее нас пространство есть  $V = \mathcal{U}(P)(v_0)$ , где  $v_0$  – старший вектор модуля  $L(\lambda)$ .

(Отметим, что изучение этих пространств было начато в работах [99] и [100] Фейгина и Стойновского.)

В [98] построен мономиальный базис в  $V$ . Для описания этого базиса заметим, что мономы в  $\mathcal{U}(P)$  соответствуют бесконечными последовательностями целых неотрицательных чисел с конечным носителем. Для монома  $p$  и любых целых  $q \geq 0$  и  $1 \leq r \leq n - 1$  член  $x(p)_{q(n-1)+r}$  соответствующей последовательности  $(x(p)_i)_{i \geq 1}$  равен показателю степени, в которой  $f_r(-q)$  содержится в мономе  $p$ . Другими словами, члены последовательности – это просто степени монома при упорядочивании переменных  $f_i(m)$  в первую очередь по  $m$  (по убыванию), а внутри каждого  $m$  – по  $i$ .

Теперь определим множество мономов  $\Pi \subset \mathcal{U}(P)$ . Для этого введем последовательность функционалов  $\{\psi_i, i \geq 1\}$  на пространстве последовательностей с конечным носителем. Для  $i < n$  положим  $\psi_i(x) = x_1 + \dots + x_i$ , а для  $i \geq n$  положим  $\psi_i(x) = x_{i-n+1} + \dots + x_i$ . Множество  $\Pi$  состоит из таких мономов  $p$ , что соответствующая последовательность  $x(p)$  удовлетворяет следующему набору неравенств.

- а) Для  $1 \leq i \leq n - 1$  выполнено  $\psi_i(x(p)) \leq a_1 + \dots + a_i =: b_i$ .
- б) Для любого  $i \geq n$  выполнено  $\psi_i(x(p)) \leq k =: b_i$ .

**Теорема 9.** Векторы  $\{rv_{0,p} \in \Pi\}$  образуют базис пространства  $V$ .

Пусть  $S \subset \mathcal{U}(P)$  – линейная оболочка множества мономов  $p \in \Pi$ . Тогда  $p \rightarrow rv_0$  задает линейное отображение  $\varphi : S \rightarrow V$ . В [98] показывается, что, во-первых, отображение  $\varphi$  сюръективно, и, во-вторых,  $\text{char } V = \exp \lambda \text{char } S$ . Из совокупности этих двух утверждений непосредственно вытекает теорема 9.

Для доказательства второго из упомянутых утверждений характер  $\text{char } S$  вычисляется явно. Это вычисление и составляет центральную часть работы [98]. Именно оно и будет другими средствами проведено нами здесь. Введем терминологию, необходимую для формулировки результата этого вычисления. Выделим в множестве последовательностей  $y = (y_i)$  с конечным носителем, все члены которых есть 0 или 1, подмножество  $\Theta$  хороших последовательностей. Хорошей будем называть последовательность, для которой для всех  $i$  верно, что если  $y_i = 0$ , то  $y_{i+n-1} = 0$ . Для каждой хорошей  $y = (y_i)$  определяется элемент пространства характеров  $F_y$ , через эти элементы и выражается характер  $S$ .

Во-первых, сопоставим каждой хорошей  $y$  элемент группы Вейля  $W$  алгебры  $\hat{L}$ . Для корня  $\alpha$  обозначим  $s_\alpha \in W$  соответствующее отражение. Кроме того, для целых  $1 \leq r \leq n - 1$  и  $q \geq 0$  пусть  $\gamma_{q(n-1)+r}$  – корень  $\gamma_r - q\delta$ , где  $\delta$  – мнимый корень аффинной алгебры  $\hat{L}$ . Тогда

$$w_y = \dots s_{\gamma_i}^{y_i} \dots s_{\gamma_1}^{y_1}.$$

В [98] указан элемент  $\xi \in W$ , который для всех  $i$  переводит  $\gamma_i$  в  $\gamma_{i+1}$ . Теперь можно дать следующее рекуррентное определение  $F_y$ :

$$F_{(0,0,0,\dots)} = \frac{1}{\prod_{i \geq 1} (1 - \exp \gamma_i)},$$

$$F_{(y_1, y_2, \dots)} = \frac{\xi F_{(y_2, y_3, \dots)}}{1 - \exp(w_{(y_1, y_2, \dots)} \gamma_1)},$$

где  $W$  действует на пространстве характеров естественным образом.

Формула для характера имеет следующий вид.

**Теорема 10.**

$$\text{char } S = \exp(-\lambda) \sum_{y \in \Theta} \exp(w_y \lambda) F_y.$$

В [98] показано, что и левая и правая части являются единственным решением одного и того же рекуррентного уравнения. Мы же применим иной подход. Последовательности  $x(p)$ ,  $p \in \Pi$  образуют многогранник в подпространстве последовательностей с конечным носителем – пересечение набора полупространств. Будем также обозначать этот многогранник  $\Pi$ . Характер пространства  $S$  есть сумма определенных экспонент точек  $\Pi$ . Для конечномерных многогранников суммы экспонент их целых точек можно вычислять при помощи теоремы Бриона. Нами будет показано, что аналогичное утверждение имеет место и для  $\Pi$ , что и даст возможность вычислить  $\text{char } S$ .

#### 1.4.2 Теорема Бриона.

Рассмотрим пространство  $\mathbb{R}^m$  с фиксированным базисом. В этом пространстве выделено подмножество  $\mathbb{Z}^m$  целых точек. Каждой такой точке  $x = (x_1, \dots, x_m)$  соответствует ее *экспонента* – моном Лорана  $\exp(x) = t_1^{x_1} \dots t_m^{x_m}$  от формальных переменных  $t_1, \dots, t_m$ . Каждому подмножеству  $\Sigma \subset \mathbb{R}^m$  соответствует его *характеристическая функция*

$$S(\Sigma) = \sum_{x \in \Sigma \cap \mathbb{Z}^m} \exp(x).$$

$S(\Sigma)$  – формальный ряд Лорана от  $t_1, \dots, t_m$ .

Пусть  $C$  – рациональный многогранный конус, т.е. многогранный конус, координаты вершины и всех образующих которого рациональны. Характеристическую функцию такого множества можно, в определенном смысле, представить в виде рациональной функции. Действительно, пространство рядов Лорана может быть рассмотрено как модуль над кольцом многочленов Лорана  $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_m^{\pm 1}]$ . В рассматриваемом случае в кольце существует многочлен  $\theta$  такой, что  $\theta S(C)$  – тоже многочлен Лорана, т.е. имеет конечное число ненулевых коэффициентов. Таким образом, существует рациональная функция  $\frac{\theta S(C)}{\theta}$ , не зависящая от выбора  $\theta$ . Обозначим ее  $\sigma(C)$ .

Нам понадобится чуть более подробное описание функции  $\sigma(C)$ . А именно, пусть  $C$  – симплицальный конус с вершиной  $v$ . Пусть  $u_1, \dots, u_l$  – линейно независимый набор целочисленных образующих  $C$ , каждая из которых минимальна, т.е. имеет взаимно простые в совокупности координаты. Пусть  $\Sigma$  – *фундаментальный параллеле-*

$n$ -угол конуса, множество точек вида

$$v + \sum_{i=1}^l \alpha_i u_i, \text{ все } \alpha_i \in [0,1].$$

Тогда имеет место

$$\sigma(C) = \frac{S(\Sigma)}{(1 - \exp u_1) \dots (1 - \exp u_l)}.$$

Если же конус  $C$  несимплициален, но его можно триангулировать симплициальными конусами и найти  $\sigma(C)$  по соответствующей формуле включений и исключений. Важный случай – конус, содержащий аффинную прямую, например, аффинное пространство или полупространство. Такие конусы, назовем *вырожденными*. Для вырожденного рационального конуса  $C$  имеем  $\sigma(C) = 0$ .

Подробно эта тема обсуждается, например, в книге [104].

Далее, пусть  $\Sigma$  – рациональный многогранник, т.е. выпуклая оболочка конечного набора рациональных точек. Для него определено множество вершинных конусов  $\{C_i\}$  – конусов с вершиной в некоторой вершине многогранника и образующими, заданными ребрами многогранника с концом в этой вершине. Отметим, что  $S(\Sigma)$  в нашем случае – многочлен Лорана, а, значит, и рациональная функция. Теперь можно сформулировать теорему.

**Теорема 11** (М. Брион, [101]). *В введенных обозначениях в поле рациональных функций имеет место тождество*

$$S(\Sigma) = \sum_i \sigma(C_i).$$

Сразу же сформулируем и докажем еще одно утверждение, близкое к теореме Бриона. Сперва, для выпуклого политопа  $\Sigma$  в  $\mathbb{R}^m$  (т.е. пересечения конечного набора полупространств) определим, аналогично вершинным конусам, конусы при гранях любых размерностей. Пусть  $\Gamma$  – грань, а  $x$  – внутренняя ее точка. Тогда соответствующий конус определяется как

$$C_\Gamma = \{x + \alpha(y - x), y \in \Sigma, \alpha \geq 0\}.$$

Если  $\dim \Gamma > 0$ , то  $C_\Gamma$  – вырожденный.

**Теорема 12.** *Пусть дан рациональный конус  $C$ , и для каждой его грани  $\Gamma$  (включая максимальную грань  $C$ ) определенный выше конус есть  $C_\Gamma$ . Кроме того, пусть  $D$  – рациональный конус с той же вершиной, что и  $C$ , содержащий  $C$ , и, сверх того, отличный от всего  $\mathbb{R}^m$ . Тогда*

$$\sigma(C) = \sum_{\dim \Gamma > 0} (-1)^{\dim \Gamma + 1} \sigma(C_\Gamma \cap D).$$

*Доказательство.* Если конус  $C$  вырожденный, то таковым же является  $D$  и все конусы  $C_\Gamma \cap D$ . Следовательно, левая и правая части равны нулю. В дальнейшем будем предполагать  $C$  невырожденным.

Для  $\Sigma \subset \mathbb{R}^m$  обозначим  $\mathbf{1}_\Sigma$  характеристическую функцию множества  $\Sigma$ . Кроме того, пусть  $\hat{C}$  – внутренность конуса, симметричного конусу  $C$  относительно его вершины. Таким образом,  $\hat{C}$  есть в точности множество точек, не лежащих ни в одном из  $C_\Gamma$  (с  $\Gamma \neq C$ ). Ключ к доказательству дает следующая лемма.

**Лемма 6.** *Пусть*

$$\Phi = \sum_{\dim \Gamma > 0} (-1)^{\dim \Gamma + 1} \mathbf{1}_{C_\Gamma}.$$

*Функции  $\Phi$  и  $\mathbf{1}_C$  совпадают вне  $\hat{C}$ .*

*Доказательство леммы.* В точках вне аффинной оболочки конуса  $C$ , очевидно, обе функции равны 0, поэтому аффинной оболочкой можно считать все пространство  $\mathbb{R}^m$ .

Рассмотрим точку  $x \notin \hat{C}$  и, соответственно, две возможности:

а) Точка  $x$  не лежит на границе открытого множества  $\hat{C}$ . Нетрудно видеть, что в этом случае, в силу невырожденности  $C$ , через  $x$  можно провести гиперплоскость, пересекающую конус  $C$  по ограниченному множеству – многограннику размерности  $m - 1$ . Тогда равенство  $\Phi(x) = \mathbf{1}_C(x)$  есть утверждение классического результата – формулы Брианшона-Грама для этого многогранника (см. [102]).

б) Если же точка  $x$  лежит на границе множества  $\hat{C}$ , то обозначим  $y$  точку, симметричную  $x$  относительно вершины конуса. Точка  $x$  принадлежит  $C_\Gamma$  тогда и только тогда, когда  $y \in \Gamma$ . Таким образом,  $\mathbf{1}_{C_\Gamma}(x) = \mathbf{1}_{C_\Gamma}(y)$  и случай сводится к предыдущему. (Случай вершины нетрудно рассмотреть отдельно.)

□

Т.к. конус  $D$  не пересекает множество  $\hat{C}$ , из леммы выводим:

$$\mathbf{1}_C = \mathbf{1}_D \mathbf{1}_C = \mathbf{1}_D \sum_{\dim \Gamma > 0} (-1)^{\dim \Gamma + 1} \mathbf{1}_{C_\Gamma} = \sum_{\dim \Gamma > 0} (-1)^{\dim \Gamma + 1} \mathbf{1}_{C_\Gamma \cap D}.$$

Откуда сразу следует

$$S(C) = \sum_{\dim \Gamma > 0} (-1)^{\dim \Gamma + 1} S(C_\Gamma \cap D)$$

и, в свою очередь, утверждение теоремы.

□

Для нас наибольшее значение будет иметь частный случай, в котором  $D$  является полупространством. Ясно, что в этом случае при  $\dim \Gamma > 1$  конус  $C_\Gamma \cap D$  вырожденный и  $\sigma(C_\Gamma \cap D) = 0$ . Более того, если  $u$  – ребро, содержащееся в граничной гиперплоскости  $D$ , то  $C_u \subset D$  и, опять же,  $\sigma(C_u) = 0$ .

**Теорема 13.** Пусть дан рациональный конус  $C$ , для его ребер определены конусы  $C_u$ . Пусть  $\beta$  – гиперплоскость, содержащая вершину  $C$ , но не содержащая внутренних его точек, а  $D$  – полупространство, ограниченное  $\beta$ , и содержащее  $C$ . Тогда

$$\sigma(C) = \sum_{u \notin \beta} \sigma(C_u \cap D).$$

### 1.4.3 Многогранник $\Pi$ .

В счетномерном пространстве последовательностей вещественных чисел с конечным носителем рассмотрим множество последовательностей, все члены которых неотрицательны, а также удовлетворяют условиям  $A$  и  $B$  из введения. Это и есть многогранник  $\Pi$ , упомянутый во введении. В этой части мы сформулируем основные свойства многогранника  $\Pi$  и затем покажем, в каком смысле в нем применима теорема Бриона.

Сперва, однако, поясним, каким образом точкам пространства последовательностей будут сопоставляться мономы (формальные экспоненты точек), а конусам – рациональные функции.

Как и в конечномерном случае, для точки  $x = (x_i)$  счетномерного пространства можно рассмотреть ее экспоненту – моном  $\exp x$  от счетного набора переменных  $\{t_i\}$ , занумерованных тем же образом, что и члены последовательности  $x$ . Применим теперь к моному подстановку  $t_{j(n-1)+r} = z_r q^j$  для всех целых  $j \geq 0$  и  $1 \leq r \leq n-1$  и обозначим результат  $\exp^* x$ . Смысл такой подстановки следующий: введя в пространстве характеров алгебры  $\hat{L}$  обозначения  $\exp \gamma_i = z_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) и  $\exp(-\delta) = q$ , для монома  $p \in \mathcal{U}(P)$  имеем  $\text{char } p = \exp^* x(p)$ . Этот факт позволяет отождествлять ряды Лорана от переменных  $z_1, \dots, z_{n-1}, q$  с соответствующими характерами.

Таким образом,  $S^*(\Pi) = \text{char } S$ , где  $S^*(\Sigma)$  – сумма экспонент  $\exp^*$  целых точек множества  $\Sigma$ . (Ясно, что ряд  $S^*(\Pi)$  определен корректно.)

Далее, пусть  $C$  – конечномерный конус в рассматриваемом счетномерном пространстве. Для некоторого целого  $m > 0$  он содержится в пространстве  $\{(x_i) | x_i = 0 \text{ при } i > m\}$ . Тогда определена рациональная функция  $\sigma(C)$  от переменных  $\{t_i, 1 \leq i \leq m\}$ , не зависящая от выбора  $m$ . Если к  $\sigma(C)$  применима заданная выше подстановка, обозначим результат  $\sigma^*(C)$ .

Перейдем к описанию структуры многогранника  $\Pi$ .

Гипергранями  $\Pi$  будем называть его пересечения с гиперплоскостями, задаваемыми условиями  $A$  и  $B$  и условиями  $x_i = 0$ . Введем обозначения для гиперграней многогранника: для  $i > 0$  грань  $\Pi \cap \{x | \psi_i(x) = b_i\}$  обозначим  $\Gamma_i$ , а грань  $\Pi \cap \{(x_i) | x_i = 0\}$  обозначим  $\Delta_i$ . (Так же мы будем обозначать сами гиперплоскости, содержащие грани, и, кроме того, грани других политопов (вершинных конусов), задаваемые теми же гиперплоскостями. Что именно имеется в виду, будет ясно из контекста.)

Существенно, что определенные множества действительно являются гипергранями  $\Pi$  (т.е. имеет аффинную оболочку коразмерности 1) тогда и только тогда, когда



все числа  $a_i$  – ненулевые. В этом предположении мы и будем работать в этой и следующей части, после чего будет рассмотрен случай веса с нулевой координатой.

Под вершинами  $\Pi$  мы, по аналогии с конечномерным случаем, будем понимать его точки, принадлежащие максимальному по включению подмножеству гиперграней с непустым пересечением. Сформулируем основные свойства вершин.

**Утверждение 8.**

(а) Вершина принадлежит одновременно и  $\Gamma_i$  и  $\Delta_i$ , тогда и только тогда, когда она одновременно принадлежит и  $\Gamma_{i-1}$  и  $\Delta_{i-n}$ . (В частности,  $i > n$ .)

(б) Вершинами являются те и только те точки, которые для каждого  $i$  принадлежат хотя бы одной из граней  $\Gamma_i$  и  $\Delta_i$ .

(в) Пусть задан набор граней, для каждого  $i$  содержащий  $\Gamma_i$  или  $\Delta_i$ , и при этом содержащий и  $\Gamma_i$  и  $\Delta_i$  тогда и только тогда, когда он содержит и  $\Gamma_{i-1}$  и  $\Delta_{i-n}$ . Пусть, сверх того, граней вида  $\Gamma_i$  в наборе конечное число. Тогда грани набора имеют единственную общую точку, являющуюся вершиной  $\Pi$ .

*Доказательство.*

(а) Если  $u \in \Gamma_i \cap \Delta_i$ , то  $\psi_{i-1}(u) = \psi(u) + u_{i-n} = b_i + u_{i-n}$ . Из  $b_{i-1} \leq b_i$  выводим  $u_{i-n} = 0$  (т.е.  $u \in \Delta_{i-n}$ ) и  $\psi_{i-1}(u) = b_{i-1}$  (т.е.  $u \in \Gamma_{i-1}$ ).

(б) Пусть  $u = (u_i)$  вершина,  $u \notin \Gamma_l$ ,  $u \notin \Delta_l$ . Из пункта (а) видно, что существует точка  $\Pi$ , принадлежащая всем граням, содержащим  $u$ , и, кроме того, грани  $\Delta_l$ . Обратное утверждение следует из того, что у набора гиперплоскостей, для каждого  $i$  содержащего  $\Gamma_i$  или  $\Delta_i$ , не более одной общей точки.

(в) Пусть  $A$  – такой набор,  $B \subset A$  содержит ровно одну из граней  $\Gamma_i$  и  $\Delta_i$  для каждого  $i$ . У граней из  $B$  есть ровно одна общая точка, обозначим ее  $u = (u_i)$ . Индукцией по  $i$  легко показывается, что  $X_i \in A \Rightarrow u \in X_i$ , для всех  $i > 0$  и  $X \in \{\Gamma, \Delta\}$ . □

Ребрами  $\Pi$  мы будем называть его подмножества, состоящие из более чем одной точки, содержащиеся в максимальном по включению наборе граней. Каждое ребро представляет из себя отрезок, концы которого – вершины  $\Pi$ . Рассмотрим вершину  $u$  и содержащее ее ребро  $e$ . Для такой пары определим направляющий вектор как минимальный ненулевой целочисленный вектор  $\varepsilon$  такой, что  $u + \varepsilon \in e$ .

**Утверждение 9.** В введенных обозначениях верны следующие свойства.

(а) Ребро одновременно содержится и в  $\Gamma_i$  и в  $\Delta_i$ , тогда и только тогда, когда она одновременно содержится и в  $\Gamma_{i-1}$  и в  $\Delta_{i-n}$ .

(б) Ребро  $e$  содержится хотя бы в одной из граней  $\Gamma_i$  и  $\Delta_i$  для всех  $i$  кроме одного.

(в) Моном  $\text{exp}^* \varepsilon$  есть  $\text{exp} \alpha$  для некоторого корня  $\alpha$  алгебры  $\hat{L}$ .

*Доказательство.*

(а) Это напрямую следует из 8(б) и того, что ребро – отрезок, соединяющий пару вершин.

(б) Пусть  $l < m$  – два минимальных таких числа, что  $e$  не содержится ни в одной из граней  $\Gamma_l, \Delta_l, \Gamma_m, \Delta_m$ . Пусть вершина  $u_1$  – второй конец  $e$ . Ясно, что  $u_1$  принадлежит только одной из граней  $\Gamma_m$  и  $\Delta_m$ , обозначим эту грань  $X$ . Ясно, что есть отличная от  $u$  точка  $\Pi$ , принадлежащая всем граням, содержащим  $e$ , и еще грани  $X$ , что противоречит свойству максимальности.

(в) Из пунктов (а) и (б) следует такое общее описание вектора  $\varepsilon$ . Во-первых, все его координаты есть 0 или  $\pm 1$ , причем ненулевые координаты поочередно равны 1 и  $-1$ . Пусть теперь  $i_1, \dots, i_s$  – номера ненулевых координат, тогда

$$i_3 - i_2 = i_5 - i_4 = \dots = n - 1.$$

Таким образом,  $\exp^* \varepsilon$  в случае четного  $s$  есть  $\exp(\pm(\gamma_{i_1} - \gamma_{i_s}))q^{\pm(s-2)/2}$ , а в случае нечетного –  $\exp(\pm\gamma_{i_1})q^{\pm(s-1)/2}$ . И то и другое есть экспонента некоторого корня.  $\square$

Для вершины  $u$  можно, опять же, рассмотреть вершинный конус  $C_u$  при ней. Он есть множество точек вида

$$u + \sum_i \alpha_i \varepsilon_i,$$

где  $\{\varepsilon_i\}$  – множество направляющих векторов ребер, содержащих  $u$ , а все  $\alpha_i \geq 0$ . Введем обозначения. Во-первых, пусть для вершины  $u$  число  $m_u$  – номер последней ее ненулевой координаты, а  $l_u$  – максимальное число, для которого  $u \in \Gamma_{l_u}$ . Во-вторых, для  $m \geq m_u$  обозначим  $C_u^m$  сечение конуса  $C_u$  конечномерным пространством  $\{(x_i) | x_i = 0 \text{ при } i > m\}$  – конечномерный конус с вершиной  $u$ .

Нам будет полезен следующий факт.

**Утверждение 10.** *Все функции  $\sigma(C_u^m)$  представляются в виде произведения  $\exp^* u$  и дроби, числитель и знаменатель которой есть многочлены Лорана, все мономы в которых содержат  $q$  в неотрицательной степени. При этом знаменатель есть произведение сомножителей вида  $1 - \exp \alpha$  с  $\alpha$  – корнем алгебры  $\hat{L}$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим триангуляцию конуса  $C_u^m$  и выпишем соответствующую формулу включений и исключений. Она есть сумма слагаемых вида

$$\pm \frac{\exp x}{\prod_{\varepsilon \in E} (1 - \exp \varepsilon)},$$

где  $E$  – линейно независимое подмножество направляющих векторов ребер конуса  $C_u^m$ , а  $x$  – целая точка фундаментального параллелепипеда, т.е. вида  $u + \sum_{\varepsilon \in E} \alpha_\varepsilon \varepsilon$ , все  $\alpha_\varepsilon$  принадлежат  $[0,1)$ .

Пусть, сверх того,  $F \subset E$  – подмножество таких  $\varepsilon$ , что  $\exp^* \varepsilon$  содержит  $q$  в отрицательной степени. Ясно, что степень вхождения  $q$  в  $\exp^* x$  не меньше, чем в

$$\prod_{\varepsilon \in F} \exp^* \varepsilon.$$

Тем самым, при домножении числителя и знаменателя на произведение (1.4.3) рассматриваемое слагаемое примет нужный вид (мы пользуемся предложением 9(в) и тем, что ребра конуса  $C_u^i$  есть в точности содержащиеся в нем ребра  $C_u$ ).  $\square$

Далее, рассмотрим в кольце  $\mathbb{C}(z_1^{\pm 1}, \dots, z_{n-1}^{\pm 1}, q^{\pm 1})$  подкольцо  $T$  функций, которые представляются в виде отношения двух многочленов Лорана таким образом, чтобы в знаменателе стояло произведение сомножителей вида  $1 - \exp \alpha$ , где  $\alpha$  – корень алгебры  $\hat{L}$ . Все функции  $\sigma^*(C_u^i)$  лежат в  $T$ . Пусть теперь  $R$  – кольцо характеров (рядов Лорана), носитель которых содержится в объединении конечного числа нижних множеств частично упорядоченного множества весов (см. [103]). Кольцо  $T$  вкладывается в  $R$ , т.к. каждый сомножитель вида  $1 - \exp \alpha$  – обратимый элемент  $R$ . Обозначим характер, являющийся образом  $\sigma^*(C_u^i)$  при этом вложении,  $\tau_u^i$ .

Теперь заметим, что для  $i \geq l_u$  справедливо

$$\sigma^*(C_u^{i+1}) = \frac{\sigma^*(C_u^i)}{1 - \exp \gamma_{i+1}},$$

и, следовательно, в  $R$  имеем  $\tau_u^{i+1}(1 - \exp \gamma_{i+1}) = \tau_u^i$ . Однако, при  $i \rightarrow \infty$  степень вхождения  $q$  в моном  $\exp \gamma_{i+1}$  неограниченно растет, и, следовательно, коэффициенты рядов  $\tau_u^i$  стабилизируются. Это позволяет определить предельный ряд  $\tau_u$ .

Мы, наконец, готовы доказать следующий аналог теоремы Бриона для многогранника  $\Pi$ .

**Теорема 14.** *В  $R$  имеет место тождество*

$$S^*(\Pi) = \sum_{u \text{ вершина } \Pi} \tau_u.$$

*Доказательство.* Пусть  $\Pi_m$  – сечение многогранника  $\Pi$  пространством  $\{(x_i) | x_i = 0 \text{ при } i > m\}$ . Вершины многогранника  $\Pi_m$  есть в точности вершины  $\Pi$  с  $m_u \leq m$ . Таким образом, из теоремы Бриона выводим

$$S^*(\Pi_m) = \sum_{\substack{u \text{ вершина } \Pi \\ m_u \leq m}} \sigma^*(C_u^m).$$

Отсюда сразу получаем равенство в кольце  $R$ :

$$S^*(\Pi_m) = \sum_{u \text{ вершина } \Pi} \tau_u^m.$$

(Мы полагаем  $\tau_u^m = 0$  при  $m < m_u$ .)

Очевидно, коэффициенты рядов в левой части (1.4.3) стабилизируются на коэффициенты  $S^*(\Pi)$  при  $m \rightarrow \infty$ . Кроме того, коэффициенты  $\tau_u^m$  по определению стабилизируются на коэффициенты  $\tau_u$ . Однако из предложения 10 следует, что степень вхождения  $q$  во все мономы рядов  $\tau_u^m$  и  $\tau_u$  не меньше  $\frac{m_u-1}{n-1}$ . Это означает, что для каждого монома коэффициент при нем в правой части (1.4.3) такой же как в правой части (1.4.3) при достаточно больших  $m$ , т.к. есть лишь конечное число таких  $u$ , что соответствующий коэффициент в  $\tau_u^m$  или  $\tau_u$  может быть ненулевым. Отсюда и получаем в пределе равенство (14).  $\square$

Для вычисления  $\text{char } S$  остается вычислить вклады вершин  $\tau_u$ .

#### 1.4.4 Вычисление вкладов вершин.

Вершины разбиваются на простые и непростые в соответствии с тем, являются ли направляющие векторы ребер вершинного конуса линейно независимыми (т.е. является ли вершинный конус симплицальным). Ясно, что вершина простая тогда и только тогда, когда она для каждого  $i$  принадлежит ровно одной из граней  $\Gamma_i$  и  $\Delta_i$ . Вычисление  $S^*(\Pi)$  посредством теоремы 14 возможно благодаря следующему ключевому утверждению.

**Теорема 15.** *Для непростой вершины  $u$  имеем  $\tau_u = 0$ .*

*Доказательство.* Нам удобны будут следующие два обозначения. Во-первых, для множества  $X$  гиперграней  $\Pi$  обозначим  $X'$  множество граней, полученное из  $X$  заменой каждого  $\Gamma_i$  на  $\Gamma_{i-1}$ , а  $\Delta_i$  на  $\Delta_{i-1}$ . (Вхождение  $\Gamma_1$  и  $\Delta_1$  в  $X$  не влияет на  $X'$ .) Кроме того обозначим  $\xi$  операцию "сдвига" – замену  $z_1$  на  $z_2$ ,  $z_2$  на  $z_3$ , ...,  $z_{n-1}$  на  $z_1q$ . Эту замену можно рассматривать как действие  $\xi \in W$  из введения на характерах. Перейдем к доказательству.

Достаточно показать, что  $\sigma^*(C_u^{l_u}) = 0$ . Для этого воспользуемся индукцией по параметру  $l_u$ .

Применим теорему 13 к конусу  $C_u^{l_u}$  и гиперплоскости  $\beta$  вида  $x_1 = \text{const}$ , содержащей  $u$ . Эта гиперплоскость есть либо  $\Gamma_1$ , либо  $\Delta_1$  и является гипергранью конуса. Обозначим множество направляющих векторов ребер конуса  $C_u^{l_u}$ , не лежащих в  $\beta$  (т.е. имеющих ненулевую первую координату),  $\{\varepsilon_j\}$ . Для каждого  $\varepsilon_j$  обозначим  $C_j$  конус, фигурирующий в теореме 13. Теорема показывает, что

$$\sigma^*(C_u^{l_u}) = \sum_j \sigma^*(C_j).$$

Мы утверждаем, что из предположения индукции следует, что, если конус  $C_j$  – не симплицальный, то  $\sigma^*(C_j) = 0$ . В самом деле, рассмотрим конус  $D_j = C_j \cap \beta$ . Т.к.

у  $C_j$  всего одно ребро не лежит в  $\beta$  (ребро с направляющим вектором  $\varepsilon_j$ ), достаточно показать, что  $\sigma^*(D_j) = 0$ .

Для этого рассмотрим множество  $X$  гиперграней, содержащих ребро, заданное  $\varepsilon_j$ . Из предложения 9(а) и предложения 8(в) видно, что множество  $X'$  есть в точности множество граней конуса  $C_{u'}^{l_{u'}}$  для некоторой вершины  $u'$ , причем  $l_{u'} = l_u - 1$ . Однако ясно, что

$$\exp^*(-u)\sigma^*(D_j) = \xi \left( \exp^*(-u')\sigma^*(C_{u'}^{l_{u'}}) \right).$$

Но конусы  $D_j$  и, следовательно,  $C_{u'}^{l_{u'}}$  непростые, и по предположению индукции  $\sigma^*(C_{u'}^{l_{u'}}) = 0$ .

Осталось показать, что сумма  $\sigma^*(C_j)$  по симплицальным  $C_j$  также обращается в 0, откуда, в частности, последует база индукции. Рассмотрим такое  $C_j$ . В введенном выше множестве  $X'$  содержится ровно одна из граней  $\Gamma_i$  и  $\Delta_i$  для каждого  $1 \leq i \leq l_u - 1$ . Из предложений 8 и 9 нетрудно вывести, что такое возможно лишь в том случае, если множество  $I$  индексов  $i$  таких, что  $u \in \Gamma_i \cap \Delta_i$  имеет следующий вид. Оно есть

$$[l_1, r_1] \cup \dots \cup [l_s, r_s],$$

где  $l_1 = n + 1$  и  $l_{c+1} - r_c = n$  для всех  $c < s$ . При этом множество  $X$  устроено так: оно содержит грани  $\Gamma_{r_c}$  для всех  $c < s$ , одну (произвольную) грань из  $\Gamma_{r_s}$  и  $\Delta_{r_s}$ , а для всех остальных  $i \in I$  оно содержит  $\Delta_i$ .

Таким образом, если симплицальные  $C_j$  наличествуют, то их ровно два:  $C_{j_1}$  и  $C_{j_2}$ . Покажем, что  $\sigma^*(C_{j_1}) + \sigma^*(C_{j_2}) = 0$ . Обозначим  $U$  множество граней, содержащих  $u$ . Теперь, опять же, прибегнем к индукции по  $l_u$ ; для этого рассмотрим случаи.

а) Число  $r_1 - n + 1$  (номер первой ненулевой координаты  $u$ ) больше 2. В этом случае рассмотрим вершину  $u'$ , множество граней содержащих которую есть  $U' \setminus \{\Delta_n\}$ . Для нее определены аналогичные конусы  $C'_1$  и  $C'_2$ . При этом явное вычисление показывает, что

$$\frac{\sigma^*(C_{j_1})}{\xi(\sigma^*(C'_1))} = \frac{\sigma^*(C_{j_2})}{\xi(\sigma^*(C'_2))},$$

что, в силу предположения  $\sigma^*(C'_1) = \sigma^*(C'_2)$  дает требуемое.

б)  $r_1 = n + 1$ , но  $s > 1$ . Тогда, аналогично, воспользуемся предположением индукции для вершины  $u'$ , множество граней содержащих которую есть  $U^{(n)} \setminus \{\Gamma_1\}$  (здесь  $(n)$  –  $n$ -кратное применения операции  $'$ ).

в)  $r_1 = n + 1$  и  $s = 1$ . Этот случай – база индукции, для него нужное равенство проверяется непосредственно.

□

Перейдем к описанию простых вершин. Простая вершина  $u$  для каждого  $i$  принадлежит ровно одной из граней  $\Gamma_i$  и  $\Delta_i$ . Соответственно, для каждого  $i$  конус  $C_u$  имеет

ровно одно ребро с направляющим вектором  $\varepsilon_i$ , первая ненулевая координата которого имеет номер  $i$ . При этом можно выписать равенство

$$\tau_u = \frac{\exp^* u}{(1 - \exp^* \varepsilon_1)(1 - \exp^* \varepsilon_2) \dots}$$

Теперь заметим, что, согласно предложению 8, если простая вершина принадлежит  $\Delta_i$  (а, значит, не принадлежит  $\Gamma_i$ ), то она принадлежит и  $\Delta_{i+n-1}$  и не принадлежит  $\Gamma_{i+n-1}$ . Таким образом, простые вершины находятся во взаимно однозначном соответствии с хорошими последовательностями нулей и единиц из введения. Обозначим  $u_y$  вершину, соответствующую последовательности  $y$ . Покажем, что таким образом нами доказана теорема 10, точнее говоря, имеет место

**Утверждение 11.** *Для каждой хорошей последовательности  $y$  верно  $\tau_{u_y} = \exp(w_y \lambda - \lambda) F_y$ .*

*Доказательство.* Достаточно доказать равенство  $\exp^* u_y = \exp(w_y \lambda - \lambda)$  и проверить, что выражения  $\exp^*(-u_y) \tau_{u_y}$  удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению (1.4.1). Из (1.4.4) нетрудно видеть, что для последней проверки достаточно доказать равенство  $\exp^* \varepsilon_1 = \exp(w_y \gamma_1)$ .

Оба нужных равенства легко проверяются прямым вычислением при помощи индукции по параметру  $m_{u_y}$  – номеру последней единицы в последовательности  $y$ .  $\square$

Таким образом, полностью разобран случай веса  $\lambda$ , для которого все числа  $a_i$  ненулевые. Как и было обещано, объясним, каким образом оставшийся случай сводится к разобранному.

#### 1.4.5 Случай веса с нулевой координатой.

В рамках этой части нам удобно будет соглашение  $a_n = a_0$ .

Отличие этого случая состоит в том, что, если  $a_i = 0$ , то вершина  $\Pi$  может содержаться одновременно и в  $\Gamma_i$  и  $\Delta_i$ , хотя  $i \leq n$ . Отметим, что множества  $\Gamma_i$  и  $\Delta_i$  формально определяются так же (как пересечение  $\Pi$  с гиперплоскостью), однако могут не быть уже попарно различными и иметь коразмерность больше одного. Тем не менее, содержание части 1.4.3 с минимальными изменениями переносится на этот случай. В частности, для каждой вершины  $u$  аналогично определяется  $\tau_u$  и доказывается полный аналог теоремы 14.

Однако простая ситуация, описанная в части 1.4.4 в этом случае места не имеет. У  $\Pi$  появляются непростые вершины с ненулевыми вкладами. Чтобы свести случай к общему, сделаем следующее замечание.

Рассмотрим произвольный вес  $\lambda_1$ , не имеющий нулевых координат, т.е. относящийся к рассмотренному выше случаю. Пусть  $\Pi_1$  – соответствующий многогранник.

Предложение 8 показывает, что для любой его вершины, набор  $\omega$  содержащих ее гиперграней удовлетворяет трем условиям.

- а) Для каждого  $i > 0$  набор  $\omega$  содержит хотя бы одну из граней  $\Gamma_i$  и  $\Delta_i$ .
- б)  $\omega$  содержит лишь конечное число граней типа  $\Gamma$ .
- в) Для каждого  $i > 0$  набор  $\omega$  содержит и  $\Gamma_i$  и  $\Delta_i$  тогда и только тогда, когда он содержит и  $\Gamma_{i-1}$  и  $\Delta_{i-1}$ .

(Речь, естественно, идет о гранях многогранника  $\Pi_1$ .) Более того, ясно, что каждый набор граней, удовлетворяющий этим трем условиям есть в точности множество граней, содержащих некоторую вершину  $\Pi_1$ .

Обозначим теперь  $\Omega$  множество наборов символов  $\Gamma_i$  и  $\Delta_i$ , удовлетворяющих этим трем условиям. Такие наборы находятся во взаимно однозначном соответствии с вершинами многогранника  $\Pi_1$ , заданного произвольным весом без нулевых координат. Пусть  $u_1$  – вершина  $\Pi_1$ , а  $\tau_{u_1}$  – соответствующий вклад в  $S(\Pi_1)$ . Пусть  $\omega \in \Omega$  соответствует  $u_1$ . Тогда корректно определено

$$\tau_\omega = \exp^*(-u_1)\tau_{u_1}.$$

Перейдем теперь к весу  $\lambda$ . Здесь необходимо добавить четвертое условие.

- г) Если  $a_i = 0$ , то  $\omega$  содержит и  $\Gamma_i$  и  $\Delta_i$  тогда и только тогда, когда он содержит и  $\Gamma_{i-1}$  или  $i = 1$ .

Аналогично предложению 8 показывается, что множество наборов символов, удовлетворяющих условиям (1)-(4) находится во взаимно однозначном соответствии с множеством вершин  $\Pi$ . Обозначим множество таких наборов  $\Omega_{A_\lambda}$ , где  $A_\lambda$  есть множество таких  $i$ , что  $a_i = 0$ . Для  $\omega \in \Omega_{A_\lambda}$  опять же определяется

$$\tau_\omega = \exp^*(-u)\tau_u,$$

где  $u$  – вершина  $\Pi$ , соответствующая  $\omega$ .

Теперь аналогично определим  $\Omega_A$  для любого  $A \subset [1, n]$  (в частности  $\Omega = \Omega_\emptyset$ ) и характер  $\tau_\omega$  для каждого  $\omega \in \Omega_A$ . Мы пользуемся тем, что набор  $\Omega_A$  зависит лишь от набора индексов  $A$ , а не от конкретного веса, и тем, что конусы при вершинах, соответствующих одному  $\omega$ , получаются друг из друга сдвигом. Если даны два набора индексов  $A \subset B \subset [1, n]$ , то для каждого  $\omega_A \in \Omega_A$  существует и единственный набор  $\omega_B \in \Omega_B$  такой, что  $\omega_A \subset \omega_B$ . Это ясно из того, что набор  $\omega_A$  можно единственным образом дополнить так, чтобы новое, отвечающее  $B$ , условие (4) выполнялось. Более того, нетрудно видеть, что каждый  $\omega_B \in \Omega_B$  соответствует таким образом некоторому  $\omega_A \in \Omega_A$ . Имеем сюръективное отображение

$$\varphi_{A,B} : \Omega_A \rightarrow \Omega_B.$$

В силу теоремы 14 для  $\lambda$  и теоремы 10 для веса  $\lambda_1$ , теорема 10 для  $\lambda$  сводится к следующему утверждению.

**Теорема 16.** *Обозначим  $A = \{i_1, \dots, i_s\}$ . Для каждого  $\omega \in \Omega_{A_\lambda}$  имеем*

$$\tau_\omega = \sum_{\omega' \in \varphi_{\emptyset, A_\lambda}^{-1}(\omega)} \tau_{\omega'}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим набор  $A = \{i_1 < \dots < i_s\}$  и  $B = A \cup \{i_{s+1}\}$  с  $i_{s+1} > i_s$ . Достаточно индукцией по  $s$  показать, что для любого  $\omega_B \in \Omega_B$  справедливо

$$\tau_{\omega_B} = \sum_{\omega_A \in \varphi_{A, B}^{-1}(\omega_B)} \tau_{\omega_A}.$$

Рассмотрим вес  $\lambda_B$ , с набором нулевых координат  $B$  и, соответственно, многогранник  $\Pi_B$ . Пусть  $u_B$  – вершина  $\Pi_B$ , отвечающая набору  $\omega_B$ . Если  $u_B \notin \Gamma_{i_{s+1}-1}$  (границы  $\Pi_B$ ), то  $\Gamma_{i_{s+1}-1} \not\subset \omega_B$  и  $\omega_B \in \Omega_A$ , т.е.  $\varphi_{A, B}^{-1}(\omega_B) = \{\omega_B\}$ .

Если же  $u_B \in \Gamma_{i_{s+1}-1}$ , то отметим, что  $\{\Gamma_i, \Delta_i\} \subset \omega_B$ , и применим конусу  $C_{u_B}$  и гиперплоскости  $\Gamma_{i_{s+1}-1}$  теорему 13. Точнее говоря, поскольку в рассматривается конечномерный случай, ее следует применять к конечномерному сечению конуса  $C_{u_B}^m$  с  $m > l_{u_B}$  и соответствующей гиперплоскости. Из нижеследующего рассуждения видно, что получаемое таким образом равенство отличается от (??) домножением обеих частей на один и тот же множитель

$$\prod_{i > m} (1 - \exp \gamma_i)^{-1}.$$

В самом деле, нетрудно видеть, что, если ребро конуса  $C_{u_B}^m$  не лежит в  $\Gamma_{i_{s+1}-1}$ , то оно не лежит хотя бы в одном из  $\Gamma_i, \Delta_i$ , а, значит, набор содержащих это ребро граней, объединенный с  $\{\Gamma_{i_{s+1}-1}\}$ , имеет вид  $\omega_A \in \varphi_{A, B}^{-1}(\omega_B)$ , и соответствующее слагаемое есть  $\exp^*(u_B) \tau_{\omega_A}$ . Верно и обратное: произвольный набор  $\omega_A \in \varphi_{A, B}^{-1}(\omega_B)$  содержит  $\Gamma_{i_{s+1}-1}$  и соответствует ребру конуса.

Заметим, что это рассуждение не покрывает случай  $s = 0$  и  $i_1 = 1$ . Однако он сводится к случаю  $s = 0$  и  $i_1 = n$ :  $\Omega_{\{1\}}$  получается из  $\Omega_{\{n\}}$  заменой каждого набора  $\omega$  на набор

$$\{\Gamma_1, \Delta_1\} \cup \{\Gamma_{i+1} | \Gamma_i \in \omega\} \cup \{\Delta_{i+1} | \Delta_i \in \omega\}.$$

□



## 1.5 Излучение Хокинга и секулярно растущие петлевые вклады

В этой работе мы рассматриваем сферически-симметричную, массивную, тонкую оболочку, которая находится на фиксированном радиусе  $r = R_0$  (мы предположим, что действуют какие-нибудь дополнительные силы). В момент времени  $t = 0$  дополнительные силы исчезают и оболочка свободно падает (происходит гравитационный коллапс). Из-за сферической симметрии, по теореме Бирхгофа, геометрия описывается при помощи метрики Шварцшильда снаружи и плоской внутри оболочки:

$$ds^2 = \begin{cases} dt_-^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2, & r \leq R(t) \\ \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 d\Omega^2, & r \geq R(t) \end{cases}, \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2,$$

где  $R(t)$  - радиус оболочки, которая до коллапса была равно  $R(t \leq 0) = R_0$ ;  $r_g/2$  - есть ADM масса оболочки и  $t$  ( $t_-$ ) - временная координата снаружи (внутри) оболочки. Мы предположим что  $R_0 > r_g$  и, до старта коллапса, оболочка близка к радиусу Шварцшильда, т.е.  $|R_0 - r_g| \ll r_g$ .

На этом гравитационном поле мы будем изучать теорию скалярного поля с  $\phi^4$ -взаимодействием:

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \left[ (\partial_\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right].$$

На протяжении всей статьи будем считать что теория свободная  $\lambda = 0$ . Варьируя действие получаем уравнения движения для скалярного поля и операторов Гайзенберга.

$$\begin{cases} \left[ \partial_{t_-}^2 - \partial_r^2 + m^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] (r\phi_l) = 0, & r \leq R(t) \\ \left[ \partial_t^2 - \partial_{r^*}^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left( m^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{r_g}{r^3} \right) \right] (r\phi_l) = 0, & r \geq R(t) \end{cases},$$

И условия сшивки на оболочке

$$\phi_l [R(t) - 0] = \phi_l [R(t) + 0],$$

$$\left[ \left( \frac{\partial t}{\partial t_-} \right) \left| \frac{dR}{dt} \right| \partial_t \phi_l - \left( \frac{\partial t_-}{\partial t} \right) \partial_r \phi_l \right] = \left[ \frac{\partial_t \phi_l}{1 - \frac{r_g}{r}} \left| \frac{dR}{dt} \right| - \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) \partial_r \phi_l \right]$$

Мы повторим вычисления теплового потока используя гармоники, являющимися решением данных уравнений. В частности, мы посчитаем поток энергии на последних стадиях коллапса. Это технически проще и физически более осмысленно вычислять поток снаружи оболочки,  $r \gtrsim r_g$ , и затем продолжить на пространственную бесконечность. Таким образом, мы ищем поток в пределе  $t \rightarrow \infty$  в окрестности оболочки,  $|r - r_g| \ll r_g$ .

В окрестности оболочки можно посчитать поток следующим образом.

$$\begin{aligned} J(r \approx r_g, t) &\equiv \int_{S_2} \sin \theta d\theta d\varphi r^2 \left\langle : T^r_t(r, t) : \right\rangle \approx \\ &\approx -r_g^2 \int_{S_2} \sin \theta d\theta d\varphi \left\langle : T_{tr^*}(r, t) : \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

Или используя выражение для тензора-энергии импульса скалярного поля.

$$J(r \approx r_g, t) = \sum_l (2l + 1) (J_u^{(l)} - J_v^{(l)}), \quad (1.5.2)$$

где

$$J_u^{(l)} = r_g^2 \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \left[ \partial_u \bar{h}_{\omega,l}^*(r,t) \partial_u \bar{h}_{\omega,l}(r,t) + \text{c.c.} \right],$$

$$J_v^{(l)} = r_g^2 \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \left[ \partial_v \bar{h}_{\omega,l}^*(r,t) \partial_v \bar{h}_{\omega,l}(r,t) + \text{c.c.} \right].$$

В уравнении (1.5.1), нормальное упорядочение понимается в обычном смысле при наличии внешних полей. В частности, мы понимаем под  $\langle : T_\nu^\mu : \rangle$  как вычитание из  $\langle T_\nu^\mu \rangle$  того же самого выражения только вычисленного в случае покоящейся оболочки на радиусе  $r = R_0$ . В этом случае, так как гармоники вблизи покоящейся оболочки являются просто плоскими волнами по  $u$  и  $v$  из уравнения (1.5.2) следует что поток отсутствует.

Для того чтобы найти поток из-за коллапсирующей оболочки мы подставляем гармоники которые являются решениями уравнений движения в бесконечном будущем.

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\omega,l}(r,t) \approx & \frac{1}{r_g} \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2}{\omega}} \cos \left[ \frac{\pi(l+1)}{2} - \omega_- r_g \right] e^{i\omega r_g} e^{-\frac{u-u_0}{2r_g}} \\ & + \frac{1}{r_g} \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{i^{l+1}}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega v + i\omega [R_0^* - R_0(1-r_g/R_0)^{-1/2}]} \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

где  $u_0 = r_g \log(R_0/r_g) - r_g$ . Мы просто подставляем полученные гармоники (1.5.3) в уравнение для потока (1.5.2) и вычисляем интегралы. Однако, чтобы связать это вычисление с Хокиновским и для удобства мы переразложим выражение в правой части уравнения (1.5.3) в терминах плоских гармоник. Так как  $v$ -зависимая часть не меняется, мы должны переразложить только  $u$ -зависимую часть:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2}{\omega}} \cos \left[ \frac{\pi(l+1)}{2} - \omega_- r_g \right] e^{i\omega r_g} e^{-\frac{u-u_0}{2r_g}} = \\ \int_{|\omega'| > m} \frac{d\omega'}{2\pi \sqrt{2|\omega'|}} \alpha(\omega, \omega') e^{-i\omega' u}, \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

где  $\alpha_{\omega, \omega'} = \alpha(\omega, |\omega'|)$  и  $\beta_{\omega, \omega'} = \alpha(\omega, -|\omega'|)$  пропорциональные Боголюбовским коэффициентам полученными Хокингом для случая черной дыры.

Явная формула для  $\alpha(\omega, \omega')$  в формуле (1.5.4) верна только для моментов времени после коллапса  $t > 0$ . Есть также вклады в  $\alpha(\omega, \omega')$  которые возникают до начала коллапса. Однако данные вклады не будут давать вклад в излучение  $\delta(\omega - \omega')$ . И будем ими пренебрегать, тогда Боголюбовские коэффициенты можно вычислить явно

$$\begin{aligned} \alpha(\omega, \omega') \approx & 2 \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{|\omega'|}{\omega}} \cos \left[ \frac{\pi(l+1)}{2} - \omega_- r_g \right] \times \\ & \times \int_{u_*}^\infty du e^{i\omega r_g} e^{-\frac{u-u_0}{2r_g}} e^{i\omega' u}, \end{aligned}$$

где  $u_* = -R_0^*$ . Из-за быстрых осцилляций на нижнем пределе интегрирования при интегрировании по  $u$ , интеграл не будет зависеть сильно от  $u_*$  и мы можем интегрировать по всей числовой прямой. Тогда мы можем точно вычислить данное выражение

$$\alpha(\omega, \omega') \approx -4 r_g \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{|\omega'|}{\omega}} \times \\ \times \cos \left[ \frac{\pi(l+1)}{2} - \omega_- r_g \right] e^{i\omega' u_0} e^{\pi\omega' r_g} e^{2i\omega' r_g \log(\omega r_g)} \Gamma(-2i\omega' r_g).$$

Используя данный результат, мы вычисляем выражения для потоков  $J_v^{(l)}$  и  $J_u^{(l)}$

$$J_v^{(l)} \approx \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \omega$$

и

$$J_u^{(l)} \approx \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int_{|\omega'| > m} \frac{d\omega'}{2\pi} \int_{|\omega''| > m} \frac{d\omega''}{2\pi} \frac{\omega' \omega''}{\sqrt{|\omega' \omega''|}} \alpha(\omega, \omega') \alpha^*(\omega, \omega'') e^{-i(\omega' - \omega'') u}.$$

Интеграл по  $\omega$  в выражении для  $J_u^{(l)}$  может быть вычислен явно:

$$\int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \alpha(\omega, \omega') \alpha^*(\omega, \omega'') \approx \\ 8 r_g^2 \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{|\omega' \omega''|} e^{i(\omega' - \omega'') u_0} e^{\pi(\omega' + \omega'') r_g} \Gamma(-2i\omega' r_g) \Gamma(2i\omega'' r_g) \\ \int_{\log(m r_g)}^\infty \frac{d(\log(\omega r_g))}{2\pi} e^{2i(\omega' - \omega'') r_g \log(\omega r_g)},$$

где мы заменили  $\cos^2 \left[ \frac{\pi(l+1)}{2} - \omega_- r_g \right]$  на  $1/2$  в интеграла - остальные будут подавлены степенным образом по  $u$ . Интеграл по полубесконечной прямой вычисляем с точностью до регулярных членов

$$\int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \alpha(\omega, \omega') \alpha^*(\omega, \omega'') \approx \\ 2 r_g \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} |\omega'| e^{2\pi\omega' r_g} |\Gamma(2i\omega' r_g)|^2 \delta(\omega' - \omega'') + \text{regular term}, \\ = 2\pi \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} n(-\omega') \delta(\omega' - \omega'') + \text{regular term},$$

где

$$n(\omega) = \frac{\text{sign}(\omega)}{e^{4\pi r_g \omega} - 1}.$$

Как известно при фурье-преобразовании регулярные вклады всегда подавлены.

Подставляя (1.5) в  $J_u^{(l)}$  и используя свойство  $n(-\omega) = n(\omega) + \text{sign}(\omega)$ , мы получаем следующее выражения для потоков:

$$J_u^{(l)} \approx 2 \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \omega n(\omega) + \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\omega}{2} \right).$$

Тогда полный поток будет

$$J(r \approx r_g, t) = \sum_l (2l + 1) [J_u^{(l)} - J_v^{(l)}] \approx \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_l (2l + 1) \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \omega n(\omega).$$

Из-за того, что мы посчитали поток около горизонта мы не учли отражение от потенциала. Учет этого отражения может быть произведен при помощи так называемых грей-боди факторов,  $|T_{\omega,l}|^2$ , которые являются коэффициентами прохождения для соответствующей квантово-механической задачи,

$$J(r \rightarrow \infty, t) \approx 2 \left(1 - \frac{r_g}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_l (2l + 1) \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\omega}{e^{4\pi r_g \omega} - 1} |T_{\omega,l}|^2,$$

## 1.6 Унитарно-инвариантные эргодические матрицы и свободная вероятность

### 1.6.1 Введение

В работе [91] (см. также [92]) была дана классификация эргодических унитарно-инвариантных мер на пространстве эрмитовых матриц. Цель данной работы — исследование асимптотики спектра случайных эрмитовых матриц, распределенных по таким мерам. Помимо стремления к лучшему пониманию этих мер, мотивацией для рассматриваемой нами постановки задачи служат два обстоятельства. Во-первых, возникающая вероятностная модель является непрерывным аналогом модели, рассмотренной в [93]. Во-вторых, с точки зрения теории случайных матриц, мы получаем естественную модель для свободно безгранично делимых мер. Полученная связь между эргодическими мерами и объектами теории свободной вероятности представляется любопытной.

Пусть  $H(N) = \{h_{i,j}\}_{i,j=1}^N$  — пространство эрмитовых матриц  $N$ -ого порядка. Рассмотрим естественное вложение  $H(N) \subset H(N+1)$ , такое что  $h_{N+1,j} = h_{j,N+1} = 0$ ,  $1 \leq j \leq N+1$ . Будем обозначать символом  $H(\infty)$  индуктивный предел пространств  $H(N)$  относительно этих вложений, а символом  $H$  — проективный предел. Иначе говоря,  $H(\infty)$  — это пространство бесконечных эрмитовых матриц, в которых лишь конечное число элементов отлично от нуля, а  $H$  — пространство всех бесконечных эрмитовых матриц.

Будем обозначать символом  $\mathbf{i}$  мнимую единицу. Для произвольной борелевской вероятностной меры  $\mu$  на  $H$  определим ее *преобразование Фурье*

$$f_\mu(X) = \int_H \exp(\mathbf{i} \operatorname{tr}(XB)) d\mu(B), \quad X \in H(\infty).$$

Легко показать (см. [91, Утв. 1.1]), что любая мера на  $H$  однозначно определяется своим преобразованием Фурье, которое является положительно-определенной функцией на  $H(\infty)$ .

В этой работе мы будем называть *параметрами* набор вещественных чисел  $\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ , таких что

$$\gamma_2 \geq 0, \quad \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \dots, \quad \sum_{i \geq 1} \alpha_i^2 < \infty.$$

Обозначим все наборы параметров, удовлетворяющих этому условию, символом  $\mathcal{P}$ .

Пусть  $w \in \mathcal{P}$ . Определим функции

$$F_w(x) := \exp\left(\mathbf{i}\gamma_1 x - \frac{\gamma_2 x^2}{2}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-\mathbf{i}\alpha_k x)}{1 - \mathbf{i}\alpha_k x}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.6.1)$$

и

$$f_w(X) := \prod_{x \in \operatorname{Spec}(X)} F_w(x), \quad X \in H(\infty). \quad (1.6.2)$$

Классификационная теорема Вершика-Ольшанского (см. введение к [91]) утверждает, что все меры на  $H$ , эргодические относительно действия сопряжениями бесконечномерной унитарной группы (см. необходимые определения в введении к [91]), параметризуются множеством  $\mathcal{P}$ , и преобразование Фурье меры, соответствующей  $w \in \mathcal{P}$ , задается формулой (1.6.2).

Пусть дана последовательность параметров  $w_N \in \mathcal{P}$ . Для каждого  $w = w_N$  ограничим меру с преобразованием Фурье (1.6.2) на множество эрмитовых матриц размера  $N \times N$ . Обозначим символами  $\lambda_{1;N} \geq \dots \geq \lambda_{N;N}$  (случайные) собственные числа такой матрицы. Определим (случайную) вероятностную меру:

$$L_N^w := \frac{1}{N} \sum_{i \geq 1} \delta \left( \frac{\lambda_{i;N}}{N} \right);$$

эту меру называют *эмпирическим распределением собственных значений* случайной матрицы. Нас будет интересовать асимптотика собственных значений — меры  $L_N^w$  — при некотором условии на изменение параметров  $w_N$ .

Введем несколько обозначений, которые потребуются нам для формулировки и доказательства основных результатов. Для комплексной функции  $V(x)$ , голоморфной в  $\epsilon$ -окрестности 0, определим

$$G(x) := -iV'(-ix) = t_1 + t_2x + t_3x^2 + \dots, \quad \text{при } |x| < \epsilon, \quad x \in \mathbb{C}. \quad (1.6.3)$$

Пусть  $z$  — формальная переменная. Определим формальный степенной ряд  $C_0(z)$  с помощью формального обращения рядов (относительно суперпозиции)

$$C_0(z) := \left( \frac{z}{1 + t_1z + t_2z^2 + \dots} \right)^{(-1)}. \quad (1.6.4)$$

Пусть

$$c_k := \frac{1}{k+1} [u^k] (1 + t_1u + t_2u^2 + \dots)^{k+1}, \quad (1.6.5)$$

где под  $[u^k]A(u)$  мы понимаем коэффициент при  $u^k$  в степенном ряде  $A(u)$ . Из формулы обращения Лагранжа следует, что

$$C_0(z) = z + c_1z^2 + c_2z^3 + \dots$$

Обозначим символом  $\mu_V$  вероятностную меру на  $\mathbb{R}$ , последовательность моментов которой равна  $\{1, c_1, c_2, \dots\}$  (то есть, выполнено  $\int_{\mathbb{R}} x^k d\mu_V = c_k$ , для всех  $k \geq 0$ ). Существование и единственность этой меры будут установлены в дальнейшем.

**Теорема 17.** Пусть последовательность параметров  $w = w_N$  такова, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln F_w(x) = V(x), \quad \text{равномерная сходимость при } |x| < \epsilon.$$

Предположим также, что существует  $C \in \mathbb{R}$ , такое что для любого  $N$  все альфа-параметры из  $w$  меньше  $C$ . Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} L_N^w = \mu_V, \quad \text{в слабом смысле; по вероятности.}$$

Более подробно, для любой непрерывной ограниченной функции  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  выполнено

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \phi dL_N^w = \int_{\mathbb{R}} \phi d\mu_V, \quad \text{по вероятности.}$$

**Примечание 11.** Частные случаи этого результата кратко описаны в разделе 6.

**Примечание 12.** Формула (1.6.4) дает связь между последовательностью моментов предельной меры и функцией  $V(x)$ . Отметим, что поскольку все рассматриваемые меры будут иметь компактный носитель, то моменты полностью определяют предельную меру. Плотность предельной меры может быть определена из моментов с помощью стандартной техники преобразования Стильтьеса.

Следующая теорема описывает все возможные вероятностные меры, которые могут возникать в качестве  $\mu_V$ .

**Теорема 18.** В качестве предельной меры  $\mu_V$  из теоремы 1 могут возникать все свободно безгранично делимые меры с компактным носителем и только они.

### 1.6.2 Доказательство теоремы 1

Доказательство использует метод моментов и сводится к комбинаторному вычислению из работы [93].

Пусть  $w = w(N)$  — последовательность параметров, удовлетворяющая условию теоремы. Тогда мы можем записать характеристическую функцию  $f_w(X)$  случайной матрицы из  $H(N)$  в виде

$$f_w(X) = \exp \left( N \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{i}^k \frac{a_{k;N}}{k} \text{tr}(X^k) \right), \quad X \in H(N),$$

где коэффициенты Тейлора  $a_{k;N}$  удовлетворяют условию

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_{k;N} = t_k, \quad 1 \leq k < \infty; \quad (1.6.6)$$

(напомним, что последовательность  $t_k$  определяется через  $V(x)$  формулой (1.6.3)).

Заметим, что выполнено  $\sum_{i=1}^N \lambda_{i;N}^k = \text{tr}(X^k)$ , и что математические ожидания произведений элементов матрицы  $X$  могут быть получены с помощью дифференцирования известной нам характеристической функции  $f_w(x)$ . А именно, выполнено

$$\mathbf{E} \int_{\mathbb{R}} x^k dL_N^w = \mathbf{i}^k \mathbf{E} \frac{\text{tr}(X^k)}{N^{k+1}} = \frac{1}{N^{k+1}} \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq N} \partial_{i_1 i_2} \partial_{i_2 i_3} \dots \partial_{i_k i_1} f_w(X) \Big|_{X=0}. \quad (1.6.7)$$

Аналогично, мы имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( \int_{\mathbb{R}} x^k dL_N^w \right)^2 &= \mathbf{i}^k \mathbf{E} \left( \frac{\text{tr}(X^k)}{N^{k+1}} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{N^{k+1}} \left( \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq N} \partial_{i_1 i_2} \partial_{i_2 i_3} \dots \partial_{i_k i_1} \right)^2 f_w(X) \Big|_{X=0}. \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

Нахождение асимптотики (при  $N \rightarrow \infty$ ) выражений (1.6.7) и (1.6.8) при условии (1.6.6) является нетривиальной комбинаторной задачей. Однако, заметим, что уравнение (1.6.7) совпадает с [93, уравнение (4.4)], а уравнение (1.6.8) совпадает с [93, уравнение (4.9)]. Асимптотика этих выражений приведена в [93, предложения 4.1 и 4.2] и доказана в разделах 4.2 и 4.3 из [93]. Ключевую роль в доказательстве играет описание наборов индексов  $(i_1, \dots, i_k)$ , дающих максимально возможный вклад в выражение  $\partial_{i_1 i_2} \partial_{i_2 i_3} \dots \partial_{i_k i_1} f_w(X)|_{X=0}$ . Используя предложения 4.1 и 4.2 из [93], мы получаем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E} \int_{\mathbb{R}} x^k dL_N^w = c_k, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left( \int_{\mathbb{R}} x^k dL_N^w \right)^2 = c_k^2;$$

(напомним, что числа  $c_k$ , по определению, выражаются через  $\{t_k\}_{k \geq 1}$  согласно уравнению (1.6.5)).

Лемма 2.3 из [93] (условия которой выполнены в силу равенств выше и ограниченности рассматриваемых альфа-параметров) показывает, что мера  $\mu_V$  с моментами  $\{c_k\}_{k \geq 1}$  существует, имеет компактный носитель (следовательно, однозначно определяется своими моментами) и что мера  $L_N^w$  сходится к ней в указанном в теореме 1 смысле.

### 1.6.3 Сведения из теории свободной вероятности

Для любой вероятностной меры  $\mu$  на  $\mathbb{R}$  с компактным носителем можно определить моменты  $m_k(\mu) := \int_{\mathbb{R}} x^k d\mu(x)$  и свободные кумулянты  $\kappa_k(\mu)$ ,  $k \geq 1$ , которые связаны с моментами следующим образом (см., например, [94, Замечание 11.19]):

$$m_k(\mu) = \frac{1}{k+1} \sum_{b_1+2b_2+\dots+kb_k=k} \kappa_1^{b_1}(\mu) \kappa_2^{b_2}(\mu) \dots \kappa_k^{b_k}(\mu) \frac{(k+1)!}{b_1! b_2! \dots b_k! (k+1 - \sum b_i)!}; \quad (1.6.9)$$

отметим, что свободные кумулянты могут быть выражены через моменты с помощью обращения этой формулы.

Для двух вероятностных мер  $\mu_1$  и  $\mu_2$  можно рассмотреть операцию их свободной свертки; результатом этой свертки является вероятностная мера, которую мы будем обозначать символом  $\mu_1 \boxplus \mu_2$ . Ее можно определить с помощью условия

$$\kappa_k(\mu_1 \boxplus \mu_2) := \kappa_k(\mu_1) + \kappa_k(\mu_2), \quad k \geq 1. \quad (1.6.10)$$

Известна классификация всех безгранично делимых мер относительно операции свободной свертки. Следующая теорема была доказана Войкулеску в [95].

**Теорема 19.** *Вероятностная мера  $\nu$  с компактным носителем является свободно безгранично делимой тогда и только тогда, когда существуют число  $K_1 \in \mathbb{R}$  и конечная мера  $\mathcal{K}$  на  $\mathbb{R}$ , такие что*

$$\kappa_1(\nu) = K_1, \quad \kappa_r(\nu) = m_{r-2}(\mathcal{K}), \quad r \geq 2.$$

Нам также потребуется следующий факт, доказанный в [96]



**Теорема 20.** Пусть  $A_n$  и  $B_n$  — две последовательности эрмитовых случайных матриц размера  $n \times n$ , таких что для любого  $n$  матрицы  $A_n$  и  $B_n$  независимы. Предположим, что при  $n \rightarrow \infty$  эмпирическое распределение собственных значений матрицы  $A_n$  сходится к некоторой вероятностной мере  $\mu_A$ , а для матрицы  $B_n$  — к некоторой вероятностной мере  $\mu_B$ . Кроме того, предположим, что для любого  $n$  распределение матриц  $A_n$  и  $B_n$  унитарно инвариантно. Тогда матрицы  $A_n$  и  $B_n$  асимптотически свободны. В частности, это означает, что предельная эмпирическая мера для спектра матриц  $A_n + B_n$  является свободной сверткой мер  $\mu_A$  и  $\mu_B$ .

#### 1.6.4 Доказательство теоремы 2

**Лемма 7.** Пусть последовательность параметров  $w_N = (\gamma_{1;N}, \gamma_{2;N}, \{\alpha_{i;N}\}_{i \geq 1})$  такова, что существуют пределы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{1;N}}{N} = A_1, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{2;N} + \sum_{i \geq 1} \alpha_{i;N}^2}{N} = A_2, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i \geq 1} \alpha_{i;N}^k}{N} = A_k, \quad k \geq 3.$$

Пусть  $T \in \mathbb{N}$  — произвольное натуральное число. Тогда существуют параметры  $(\tilde{\gamma}_{1;N}, \tilde{\gamma}_{2;N}, \{\tilde{\alpha}_{i;N}\}_{i \geq 1})$ , такие что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\gamma}_{1;N}}{N} = A_1, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\gamma}_{2;N} + \sum_{i \geq 1} \tilde{\alpha}_{i;N}^2}{N} = A_2, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i \geq 1} \tilde{\alpha}_{i;N}^k}{N} = A_k, \quad k \geq 3.$$

*Доказательство.* Зададим  $\tilde{\alpha}_{i;N} := \alpha_{Ti+1;N}$ , для всех  $i \geq 1$ . Легко видеть, что

$$T(\alpha_{1;N}^k + \sum_{i \geq 1} \tilde{\alpha}_{i;N}^k) \geq \sum_{i \geq 1} \alpha_{i;N}^k \geq T \sum_{i \geq 1} \tilde{\alpha}_{i;N}^k, \quad k \geq 2.$$

Из этого следует, что выполнено

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i \geq 1} \tilde{\alpha}_{i;N}^k = \frac{A_k}{T}, \quad k \geq 3.$$

Выбирая  $\tilde{\gamma}_{1;N} = \gamma_{1;N}/T$  и  $\tilde{\gamma}_{2;N} = \gamma_{2;N}/T$ , мы получаем требуемую последовательность параметров.  $\square$

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2. Докажем сначала, что в качестве меры  $\mu_V$  из теоремы 1 может выступать только свободно безгранично делимая мера.

Пусть последовательность параметров  $w_N = (\gamma_{1;N}, \gamma_{2;N}, \{\alpha_{i;N}\}_{i \geq 1})$  удовлетворяет условию теоремы 1, и случайные матрицы, отвечающие ей, имеют предельный спектр  $\mu_V$ . Отметим, что

$$f_{w_N}(X) = \exp \left( N \left( \mathbf{i} \frac{\gamma_{1;N}}{N} \operatorname{tr}(X) + \mathbf{i}^2 \frac{\sum_{i \geq 1} \alpha_{i;N}^2 + \gamma_{2;N}}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \mathbf{i}^k \frac{\sum_{i \geq 1} \alpha_{i;N}^k}{k} \operatorname{tr}(X^k) \right) \right), \quad X \in H(N),$$

Из условий теоремы 1 следует, что существуют пределы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{1;N}}{N} = t_1, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{2;N} + \sum_{i \geq 1} \alpha_{i;N}^2}{N} = t_2, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i \geq 1} \alpha_{i;N}^k}{N} = t_k, \quad k \geq 3.$$

Заметим, что последовательности  $\{c_k\}$  и  $\{t_k\}$  связаны точно так же, как моменты и свободные кумулянты меры (см. уравнения (1.6.5) и (1.6.9)). Поскольку  $\{c_k\}$  — это моменты меры  $\mu_V$ , мы получаем, что выполнено равенство  $t_k = \kappa_k(\mu_V)$ , для любого  $k \geq 1$ . Нам нужно доказать существование меры  $\mu_V^{1/T}$ ,  $T \in \mathbb{N}$ , относительно свободной свертки; эта мера должна удовлетворять условию

$$\underbrace{\mu_V^{1/T} \boxplus \mu_V^{1/T} \boxplus \dots \boxplus \mu_V^{1/T}}_{T-1 \text{ свертка}} = \mu_V.$$

Из уравнения (1.6.10) и теоремы 4 следует, что для этого достаточно найти последовательность параметров, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\gamma}_{1;N}}{N} = \frac{t_1}{T}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\gamma}_{2;N} + \sum_{i \geq 1} \tilde{\alpha}_{i;N}^2}{N} = \frac{t_2}{T}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i \geq 1} \tilde{\alpha}_{i;N}^k}{N} = \frac{t_k}{T}, \quad k \geq 3.$$

Существование таких параметров доказано в лемме 7, что завершает доказательство теоремы 2 в одну сторону.

Докажем теперь, что любая свободно безгранично делимая мера с компактным носителем может быть получена в качестве предела в теореме 1. Пусть даны произвольные  $K_1 \in \mathbb{R}$  и  $\mathcal{K}$  (см. теорему 19), задающие такую меру.

Достаточно показать, что существует последовательность параметров, таких что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\gamma}_{1;N}}{N} = K_1, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\gamma}_{2;N} + \sum_{i \geq 1} \tilde{\alpha}_{i;N}^2}{N} = m_0(\mathcal{K}),$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i \geq 1} \tilde{\alpha}_{i;N}^k}{N} = m_{k-2}(\mathcal{K}), \quad k \geq 3.$$

Идея рассуждения заключается в том, что дискретной мерой  $1/N \sum_{i \geq 1} \delta(\alpha_{i;N})$  можно приблизить (в смысле слабой сходимости) любую меру на прямой, в частности, “меру”  $\mathcal{K}/x^2$ .

Более формально, для любого  $N$  на множестве  $\mathbb{R} \setminus (-1/N; 1/N)$  можно определить конечную меру  $\mathcal{K}/x^2$  по формуле

$$\frac{\mathcal{K}}{x^2}(A) := \int_A \frac{d\mathcal{K}(x)}{x^2}, \quad A \subset \mathbb{R}.$$

Эту конечную меру можно приблизить дискретной мерой  $1/N \sum_{i \geq 1} \delta(\alpha_{i;N})$ . Это можно сделать, например, так: определим положительные параметры  $\alpha_{i;N}$  по формулам  $\alpha_{1;N} := \sup\{\text{support}(\mathcal{K})\}$  и

$$\alpha_{k+1;N} := \min \left( 0, \inf \left\{ y : \frac{k-1}{N} \leq \frac{\mathcal{K}}{x^2}(y; +\infty) < k/N \right\} \right), \quad k = 1, 2, \dots, \left[ N \cdot \frac{\mathcal{K}}{x^2}(0; +\infty) \right]$$

и аналогичным образом определим отрицательные  $\alpha_{i;N}$ . Легко видеть, что мы имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i \geq 1} \alpha_i^k = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} x^k \frac{d\mathcal{K}(x)}{x^2} = m_{k-2}(\mathcal{K}), \quad k \geq 3.$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i \geq 1} \alpha_i^2 = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} x^2 \frac{d\mathcal{K}(x)}{x^2} = m_0(\mathcal{K}) - \mathcal{K}(\{0\}).$$

Определяя также  $\gamma_{2;N} = \mathcal{K}(\{0\})N$  и  $\gamma_{1;N} = \kappa_1 N$ , мы получаем искомое утверждение.

### 1.6.5 Тотальная положительность и свободная вероятность

Функция  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется *тотально положительной*, если для любого натурального  $r$  и любых вещественных  $x_1, \dots, x_r$  и  $y_1, \dots, y_r$  определитель матрицы  $[\phi(x_i - y_j)]_{i,j=1}^r$  неотрицателен. Наложим также условие нормировки  $\phi(0) = 1$ . Задача о классификации нормированных тотально-положительных функций была решена Шенбергом в [97]. Оказывается, что все такие функции даются в точности формулой (1.6.1). Отметим, что это множество функций является полугруппой относительно операции умножения. Из теорем 1 и 2 следует

**Теорема 21.** Пусть  $\phi_N$  — последовательность нормированных тотально положительных функций на  $\mathbb{R}$ , и пусть

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln \phi_N(x)}{N} = V(x), \quad \text{равномерно в окрестности } 0.$$

Рассмотрим разложение

$$-iV(ix) = t_1 + t_2x + t_3x^2 + \dots$$

Тогда множество наборов коэффициентов  $\{t_k\}_{k \geq 1}$ , которые могут возникнуть в таком пределе, совпадает с множеством наборов свободных кумулянтов свободно безгранично делимых мер.

Неформально говоря, данная теорема утверждает, что в некотором пределе тотально положительные функции на прямой переходят в свободно безгранично делимые распределения. Такая связь между объектами столь различной природы представляется любопытной. Отметим, что приведенное в данной работе доказательство основано на явных классификациях тотально-положительных функций и свободно безгранично делимых мер. Было бы интересно обнаружить какую-либо связь между этими объектами без использования классификационных теорем.

### 1.6.6 Частные случаи теоремы 1

а) Пусть  $\gamma_{2;N} = c_2 N$ ,  $c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ , и остальные параметры равны 0. Тогда теорема 1 превращается в теорему Вигнера (для гауссовского унитарного ансамбля).

б) Пусть  $\alpha_{1;N} = \dots = \alpha_{[c_1 N]} = c_2$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ , и все остальные параметры равны 0. Тогда теорема 1 дает теорему Марченко-Пастура для уишартовских матриц (с гауссовским распределением элементов матриц).

в) Пусть параметры таковы, что  $\frac{1}{N} \sum_{i \geq 1} \delta(\alpha_i)$  сходится в слабом смысле к конечной мере  $\mu_P$ , и пусть  $\gamma_{1;N} = \sum_{i \geq 1} \alpha_i$ ,  $\gamma_{2;N} = 0$ . Теорема 1 показывает, что для таких параметров в пределе возникает свободная составная пуассоновская мера (см. определение, например, в [94, глава 15]).

## 1.7 Эллиптическая параметризация Пфаффовых интегрируемых иерархий в пределе нулевой дисперсии

В этом разделе показано, что бездисперсионные пределы иерархии Пфафф-КП (также известной как Пфаффовая Решетка и ДКР) и иерархии Пфафф-Тода допускают переформулировку в терминах эллиптических функций. В эллиптической форме они выглядят соответственно как эллиптические деформации бездисперсионных иерархий КП и двумеризованной цепочки Тоды.

### 1.7.1 Введение

В данном разделе мы рассматриваем бездисперсионный предел иерархий Пфафф-КП и Пфафф-Тоды. Наша цель – дать параметризацию данных иерархий в терминах эллиптических функций. В такой форме они представляются как естественные “эллиптические деформации” обычных иерархий Кадомцева-Петвиашвили (КП, КР) и двумерной цепочки Тоды (2DTL) в пределе нулевой дисперсии.

Иерархия Пфафф-КП (также известная как ДКР, спаренная иерархия КП, пфаффова решетка) является иерархией с  $D_\infty$ -симметриями. Она впервые предложена Джимбо и Мивой в 1983 году [105]. Впоследствии она появлялась под разными названиями в различных контекстах [106]–[112]. Ее алгебраическая структура и некоторые частные решения были изучены в [113, 114, 115]. Термин “пфаффова” обусловлен тем, что солитоноподобные решения выражаются через пфаффианы. В данной работе мы будем называть эту иерархию Пфафф-КП. Она имеет определенное сходство с иерархией КП и цепочкой Тоды, но, однако, существенно отличается от них и на данный момент гораздо хуже изучена.

Двумерная иерархия Пфафф-Тоды, предложенная в [116, 117], является обобщением иерархии Пфафф-КП и связана с ней так же, как 2DTL связана с иерархией КП. В частности, обобщение Pfaff-KP  $\rightarrow$  Pfaff-Toda предполагает удвоение набора иерархических времен. Мы будем работать с “вещественными формами” иерархий, что означает, что времена КП считаются действительными числами, в то время как два набора времен Тоды являются комплексно сопряженными друг другу.

Бездисперсионная версия иерархии Пфафф-КП (dPfaff-KP) была предложена в [117, 118]. В форме Хироты она представляет собой бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$e^{D(z)D(\zeta)F} \left( 1 - \frac{1}{z^2\zeta^2} e^{2\partial_{t_0}(2\partial_{t_0}+D(z)+D(\zeta))F} \right) = 1 - \frac{\partial_{t_1}D(z)F - \partial_{t_1}D(\zeta)F}{z - \zeta} \quad 1.7.1$$

$$e^{-D(z)D(\zeta)F} \frac{z^2 e^{-2\partial_{t_0}D(z)F} - \zeta^2 e^{-2\partial_{t_0}D(\zeta)F}}{z - \zeta} = z + \zeta - \partial_{t_1}(2\partial_{t_0} + D(z) + D(\zeta))F \quad 1.7.2$$

на функцию  $F = F(\mathbf{t})$  от бесконечного числа (действительных) времен  $\mathbf{t} = \{t_0, t_1, t_2, \dots\}$ , где

$$D(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{z^{-k}}{k} \partial_{t_k}. \quad 1.7.3$$

Функция  $F$  является бездисперсионным аналогом тау-функции. Дифференциальные уравнения получаются из уравнений (1.7.1), (1.7.2) разложением по степеням  $z, \zeta$ . Например, первые два уравнения иерархии имеют вид

$$\begin{cases} 6F_{11}^2 + 3F_{22} - 4F_{13} = 12e^{4F_{00}} \\ 2F_{03} + 4F_{01}^3 + 6F_{01}F_{11} - 6F_{01}F_{02} = 3F_{12}. \end{cases} \quad 1.7.4$$

Для краткости мы используем обозначения  $F_{mn} \equiv \partial_{t_m} \partial_{t_n} F$ .

Бездисперсионная версия иерархии Пфафф-Тоды (dPfaff-Toda) [117] пишется для функции  $F$ , зависящей от бесконечного в обе стороны набора времен  $\{\dots, \bar{t}_2, \bar{t}_1, r, s, t_1, t_2, \dots\}$ . Поскольку различные иерархии в нашем тексте не пересекаются, мы сохраним обозначение  $F$  для бездисперсионной тау-функции. Действительная форма иерархии, с которой мы будем иметь дело, подразумевает, что время  $\bar{t}_k$  комплексно сопряжено к  $t_k$ ,  $s$  действительно, а  $r$  чисто мнимое. Основные уравнения выглядят следующим образом:

$$e^{D(z)D(\zeta)F} \left( 1 - \frac{1}{z\zeta} e^{\partial_s(\partial_s + \partial_r + D(z) + D(\zeta))F} \right) = \frac{ze^{-\partial_r D(z)F} - \zeta e^{-\partial_r D(\zeta)F}}{z - \zeta}, \quad 1.7.5$$

$$e^{\bar{D}(\bar{z})\bar{D}(\bar{\zeta})F} \left( 1 - \frac{1}{\bar{z}\bar{\zeta}} e^{\partial_s(\partial_s - \partial_r + \bar{D}(\bar{z}) + \bar{D}(\bar{\zeta}))F} \right) = \frac{\bar{z}e^{\partial_r \bar{D}(\bar{z})F} - \bar{\zeta}e^{\partial_r \bar{D}(\bar{\zeta})F}}{\bar{z} - \bar{\zeta}}, \quad 1.7.6$$

$$e^{D(z)D(\zeta)F} \left( 1 - \frac{1}{z\zeta} e^{\partial_r(\partial_s + \partial_r + D(z) + D(\zeta))F} \right) = \frac{ze^{-\partial_s D(z)F} - \zeta e^{-\partial_s D(\zeta)F}}{z - \zeta}, \quad 1.7.7$$

$$e^{\bar{D}(\bar{z})\bar{D}(\bar{\zeta})F} \left( 1 - \frac{1}{\bar{z}\bar{\zeta}} e^{-\partial_r(\partial_s - \partial_r + \bar{D}(\bar{z}) + \bar{D}(\bar{\zeta}))F} \right) = \frac{\bar{z}e^{-\partial_s \bar{D}(\bar{z})F} - \bar{\zeta}e^{-\partial_s \bar{D}(\bar{\zeta})F}}{\bar{z} - \bar{\zeta}}, \quad 1.7.8$$

$$e^{-D(z)\bar{D}(\bar{\zeta})F} \left( 1 - \frac{1}{z\bar{\zeta}} e^{\partial_r(\partial_r + D(z) - \bar{D}(\bar{\zeta}))F} \right) = 1 - \frac{1}{z\bar{\zeta}} e^{\partial_s(\partial_s + D(z) + \bar{D}(\bar{\zeta}))F}, \quad 1.7.9$$

$$e^{-(\partial_s + \partial_r + D(z))\bar{D}(\bar{\zeta})F} - 1 = \frac{z}{\bar{\zeta}} e^{-\partial_r(\partial_s + D(z) + \bar{D}(\bar{\zeta}))F} \left( e^{-(\partial_s - \partial_r + \bar{D}(\bar{\zeta}))D(z)F} - 1 \right). \quad 1.7.10$$

Здесь  $\bar{D}(\bar{z}) = \sum_{k \geq 1} \frac{\bar{z}^{-k}}{k} \partial_{\bar{t}_k}$  является комплексно сопряженным аналогом дифференциального оператора (1.7.3). Заметим, что уравнения (1.7.6), (1.7.8) получаются соответственно из (1.7.5), (1.7.7) с помощью “оператора постановки черты”  $D \rightarrow \bar{D}$ ,  $z \rightarrow \bar{z}$ ,  $\zeta \rightarrow \bar{\zeta}$ ,

$t_k \rightarrow \bar{t}_k$ ,  $s \rightarrow \bar{s} = s$ ,  $r \rightarrow \bar{r} = -r$ , действие которого можно рассматривать как комплексное сопряжение при условии, что функция  $F$  действительна. Мы видим, что у каждого уравнения есть “чертованный аналог”. В то же время уравнения (1.7.9) и (1.7.10) действительны, т.е. они не меняются при комплексном сопряжении. Далее в тексте мы не будем постоянно выписывать пары комплексно-сопряженных уравнений и ограничимся написанием лишь одного из каждой пары, не забывая при этом о том, что оба выполняются одновременно. Для дальнейшего удобно будет ввести комплексно-сопряженные “0-ые времена”  $t_0 = s + r$ ,  $\bar{t}_0 = s - r$ , тогда  $\partial_{t_0} = \frac{1}{2}(\partial_s + \partial_r)$ ,  $\partial_{\bar{t}_0} = \frac{1}{2}(\partial_s - \partial_r)$ .

Дифференциальные уравнения иерархии получаются из уравнений (1.7.5) – (1.7.10) разложением по степеням  $z$ ,  $\zeta$ ,  $\bar{z}$ ,  $\bar{\zeta}$ . Первые два уравнения имеют вид

$$\begin{cases} e^{F_{00}} F_{0\bar{1}} = e^{F_{\bar{0}\bar{0}}} F_{\bar{0}1}, \\ F_{1\bar{1}} = 2 e^{F_{00} + F_{\bar{0}\bar{0}}} \sinh(2F_{0\bar{0}}). \end{cases} \quad 1.7.11$$

Мы пользуемся обозначениями  $F_{mn} \equiv \partial_{t_m} \partial_{t_n} F$ ,  $F_{m\bar{n}} \equiv \partial_{t_m} \partial_{\bar{t}_n} F$ ,  $F_{\bar{m}\bar{n}} \equiv \partial_{\bar{t}_m} \partial_{\bar{t}_n} F$ .

Мы покажем, что иерархии пфаффового типа допускают красивую переформулировку в терминах эллиптических функций (тэта-функций Якоби). После такой переформулировки число независимых уравнений уменьшается, и несколько неуклюжие на вид уравнения (1.7.1), (1.7.2) и (1.7.5)–(1.7.10) обретают более привлекательную форму, в которой они выглядят как естественные эллиптические деформации бездисперсионной иерархии КР (или модифицированной иерархии КР) и 2DTL (см. ниже соответственно (1.7.44), (1.7.45) и (1.7.46)). Обратим внимание, что в эллиптической параметризации модулярный параметр  $\tau$  является динамической переменной. Это свойство указывает на некоторое сходство с уравнениями Уизема для рода 1 [119] и интегрируемыми структурами, связанными с краевыми задачами в плоских двусвязных областях [120].

Эллиптическая форма для бездисперсионной иерархии Пфафф-КП была получена в [121]. После описания этих результатов они обобщаются на случай бездисперсионной Пфафф-Тоды. Затем проводится сравнение иерархии пфаффового типа с более привычными иерархиями.

## 1.7.2 Бездисперсионная иерархия Пфафф-КП

**Алгебраическая формулировка.** Для данной иерархии имеем набор вещественных времен  $\mathbf{t} = \{t_0, t_1, t_2, \dots\}$ . В дальнейшем мы будем использовать дифференциальный оператор

$$\nabla(z) = \partial_{t_0} + D(z) \quad 1.7.12$$

который в данном случае удобнее, чем  $D(z)$ . Введем вспомогательные функции

$$p(z) = z - \partial_{t_1} \nabla(z) F, \quad w(z) = z^2 e^{-2\partial_{t_0} \nabla(z) F}, \quad 1.7.13$$

и с их помощью перепишем уравнения (1.7.1), (1.7.2) в более компактной и красивой форме

$$e^{D(z)D(\zeta)F} \left( 1 - \frac{1}{w(z)w(\zeta)} \right) = \frac{p(z) - p(\zeta)}{z - \zeta}, \quad 1.7.14$$

$$e^{-D(z)D(\zeta)F + 2\partial_{t_0}^2 F} \frac{w(z) - w(\zeta)}{z - \zeta} = p(z) + p(\zeta). \quad 1.7.15$$

Перемножив эти уравнения, получим соотношение

$$p^2(z) - e^{2F_{00}} \left( w(z) + w^{-1}(z) \right) = p^2(\zeta) - e^{2F_{00}} \left( w(\zeta) + w^{-1}(\zeta) \right),$$

откуда легко увидеть, что величина  $p^2(z) - e^{2F_{00}} \left( w(z) + w^{-1}(z) \right)$  не зависит от  $z$ . Устремив  $z$  к бесконечности, найдем, что эту величину можно выразить через производные функции  $F$ . В результате получим, что  $p(z)$  и  $w(z)$  удовлетворяют алгебраическому уравнению [117]

$$p^2(z) = r^2 \left( w(z) + w^{-1}(z) \right) - v, \quad 1.7.16$$

где  $r = e^{F_{00}}$ ,  $v = 2F_{11} + F_{01}^2 - F_{02}$  – некоторые вещественные параметры. Это уравнение задает алгебраическую кривую, причем  $w, p$  – алгебраические функции на ней. Локальный параметр в бесконечности – это  $z^{-1}$ . Как нетрудно видеть из (1.7.13), функции  $p$  и  $w$  имеют соответственно простой и двойной полюсы на бесконечности.

### Эллиптическая параметризация.

Следующий естественный шаг – это униформизация кривой (1.7.16) с помощью эллиптических функций  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$ ,  $\operatorname{dn}$  или тэта-функций  $\theta_a(u) = \theta_a(u|\tau)$  ( $a = 1, 2, 3, 4$ ). Это можно сделать несколькими способами. Во-первых, заметим, что при данных  $r, v$  модулярный параметр  $\tau \in \mathbb{H}$  ( $\mathbb{H}$  – верхняя полуплоскость) не определен однозначно из-за возможности модулярных преобразований. Вещественность коэффициентов  $r^2, v$  влечет за собой наличие ограничений на значения  $\tau$ . В стандартной фундаментальной области  $\left\{ \tau \in \mathbb{H} \mid |\operatorname{Re} \tau| \leq \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1 \right\}$  допустимыми значениями  $\tau$  являются следующие: а)  $\tau = it, t \geq 1$ , б)  $\tau = \frac{1}{2} + it, t \geq \sqrt{3}/2$ , в)  $\tau = e^{i\rho}, \frac{\pi}{3} \leq \rho \leq \frac{2\pi}{3}$ .

В дальнейшем мы будем считать  $\tau$  чисто мнимым (случай а)) и рассмотрим параметризацию, предложенную в [121]:

$$w(z) = \frac{\theta_4^2(u(z))}{\theta_1^2(u(z))}, \quad p(z) = \gamma \theta_4^2(0) \frac{\theta_2(u(z)) \theta_3(u(z))}{\theta_1(u(z)) \theta_4(u(z))}, \quad 1.7.17$$

с  $r, v$ , задаваемыми формулами

$$r = \gamma \theta_2(0) \theta_3(0), \quad v = \gamma^2 \left( \theta_2^4(0) + \theta_3^4(0) \right). \quad 1.7.18$$

Можно проверить, что уравнение кривой становится эквивалентным тождеству

$$\theta_4^4(0) \frac{\theta_2^2(u) \theta_3^2(u)}{\theta_1^2(u) \theta_4^2(u)} = \theta_2^2(0) \theta_3^2(0) \left( \frac{\theta_4^2(u)}{\theta_1^2(u)} + \frac{\theta_2^2(u)}{\theta_4^2(u)} \right) - \left( \theta_2^4(0) + \theta_3^4(0) \right), \quad 1.7.19$$



которое доказывается стандартным способом из сравнения аналитических свойств обеих сторон. Как будет показано ниже, независящий от  $z$  параметр  $\gamma$  является динамической переменной, так же, как и модулярный параметр  $\tau$ :  $\gamma = \gamma(\mathbf{t})$ ,  $\tau = \tau(\mathbf{t})$ . Функция  $u$  в (1.7.17) зависит от  $z$  и от всех времен:  $u(z) = u(z, \mathbf{t})$ . Из уравнений (1.7.13) видно, что функции  $w(z), p(z)$  принимают вещественные значения при вещественном  $z$ . Учитывая этот факт, удобно нормировать  $u(z)$  условием  $u(\infty) = 0$ , так что разложение около  $\infty$  будет иметь вид

$$u(z, \mathbf{t}) = \frac{c_1(\mathbf{t})}{z} + \frac{c_2(\mathbf{t})}{z^2} + \dots, \quad c_i \in \mathcal{R}. \quad 1.7.20$$

В эллиптической параметризации уравнения (1.7.14) и (1.7.15) нашей системы становятся одинаковыми. Возьмем, например, (1.7.15) и запишем его в виде

$$(z_1^{-1} - z_2^{-1})e^{\nabla_1 \nabla_2 F} = -\frac{w_1 - w_2}{p_1 - p_2} \frac{r}{\sqrt{w_1 w_2}},$$

где  $\nabla_i = \nabla(z_i)$ ,  $p_i = p(z_i)$  и т.д. Тождество

$$\frac{w_1 - w_2}{p_1 + p_2} = -\frac{1}{\gamma \theta_2(0)\theta_3(0)} \frac{\theta_4(u_1)\theta_4(u_2)}{\theta_1(u_1)\theta_1(u_2)} \frac{\theta_1(u_{12})}{\theta_4(u_{12})}$$

(здесь и далее  $u_i \equiv u(z_i)$ ,  $u_{ik} \equiv u_i - u_k$ ) позволяет привести правую часть к очень простому виду:

$$(z_1^{-1} - z_2^{-1}) e^{\nabla(z_1)\nabla(z_2)F} = \frac{\theta_1(u(z_1) - u(z_2))}{\theta_4(u(z_1) - u(z_2))}. \quad 1.7.21$$

Данное уравнение задает бездисперсионную иерархию Пфафф-КП. Заметим, что если устремить  $z_2 \rightarrow \infty$  в (1.7.21), получим определение функции  $u(z)$ , эквивалентное первой формуле в (1.7.17):

$$e^{\partial_{t_0} \nabla(z)F} = z \frac{\theta_1(u(z))}{\theta_4(u(z))}. \quad 1.7.22$$

Предел  $z \rightarrow \infty$  дает  $e^{F_{00}} = r = \pi c_1 \theta_2(0)\theta_3(0)$ , следовательно,

$$c_1(\mathbf{t}) = \frac{\gamma(\mathbf{t})}{\pi}, \quad \gamma(\mathbf{t}) = \frac{e^{F_{00}}}{\theta_2(0|\tau)\theta_3(0|\tau)}. \quad 1.7.23$$

Кроме того, из (1.7.18) можно увидеть, что

$$\frac{\mathbf{v}}{r^2} = e^{-2F_{00}} (2F_{11} + F_{01}^2 - F_{02}) = \frac{\theta_2^2(0|\tau)}{\theta_3^2(0|\tau)} + \frac{\theta_3^2(0|\tau)}{\theta_2^2(0|\tau)}. \quad 1.7.24$$

Таким образом, мы видим, что модулярный параметр  $\tau$  выражается через производные второго порядка от функции  $F$ . Из (1.7.23) очевидно, что то же самое верно для  $c_1$  и  $\gamma$ .

Для того чтобы записать уравнение (1.7.21) в еще одной полезной форме, введем функцию

$$S(u|\tau) := \log \frac{\theta_1(u|\tau)}{\theta_4(u|\tau)}. \quad 1.7.25$$

Она обладает следующими квазипериодическими свойствами:  $S(u + 1|\tau) = S(u|\tau) + i\pi$ ,  $S(u + \tau|\tau) = S(u|\tau)$ . Производная этой функции  $S'(u) = \partial_u S(u|\tau)$  дается выражением

$$S'(u) = \pi \theta_4^2(0) \frac{\theta_2(u)\theta_3(u)}{\theta_1(u)\theta_4(u)}. \quad 1.7.26$$

Эту формулу легко доказать, сравнивая аналитические свойства обеих сторон. Для нужд следующего раздела отметим, что выражение (1.7.19) можно рассматривать как нелинейное дифференциальное уравнение на функцию  $S$ :

$$\left( \frac{S'(u)}{\pi \theta_2(0)\theta_3(0)} \right)^2 = 2 \cosh(2S(u)) - \frac{\theta_2^2(0)}{\theta_3^2(0)} - \frac{\theta_3^2(0)}{\theta_2^2(0)}. \quad 1.7.27$$

Прологарифмируем и возьмем производную по  $\partial_{t_0}$  от обеих сторон (1.7.21). В терминах функции  $S(u)$  уравнение запишется в виде

$$\nabla(z_1)S(u(z_2)|\tau) = \partial_{t_0} S(u(z_1) - u(z_2)|\tau). \quad 1.7.28$$

В частности, это уравнение означает, что его левая часть симметрична по отношению к перестановке  $z_1 \leftrightarrow z_2$ :  $\nabla(z_1)S(u(z_2)|\tau) = \nabla(z_2)S(u(z_1)|\tau)$ . Эта симметрия является проявлением интегрируемости. В пределе  $z_2 \rightarrow \infty$  уравнение (1.7.28) дает:

$$\nabla(z) \log r = \partial_{t_0} S(u(z)|\tau). \quad 1.7.29$$

Чтобы связать данную параметризацию с алгебраической формулировкой, заметим, что

$$S(u(z)|\tau) = -\frac{1}{2} \log w(z), \quad c_1 S'(u(z)|\tau) = p(z). \quad 1.7.30$$

Эти формулы следуют непосредственно из определений и из (1.7.26).

### 1.7.3 Бездисперсионная иерархия Пфаффа-Тоды

**Алгебраическая формулировка.** Набор времен в данном случае будет

$$\mathbf{t} = \{\dots, \bar{t}_2, \bar{t}_1, \bar{t}_0, t_0, t_1, t_2, \dots\}.$$

Соответственно, оператор (1.7.12) приобретает “чертованный аналог”  $\bar{\nabla}(\bar{z}) = \partial_{\bar{t}_0} + \bar{D}(\bar{z})$ . С этого момента мы будем работать с временами  $t_0, \bar{t}_0$  вместо  $s, r$ .

Введем вспомогательные функции

$$\begin{aligned} P(z) &= z e^{-(\partial_{t_0} + \partial_{\bar{t}_0})\nabla(z)F}, & W(z) &= z e^{-(\partial_{t_0} - \partial_{\bar{t}_0})\nabla(z)F}, \\ \bar{P}(z) &= z e^{-(\partial_{t_0} + \partial_{\bar{t}_0})\bar{\nabla}(z)F}, & \bar{W}(z) &= z e^{(\partial_{t_0} - \partial_{\bar{t}_0})\bar{\nabla}(z)F}, \end{aligned} \quad 1.7.31$$

с их помощью мы можем переписать уравнения (1.7.5)–(1.7.10) в более компактной форме

$$\begin{aligned}
e^{D(z)D(\zeta)F} \left( 1 - \frac{1}{P(z)P(\zeta)} \right) &= \frac{W(z) - W(\zeta)}{z - \zeta} e^{(\partial_{t_0} - \partial_{\bar{t}_0})\partial_{t_0}F} \\
e^{D(z)D(\zeta)F} \left( 1 - \frac{1}{W(z)W(\zeta)} \right) &= \frac{P(z) - P(\zeta)}{z - \zeta} e^{(\partial_{t_0} + \partial_{\bar{t}_0})\partial_{t_0}F} \\
e^{D(z)\bar{D}(\bar{\zeta})F} \left( 1 - \frac{1}{P(z)\bar{P}(\bar{\zeta})} \right) &= 1 - \frac{1}{W(z)\bar{W}(\bar{\zeta})} \\
e^{D(z)\bar{D}(\bar{\zeta})F} \left( W(z) - \bar{W}(\bar{\zeta}) \right) &= \left( P(z) - \bar{P}(\bar{\zeta}) \right) e^{2\partial_{t_0}\partial_{\bar{t}_0}F},
\end{aligned} \tag{1.7.32}$$

где  $\bar{P}(\bar{\zeta}) := \overline{P(\zeta)}$ ,  $\bar{W}(\bar{\zeta}) := \overline{W(\zeta)}$ . Разделив первое уравнение на второе, получим соотношение

$$W(z) + W^{-1}(z) - e^{2\partial_{t_0}\partial_{\bar{t}_0}F} (P(z) + P^{-1}(z)) = W(\zeta) + W^{-1}(\zeta) - e^{2\partial_{t_0}\partial_{\bar{t}_0}F} (P(\zeta) + P^{-1}(\zeta)),$$

из которого следует, что выражение  $W(z) + W^{-1}(z) - e^{2\partial_{t_0}\partial_{\bar{t}_0}F} (P(z) + P^{-1}(z)) := C$  не зависит от  $z$ . Устремляя  $z \rightarrow \infty$ , мы можем выразить константу  $C$  через производные от функции  $F$ :  $C = 2e^{-(\partial_{t_0} - \partial_{\bar{t}_0})\partial_{t_0}F} \partial_{\bar{t}_0} \partial_{t_1} F$ . Разделив третье уравнение в (1.7.32) на четвертое, мы получаем соотношение, которое гласит, что  $C$  вещественно, т. е.  $e^{\partial_{t_0}^2 F} \partial_{t_0} \partial_{\bar{t}_1} F = e^{\partial_{\bar{t}_0}^2 F} \partial_{\bar{t}_0} \partial_{t_1} F$ . Это первое уравнение в (1.7.11). В результате получаем, что  $P(z), W(z)$  удовлетворяют уравнению [117]

$$W(z) + W^{-1}(z) - R^2 (P(z) + P^{-1}(z)) = C, \tag{1.7.33}$$

с вещественными коэффициентами

$$R^2 = e^{2F_{0\bar{0}}}, \quad C = 2e^{F_{0\bar{0}} - F_{00}} F_{0\bar{1}}. \tag{1.7.34}$$

Функции  $\bar{P}, \bar{W}$  удовлетворяют такому же уравнению. Как и в случае иерархии Пфаффа-КП, это уравнение задает эллиптическую кривую;  $P$  и  $W$  - алгебраические функции на ней, а  $z^{-1}$  - локальный параметр вблизи  $\infty$ . Как видно из (1.7.31),  $P$  и  $W$  имеют простые полюсы на бесконечности.

Для дальнейших вычислений удобнее пользоваться функциями

$$f(z) = \sqrt{P(z)W(z)} = ze^{-\partial_{t_0}\nabla(z)F}, \quad g(z) = \sqrt{P(z)/W(z)} = e^{-\partial_{\bar{t}_0}\nabla(z)F}. \tag{1.7.35}$$

У функции  $f$  простой полюс на  $\infty$ , а  $g$  там регулярен. Комплексно сопряженные к ним функции таковы:  $\overline{f(z)} = \bar{f}(\bar{z}) = \bar{z}e^{-\partial_{\bar{t}_0}\bar{\nabla}(\bar{z})F}$ ,  $\overline{g(z)} = \bar{g}(\bar{z}) = e^{-\partial_{t_0}\bar{\nabla}(\bar{z})F}$ . В терминах этих функций уравнение эллиптической кривой имеет вид:

$$R^2(f^2g^2 + 1) + Cfg = f^2 + g^2. \tag{1.7.36}$$

Отметим симметрию  $f \leftrightarrow g$ . Функции  $\bar{f}(z)$ ,  $\bar{g}(z)$  удовлетворяют такому же уравнению.

**Эллиптическая формулировка.** Параметризация кривой (1.7.36) в терминах тэта-функций  $\theta_a(u) = \theta_a(u|\tau)$  может быть выбрана следующим образом:

$$f(z) = \frac{\theta_4(u(z))}{\theta_1(u(z))}, \quad g(z) = \frac{\theta_4(u(z) + \eta)}{\theta_1(u(z) + \eta)}. \quad 1.7.37$$

Разложение  $u(z) = u(z, \mathbf{t})$  вблизи  $\infty$  имеет тот же вид (1.7.20), но коэффициенты теперь комплексные, и, кроме того, имеется разложение  $\overline{u(z)} = \bar{u}(\bar{z}) = \bar{u}(\bar{z}, \mathbf{t})$  с комплексно сопряженными коэффициентами:

$$u(z, \mathbf{t}) = \frac{c_1(\mathbf{t})}{z} + \frac{c_2(\mathbf{t})}{z^2} + \dots, \quad \bar{u}(z, \mathbf{t}) = \frac{\bar{c}_1(\mathbf{t})}{z} + \frac{\bar{c}_2(\mathbf{t})}{z^2} + \dots. \quad 1.7.38$$

Параметр  $\eta$ , так же как  $\gamma$  в (1.7.17), является динамической переменной, как и модулярный параметр  $\tau$ :  $\eta = \eta(\mathbf{t})$ ,  $\tau = \tau(\mathbf{t})$ . Подставив (1.7.37) в уравнение кривой, можно заметить, что оно превращается в тождество, если

$$R = \frac{\theta_1(\eta)}{\theta_4(\eta)}, \quad C = 2 \frac{\theta_4^2(0) \theta_2(\eta) \theta_3(\eta)}{\theta_4^2(\eta) \theta_2(0) \theta_3(0)}. \quad 1.7.39$$

Мы будем считать, что  $\eta$  вещественно, а  $\tau$  чисто мнимо. Это согласуется с вещественностью  $R$  и  $C$ .

После параметризации только два уравнения в (1.7.32) остаются независимыми (скажем, первое и третье). Наша следующая задача состоит в представлении их в эллиптической форме. Сначала перешем их в виде

$$(z_1^{-1} - z_2^{-1}) e^{\nabla_1 \nabla_2 F} = R^{-1} g_1 g_2 \frac{W_1 - W_2}{1 - P_1 P_2},$$

$$e^{\nabla_1 \bar{\nabla}_2 F} = R^{-1} g_1 \bar{g}_2 \frac{1 - W_1 \bar{W}_2}{1 - P_1 \bar{P}_2},$$

где  $\nabla_i = \nabla(z_i)$ ,  $\bar{\nabla}_i = \bar{\nabla}(\bar{z}_i)$ ,  $g_i = g(z_i)$  и т.д. Тождества

$$\frac{W_1 - W_2}{1 - P_1 P_2} = \frac{\theta_1(\eta)}{\theta_4(\eta)} \frac{\theta_1(u_1 + \eta) \theta_1(u_2 + \eta)}{\theta_4(u_1 + \eta) \theta_4(u_2 + \eta)} \cdot \frac{\theta_1(u_1 - u_2)}{\theta_4(u_1 - u_2)},$$

$$\frac{1 - W_1 \bar{W}_2}{1 - P_1 \bar{P}_2} = \frac{\theta_1(\eta)}{\theta_4(\eta)} \frac{\theta_1(u_1 + \eta) \theta_1(\bar{u}_2 + \eta)}{\theta_4(u_1 + \eta) \theta_4(\bar{u}_2 + \eta)} \cdot \frac{\theta_1(u_1 + \bar{u}_2 + \eta)}{\theta_4(u_1 + \bar{u}_2 + \eta)}$$

позволяют представить эти уравнения в следующем виде:

$(z_1^{-1} - z_2^{-1}) e^{\nabla(z_1) \nabla(z_2) F} = \frac{\theta_1(u(z_1) - u(z_2))}{\theta_4(u(z_1) - u(z_2))}$	1.7.40
$e^{\nabla(z_1) \bar{\nabla}(\bar{z}_2) F} = \frac{\theta_1(u(z_1) + \bar{u}(z_2) + \eta)}{\theta_4(u(z_1) + \bar{u}(z_2) + \eta)}$	
$(z_1^{-1} - z_2^{-1}) e^{\bar{\nabla}(\bar{z}_1) \bar{\nabla}(\bar{z}_2) F} = \frac{\theta_1(\bar{u}(z_1) - \bar{u}(z_2))}{\theta_4(\bar{u}(z_1) - \bar{u}(z_2))}$	

Первое уравнение такое же, как и в (1.7.21). Это означает, что “половина” бездисперсионной иерархии Пфафф-Тода (с фиксированными временами “с чертой”) совпадает с dPfaff-КР. Этот факт было бы нелегко увидеть в алгебраической формулировке. Третье уравнение является комплексно сопряженной версией первого. Оно представляет собой другую копию бездисперсионной иерархии Пфафф-КП, только уже относительно времен  $\bar{t}_k$ , с фиксированными  $t_k$ . Второе уравнение содержит смешанные производные по временам  $\{t_k\}$  и  $\{\bar{t}_k\}$  и, таким образом, объединяет две иерархии в одну более общую. Это уравнение инвариантно относительно комплексного сопряжения.

Устремляя  $z_2 \rightarrow \infty$  в уравнении (1.7.40), получаем:

$$e^{\partial_{t_0} \nabla(z) F} = z \frac{\theta_1(u(z))}{\theta_4(u(z))}, \quad e^{\partial_{\bar{t}_0} \nabla(z) F} = \frac{\theta_1(u(z) + \eta)}{\theta_4(u(z) + \eta)}, \quad 1.7.41$$

что есть ни что иное, как параметризация функций  $f$  и  $g$  (1.7.37) с учетом их определения (1.7.35). Дальнейшее разложение этих уравнений при  $z \rightarrow \infty$  дает  $e^{F_{00}} = \pi c_1 \theta_2(0) \theta_3(0)$  от лидирующих членов первого и  $F_{\bar{0}1} = c_1 S'(\eta)$  от членов порядка  $O(z^{-1})$  второго (функция  $S$  определена в (1.7.25)). Из (1.7.39) следует, что  $R = e^{S(\eta)}$ ,  $C/R = \frac{2S'(\eta)}{\pi \theta_2(0) \theta_3(0)}$ . Используя (1.7.27) вместе с подстановкой  $u \rightarrow \eta$ , получаем

$$R^2 + R^{-2} \left(1 - \frac{C^2}{4}\right) = 2 \cosh(2F_{0\bar{0}}) - e^{-F_{00} - F_{\bar{0}\bar{0}}} F_{\bar{0}1} F_{0\bar{1}} = \frac{\theta_2^2(0|\tau)}{\theta_3^2(0|\tau)} + \frac{\theta_3^2(0|\tau)}{\theta_2^2(0|\tau)}. \quad 1.7.42$$

Аналогично (1.7.24), это уравнение означает, что модулярный параметр  $\tau$  выражается через частные производные второго порядка от функции  $F$ . То же самое верно и для  $c_1$  и  $\eta$ .

Из уравнений (1.7.40) следуют соотношения

$$\begin{aligned} \nabla(z_1) S(u(z_2)) &= \partial_{t_0} S(u(z_1) - u(z_2)), \\ \nabla(z_1) S(u(z_2) + \eta) &= \partial_{\bar{t}_0} S(u(z_1) - u(z_2)), \\ \bar{\nabla}(\bar{z}_1) S(u(z_2)) &= \partial_{t_0} S(\bar{u}(\bar{z}_1) + u(z_2) + \eta), \\ \bar{\nabla}(\bar{z}_1) S(u(z_2) + \eta) &= \partial_{\bar{t}_0} S(\bar{u}(\bar{z}_1) + u(z_2) + \eta). \end{aligned} \quad 1.7.43$$

В частности, имеем  $\nabla(z) \log R = \partial_{\bar{t}_0} S(u(z)) = \partial_{t_0} S(u(z) + \eta)$ .

#### 1.7.4 Сравнение с другими иерархиями

Полезно сравнить бездисперсионные пфаффовы иерархии с более знакомыми бездисперсионными КР (dKP), mKP (dmKP) и 2DTL (d2DTL):

$$\text{dKP:} \quad e^{D(z)D(\zeta)F} = 1 - \frac{\partial_{t_1}(D(z) - D(\zeta))F}{z - \zeta}, \quad 1.7.44$$

$$\text{dmKP:} \quad e^{D(z)D(\zeta)F} = \frac{ze^{-\partial_{t_0} D(z)F} - \zeta e^{-\partial_{t_0} D(\zeta)F}}{z - \zeta}, \quad 1.7.45$$

$$\text{d2DTL: } \begin{cases} e^{D(z)D(\zeta)F} = \frac{ze^{-\partial_{t_0}D(z)F} - \zeta e^{-\partial_{t_0}D(\zeta)F}}{z - \zeta} \\ e^{-D(z)\bar{D}(\bar{\zeta})F} = 1 - (z\bar{\zeta})^{-1}e^{\partial_{t_0}(\partial_{t_0}+D(z)+\bar{D}(\bar{\zeta}))F}. \end{cases} \quad 1.7.46$$

В случае dKP имеется набор (вещественных) времен  $\{t_1, t_2, \dots\}$ . В случае dmKP этот набор дополняется вещественным  $t_0$ . В случае бездисперсионной двумеризованной цепочки Тоды время  $t_0$  по-прежнему вещественное, в то время как остальные становятся комплексными, т. е. имеются два набора времен  $\{t_1, t_2, \dots\}$  и  $\{\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots\}$ , которые комплексно сопряжены друг другу. Заметим, что первое уравнение в (1.7.46) и уравнение (1.7.45) идентичны. Подробности см. в [122, 123].

**Сравнение dPfaff-KP с dKP и dmKP.** В первую очередь, заметим, что из уравнения dmKP (1.7.45) следует (1.7.44). Действительно, переписав (1.7.45) в виде  $z_{12}e^{D_1D_2F} = z_1e^{-D_1F_0} - z_2e^{-D_2F_0}$  и просуммировав уравнения для пар 12, 23, 31, найдем  $z_{12}e^{D_1D_2F} + z_{23}e^{D_2D_3F} + z_{31}e^{D_1D_3F} = 0$ . Устремив  $z_3 \rightarrow \infty$ , получим (1.7.44). Действуя таким образом, можно показать, что уравнение (1.7.45), переписанное с помощью оператора  $\nabla(z)$  в форме  $(z_1^{-1} - z_2^{-1})e^{\nabla_1\nabla_2F} = z_1^{-1}e^{-\nabla_1F_0} - z_2^{-1}e^{-\nabla_2F_0}$ , содержит в качестве следствия

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1^{-1} & e^{\nabla_2\nabla_3F} \\ 1 & z_2^{-1} & e^{\nabla_1\nabla_3F} \\ 1 & z_3^{-1} & e^{\nabla_1\nabla_2F} \end{vmatrix} = 0. \quad 1.7.47$$

В свою очередь, из этого уравнения следуют аналогичные детерминантные соотношения, содержащие больше переменных. В частности, легко показать, что из (1.7.47) следует

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1^{-1} & z_1^{-2} & e^{(\nabla_2\nabla_3+\nabla_3\nabla_4+\nabla_4\nabla_2)F} \\ 1 & z_2^{-1} & z_2^{-2} & e^{(\nabla_1\nabla_3+\nabla_3\nabla_4+\nabla_4\nabla_1)F} \\ 1 & z_3^{-1} & z_3^{-2} & e^{(\nabla_1\nabla_2+\nabla_2\nabla_4+\nabla_4\nabla_1)F} \\ 1 & z_4^{-1} & z_4^{-2} & e^{(\nabla_1\nabla_2+\nabla_2\nabla_3+\nabla_3\nabla_1)F} \end{vmatrix} = 0. \quad 1.7.48$$

На самом деле это бездисперсионный предел одного из высших уравнений разностной иерархии Хироты [124]. Теперь рассмотрим иерархию dPfaff-KP в эллиптической форме. Подставляя левую часть уравнения (1.7.21) (для различных пар переменных) в

тождество

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_1(u_{12})\theta_1(u_{23})\theta_1(u_{31})}{\theta_4(u_{12})\theta_4(u_{23})\theta_4(u_{31})} - \frac{\theta_1(u_{12})\theta_1(u_{24})\theta_1(u_{41})}{\theta_4(u_{12})\theta_4(u_{24})\theta_4(u_{41})} \\ & + \frac{\theta_1(u_{13})\theta_1(u_{34})\theta_1(u_{41})}{\theta_4(u_{13})\theta_4(u_{34})\theta_4(u_{41})} - \frac{\theta_1(u_{23})\theta_1(u_{34})\theta_1(u_{42})}{\theta_4(u_{23})\theta_4(u_{34})\theta_4(u_{42})} = 0, \end{aligned} \quad 1.7.49$$

мы получаем соотношение для функции  $F$  в *точно такой же форме (1.7.48)*, как и выше уравнение иерархии  $dmKP$ . В то же время ни одно из решений последней не удовлетворяет уравнениям (1.7.1), (1.7.2) иерархии  $dPfaff$ -KP. Действительно, как было показано выше, уравнение (1.7.44) выполняется для иерархии  $dmKP$ ; подставляя его в (1.7.1), получим  $e^{2\partial_{t_0}(2\partial_{t_0}+D(z)+D(\zeta))F} = 0$  что невозможно для любой  $F$ . Например, простейшим решением для (1.7.47) и (1.7.48) является  $F = 0$ , что не является решением для (1.7.1). Таким образом, из (1.7.47) следует (1.7.48), но не наоборот.

**Бездисперсионная цепочка Тоды.** Отметим также известную редукцию  $d2DTL$ , получающуюся при наложении условий  $\partial_{t_k} F = \partial_{\tilde{t}_k} F$  для всех  $k \geq 1$ , что означает  $D(z)F = \bar{D}(\zeta)F$ . Эта иерархия называется бездисперсионной цепочкой Тоды (dTC):

$$dTC: \begin{cases} e^{D(z)D(\zeta)F} = \frac{ze^{-\partial_{t_0}D(z)F} - \zeta e^{-\partial_{t_0}D(\zeta)F}}{z - \zeta} \\ e^{-D(z)D(\zeta)F} = 1 - (z\zeta)^{-1} e^{\partial_{t_0}(\partial_{t_0}+D(z)+D(\zeta))F}. \end{cases} \quad 1.7.50$$

С помощью функции  $\omega(z) = ze^{-\frac{1}{2}F_{00}-\partial_{t_0}D(z)F}$ , мы можем переписать (1.7.50) в виде

$$\begin{cases} e^{-\frac{1}{2}F_{00}+D(z)D(\zeta)F} = \frac{\omega(z) - \omega(\zeta)}{z - \zeta} \\ e^{-D(z)D(\zeta)F} = 1 - \frac{1}{\omega(z)\omega(\zeta)}. \end{cases} \quad 1.7.51$$

Отметим схожесть с (1.7.14), (1.7.15). Согласно [114], перемножив эти уравнения, мы приходим к выводу, что выражение  $z - e^{\frac{1}{2}F_{00}}(\omega(z) + \omega^{-1}(z))$  не зависит от  $z$ . Устремляя  $z \rightarrow \infty$ , находим, что эта константа равна  $F_{01}$ . Таким образом, переменные  $z$  и  $\omega$  удовлетворяют алгебраическому уравнению

$$z = e^{\frac{1}{2}F_{00}} \left( \omega(z) + \frac{1}{\omega(z)} \right) + F_{01}, \quad 1.7.52$$

которое определяет рациональную (рода 0) кривую.

Наконец, можно показать, что бездисперсионная иерархия Пфафф-КП (1.7.1), (1.7.2) содержит бездисперсионную цепочку Тоды как редукцию (см. [114, Утверждение 4.1]). Рассмотрим такие решения  $dPfaff$ -KP, что  $\partial_{t_{2k+1}} F = 0$  для всех  $k \geq 0$ . Переопределим времена следующим образом:  $\tilde{t}_n = 2t_{2n}$ ,  $n \geq 1$ ,  $\tilde{t}_0 = \frac{1}{2}t_0$ . Тогда легко проверить,

что уравнения (1.7.1), (1.7.2) превращаются в систему уравнений

$$\begin{cases} e^{\tilde{D}(z^2)\tilde{D}(\zeta^2)\tilde{F}} = \frac{ze^{-\partial_{\tilde{t}_0}\tilde{D}(z^2)\tilde{F}} - \zeta e^{-\partial_{\tilde{t}_0}\tilde{D}(\zeta^2)\tilde{F}}}{z^2 - \zeta^2} \\ e^{-\tilde{D}(z^2)\tilde{D}(\zeta^2)\tilde{F}} = 1 - (z^2\zeta^2)^{-1}e^{\partial_{\tilde{t}_0}(\partial_{\tilde{t}_0} + \tilde{D}(z^2) + \tilde{D}(\zeta^2))\tilde{F}} \end{cases} \quad 1.7.53$$

на функцию  $\tilde{F}(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots) = F(t_0, 0, t_2, 0, t_4, 0, \dots)$ , где  $\tilde{D}(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{z^{-k}}{k} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_k}$ , что эквивалентно (1.7.50).



## 1.8 Интегрируемые квантовые магнетики и классические системы частиц

### 1.8.1 Вводные замечания

Интегрируемые системы имеют большое значение в различных областях математики и физики. Существует очень мало задач, которые можно решить точно, и каждая такая задача позволяет расширить класс задач, которые поддаются анализу. В частности, задачи, близкие к точно решаемым, могут быть изучены с помощью теории возмущений. Каждый тип интегрируемых систем связан с различными разделами математики и часто имеет изящные геометрические формулировки, что помогает не только глубже понять математику, но также и сильно продвинуться в задачах физики.

Сейчас известно, что интегрируемые системы близко связаны с суперсимметричными квантовыми теориями поля в разных размерностях и помогают эффективно описывать низкоэнергетические пределы решения Зайберга-Виттена [126]. Степени свободы соответствующих интегрируемых систем, а также их коммутирующие потоки отождествляются с координатами различных бран, локализованных в разных размерностях десяти- и одиннадцати- мерных геометриях теории струн и М-теории.

Связи между интегрируемыми моделями и калибровочными теориями поля могут быть использованы в обоих направлениях. Дуальность Адамса-Харнада-Уртюбиза [127] вместе с результатами [128] позволила найти интересную взаимосвязь между квантовыми магнетиками Гайзенберга и их вырождением - моделью Годена. Аналогичная связь стала эффективным инструментом для исследования и анализа 2D и 4D калибровочных теорий поля, в частности их взаимосвязей [129, 130, 131, 132] и АГТ соответствия [133, 134, 135, 136].

В этом разделе мы продолжаем исследование интригующей связи между квантовыми интегрируемыми магнетиками и классическими интегрируемыми моделями. Данная связь (открыта и исследована в работах [137, 138, 139, 140, 141, 142]) не имеет ничего общего с квазиклассическим пределом квантовых систем и, по-видимому, существует только для интегрируемых моделей.

Мы обобщаем результат работы [143] (где было доказано соответствие в рациональном случае) на случай XXZ-магнетика и тригонометрической системы Руйсенаарса-Шнайдера.

Результат работы [143] есть доказательство следующей теоремы:

Если в матрицу Лакса рациональной системы Руйсенаарса-Шнайдера с  $N$  частицами и константой связи  $\hbar$

$$L_{ij}^{\text{RS}}(\{\dot{q}_i\}_N, \{q_i\}_N, \hbar) = \frac{\hbar \dot{q}_j}{q_i - q_j + \hbar}, \quad i, j = 1, \dots, N$$

где  $\{q_i\}_N$  - координаты частиц, а  $\{\dot{q}_i\}_N$  - их скорости, сделать подстановку

$$\dot{q}_j = \frac{1}{\hbar} H_j^{\text{XXX}} \left( \{q_i\}_N; \{\mu_i^1\}_{N_1}, \dots, \{\mu_i^{n-1}\}_{N_{n-1}} \right), \quad j = 1, \dots, N,$$

где  $\mu_i^a$  - это любое решение системы уравнений иерархического Бете анзаца для неоднородной спиновой цепочки XXX с  $N$  узлами, то собственные значения матрицы Лакса будут равны

$$\left( \underbrace{V_1, \dots, V_1}_{N-N_1}, \underbrace{V_2, \dots, V_2}_{N_1-N_2}, \dots, \underbrace{V_{n-1}, \dots, V_{n-1}}_{N_{n-2}-N_{n-1}}, \underbrace{V_n, \dots, V_n}_{N_{n-1}} \right).$$

Это значит, что поиск собственных значений гамильтонианов квантовой спиновой цепочки эквивалентно "обратной спектральной задаче" для матриц Лакса классических систем. Аналогичное утверждение для тригонометрического случая и есть результат нашей работы.

### 1.8.2 Система частиц Руйсенаарса-Шнайдера

**Тригонометрическая модель Руйсенаарса-Шнайдера [144]** - это система релятивистских частиц с дальнедействующим взаимодействием.

Гамильтониан модели в канонических переменных для системы с  $N$  частицами дается выражением

$$H = \sum_{j=1}^N e^{\eta p_j} \prod_{k \neq j}^N \frac{\sinh(q_j - q_k - \eta\nu)}{\sinh(q_j - q_k)}.$$

Это выражение отличается от стандартного и получается из него каноническим преобразованием

$$e^{\eta p_j} \rightarrow e^{\eta p_j} \prod_{k \neq j}^N \left( \frac{\sinh(q_j - q_k + \xi)}{\sinh(q_j - q_k - \xi)} \right)^g$$

в котором фиксированы параметры  $\xi = -\eta\nu$  и  $g = 1/2$ .

Выражение для скоростей можно получить из уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \eta e^{\eta p_j} \prod_{k \neq j}^N \frac{\sinh(q_j - q_k - \eta\nu)}{\sinh(q_j - q_k)}. \quad (1.8.1)$$

Уравнения движения этой системы имеют вид

$$\ddot{q}_j = - \sum_{k \neq j} \frac{2 \sinh^2(\eta\nu) \dot{q}_j \dot{q}_k \cosh(q_j - q_k)}{\sinh(q_j - q_k) \sinh(q_j - q_k - \eta\nu) \sinh(q_j - q_k + \eta\nu)}.$$

Важным свойством этой системы есть наличие Лаксовой пары. Лаксова пара - это пара матриц  $L$  и  $M$ , таких, что уравнение Лакса

$$\frac{d}{dt} L = [L, M] \quad (1.8.2)$$

эквивалентно уравнениям движения.

Наличие Лаксовой пары позволяет получить законы сохранения. Из уравнения (1.8.2) следует

$$\frac{d}{dt}L^k = [L^k, M]. \quad (1.8.3)$$

Определим величины  $H_k = \frac{1}{k} \text{tr} L^k$ . Тогда из уравнения (1.8.3) следует

$$\frac{d}{dt}H_k = \frac{1}{k} \text{tr} [L^k, M] = 0.$$

Это значит, что  $H_k$  - интегралы движения. Если доказать, что элементы набора  $H_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) функционально независимы и в инволюции (т. е.  $\{H_i, H_k\} = 0$ ), то система является интегрируемой по Лиувиллю. Для нашей системы это так.

В нашем случае для системы  $N$  частиц матрица Лакса дается выражением

$$L_{ij} = \frac{\sinh(\eta\nu)}{\sinh(q_i - q_j + \eta\nu)} e^{\eta p_j} \prod_{k \neq j}^N \frac{\sinh(q_j - q_k - \eta\nu)}{\sinh(q_j - q_k)}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (1.8.4)$$

Исключив из выражения (1.8.4) импульсы с помощью уравнений (1.8.1), получим

$$L_{ij} = \frac{\sinh(\eta\nu)}{\sinh(q_i - q_j + \eta\nu)} \eta^{-1} \dot{q}_j.$$

Ключевым фактом для наших целей является факторизация матрицы Лакса (например см. [145]):

$$L = DV^{-1}(\epsilon)V(\epsilon - \eta\nu)D^{-1}e^{\eta P}, \quad (1.8.5)$$

где  $P = \text{diag}(p_1, \dots, p_N)$ ,  $V$  - это матрица типа Вандермонда

$$V_{ij} = \exp((2i - 1 - N)(q_j + \epsilon))$$

и

$$D_{ij} = \delta_{ij} \prod_{k \neq j}^N \sinh(q_j - q_k).$$

Параметр  $\epsilon$  тут является чисто фиктивным – в выражение для  $L$  он не входит. Заметим, что

$$V(\epsilon - \eta\nu) = S(\eta\nu)V(\epsilon), \quad (1.8.6)$$

где  $S$  - это следующая диагональная матрица:

$$S_{ij}(\zeta) = \delta_{ij} \exp(-(2i - 1 - N)\zeta). \quad (1.8.7)$$

Отметим, что из (1.8.5) следует с учетом условия (1.8.6) очень простое выражение для собственных значений матрицы Лакса при условии  $P = 0$ . В этом случае спектр матрицы Лакса дается спектром матрицы  $S(\eta\nu)$ :

$$\text{Спек}(L |_{P=0}) = \{e^{-(N-1)\eta\nu}, e^{-(N-3)\eta\nu}, \dots, e^{(N-3)\eta\nu}, e^{(N-1)\eta\nu}\}.$$

### 1.8.3 Квантовая спиновая цепочка

**Неоднородная ХХЗ спиновая цепочка** имеет обобщение на случай квантовой аффинной алгебры  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{gl}}_n)$  [147, 148, 149]. Для краткости мы будем называть его тоже ХХЗ цепочкой. Модель определяется следующей квантовой  $R$ -матрицей:

$$R_{12}(u, v) = R_{12}(u/v) = \left( \frac{uq}{v} - \frac{v}{uq} \right) \sum_{a=1}^n E_{aa} \otimes E_{aa} + \\ + \left( \frac{u}{v} - \frac{v}{u} \right) \sum_{1 \leq a \neq b \leq n} E_{aa} \otimes E_{bb} + (q - q^{-1}) \sum_{1 \leq a \neq b \leq n} \left( \frac{u}{v} \right)^{\text{sign}(b-a)} E_{ab} \otimes E_{ba}.$$

Используем обозначение  $z$  для спектрального параметра и  $\hbar$  для константы Планка:

$$u/v = \exp(z), \quad q = \exp(\hbar).$$

Трансферматрица твистованой неоднородной ХХЗ цепочки Гайзенберга на  $N$  узлах дается выражением

$$\hat{T}^{\text{xxz}}(z) = \mathcal{C}(z) \text{tr}_0 \left[ V_0 R_{01}(z - q_1) \dots R_{0N}(z - q_N) \right], \quad (1.8.8)$$

где матрица твиста  $V$  диагональная

$$V = \text{diag}(V_1, \dots, V_n),$$

а нормировочный множитель выбран следующим образом:

$$\mathcal{C}(z) = \prod_{k=1}^N \frac{1}{2 \sinh(z - q_k)}.$$

Такая матрица обладает замечательным свойством

$$[\hat{T}^{\text{xxz}}(z), \hat{T}^{\text{xxz}}(w)] = 0,$$

что и позволяет говорить о наборе независимых матриц-гамильтонианов, которые коммутируют и, в конечном итоге, обеспечивают интегрируемость модели.

Используя иерархический анзац Бете, можно получить следующее выражение для собственных значений трансферматрицы (1.8.8):

$$T_{\Lambda}^{\text{xxz}}(z) = \\ \sum_{b=1}^n V_b \prod_{k=1}^N \frac{\sinh(z - q_k + \hbar \lambda_b^{(k)})}{\sinh(z - q_k)} \prod_{\gamma=1}^{N_{b-1}} \frac{\sinh(z - \mu_{\gamma}^{b-1} + \hbar)}{\sinh(z - \mu_{\gamma}^{b-1})} \prod_{\gamma=1}^{N_b} \frac{\sinh(z - \mu_{\gamma}^b - \hbar)}{\sinh(z - \mu_{\gamma}^b)}. \quad (1.8.9)$$

Выражение (1.8.9) зависит от набора весов

$$\Lambda = \{ \lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_n^{(k)}), k = 1, \dots, N \}$$

которые определяют представление старшего веса (конечномерного и неприводимого)  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{gl}}_n)$  в каждом узле. Также представление зависит от параметров  $q_k$ . Целочисленные параметры  $N_b$  ( $N_0 = N_n = 0$ ) - это количества корней Бете  $\mu_\beta^b$ ,  $b=1, \dots, n-1$ ,  $\beta=1, \dots, N_b$ , которые удовлетворяют уравнениям Бете:

$$\begin{aligned} V_b \prod_{k=1}^N \frac{\sinh(\mu_\beta^b - q_k + \hbar \lambda_b^{(k)})}{\sinh(\mu_\beta^b - q_k + \hbar \lambda_{b+1}^{(k)})} \prod_{\gamma=1}^{N_{b-1}} \frac{\sinh(\mu_\beta^b - \mu_\gamma^{b-1} + \hbar)}{\sinh(\mu_\beta^b - \mu_\gamma^{b-1})} = \\ = V_{b+1} \prod_{\gamma \neq \beta}^{N_b} \frac{\sinh(\mu_\beta^b - \mu_\gamma^b + \hbar)}{\sinh(\mu_\beta^b - \mu_\gamma^b - \hbar)} \prod_{\gamma=1}^{N_{b+1}} \frac{\sinh(\mu_\beta^b - \mu_\gamma^{b+1} - \hbar)}{\sinh(\mu_\beta^b - \mu_\gamma^{b+1})}. \end{aligned}$$

Семейство коммутирующих гамильтонианов можно получить из выражения для трансферматрицы (1.8.8) как вычеты в точках  $z = q_k$ :

$$\hat{H}_i^{\text{xxz}} = \text{res}_{z=q_i} \hat{T}^{\text{xxz}}(z). \quad (1.8.10)$$

Из выражения для собственных значений для трансферматрицы (1.8.9) можно получить выражения для собственных значений гамильтонианов:

$$\begin{aligned} H_{i,\Lambda}^{\text{xxz}} = \\ \sum_{b=1}^n V_b \sinh(\hbar \lambda_b^{(k)}) \prod_{k \neq i}^N \frac{\sinh(q_i - q_k + \hbar \lambda_b^{(k)})}{\sinh(q_i - q_k)} \prod_{\gamma=1}^{N_{b-1}} \frac{\sinh(q_i - \mu_\gamma^{b-1} + \hbar)}{\sinh(q_i - \mu_\gamma^{b-1})} \prod_{\gamma=1}^{N_b} \frac{\sinh(q_i - \mu_\gamma^b - \hbar)}{\sinh(q_i - \mu_\gamma^b)}. \end{aligned}$$

Нам понадобятся выражения для векторного представления, которое определяется выбором

$$\lambda^{(k)} = (1, 0, \dots, 0) \quad \text{для всех } k = 1, \dots, N.$$

Собственные значения Гамильтонианов (1.8.10) приобретают вид

$$H_i^{\text{xxz}} = V_1 \sinh \hbar \prod_{k \neq i}^N \frac{\sinh(q_i - q_k + \hbar)}{\sinh(q_i - q_k)} \prod_{\gamma=1}^{N_1} \frac{\sinh(q_i - \mu_\gamma^1 - \hbar)}{\sinh(q_i - \mu_\gamma^1)}. \quad (1.8.11)$$

Также в этом случае упростятся уравнения Бете:

$$V_1 \prod_{k=1}^N \frac{\sinh(\mu_\beta^1 - q_k + \hbar)}{\sinh(\mu_\beta^1 - q_k)} = V_2 \prod_{\gamma \neq \beta}^{N_1} \frac{\sinh(\mu_\beta^1 - \mu_\gamma^1 + \hbar)}{\sinh(\mu_\beta^1 - \mu_\gamma^1 - \hbar)} \prod_{\gamma=1}^{N_2} \frac{\sinh(\mu_\beta^1 - \mu_\gamma^2 - \hbar)}{\sinh(\mu_\beta^1 - \mu_\gamma^2)},$$

$$V_b \prod_{\gamma=1}^{N_{b-1}} \frac{\sinh(\mu_\beta^b - \mu_\gamma^{b-1} + \hbar)}{\sinh(\mu_\beta^b - \mu_\gamma^{b-1})} = V_{b+1} \prod_{\gamma \neq \beta}^{N_b} \frac{\sinh(\mu_\beta^b - \mu_\gamma^b + \hbar)}{\sinh(\mu_\beta^b - \mu_\gamma^b - \hbar)} \prod_{\gamma=1}^{N_{b+1}} \frac{\sinh(\mu_\beta^b - \mu_\gamma^{b+1} - \hbar)}{\sinh(\mu_\beta^b - \mu_\gamma^{b+1})}$$

для  $b = 2, \dots, n-2$  и

$$V_{n-1} \prod_{\gamma=1}^{N_{n-2}} \frac{\sinh(\mu_\beta^{n-1} - \mu_\gamma^{n-2} + \hbar)}{\sinh(\mu_\beta^{n-1} - \mu_\gamma^{n-2})} = V_n \prod_{\gamma \neq \beta}^{N_{n-1}} \frac{\sinh(\mu_\beta^{n-1} - \mu_\gamma^{n-1} + \hbar)}{\sinh(\mu_\beta^{n-1} - \mu_\gamma^{n-1} - \hbar)}.$$

#### 1.8.4 Теорема про квантово-классическое соответствие

Этот раздел является центральным в данной секции. Здесь мы сформулируем и докажем соответствие между спектром квантовой XXZ цепочкой и спектром матрицы Лакса тригонометрической модели Руйсенаарса-Шнайдера. Наше главное утверждение можно сформулировать в виде следующей теоремы:

**Теорема 22.** *Если в матрице Лакса для тригонометрической модели Руйсенаарса-Шнайдера с  $N$  частицами*

$$L_{ij} \left( \frac{1}{\eta} \{\dot{q}\}_N, \{q\}_N, \eta\nu \right) = \frac{\sinh(\eta\nu)}{\sinh(q_i - q_j + \eta\nu)} \eta^{-1} \dot{q}_j.$$

сделать подстановку

$$\eta\nu = \hbar$$

и

$$\dot{q}_j = \frac{\eta}{\sinh(\eta\nu)} H_j^{\text{XXZ}} \left( \{q\}_N, \{\mu_\beta^1\}_{N_1} \right)$$

где правая часть дается выражением (1.8.11), параметры которого являются решением уравнений Бете (1.8.3-1.8.3) для неоднородной квантовой XXZ спиновой цепочки с неоднородностями  $q_i$  и твистовой матрицей  $V = \text{diag}(V_1, \dots, V_n)$ , то собственными значениями матрицы Лакса будут

$$\begin{aligned} & \text{Spec } L \left( \frac{1}{\sinh \hbar} \{H_j^{\text{XXZ}}\}_N, \{q_j\}_N, \hbar \right) \Big|_{BE} = \\ & = \left\{ \underbrace{e^{-(N-N_1-1)\hbar} V_1, \dots, e^{(N-N_1-1)\hbar} V_1}_{N-N_1}, \underbrace{e^{-(N_1-N_2-1)\hbar} V_2, \dots, e^{(N_1-N_2-1)\hbar} V_2}_{N_1-N_2}, \dots, \right. \\ & \left. \underbrace{e^{-(N_{n-2}-N_{n-1}-1)\hbar} V_{n-1}, \dots, e^{(N_{n-2}-N_{n-1}-1)\hbar} V_{n-1}}_{N_{n-2}-N_{n-1}}, \underbrace{e^{-(N_{n-1}-1)\hbar} V_n, \dots, e^{(N_{n-1}-1)\hbar} V_n}_{N_{n-1}} \right\}. \end{aligned}$$

Доказательство данной теоремы использует результаты работы [146]. Утверждение теоремы можно записать в виде

$$\det \left[ L \left( \frac{1}{\sinh \hbar} \{H_j^{\text{XXZ}}\}_N, \{q_j\}_N, \hbar \right) \Big|_{BE} - \lambda \right] = \prod_{a=1}^n \det [V_a S_{N_a - N_{a-1}} - \lambda]$$

где  $N_0 = N$ ,  $N_n = 0$ , а  $S_N$  - матрица вида (1.8.7) и размера  $N \times N$ .

Определим следующую пару матриц (первая размера  $N \times N$ , а вторая -  $M \times M$ ):

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{ij}(\{x_i\}_N, \{y_i\}_M, g) = \\ & = g \frac{\sinh(\hbar)}{\sinh(x_i - x_j + \hbar)} \prod_{k \neq j}^N \frac{\sinh(x_j - x_k + \hbar)}{\sinh(x_j - x_k)} \prod_{\gamma=1}^M \frac{\sinh(x_j - y_\gamma)}{\sinh(x_j - y_\gamma + \hbar)}, \end{aligned}$$

где  $i, j = 1, \dots, N$  и

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathcal{L}}_{\alpha\beta}(\{y_i\}_M, \{x_i\}_N, g) = \\ & = g \frac{\sinh(\hbar)}{\sinh(y_\alpha - y_\beta + \hbar)} \prod_{\gamma \neq \beta}^M \frac{\sinh(y_\beta - y_\gamma - \hbar)}{\sinh(y_\beta - y_\gamma)} \prod_{k=1}^N \frac{\sinh(y_\beta - x_k)}{\sinh(y_\beta - x_k - \hbar)}, \end{aligned}$$

где  $\alpha, \beta = 1, \dots, M$ . Для определенности  $M \leq N$ .

Для доказательства теоремы ключевой является следующая лемма.

**Лемма 8.** Для матриц  $\mathcal{L}$  и  $\tilde{\mathcal{L}}$  справедливо равенство

$$\det_{N \times N} \left( \mathcal{L}(\{x_i\}_N, \{y_i\}_M, g) - \lambda \right) = \det_{N-M \times N-M} (gS - \lambda) \det_{M \times M} \left( \tilde{\mathcal{L}}(\{y_i\}_M, \{x_i\}_N, g) - \lambda \right)$$

где матрица  $S$  имеет вид (1.8.7) и имеет размеры  $N - M \times N - M$ .

Доказательство Теоремы 22:

Доказательство теоремы состоит из  $n - 1$  поочередного использования леммы 8 и уравнений Бете (1.8.3-1.8.3). Заметим, что нашу матрицу Лакса можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} L_{ij}^{(0)} &= L \left( \frac{1}{\sinh \hbar} \{H_j^{\text{xxz}}\}_N, \{q_j\}_N, \hbar \right) = \\ &= \frac{V_1 \sinh(\hbar)}{\sinh(q_i - q_j + \hbar)} \prod_{k \neq j}^N \frac{\sinh(q_j - q_k + \hbar)}{\sinh(q_j - q_k)} \prod_{\gamma=1}^{N_1} \frac{\sinh(q_j - \mu_\gamma^1 - \hbar)}{\sinh(q_j - \mu_\gamma^1)} = \\ & \mathcal{L}_{ij}(\{q_i - \hbar\}_N, \{\mu_\alpha^1\}_{N_1}, V_1) \end{aligned}$$

и определим

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta}^{(1)} &= \tilde{\mathcal{L}}_{\alpha\beta}(\{\mu_\alpha^1\}_{N_1}, \{q_i - \hbar\}_N, V_1) = \\ &= \frac{V_1 \sinh(\hbar)}{\sinh(\mu_\alpha^1 - \mu_\beta^1 + \hbar)} \prod_{\gamma \neq \beta}^{N_1} \frac{\sinh(\mu_\beta^1 - \mu_\gamma^1 - \hbar)}{\sinh(\mu_\beta^1 - \mu_\gamma^1)} \prod_{k=1}^N \frac{\sinh(q_j - \mu_\gamma^1 - \hbar)}{\sinh(q_j - \mu_\gamma^1)}, \end{aligned}$$

где  $\alpha, \beta = 1, \dots, N_1$ . Из леммы 8 следует

$$\det_{N \times N} (L^{(0)} - \lambda) = \det_{N-N_1 \times N-N_1} (V_1 S - \lambda) \det_{N_1 \times N_1} (L^{(1)} - \lambda).$$

В силу уравнений Бете (1.8.3-1.8.3)

$$L^{(1)} \Big|_{BE} = \frac{V_2 \sinh(\hbar)}{\sinh(\mu_\alpha^1 - \mu_\beta^1 + \hbar)} \prod_{\gamma \neq \beta}^{N_1} \frac{\sinh(\mu_\beta^1 - \mu_\gamma^1 + \hbar)}{\sinh(\mu_\beta^1 - \mu_\gamma^1)} \prod_{\gamma=1}^{N_2} \frac{\sinh(\mu_\beta^1 - \mu_\gamma^2 - \hbar)}{\sinh(\mu_\beta^1 - \mu_\gamma^2)},$$

что можно записать в виде

$$L^{(1)} \Big|_{BE} = \mathcal{L}_{ij}(\{\mu_\alpha^1 - \hbar\}_{N_1}, \{\mu_\alpha^2\}_{N_2}, V_2)$$

Теперь аналогично предыдущему шагу определим матрицу  $N_2 \times N_2$

$$L_{\alpha\beta}^{(2)} = \tilde{\mathcal{L}}_{\alpha\beta}(\{\mu_\alpha^2\}_{N_2}, \{\mu_\alpha^1 - \hbar\}_{N_1}, V_2)$$

Теперь, как и на прошлом шаге, используя лемму 8, получим

$$\det_{N_1 \times N_1} (L^{(1)} - \lambda) = \det_{N_1 - N_2 \times N_1 - N_2} (V_2 S - \lambda) \det_{N_2 \times N_2} (L^{(2)} - \lambda).$$

Повторяя такие же манипуляции на  $n$ -том шаге, мы получим

$$L^{(n-1)} \Big|_{BE} = \mathcal{L}_{ij}(\{\mu_\alpha^{n-1} - \hbar\}_{N_{n-1}}, \{\mu_\alpha^n\}_0, V_n),$$

и используя лемму 8 для  $N = N_{n-1}$ ,  $M = 0$ , найдем

$$\det_{N_{n-1} \times N_{n-1}} (L^{(n-1)} - \lambda) = \det_{N_{n-1} \times N_{n-1}} (V_n S - \lambda),$$

что и завершает доказательство нашей теоремы. ■

### 1.8.5 Выводы

Мы смогли доказать соответствие между квантовой неоднородной XXZ цепочкой и тригонометрической системой Руйсенаарса-Шнайдера. Такое соответствие не является удивительным и вполне ожидаемо, так как XXZ цепочка не очень сильно отличается от XXX, что и позволяет использовать похожие методы для их исследования. Хотя ответ по внешней форме и отличается, и детали доказательств также имеют свои особенности, но в общих чертах доказательства сходны с рациональным случаем, изученным ранее.

Существенно отличным случаем является эллиптический, изучение которого намного сложнее (а поэтому и интереснее) и менее понятно. В будущем очень хотелось бы получить и доказать подобную связь и для этого случая.

Также известны интересные пределы для XXZ цепочки: 1) в одномерную модель Изинга (параметр  $\hbar \rightarrow \infty$ ), которая хорошо изучена; 2) в XX спиновую цепочку (параметр  $\hbar \rightarrow i\pi/2$ ), которая эквивалентна модели свободных фермионов, и также довольно хорошо исследована. К сожалению, пока не понятно, какие классические пределы им соответствуют.

С другой стороны, есть очень интересный предел Иноземцева от модели Руйсенаарса-Шнайдера, который приводит к известной интегрируемой системе – цепочке Тоды, которая также много изучалась, но при этом в ней еще есть неизученные важные вопросы.



## 1.9 Возникновение макроскопических кластеров в обобщенном полностью асимметричном процессе с простыми запретами

### 1.9.1 Введение

Процессы с простыми запретами (ППЗ) одна из основных моделей переноса, допускающих аналитическое описание [151, 152, 153]. Общеизвестно, что различные версии ППЗ могут служить для описания диффузионных систем и диффузионных систем с вынуждающими силами. В последние десятилетия ППЗ играл роль лаборатории для нахождения универсальных критических индексов и скейлинговых функций классов универсальности Эдварда-Уилкинсона (ЭУ) и Кардара-Паризи-Жанга (КПЖ) [154, 155]. Хотя диапазон моделей, поддающихся точному решению, весьма узок, благодаря концепции универсальности полученные результаты применимы к большому классу систем, таких как системы взаимодействующих частиц, растущие поверхности, грани кристаллов, полимеры в случайной среде и т.д. Среди результатов, считающихся универсальными динамический критический индекс класса универсальности КПЖ [156], функция кроссовера КПЖ-ЭУ для времени релаксации [157], функция больших отклонений (ФБУ) для тока частиц с периодическими [158] и открытыми [159, 160] граничными условиями. Недавно, рассматривая интегрируемые процессы на бесконечных решетках, удалось получить множество точных результатов о универсальных скейлинговых функциях, описывающих распределения вероятностей и корреляционные функции, характеризующие временную эволюцию систем в классе универсальности КПЖ.

Полностью асимметричный процесс с исключением (ПАППЗ) — простейшая версия ППЗ, имеющая специальную математическую структуру, которая значительно упрощает решение. Воспользовавшись этой структурой, Деррида и Лебовиц впервые получили точное выражение для ФБУ ПАППЗ на периодической решетке произвольного размера, дающую в скейлинговом пределе универсальную скейлинговую функцию. Кроме того, и на бесконечной [161] и на периодической [162] решетке для ПАППЗ были получены замкнутые детерминантные выражения функций Грина. В итоге были построены все корреляционные функции процесса на бесконечной решетке [163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170]. Примечательно, что ПАППЗ, в отличие от частично асимметричного случая, остается точнорешаемым и в дискретном времени. Решены модели для нескольких вариантов дискретных правил обновления: последовательный [171], параллельный [172] и параллельный подрешеточный [173]. В скейлинговом пределе все эти версии ПАППЗ показывают одно и то же универсальное поведение. Представляется интересной задачей исследовать механизмы смены поведения при выходе системы из класса КПЖ.

В работе [174] было предложено обобщение ПАППЗ, позже оказавшееся предельным случаем  $q = 0$  общей трехпараметрической модели многочастичного хоппинга [175], известной как  $q$ -Хан- или  $(q, \mu, \nu)$ - бозонный процесс [176, 177], и в свою очередь содер-

жащее ПАППЗ с параллельными и последовательными обновлениями как частные случаи. В обобщенном ПАППЗ (ОПАППЗ) введено дополнительное взаимодействие между частицами, усиливающее тенденцию к кластеризации частиц по сравнению с обычным ПАППЗ. Динамику модели можно смотреть как на процесс сходный с ПАППЗ, в котором кластеры частиц диффундируют, разбиваясь на меньшие части или сливаясь в большие кластеры при встрече. Относительная частота этих процессов регулируется дополнительным параметром  $\lambda$ . Чем больше  $\lambda$ , тем больше эффективное притяжение между частицами и, как следствие, размер кластеров в типичной конфигурации частиц на решетке. Предельный случай  $\lambda \rightarrow \infty$ , который мы будем называть пределом детерминистической агрегации (ДА) соответствует режиму, в котором частицы необратимо собираются вместе, в конце концов образуя один гигантский кластер, который совершает простое направленное случайное блуждание.

Главная цель данного раздела исследовать как меняется скейлинговое поведение ОПАППЗ при приближении к пределу ДА. Мы уделим основное внимание исследованию корреляций в стационарном состоянии и флуктуаций потока частиц в пределе большого времени. Для умеренной величины взаимодействия естественно ожидать что поведение будет подобно простому ПАППЗ, принадлежащему классу универсальности КПЖ. Хорошо известно, что стационарное состояние таких систем некоррелировано в масштабе сравнимом с размером системы. Также движение частиц в бесконечной системе имеет субдиффузионный характер. Хотя в конечной системе оно остаётся диффузионным, коэффициент диффузии отдельной частицы убывает как  $\Delta \sim 1/\sqrt{L}$  при стремлении размера системы  $L$  к бесконечности. Более тонкие детали флуктуаций потока частиц можно извлечь из ФБУ полученной Дерридой и Лебовицем [158] для обычного ПАППЗ, скейлинговый вид которой, как было впоследствии показано, справедлив и для многих других моделей [179, 180, 181, ?]. С другой стороны в пределе ДА частицы образуют единый гигантский кластер движущийся как изолированная частица. Такое поведение соответствует неограниченному росту корреляционной длины и диффузионному движению каждой частицы. В результате на одном конце диапазона параметра  $\lambda$  мы будем наблюдать множество малых кластеров, быстрое убывание корреляций и флуктуации тока типа КПЖ, а на другом конце один макроскопический кластер, и чисто диффузионное движение частиц. Естественный вопрос — при каком среднем размере или при каком количестве кластеров в типичной конфигурации выживает универсальность КПЖ типа, и как один предельный режим переходит в другой. Интуитивно ясно, что по крайней мере при конечной плотности кластеров конечного размера, которая устанавливается при конечных плотностях  $\lambda$ , система должна быть в режиме КПЖ, поскольку конечные кластеры можно эффективно рассматривать как новые частицы. Однако анализ, проводимый ниже, показывает что можно подойти к режиму ДА гораздо ближе, сохраняя при этом характерный для режима КПЖ скейлинговый вид ФБУ потока частиц. Мы продемонстрируем, что даже когда  $\lambda$  и, следовательно, типичный

размер кластера измеряются в шкале, растущей с размером системы, ФБУ сохраняет свою функциональную форму до тех пор, пока  $\lambda$  не будет порядка  $L^2$ . Когда  $\lambda/L^2 \rightarrow 0$  зависимость от величины  $\lambda$  входит только в неуниверсальные константы, влияющие только на флуктуационный масштаб, но не на функциональный вид распределения. В то же время, когда  $\lambda \sim L^2$ , типичная конфигурация представляет из себя конечное число кластеров размера порядка размера системы  $L$ . На этом масштабе наблюдается переходный режим между пределами КПЖ и ДА. Мы получаем ФДУ которая описывает кроссовер от функции Дерриды-Лебовица к чисто гауссовому виду при изменении  $\lambda/L^2$  от нуля до бесконечности.

Чтобы иметь представление о том, откуда берется шкала  $\lambda \sim L^2$  можно привести следующий рассуждение в духе теориц среднего поля. Представим себе систему большого числа  $N$  взаимодействующих частиц диффундирующих по одномерной решетке с фиксированной общей плотностью,  $N/L = \rho$ , как системы диффундирующих, агрегирующих и диссоциирующих кластеров (компактных групп частиц). Два кластера сливаются в один при встрече, тогда как любой кластер может разбиться на два меньших кластера, в любом месте с некоторой малой частотой  $\alpha$ . Тогда, при сиремлении  $\alpha$  к нулю, мы ожидаем увидеть переход от множества малых кластеров к одному кластеру размера  $N$ . Переходный режим — это режим с конечным числом кластеров, сравнимых с  $N$  по размеру. Он должен обеспечиваться равновесием между разрушающимися и вновь создающимися кластерами на всех масштабах. Пусть  $P(n)$  — общая плотность кластеров, состоящих из  $n$  частиц. Чтобы в типичной конфигурации было конечное число кластеров, плотность  $P(n)$  должна быть порядка  $1/N^2$  во всем диапазоне значений  $n$  вплоть до величин порядка  $N$ . Поскольку кластер из  $n$  частиц может разделиться на два меньших кластера в любой из его точек, средняя частота этого события будет равна  $n\alpha P(n)$ . С другой стороны число кластеров размера  $n$  возникающих в единицу времени за счет слияния двух кластеров размера  $k$  и  $(n - k)$  равно  $\sum_k P(k)P(n - k)$ , что имеет порядок  $1/N^3$ . Приравнивая эти два выражения, находим, что частота  $\alpha$  должна быть порядка  $1/N^2$ . Аналогом частоты деления  $\alpha$  в нашей модели является величина обратная параметру  $\lambda$ . Проведенный ниже асимптотический анализ точных выражений показывает, что параметр кроссовера, контролирующий переходный режим при  $\lambda \rightarrow \infty$ , можно выбрать пропорциональным  $\lambda/N^2$ . Меняя этот параметр мы получаем ФБУ, дающую интерполяцию между режимами КПЖ и ДА.

Следует упомянуть другие примеры исследований моделей с управляемой кластеризацией частиц. В работе [182] был предложен вариант ПАППЗ с взаимодействием между следующими за ближайшими соседями. Взаимодействие повышает степень кластеризации, и поэтому диаграмма плотность-поток смещена в область высоких плотностей. Подтвержденное численным моделированием существование четвертой фазы в открытой системе, обнаруженное в приближении среднего поля, демонстрирует необычный характер потока частиц в режиме повышенного кластерообразования.

Также модель с диффузией кластеров, агрегацией в местах их контактов и одночастичной диссоциацией была предложена в [183]. Среднеполевой анализ модели показал, что в системе происходит динамический фазовый переход. Стационарное распределение масс кластеров экспоненциально убывает при увеличении массы в одной фазе, тогда как в другой имеется бесконечный кластер в купе с конечными кластерами распределенными по степенному закону.

Заметим что обе упомянутые модели не являются интегрируемыми. Такие модели обычно могут быть аналитически исследованы лишь в приближении среднего поля или, в лучшем случае, их стационарное состояние допускает аналитическое описание, см. например [182]. Анализ такого типа дает лишь термодинамические характеристики, такие как фундаментальная диаграмма плотность-поток, которые не универсальны и в большой степени зависят от деталей взаимодействия. В то же время, в нашем случае интегрируемость позволяет точно аналитически решать полную динамическую задачу, и в частности в скейлинговом пределе находить универсальные характеристики флуктуаций.

Далее мы придерживаемся следующей программы действий. В разделе 1.9.2 сформулирована модель и введено преобразование ППЗ-ПНРВ, позволяющее установить связь ОПАППЗ с другой моделью, допускающей неограниченное число частиц в узле. Хотя многие характеристики двух моделей совпадают модели типа процесса с нулевым радиусом взаимодействия (ПНРВ) имеют факторизованное стационарное распределение, которое можно анализировать принятым в статистической физике методом канонической статсуммы.

В разделе 1.9.3 мы исследуем стационарное состояние ОПАППЗ и соответствующей модели типа ПНРВ. Мы получаем точное выражение для статсуммы, которое используем для нахождения распределения чисел заполнения. Последнее можно проинтерпретировать как распределение размеров кластеров в ОПАППЗ. Также мы выводим производящую функция стационарных вероятностей прыжков и, в частности, выводим точную формулу для число прыжков в единицу времени. Точная статсумма и поток частиц представлены в виде контурных интегралов, которые могут быть вычислены в виде обрывающихся гипергеометрических рядов Гаусса  ${}_2F_1$ , и Аппеля  $F_1$ , соответственно. После этого проводится асимптотический анализ полученных выражений: сначала в приближении седловой точки, применимом когда  $\lambda/L^2 \rightarrow 0$ , а потом в пределе  $\lambda/L^2 \rightarrow const > 0$ , в котором приближение седловой точки перестает работать. В первом случае мы получаем геометрическое распределение конечных (или субэкстенсивных) размеров кластеров и термодинамическую формулу для потока частиц (фундаментальная диаграмма), зависящего от двух параметров и плотности частиц. Во втором случае мы получаем распределение размеров кластеров на масштабе размера системы, и получаем распределения, выраженные через модифицированные функции Бесселя. В последнем подразделе раздела 1.9.3, мы анализируем стационарное состоя-

ние ОПАППЗ непосредственно, не прибегая к ППЗ-ПНРВ преобразованию, пользуясь тем, что в большом каноническом ансамбле стационарная мера ОПАППЗ устроена так же, как распределение Гиббса в одномерной модели Изинга. Мы вычисляем корреляционную функцию плотности частиц и обсуждаем ее поведение в обоих пределах.

Раздел 1.9.4 посвящен анализу флуктуаций потока частиц. Сначала мы приводим краткое изложение решения упомянутых моделей с помощью анзаца Бете, и метода вычисления максимального собственного значения марковской матрицы, модифицированной добавлением параметра  $\gamma$ , считающего прыжки частиц. Это собственное значение, заданное параметрически в виде двух рядов с коэффициентами выраженными через  ${}_2F_1$  и  $F_1$  имеет смысл производящей функции кумулянтов усредненного по времени потока частиц, а так же преобразования Лежандра функции больших уклонений интегрального потока. В частности, кроме среднего потока, полученного в разделе 1.9.3, мы получаем точное коэффициента диффузии частицы в ОПАППЗ. Асимптотический анализ снова состоит из двух частей: приближения седловой точки  $\lambda/L^2 \rightarrow 0$ , воспроизводящего универсальную скейлинговую функцию Дерриды-Лебовица для величин  $\lambda$  по порядку меньших  $L^2$ , и асимптотического анализа на масштабе  $\lambda \sim L^2$ , который даёт функцию, описывающую переход от режима КПЖ к гауссовым флуктуациям.

Последний раздел 1.9.5 предназначен, чтобы связать между собой результаты, полученные для режима КПЖ. Мы напоминаем читателю скейлинговую теорию, развитую в [184], которая утверждает, что многие неуниверсальные характеристики систем, принадлежащих к классу универсальности КПЖ зависят только от двух размерных инвариантов, которые, в частности, связаны с размерными константами в уравнении КПЖ. Мы демонстрируем, что полученные точные результаты полностью согласуются со скейлинговой теорией и выражаем через инварианты неуниверсальные константы, возникающие в выражении ФБУ.

## 1.9.2 Определение модели и преобразование ППЗ-ПНРВ

Рассмотрим  $M$  частиц на одномерной цепочке из  $L$  узлов с периодическими граничными условиями. В каждом узле решетки может быть не более одной частицы. Конфигурация частиц полностью задается координатами  $M$  частиц,  $\mathbf{x} = (1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_M \leq L)$ . Конфигурации частиц эволюционируют в дискретном времени с *покластерным* обратным последовательным обновлением. Мы будем называть кластером компактную (без внутренних пустот) группу занятых узлов или соответствующую группу частиц вида  $(x_{i-k} = x - k, \dots, x_i = x)$  с двумя незанятыми узлами по краям. Обновление конфигурации частиц на каждом временном шаге начинается с крайнего правого узла любого кластера. Например, можно выбрать кластер с максимальной координатой  $x_i \leq L$  самой правой частицы. Эта частица делает попытку прыгнуть вправо, т.е. по часовой стрелке, приводящей к успеху,  $(x \rightarrow x + 1 \pmod L)$ , с вероятностью  $p$

или неудаче,  $(x \rightarrow x)$ , с вероятностью  $1 - p$ . В случае успеха, если данный кластер состоит более чем из одной частицы, следующая частица пытается последовать примеру первой с вероятностью  $\mu$ , вообще говоря отличной от  $p$ . Так же поступает третья, четвертая, и т.д. частицы до тех пор, пока одна из частиц не откажется прыгать или не будет достигнут конец кластера. Другими словами, для кластеров из  $k$ -частиц с  $k > 1$  возможны следующие исходы:

- а) все  $k$  частиц остаются на месте с вероятностью  $(1 - p)$ ;
- б)  $m < k$  частиц делают шаг вперед с вероятностью  $p\mu^{m-1}(1 - \mu)$ ;
- в) все  $k$  частиц прыгают с вероятностью  $p\mu^{k-1}$

Далее мы переходим к следующему против часовой стрелки кластеру и т.д. пока все кластеры не будут обновлены. Заметим, что результат не зависит от того с какого кластера мы начинаем. Покластерное обратное последовательное обновление, исключает ситуацию, при которой начало кластера обновляется позже конца, возникающую при обычном обратном поузельном обновлении, когда узлы с номерами 1 и  $L$  принадлежат одному и тому же кластеру. Также не трудно заметить, что запрет на присутствие более одной частицы в узле выполняется автоматически.

В такой формулировке динамические правила параметризованы двумя вероятностями  $p$  и  $\mu$ , которые выбираются в диапазоне  $0 \leq p, \mu \leq 1$ . Частные случаи  $\mu = 0$  и  $\mu = p$  соответствуют обычным ПАПЗ с параллельным и обратным последовательным обновлениями, соответственно. В случае  $\mu = 1$  вероятность, с которой частицы кластера следуют за первой частицей равна единице. Это предел ДА, в котором кластеры необратимо сливаются при встрече, а обратного распада кластеров не происходит.

С помощью отображение ППЗ-ПНРВ, ОППАПЗ можно связать с моделью типа ПНРВ, где разрешено любое число частиц в узле. Чтобы установить соответствие, заменим кластер из  $n$  частиц вместе с одним пустым узлом перед ним одним узлом с  $n$  частицами как показано на Рис. 10. Таким образом, получаем системы из  $M$  частиц, находящихся на решетке  $\mathcal{L}$  с  $N = L - M$  узлами, в которых в отличие от ППЗ может находиться любое число частиц. Прыжок  $m$  частиц из распавшегося кластера, заменяется на прыжок такого же числа частиц из соответствующего узла в следующий узел справа. В соответствии с такими динамическими правилами вероятность прыжка  $m$  частиц из узла с  $n$  частицами зависит от  $n$  и  $m$  и имеет вид

$$\varphi(m|n) = \begin{cases} (1 - p), & m = 0; \\ p\mu^{m-1}(1 - \mu), & 0 < m < n; \\ p\mu^{n-1} & m = n, \end{cases}$$

для  $n > 0$  и  $\varphi(0|0) = 1$ , причем все узлы обновляются одновременно, как при параллельном обновлении. Как уже было замечено в разделе 1.9.1, вероятности прыжков в этой модели это предел  $q \rightarrow 0$  вероятностей прыжков в общей трехпараметрической модели

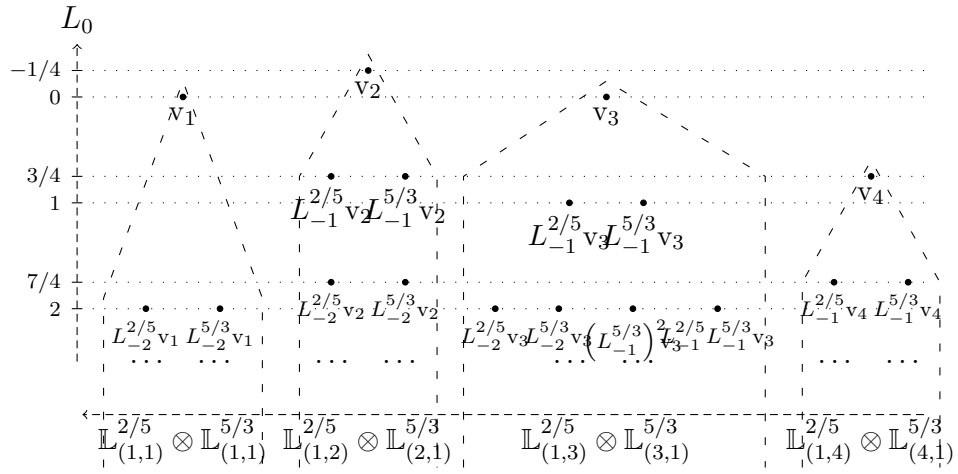


Рисунок 9 — Вектора базиса в  $\bigoplus_{n=1}^4 \mathbb{L}_{(1,n)}^{2/5} \otimes \mathbb{L}_{(n,1)}^{5/3}$  с  $L_0$  градуировкой  $\leq 2$ . Вектора  $v_n$ ,  $1 \leq n \leq 4$  обозначают старшие вектора  $\mathbb{L}_{(1,n)}^{2/5} \otimes \mathbb{L}_{(n,1)}^{5/3}$ . Через  $L_n^{2/5}$  и  $L_n^{5/3}$  мы обозначаем компоненты  $T_{2/5}(z)$  и  $T_{5/3}(z)$  соответственно.

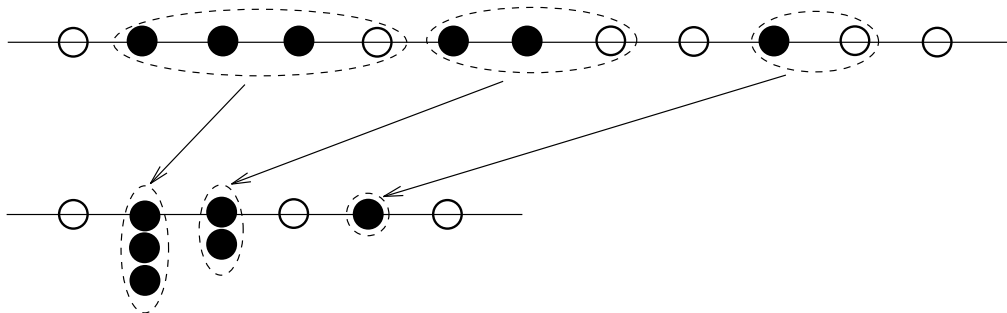


Рисунок 10 — ZRP-ASEP mapping.

многочастичного хопшинга [?], которые зависят от трех параметров  $q, \mu$  и  $\nu$ . Здесь и далее мы будем придерживаться обозначений, введенных в статье [?], отличающихся от обозначений использованных в первой статье по [174]. Параметры  $\mu$  и  $\nu$  используемые ниже (и в [?]) соответствуют  $p(1+\nu)$  и  $\nu p/(1-p)$  из [174], соответственно. Используемый здесь параметр  $\nu$  связан с параметрами  $p$  и  $\mu$ , введенными выше, соотношением

$$\nu = \frac{\mu - p}{1 - p}.$$

Далее, там где это оправдано краткостью записи, мы используем еще один параметр

$$\lambda = \frac{1}{1 - \nu}. \quad 1.9.1$$

В частности это удобно при изучении предела ДА, в котором  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Заметим, что отображение ZRP-ASEP не дает взаимно однозначного соответствия между конфигурациями частиц, а только соответствие по модулю трансляций решетки. В частности, число конфигураций в системах типа ППЗ больше, чем в соответствующих им системах типа ПНРВ. Если задать связанные соответствием начальные конфигурации частиц в системах типа ПНРВ и ППЗ, последующие процессы находятся во взаимнооднозначном соответствии с точки зрения расстояния между частицами, но не в терминах координат частиц. Корень разницы — различная трансляционная симметрия решеток с разным числом узлов: конфигурация переходит себя при трансляции на  $L$  шагов в ППЗ и на  $M$  шагов в ПНРВ. Как будет видно далее, требуется небольшое изменение формул, чтобы перейти от одной системы к другой. Однако различие не проявляет себя в трансляционно инвариантных формулах, например для локальных наблюдаемых в стационарном состоянии, таких как плотность и поток частиц. Вычисленные в системе одного типа, они могут быть легко связаны с аналогичными характеристиками систем другого типа. Например плотности частиц определенные в системах типа ППЗ и ПНРВ выражениями

$$c = M/L \text{ и } \rho = M/N,$$

соответственно, связаны между собой соотношением

$$c = \frac{\rho}{1 + \rho}.$$

Общее число прыжков частицодно и то же в обеих системах. В частности, это справедливо для среднего числа  $J$  прыжков зв один шаг времени. Поэтому средняя скорость частиц  $v = J/M$  одна и та же в обеих системах, а локальные токи, т.е. среднее число частиц выходящих из узла,  $j^{\text{ППЗ}} = J/L$  и  $J^{\text{ПНРВ}} = J/N$ , связаны соотношениями

$$\frac{j^{\text{ППЗ}}}{c} = \frac{j^{\text{ПНРВ}}}{\rho} = v.$$

Ниже мы воспользуемся этими соотношениями, чтобы выразить стационарные характеристики системы типа ППЗ через характеристики соответствующей системы типа ПНРВ.



### 1.9.3 Стационарное состояние

#### 1.9.3.1 Метод канонической статсуммы

Преимущество моделей типа ПНРВ — простой вид их стационарного распределения. Рассмотрим одномерную периодическую решетку  $\mathcal{L} = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , состоящую из  $N$  узлов с  $M$  частицами. В каждом узле разрешается находиться любому числу частиц. В системах типа ПНРВ удобно задавать конфигурации частиц с помощью  $N$  чисел заполнения всех узлов

$$\mathbf{n} = \{n_1, \dots, n_N\}.$$

На каждом временном шаге система обновляется перемещением  $m_i \leq n_i$  частиц из каждого узла номер  $i = 1, \dots, N$  в следующий узел с номер  $i+1$  с вероятностью  $\varphi(m_i|n_i)$ , определенной в (1.9.2). Поэтому, вероятность  $P_t(\mathbf{n})$  конфигурации  $\mathbf{n}$  в момент времени  $t$  подчиняется уравнению Чепмена-Колмогорова

$$P_{t+1}(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{n}'} \mathbf{M}_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} P_t(\mathbf{n}'),$$

с матрицей переходных вероятностей  $\mathbf{M}$ , задаваемой матричными элементами

$$\mathbf{M}_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} = \sum_{\{m_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}_{k \in \mathcal{L}}} \prod_{i \in \mathcal{L}} T_{n_i, n'_i}^{m_{i-1}, m_i},$$

где  $T_{n_i, n'_i}^{m_{i-1}, m_i} = \delta_{(n_i - n'_i), (m_{i-1} - m_i)} \varphi(m_i | n'_i)$ . В работе [?] показано, что стационарная мера  $P_{st}(\mathbf{n})$  факторизуется на множители, каждый из которых зависит от состояния только одного узла,

$$P_{st}(\mathbf{n}) = \frac{1}{Z(M, N)} \prod_{i=1}^N f(n_i),$$

тогда и только тогда, когда существуют два набора неотрицательных чисел  $w(m)$  and  $v(m)$ , занумерованных целыми положительными числами  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , таких что

$$\varphi(m|n) = \frac{v(m)w(n-m)}{\sum_{i=0}^n v(i)w(n-i)}$$

В этом случае одноузельный множитель  $f(n)$  будет иметь вид

$$f(n) = \sum_{i=0}^n v(i)w(n-i),$$

а  $Z(M, N)$  — нормировочный множитель, который в статистической физике называется статистической суммой. В нашем случае функции  $v(k)$  и  $w(k)$ , задающие вероятности перескоков (1.9.2) можно выбрать в виде

$$v(k) = \mu^k (\delta_{k,0} + (1 - \delta_{k,0})(1 - \nu/\mu)), \quad 1.9.2$$

$$w(k) = (\delta_{k,0} + (1 - \delta_{k,0})(1 - \mu)), \quad 1.9.3$$

который, согласно формуле (1.9.3.1), приводит к выражению для одноузельного веса

$$f(n) = (\delta_{n,0} + (1 - \delta_{n,0})(1 - \nu)).$$

С факторизованной стационарной мерой (1.9.3.1) можно легко вычислять статсумму, которая, в свою очередь используется, для вычисления наблюдаемых в стационарном состоянии [186, 187]. Статсумма — нормировочный множитель стационарного распределения (1.9.3.1), равный сумме ненормированных весов всех конфигураций.

$$Z(M, N) = \sum_{n_1, \dots, n_N \geq 0} \delta_{n_1 + \dots + n_N, M} \prod_{i=1}^N f(n_i)$$

Здесь  $f(n)$  — это одноузельные веса (1.9.3.1), а дельта-символ Кронекера ограничивает суммирование на множество конфигураций с фиксированным числом частиц  $M$ . Сумма представляется в виде контурного интеграла

$$Z(M, N) = \oint_{\Gamma_0} \frac{[F(z)]^N dz}{z^{M+1} 2\pi i},$$

где

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n f(n)$$

есть производящая функция одноузельных весов, а интегрирование производится по малому контуру вокруг точки  $z = 0$ , проведенному так, что все остальные особенности функции  $F(z)$  остаются снаружи. Из статсуммы можно извлечь характеристики стационарного состояния модели. В частности, вероятность числа заполнения  $n$  любого узла имеет вид

$$P(n) = f(n) \frac{Z(M-n, N-1)}{Z(M, N)}$$

Еще одна корреляционная функция — вероятность  $\mathcal{H}(n)$  того, что  $n$  частиц на решетке прыгнут одновременно. Её производящую функцию

$$\Psi(x) \equiv \sum_{n=0}^M x^n \mathcal{H}(n).$$

можно получить из произведения

$$\Phi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \varphi(m|n) f(n) x^m z^n.$$

Пользуясь представлением (1.9.3.1) вероятностей  $\varphi(m|n)$  и меняя порядок суммирования

$$\Phi(x, z) = V(xz)W(z),$$

где  $V(t)$  и  $W(t)$  — производящие функции последовательностей  $v(k)$  и  $w(k)$ :

$$V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k)t^k, \quad W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} w(k)t^k.$$

В результате,  $\Psi(x)$  можно представить в виде

$$\Psi(x) = \frac{1}{Z(M,N)} \oint_{\Gamma_0} \frac{[\Phi(x,z)]^N dz}{z^{M+1} 2\pi i}.$$

Из  $\Psi(x)$  можно восстановить распределение и вычислить его моменты. Функцию  $\mathcal{H}(n)$  можно представить в виде контурного интеграла  $\Psi(x)$  вокруг  $x = 0$ , тогда как для моментов нужно вычислять производные в точке  $x = 1$ . В частности среднее полное число частиц, прыгающих в единицу времени, равно  $J = \Psi'(1)$  и, заметив, что  $F(z) = V(z)W(z)$ , мы получим

$$J = \frac{N}{Z(M,N)} \oint_{\Gamma_0} \frac{[F(z)]^N V'(z) dz}{z^M V(z) 2\pi i}.$$

Производящие функции последовательностей  $w(k)$ ,  $v(k)$  и  $f(k)$ , определенных в (1.9.2-1.9.3.1), суммируются к виду

$$V(t) = \frac{1 - \nu t}{1 - \mu t}, \quad W(t) = \frac{1 - \mu t}{1 - t}, \quad F(t) = \frac{1 - \nu t}{1 - t}.$$

Интегралы, выписанные выше, вычисляются через гипергеометрические функции одной и двух аргументов. В частности большая каноническая статсумма  $[F(z)]^N$  и функция  $[F(z)]^N V'(z)/V(z)$  — оказываются производящими функциями гипергеометрической функции Гаусса  ${}_2F_1$  и гипергеометрической функции Аппеля  $F_1$ , соответственно. Интегралы извлекают из этих производящих функций коэффициенты членов номер  $M$  и  $(M - 1)$ , соответственно. Поэтому, для статсуммы и среднего числа прыжков в единицу времени будем иметь

$$Z(M,N) = \binom{L-1}{M} {}_2F_1(-M, -N; 1-L; \nu),$$

$$J = \frac{(\mu - \nu)NM}{(L-1)} \frac{{}_2F_1(1-M; 1-N, 1; 2-L; \nu, \mu)}{{}_2F_1(-M, -N; 1-L; \nu)}.$$

Если один из аргументов функции Аппеля  $F_1$  положить равным нулю, то она сведется к функции Гаусса  ${}_2F_1$ . Таким образом, в пределе  $\mu = 0$ , т.е. в случае параллельного обновления, мы воспроизводим результат полученный в [178]:

$$J_{\text{пар}} = \frac{p}{1-p} \frac{NM}{(L-1)} \frac{{}_2F_1(1-M; 1-N, 2-L; -\frac{p}{1-p})}{{}_2F_1(-M, -N; 1-L; -\frac{p}{1-p})}.$$

Случай  $\nu = 0$  соответствует обратному последовательному обновлению для которого получаем формулу

$$J_{\text{пос}} = \frac{pNM}{(L-1)} {}_2F_1(1-M; 1, 2-L; p),$$

выведенная в [188]. (В [188] имеется опечатка: множитель  $z$ , соответствующий нашему  $p$  отсутствует в финальном выражении, формула (16).) Нужно заметить, что функция Апшеля  $F_1$  есть частный случай двух аргументов функции Лауричеллы  $F_D$ , которая может зависеть от произвольного числа аргументов. Выражение для потока частиц в частном случае ПНРВ, где максимум одна частица прыгает из узла с  $r \leq K$  частицами с произвольными вероятностями  $0 < u(r) < 1$ , а из узлов с  $r > K$  с вероятностью  $u(r) = 1$  полученное в [189], выражено через функции Лауричеллы  $F_D$  с  $K$  аргументами. Весьма вероятно, что нашу модель и модель, изученную в [189], можно объединить в рамках единого общего процесса.

Эти результаты дают точные выражения статсуммы, из которого можно получить распределение чисел заполнения, а также среднего потока частиц на произвольной конечной решетке. Физический интерес, однако, представляют их предельный вид, в так называемом термодинамическом пределе,

$$N \rightarrow \infty, M \rightarrow \infty, M/N = \rho = const$$

Оказывается, что в зависимости от величины параметра  $\lambda$  естественно возникают два различных предела.

### 1.9.3.2 Асимптотический анализ

#### Метод перевала, $\lambda/N^2 \rightarrow 0$

В пределе (1.9.3.1), можно попробовать асимптотически вычислить интегралы (1.9.3.1, 1.9.3.1) методом перевала. Эти интегралы имеют вид

$$\mathcal{I}_N(h(z), g(z)) = \oint_{\Gamma_0} e^{Nh(z)} g(z) \frac{dz}{2\pi iz},$$

где

$$h(z) = \ln(1 - \nu z) - \ln(1 - z) - \rho \ln z.$$

Критические точки функции  $h(z)$  определяются уравнением  $h'(z) = 0$ , у которого есть два решения

$$z_{\pm} = 1 + \frac{(1 - \nu)}{2c\nu} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4(1 - c)\nu}{1 - \nu}} \right),$$

где  $c = \rho/(1 + \rho)$  — концентрация частиц в системе типа ППЗ. Нетрудно видеть, что  $0 < z_- < 1$  и  $z_+ > 1$ ,  $\Re h(z_+) < 0$  и  $\Re h(z_-) > 0$ . Поэтому точка

$$z = z_-$$

вносит доминирующий вклад в интеграл. Выберем в качестве контура наискорейшего спуска окружность радиуса  $z_-$ , с центром в начале координат. Тогда интеграл (1.9.3.2)

асимптотически равен

$$\mathcal{I}_N(h(z), g(z)) = \frac{e^{Nh_0}}{\sqrt{2\pi N|h_2|}} \times \left[ g_0 + \frac{1}{2N} \left( \frac{g_2}{|h_2|} + \frac{g_1 h_3}{h_2^2} + \frac{g_0}{4} \left( \frac{h_4}{h_2^2} + \frac{5h_3^2}{3|h_2|^3} \right) \right) + O(N^{-2}) \right],$$

где  $g_k = (iz\partial_z)^k g(z)|_{z=z_-}$  и  $h_k = (iz\partial_z)^k h(z)|_{z=z_-}$ . Выбрав  $g(z) = 1$ , получим статсумму в ведущем порядке

$$Z(M, N) = \mathcal{I}_N(h(z), 1) \simeq \frac{\exp(Nh_0)}{\sqrt{2\pi N|h_2|}},$$

Чтобы найти распределение чисел заполнения  $P(n)$ , пользуясь формулой (1.9.3.1), нужно также вычислить  $Z(M-n, N-1)$ . Для чего возьмем  $g(z) = z^n \exp[-h(z)]$ . В результате, в пределе (1.9.3.1) при не слишком больших  $n$  находим  $P(n) \simeq f(n)g(z_-)$ , откуда получается привычное, похожее на распределение Гиббса, выражение

$$\begin{aligned} P(n) &= \lambda^{-1} \exp(-n/n^* - h(z_-)), \quad n > 0 \\ P(0) &= \exp(-h(z_-)), \end{aligned}$$

где  $n^* = -1/\ln z_-$ . Отсюда видно, что только конечные числа заполнения (в основном  $n \lesssim n^*$ ) могут возникать с конечной вероятностью в стационарном состоянии.

Чтобы дать интерпретацию этого результата в терминах ОПАППЗ, заметим, что условное распределение, снабженное условием  $n > 0$ , есть ни что иное, как распределение кластеров на решетке. Это геометрическое распределение  $P(l_{\text{cl}} = n) = (1 - z_-) z_-^n$ , со средней длиной кластера  $\langle l_{\text{cl}} \rangle = (1 - z_-)^{-1}$ . При  $\lambda \rightarrow \infty$ , средняя длина кластера растет как  $\langle l_{\text{cl}} \rangle \sim \sqrt{\lambda/\rho}$ , и, соответственно, среднее число кластеров на решетке  $M \langle l_{\text{cl}} \rangle^{-1} \simeq Lc^{3/2}/\sqrt{\lambda(1-c)}$ . Как станет ясно в конце данного подраздела, метод перевала работает при  $\lambda L^{-2} \rightarrow 0$ . Поэтому, эти результаты справедливы когда на решетке имеется растущее с размером системы число кластеров субэкстенсивной длины (т.е.  $o(L)$ ).

Для нахождения тока нужно вычислить отношение интегралов

$$J = N \frac{\mathcal{I}_N(h(z), g(z))}{\mathcal{I}_N(h(z), 1)},$$

с функцией  $g(z) = zV'(z)/V(z) = (1 - \mu z)^{-1} - (1 - \nu z)^{-1}$ . Первая поправка к термopредельному выражению имеет универсальный смысл в рамках теории КПЖ, который мы обсудим в разделе 1.9.5. Вычисляя отношение с точностью до этой поправки, находим

$$J = N g_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{g_1 h_3}{|h_2|^2} + \frac{g_2}{|h_2|} \right) + O(N^{-1}). \quad 1.9.4$$

В ведущем порядке, получим соотношение между потоком и плотностью (так называемую фундаментальную диаграмму). Поток в системе ППЗ типа, выраженный через  $p$

и  $\mu$  имеет вид

$$j^{\text{ППЗ}} = \frac{cp(1 + (1 - 2c)\mu)}{2\mu + 2c(p(1 - \mu) - \mu)} - \frac{cp\sqrt{(1 - \mu)(1 - 4(1 - c)c(p - \mu) - \mu)}}{2\mu + 2c(p(1 - \mu) - \mu)}. \quad 1.9.5$$

В частных случаях из этого выражения получаются:

$\mu = 0$ , — хорошо известная фундаментальная диаграмма ПАППЗ с параллельным обновлением, полученная при исследовании моделей дорожного движения [190],

$$j_{\text{пар}} = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - 4pc(1 - c)} \right);$$

$\mu = p$ , — фундаментальная диаграмма ПАППЗ с обратным последовательным обновлением [191],

$$j_{BSU} = \frac{(1 - c)cp}{1 - cp};$$

$\mu = 1$ , — выражение для для предела ДА, в котором все частицы слипаются в один кластер, совершающий обычное бернулливское случайное блуждание,

$$j_{DA} = cp.$$

В случае параллельного обновления, фундаментальная диаграмма симметрична из-за частично-дырочной симметрии. Чем больше значение  $\mu$  тем больше перекошен вправо график тока. В пределе ДА, он выражается в линейную функцию плотности.

Мы не будем приводить здесь явное выражение для поправки в силу его громоздкости. Интересно однако посмотреть на него в пределе ДА:

$$\mu \rightarrow 1, \nu \rightarrow 1, p = \frac{\mu - \nu}{1 - \nu} = const.$$

Для этого удобно воспользоваться параметром  $\lambda$ , определенным в (1.9.1), в терминах которого предел ДА соответствует пределу  $\lambda \rightarrow \infty$ . Асимптотика первой поправки в лидирующем порядке по  $\lambda$  равна

$$j^{\text{ППЗ}}(L) - j^{\text{ППЗ}}(\infty) = \frac{1}{L} \left[ \frac{3cp(1 - p)}{4(1 - c)} + O(\lambda^{-1/2}) \right] + O(L^{-2}). \quad 1.9.6$$

Интересно, что поправка порядка  $1/L$  стремится к конечному пределу при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Однако, следующие порядки расходятся в этом пределе, так что эффективный параметр разложения —  $\sqrt{\lambda}/L$ , откуда можно предположить каковы пределы применимости полученного результата. Видно, что поправки перестают быть пренебрежимо малыми, когда  $\lambda$  становится порядка  $L^2$ . В самом деле, метод перевала более не применим в этом пределе. Причина этого — слияние седловых точек  $z_-$  и  $z_+$  с полюсом подинтегральной

функции, из-за которого все члены разложения функции  $h(z)$  становятся одного порядка. Действительно, хотя при проведении вычислений мы неявно предполагали, что все параметры функции  $h(z)$  остаются конечными при росте  $N$ , метод перевала применим и с зависящими от  $N$  параметрами, до тех пор пока предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{N^{1-k/2} h_k}{h_2^{k/2}} \right| = 0$$

имеет место при  $k \geq 3$ , где  $h_k$  —  $k$ -я производная функции  $h(z)$ , вычисленная в точке  $z_-$ . В пределе  $\lambda \rightarrow \infty$ , седловые точки приближаются к  $z = 1$  как  $z_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1/\rho\lambda} + O(1/\lambda)$ , и  $h_k$  растет как  $h_k \sim \lambda^{\frac{k-1}{2}}$ . Поэтому указанный предел равен нулю, если  $\lambda N^{-2} \rightarrow 0$ . Ситуация, когда  $\lambda N^{-2} \rightarrow \text{const} > 0$ , соответствующая переходному режиму, должна рассматриваться отдельно.

### Переходный режим, $\lambda N^{-2} = \text{const}$ .

Рассмотрим интеграл (1.9.3.1) для статсуммы  $Z(M, N)$ . Чтобы вычислить его асимптотически, заметим, что подинтегральная функция имеет только две особенности в точках  $z = 0$  и  $z = 1$ , и, в частности, аналитична в бесконечности. Поэтому можно деформировать описанный вокруг нуля контур  $\Gamma_0$  в контур  $\Gamma_1$  замкнутый вокруг  $z = 1$ :

$$Z(M, N) = - \oint_{\Gamma_1} e^{Nh(z)} \frac{dz}{2\pi iz}.$$

Зафиксировав правила обхода сингулярностей, можно выбрать контур любой формы. Удобно интегрировать по малой окружности обходящей  $z = 1$ , проходящей вблизи седловой точки. Тогда, вместо функции  $h(z)$ , можно использовать ее асимптотическое разложение на контуре. Делая замену

$$z = 1 + \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{\rho\lambda}}$$

получим

$$h(z) = -2\sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} \cos \varphi + O(1/\lambda),$$

и интегрируя имеем

$$\begin{aligned} Z(M, N) &= \frac{-1}{\sqrt{\rho\lambda}} \int_0^{2\pi} e^{-2N\sqrt{\rho/\lambda} \cos \varphi + i\varphi} \frac{d\varphi}{2\pi} + O(N^{-2}) \\ &\simeq \frac{\theta}{2M} I_1(\theta) \end{aligned}$$

где  $I_k(y)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода и мы вводим скейлинговый параметр

$$\theta = 2N\sqrt{\frac{\rho}{\lambda}},$$

который конечен в рассматриваемом пределе и является параметром кроссовера из режима КПЖ к пределу ДА. Для распределения вероятности  $P(n)$  нам также нужно знать выражение для  $Z(M-n, N-1)$ , которое можно получить делая следующие замены в полученном выражении:  $M \rightarrow M-n$ ,  $\rho \rightarrow \rho - n/N$  и  $\theta \rightarrow \theta\sqrt{\rho - n/M}$ . Тогда для распределения числа заполнения получим

$$P(0) \simeq 1 - \frac{\theta}{2N} \frac{I_0(\theta)}{I_1(\theta)}, \quad 1.9.7$$

$$P(n) \simeq \frac{\theta^2}{4NM} \frac{I_1\left(\theta\sqrt{1-\frac{n}{M}}\right)}{I_1(\theta)\sqrt{1-\frac{n}{M}}}, \quad 0 < n < M, \quad 1.9.8$$

$$P(M) \simeq \frac{\theta}{2N} \frac{1}{I_1(\theta)}. \quad 1.9.9$$

Здесь мы сохранили члены ведущего порядка в выражении для  $P(n)$  при  $n > 0$  и двух первых порядков в  $P(0)$  (последнее можно восстановить из нормировки). Из первой строки видно, что в типичной конфигурации занято только конечное число узлов. Рассмотрим распределение случайной величины  $\chi = n/M \in [0,1]$  при условии  $n > 0$ , т.е. учитываются только занятые узлы. Это распределение имеет хорошо определенное предельное выражение при  $N \rightarrow \infty$ , параметризованное единственным параметром  $\theta$ :

$$\text{Prob}(\chi = 1) = \frac{1}{I_0(\theta)}, \quad 1.9.10$$

$$\text{Prob}(\chi < x) = \frac{\theta}{2I_0(\theta)} \int_0^x \frac{I_1(\theta\sqrt{1-y})}{\sqrt{1-y}} dy. \quad 1.9.11$$

Конечная доля вероятности сконцентрирована в единственной точке  $\chi = 1$ , а остальная часть распределена непрерывно на  $[0,1)$ . В терминах ОПАППЗ (1.9.10) это доля времени, проводимая всеми частицами в одном кластере. Остальное время на решетке присутствует конечное число кластеров макроскопического размера  $n \sim M$ . При  $\chi < 1$  распределение доли частиц содержащихся в одном кластере сходится к распределению (1.9.11). средний размер кластера равен  $\langle l_{cl} \rangle \simeq 2MI_1(\theta) [\theta I_0(\theta)]^{-1}$ , а  $M/\langle l_{cl} \rangle$  — среднее число кластеров на решетке, которое с единицы при  $\theta = 0$  выходит на линейный рост  $M/\langle l_{cl} \rangle \simeq \theta/2$  при  $\theta \rightarrow \infty$ .

### 1.9.3.3 Метод трансфер-матрицы и корреляционная длина

Кроме проведенных вычислений в системе типа ПНРВ, удобных для нахождения тока и распределения размера кластеров, можно вычислить статсумму прямо в системе типа ППЗ, что больше подходит для изучения корреляционных функций. Стационарная мера конфигураций частиц в системе типа ППЗ такая же как стационарная мера в системе типа ПНРВ, с точностью до трансляций. При этом мы заменяем узел с  $n$  частицами кластером из  $n$  частиц плюс один незанятый узел. Следуя формулам (1.9.3.1, 1.9.3.1) для стационарной меры системы типа ПНРВ, присвоим вес  $(1-\nu)$  каждому кластеру и 1 каждому пустому узлу. Для изучения системы более удобен



большой канонический ансамбль, кроме заданных весов каждой частице присваивается активность  $z$ . Тогда стационарная вероятность конфигурации частиц  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_L)$ , задаваемой числами заполнения  $\tau_1, \dots, \tau_L = 0, 1$ , будет равна

$$P_{st}(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{\mathcal{Z}_L(z)} T_{\tau_1, \tau_2} \dots T_{\tau_{L-1}, \tau_L} T_{\tau_L, \tau_1},$$

где  $T_{0,0} = 1$ ,  $T_{0,1} = T_{1,0} = \sqrt{z(1-\nu)}$  и  $T_{1,1} = z$ . Эта мера похожа на Гиббсовскую меру одномерной модели Изинга и в случае ПАППЗ с параллельным обновлением, а в контексте моделей траффика впервые возникла в [190] при исследовании ПАППЗ с параллельным обновлением. Статсумма для периодических граничных условий вычисляется в виде следа  $L$ -ой степени трансферматрицы

$$\mathcal{Z}_L(z) = \text{Tr} T^L = \lambda_1^L + \lambda_2^L,$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left( 1 + z + \sqrt{(z+1)^2 - 4\nu z} \right), \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left( 1 + z - \sqrt{(z+1)^2 - 4\nu z} \right) \end{aligned}$$

есть собственные значения матрицы  $T$ , определенные так, что  $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$ . Максимальное собственное значение  $\lambda_1$  определяет удельную свободную энергии

$$f(z) = - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{Z}_L(z)}{L} = \ln \lambda_1.$$

Концентрация частиц задается термодинамическим соотношением

$$c = -z \partial_z f(z).$$

Это квадратичное по  $z$  соотношение с двумя корнями, которые переходят друг в друга при замене  $c \longleftrightarrow 1 - c$ . Какой из них выбрать можно решить, исходя из прямого вычисления одноточечной корреляционной функции. В общем случае для вычисления  $s$ -точечной корреляционной функции вида  $\langle \tau_{k_1} \dots \tau_{k_s} \rangle$ , где  $\langle a \rangle$  — среднее значение случайной величины  $a$ , нужно вставить матрицу

$$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в те места в произведении трансферматриц, которые соответствуют узлам с номерами  $k_1, \dots, k_s$ :

$$\langle \tau_{k_1} \dots \tau_{k_s} \rangle = \frac{\text{Tr} [T^{k_1} \hat{\tau} T^{k_1+k_2} \hat{\tau} \dots \hat{\tau} T^{L-(k_1+\dots+k_s)}]}{\mathcal{Z}_L(z)}.$$

Для вычисления таких выражений кроме собственных значений требуются также собственные вектора матрицы  $T$ , которые с нормировкой  $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$  имеют вид

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \left( \frac{\sqrt{(z+1)^2 - 4\nu z - z + 1}}{2\sqrt{(z+1)^2 - 4\nu z}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \left( \frac{\sqrt{(z+1)^2 - 4\nu z + z - 1}}{2\sqrt{(z+1)^2 - 4\nu z}} \right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix},$$

и

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} - \left( \frac{\sqrt{(z+1)^2 - 4\nu z + z - 1}}{2\sqrt{(z+1)^2 - 4\nu z}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \left( \frac{\sqrt{(z+1)^2 - 4\nu z - z + 1}}{2\sqrt{(z+1)^2 - 4\nu z}} \right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix},$$

для  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , соответственно. Проверяя соотношение  $c = \langle \tau \rangle = \text{Tr}(\hat{\tau} T^L) \simeq (\mathbf{v}_1, \hat{\tau} \mathbf{v}_1)$  мы видим, что должен быть выбран корень (1.9.3.3)

$$z^* = 1 - 2 \left( 1 + \frac{\sqrt{(1-\nu)(1-\nu(1-2c)^2)}}{(1-2c)(1-\nu)} \right)^{-1}.$$

Пользуясь соотношениями  $(\mathbf{v}_1, \hat{\tau} \mathbf{v}_1) = c, (\mathbf{v}_2, \hat{\tau} \mathbf{v}_2) = (1-c)$  и  $(\mathbf{v}_1, \hat{\tau} \mathbf{v}_2) = \sqrt{c(1-c)}$ , получим двухточечную корреляционную функцию

$$\langle \tau_1 \tau_{1+k} \rangle = \frac{c^2 + (1-c)^2 e^{-L/\xi} + c(1-c)(e^{-k/\xi} + e^{-(L-k)/\xi})}{1 + e^{-L/\xi}}$$

где

$$\xi \equiv -\frac{1}{\ln(\lambda_1/\lambda_2)} = - \left[ \ln \left( 1 - \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{1-(1-2c)^2\nu}{1-\nu}}} \right) \right]^{-1}$$

и есть корреляционная длина. Когда корреляционная длина конечна, т.е. при  $\nu < 1$ , двухточечный коррелятор распадается на больших расстояниях  $L \gg k \rightarrow \infty$  на произведение одноточечных корреляторов  $\langle \tau_1 \tau_{1+k} \rangle \rightarrow c^2$ . Как и следовало ожидать, с ростом  $k$  ковариация убывает с расстоянием экспоненциально при  $\xi \ll k \ll L$ ,

$$C(k) \equiv \langle \tau_1 \tau_{1+k} \rangle - \langle \tau_1 \rangle \langle \tau_{1+k} \rangle \simeq c(1-c)e^{-k/\xi},$$

что оправдывает применение термина корреляционная длина к  $\xi$ . При  $\nu \rightarrow 1$ , т.е.  $\lambda \rightarrow \infty$ , корреляционная длина расходуется как

$$\xi \simeq \sqrt{\lambda c(1-c)}.$$

В переходном режиме,  $\lambda \sim L^2$ , корреляционная длина становится сравнимой с  $L$ . Выраженная в через длину  $r$ , измеренную в размерах системы, ковариация имеет вид

$$C(Lr) = \frac{(1 - 2c)e^{-1/\tilde{\xi}} + c(1 - c)(e^{-r/\tilde{\xi}} + e^{-(1-r)/\tilde{\xi}})}{1 + e^{-1/\tilde{\xi}}},$$

где  $\tilde{\xi} = 2c(1 - c)/\theta$  — это эффективная корреляционная длина на масштабе размера системы, которая зависит от параметра кроссовера  $\theta$ , определенного в (1.9.3.2).

#### 1.9.4 Статистика потока частиц

##### 1.9.4.1 Анзац Бете и метод Дерриды-Лебовица

Чтобы охарактеризовать флуктуации потока, введем деформированную матрицу переходных вероятностей  $\mathbf{M}^\gamma$ , зависящую от дополнительного параметра  $\gamma$ , снабдив шаг каждой частицы весом  $\exp \gamma$ . Тогда матричные элементы будут определены как

$$\mathbf{M}_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}^\gamma = \mathbf{M}_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \exp(\gamma \mathcal{N}(\mathbf{n}, \mathbf{n}')),$$

где  $\mathbf{M}_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}$  — матричные элементы исходной матрицы вероятностей перехода, а  $\mathcal{N}(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$  — число прыжков частиц при переходе из конфигурации  $\mathbf{n}'$  в  $\mathbf{n}$  за один шаг. Деформированная матрица описывает эволюцию производящей функции  $G_t(\mathbf{n}, \gamma) = \sum_{Y=0}^{\infty} e^{\gamma Y} P_t(\mathbf{n}, Y)$  совместной вероятности  $P_t(\mathbf{n}, Y)$  того, что в момент времени  $t$  система находится в конфигурации  $\mathbf{n}$ , а полное расстояние  $Y_t$ , пройденное частицами за время  $t$  равно  $Y$ ,

$$\mathbf{G}_{t+1} = \mathbf{M}^\gamma \mathbf{G}_t.$$

Здесь  $\mathbf{G}_t$  — вектор-столбец с компонентами  $G_t(\mathbf{n}, \gamma)$ . Производящая функция  $\langle e^{\gamma Y_t} \rangle$  моментов случайной величины  $Y_t$  — это сумма  $\sum_{\mathbf{n}} G_t(\mathbf{n}, \gamma)$  по всем конфигурациям. За основной вклад в эту сумму отвечает максимальное по модулю собственное значение  $\Lambda_0(\gamma)$  матрицы  $\mathbf{M}^\gamma$ , и, поэтому, логарифм  $\Lambda_0(\gamma)$  — производящая функция  $Y_t$ ,

$$\ln \Lambda_0(\gamma) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \langle e^{\gamma Y_t} \rangle}{t}.$$

Диагонализация матрицы  $\mathbf{M}^\gamma$  с помощью анзаца Бете подробно описана в [174, 175] как для системы типа ППЗ, так и для ПНРВ. Сначала кратко напомним как она выглядит для второй модели. Для этого вместо набора чисел заполнения  $\mathbf{n}$  удобно использовать для задания конфигурации координаты частиц на решетке  $\mathcal{L}$

$$\mathbf{y} = (1 \leq y_1 \leq \dots \leq y_M \leq N)$$

точно так же как и для системы типа ППЗ, с той разницей, что здесь координаты частиц несорго возрастают, так как в узле может находиться более одной частицы. Тогда, компоненты собственного вектора  $\Psi$  матрицы  $\mathbf{M}^\gamma$  ищутся в виде

$$\Psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = P_{st}(\mathbf{n}) \Psi^0(\mathbf{y}|\mathbf{z}),$$

где  $P_{st}(\mathbf{n})$  — стационарные веса конфигураций частиц, а

$$\Psi^0(\mathbf{y}|\mathbf{z}) = \sum_{\sigma \in S_M} A_\sigma z_{\sigma_1}^{y_1} \dots z_{\sigma_M}^{y_M}$$

есть функция Бете, зависящая от  $M$ -компонентного параметра  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_M)$ , состоящего из комплексных чисел, которые будут определены ниже. Здесь,  $\mathbf{y}$  — нестрого возрастающая последовательность координат частиц, соответствующих числам заполнения  $\mathbf{n}$ , суммирование проводится по множеству перестановок  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_M)$  чисел  $(1, \dots, M)$ , а  $A_\sigma$  — зависящие от перестановки коэффициенты, определяемые отношением двух из них, отличающихся элементарной транспозицией индексов

$$\frac{A \dots ij \dots}{A \dots ji \dots} = - \frac{(1 - e^{-\gamma} z_i)(\nu - e^{-\gamma} z_j)}{(1 - e^{-\gamma} z_j)(\nu - e^{-\gamma} z_i)}.$$

Можно показать, что  $\mathbf{M}^\gamma$  действует на  $\Psi$  умножением на собственное значение

$$\Lambda(\gamma) = \prod_{i=1}^M (e^\gamma p z_i^{-1} + (1 - p)),$$

если функция Бете удовлетворяет периодическим граничным условиям  $\Psi^0(y_1, \dots, y_M | \mathbf{z}) = \Psi^0(y_2, \dots, y_M, y_1 + N | \mathbf{z})$ , что эквивалентно требованию, чтобы числа  $(z_1, \dots, z_M)$  удовлетворяли системе из  $M$  алгебраических уравнений Бете (УБ)

$$z_i^N = (-1)^{M-1} \prod_{j=1}^M \frac{(1 - e^{-\gamma} z_i)(\nu - e^{-\gamma} z_j)}{(1 - e^{-\gamma} z_j)(\nu - e^{-\gamma} z_i)}.$$

Аналогичное решение для системы типа ППЗ требует минимального изменения приведенного решения для ПНРВ. Собственный вектор марковской матрицы тот же что и в (1.9.4.1) с той лишь разницей, что координаты частиц входят туда несколько по другому. Координаты  $\mathbf{x}$  модели типа ППЗ получаются из координат модели типа ПНРВ сдвигом

$$(x_1, x_2, \dots, x_M) = (y_1, y_2 + 1, \dots, y_M + M - 1),$$

обеспечивающим строго возрастающий порядок координат. Можно также искать собственный вектор в виде (1.9.4.1) сразу в терминах координат  $\mathbf{x}$ . Тогда, отношение амплитуд (1.9.4.1) нужно домножить на соотношение  $z_i/z_j$ . Вид собственного значения (1.9.4.1) остается тем же самым, тогда как периодические граничные условия

$$\Psi^0(x_1, \dots, x_N | \mathbf{z}) = \Psi^0(x_2, \dots, x_N, x_1 + L | \mathbf{z})$$

приводят к БУ

$$z_i^L = (-1)^{M-1} \prod_{j=1}^M \frac{z_i (1 - e^{-\gamma} z_i)(\nu - e^{-\gamma} z_j)}{z_j (1 - e^{-\gamma} z_j)(\nu - e^{-\gamma} z_i)},$$

отличающимся от (1.9.4.1) единственным множителем  $\prod_{j=1}^M z_j$ .

Задача вычисления максимального собственного значения в обоих моделях сводится к нахождению решения, соответствующего решению УБ. Для этого заметим, что в пределе  $\gamma \rightarrow 0$  матрица  $\mathbf{M}^\gamma$  превращается в матрицу переходных вероятностей  $\mathbf{M}$ , максимальное собственное значение которой равно единице, так что мы ожидаем, что  $\Lambda_0(\gamma) \rightarrow 1$  при  $\gamma \rightarrow 0$ . Кроме того, соответствующий собственный вектор стремится к стационарному распределению, которое получается из (1.9.4.1, 1.9.4.1) подстановкой  $z_1 = \dots = z_M = 1$ . Перемножив  $M$  уравнений для обеих систем, мы убеждаемся, что оба решения удовлетворяют соотношениям  $\left(\prod_{j=1}^M z_j\right)^N = 1$  и  $\left(\prod_{j=1}^M z_j\right)^L = 1$  для (1.9.4.1) и (1.9.4.1) соответственно. Поэтому множество решений УБ можно разбить на сектора, в которых произведение корней равно различным корням из единицы и не зависит от  $\gamma$ . В частности, продолжая решение от  $\gamma = 0$  на произвольные значения  $\gamma$ , мы видим, что в обеих системах, произведение корней удовлетворяет соотношению

$$\prod_{j=1}^M z_j = 1,$$

при выполнении которого системы (1.9.4.1) и (1.9.4.1) становятся одинаковыми и дают одно и то же решение для  $\Lambda_0(\gamma)$ . Произведение корней УБ — это множитель на который умножается собственный вектор при трансляции на один шаг, т.е. это собственное число оператора сдвига, коммутирующего с матрицей  $\mathbf{M}^\gamma$ . Его равенство единице означает трансляционную инвариантность стационарного состояния.

Для нахождения решения (1.9.4.1), сначала сделаем замену переменных,

$$z_i = e^\gamma \frac{1 - \nu u_i}{1 - u_i}.$$

В переменных  $u_i$  БУ и собственные значения  $\Lambda(\gamma)$  приводятся к виду

$$\left(\frac{1 - \nu u_i}{1 - u_i}\right)^N e^{N\gamma} = (-1)^{M-1} \prod_{j=1}^M \frac{u_i}{u_j}, \quad 1.9.12$$

$$\Lambda(\gamma) = \prod_{i=1}^M \left(\frac{1 - \mu u_i}{1 - \nu u_i}\right). \quad 1.9.13$$

Метод Дерриды и Лебовица вычисления максимального собственного значения заключается в том, что соответствующие корни БУ находятся среди корней многочлена

$$\mathcal{P}(u) = (1 - \nu u)^N B - (1 - u)^N u^M$$

где  $B = (-1)^{M-1} e^{\gamma N} \prod_{j=1}^M u_j$  — это параметр, являющийся функцией решения. На практике, нам нужно вычислять суммы по корням БУ. Эти суммы можно вычислить используя теорему Коши,

$$\sum_{i=1}^M f(u_j) = \oint_{\Gamma_0} f(u) \frac{\mathcal{P}'(u)}{\mathcal{P}(u)} \frac{du}{2\pi i},$$

где интегрирование проводится по контуру, окружающему нужные корни многочлена  $\mathcal{P}(u)$ , токому что  $f(u)$  аналитична внутри контура. В нашем случае решения, соответствующего максимальному собственному значению, это  $M$  корней  $z_1, \dots, z_M$ , стремящихся к единице или к нулю в терминах переменных  $u_1, \dots, u_M$  при  $\gamma \rightarrow 0$ . Выбирая функцию  $f(u)$  в виде  $f(u) = \ln [(1 - \mu u)/(1 - \nu u)]$  и интегрируя по частям, мы получим логарифм собственного значения как функцию  $B$

$$\ln \Lambda_0(\gamma) = (\mu - \nu) \oint_{\Gamma_0} \frac{\ln \left[ 1 - \frac{B(1-\nu u)^N}{(1-u)^N u^M} \right]}{(1 - \mu u)(1 - \nu u)} \frac{du}{2\pi i}. \quad 1.9.14$$

Здесь интегрирование проводится по контуру, лежащем внутри окружности радиуса  $|B(1-\nu u)^N/(1-u)^N u^M| < 1$  охватывающей  $M$  корней многочлена  $\mathcal{P}(u)$ , расположенных вблизи начала координат. Заметим, что контур не проходит через разрывы логарифма, которые могут быть выбраны соединяющими  $M$  корней внутри контура с началом координат и  $N$  корней снаружи контура с  $u = 1$ . Такой контур существует если значение  $|B|$  достаточно мало. Чтобы связать  $\gamma$  с  $B$ , можно воспользоваться условием трансляционной инвариантности (1.9.4.1), которое после логарифмирования и перехода к переменным  $u_i$  дает

$$\gamma = \frac{1 - \nu}{M} \oint_{\Gamma_0} \frac{\ln \left( 1 - \frac{B(1-\nu u)^N}{(1-u)^N u^M} \right)}{(1 - u)(1 - \nu u)} \frac{du}{2\pi i}.$$

Для вычисления интегралов мы используем разложение логарифма в степенной ряд по параметру  $B$ , которое интегрируется почленно. Интегрирование снова может быть проведено явно в терминах гипергеометрических функций Аппеля  $F_1$  и гаусса  ${}_2F_1$ :

$$\ln \Lambda_0(\gamma) = -(\mu - \nu) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B^n}{n} \binom{Ln - 2}{Mn - 1} F_1(1 - nM; 1 - nN, 1; 2 - nL; \nu, \mu), \quad 1.9.15$$

$$\gamma = -\frac{1 - \nu}{M} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B^n}{n} \binom{Ln - 1}{Mn - 1} {}_2F_1(1 - Mn, 1 - Nn; 1 - nL; \nu). \quad 1.9.16$$

Перемасштабированные кумулянты

$$c_n \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial^n}{t \partial \gamma^n} \langle e^{\gamma Y_t} \rangle \Big|_{\gamma=0} = \frac{\partial^n}{\partial \gamma^n} \ln \Lambda_0(\gamma) \Big|_{\gamma=0}.$$

интегрального потока частиц  $Y_t$  возникают в коэффициентах разложения  $\ln \Lambda_0(\gamma)$  по степеням  $\gamma$ , которое можно построить, исключая параметр  $B$  из двух рядов. В частности, пользуясь преобразованием эйлера для гипергеометрических функций мы видим, что первый кумулянт  $c_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \langle Y_t \rangle$ , среднее число прыжков частиц в единицу времени, совпадает со средним потоком  $J$  из формулы (1.9.3.1), полученным узреднением по стационарному состоянию. Второй кумулянт, перемасштабированная дисперсия  $Y_t$ , связана с коэффициентом диффузии частицы  $\Delta = M^{-2} c_2$ . Его точное значение

$$\Delta = \lambda p \frac{\binom{2L-2}{2M-1} {}_2F_1(1-2M, 1-2N, 1-2L; \nu)}{\binom{L-1}{M-1}^2 [{}_2F_1(1-M, 1-N, 1-L; \nu)]^2} \times \left[ \frac{(2L-1) F_1(1-M; 1-N, 1; 2-L; \nu, \mu)}{2(L-1) {}_2F_1(1-M, 1-N, 1-L; \nu)} - \frac{F_1(1-2M; 1-2N, 1; 2-2L; \nu, \mu)}{{}_2F_1(1-2M, 1-2N, 1-2L; \nu)} \right],$$

откуда, пользуясь тождествами для функций Гаусса и Аппеля, можно получить коэффициенты диффузии для различных предельных случаев: параллельного обновления  $\mu = 0$ , обратного последовательного обновления  $\nu = 0$  и предела ДА  $\mu \rightarrow \nu = 1, p = const$ . Точная формула кумулянта  $c_n$  довольно громоздка уже при  $n = 2$  и становится все более сложной с увеличением  $n$ . С точки зрения физики процесса интерес представляет скейлинговое поведение всей производящей функции кумулянтов  $\Lambda_0(\gamma)$ , которая в свою очередь связана с функцией больших уклонений тока.

#### 1.9.4.2 Скейлинговый предел

Обратимся к исследованию флуктуаций тока в термодинамическом пределе

$$M, N \rightarrow \infty, M/N = \rho.$$

Структура членов рядов  $\Lambda_0(\gamma)$  и  $\gamma$  сходна с вычисленными ранее интегралами для потока и статсуммы. В частности к ним применимы те же методы асимптотического анализа. Как и тогда в зависимости от масштаба параметра  $\lambda$  есть два различных асимптотических режима: первый, где интегралы могут быть вычислены методом перевала, и второй, где интегралы выражаются через модифицированные функции Бесселя. Еще раз подчеркнем, что метод перевала применим только при  $\lambda$ , обеспечивающим предельный переход  $\lambda N^{-2} \rightarrow 0$ . Поэтому универсальный функциональный вид скейлинговой функции, ассоциированный с классом КПЖ, сохраняется в соответствующем диапазоне масштаба  $\lambda$ , который входит только в неуниверсальные размерные постоянные. Когда же  $\lambda N^{-2}$  изменяется от нуля до бесконечности наблюдается плавный переход от флуктуаций типа КПЖ к флуктуациям гауссового вида.

**Режим КПЖ,  $\lambda N^{-2} \rightarrow 0, \gamma \rightarrow 0, \gamma \lambda^{1/4} N^{3/2} = const$ ,**

С точностью до множителя  $1/n$  и общих множителей перед выражениями коэффициенты членов рядов (1.9.15, 1.9.16) степени  $n$  выражаются через интеграл  $\mathcal{I}_{nN}(h(z), g(z))$  вида (1.9.3.2) с функцией  $h(z)$ , определенной в (1.9.3.2), где в качестве функции  $g(z)$  нужно подставить  $r(z) = z[(1-\mu z)(1-\nu z)]^{-1}$  в ряде для  $\Lambda_0(\gamma)$  и  $s(z) = z[(1-z)(1-\nu z)]^{-1}$  в ряде для  $\gamma$ . Для получения осмысленного результата, необходимо удерживать лишь члены лидирующего порядка в выражении для  $\gamma$  и первые два

порядка в собственном значении  $\Lambda_0(\gamma)$ . Вычисляя  $\mathcal{I}_{nN}(h(z), r(z))$  и  $\mathcal{I}_{nN}(h(z), s(z))$  с помощью (1.9.3.2) в двух ведущих порядках получим универсальный скейлинговый вид, полученный в [158]:

$$\ln \Lambda(\gamma) = J_\infty \gamma + aN^{-3/2}G(bN^{3/2}\gamma),$$

где  $G(z)$  представляется в параметрическом виде

$$G(z) = -\text{Li}_{5/2}(t), \quad z = -\text{Li}_{3/2}(t), \quad 1.9.17$$

в виде двух полилогарифмов  $\text{Li}_s(x) = \sum_{i>0} x^i/i^s$ . Здесь поток частиц в пределе бесконечного объема

$$J_\infty = Mpr_0/s_0 = Lj^{ASEP}$$

совпадает с потоком, вычисленным усреднением по стационарному состоянию, а коэффициенты

$$a = \frac{\mu - \nu}{2} \left( \frac{s_2/s_0 - r_2}{|h_2|} + \frac{(s_1/s_0 - r_1)h_3}{h_2^2} \right)$$

и

$$b = \frac{\sqrt{2\pi|h_2|}}{\rho s_0(1 - \nu)}$$

это неуниверсальные постоянные, зависящие от параметров модели через производные функций  $h(z), r(z), s(z)$ , вычисленные в седловой точке  $z_-$ :  $r_k = (iz\partial_z)^k r(z)|_{z=z_-}$ ,  $s_k = (iz\partial_z)^k s(z)|_{z=z_-}$  и  $h_k = (iz\partial_z)^k h(z)|_{z=z_-}$ .

Из (1.9.4.2) ясно, что нетривиальный скейлинговый предел возникает, когда  $\gamma$  имеет порядок  $b^{-1}N^{-3/2}$ , т.е.  $\lambda^{-1/4}N^{-3/2}$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Из скейлингового вида (1.9.4.2) можно получить выражение вероятности больших уклонений усредненного по времени потока частиц

$$\text{Prob}(Y_t/t < y) \sim \exp \left[ -atN^{-3/2} \widehat{G} \left( \frac{y - J_\infty}{ab} \right) \right],$$

в котором скейлинговая функция  $\widehat{G}(x) = \sup_t (xt - G(t))$  дается преобразованием Лежандра функции  $G(t)$ . Возникновение произведения  $tN^{-3/2}$  — это универсальное свойство систем класса КПЖ, которое определяется значением динамического критического индекса класса КПЖ,  $z = 3/2$ . Кроме того в этом произведении присутствует множитель  $a$ , убывающий как  $a \sim \lambda^{-1/4}$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ . В пределе ДА все частицы слипаются в один кластер, совершающий один шаг за раз. Центральная часть соответствующей функции больших уклонений будет чисто гауссовой  $\text{Prob}(Y_t/t < y) \sim \exp(-tM^{-2}y^2/2)$ . Отсюда видно, что переходный режим соответствует шкале  $\lambda \sim N^2$ .

Кумулянты  $Y_t$  можно вычислить дифференцируя функцию (1.9.4.2). Вычислив первую производную получим среднее число скачков частиц в единицу времени с точностью до первой поправки (1.9.6). Именно эта поправка,

$$(j^{ASEP}(L) - j^{ASEP}((\infty)))L = ab,$$



стоит в знаменателе аргумента функции  $\hat{G}$  в (1.9.4.2). Она определяет характерные единицы измерения флуктуаций потока частиц. Замечательным фактом является то, что эта величина стремится к конечному пределу, когда  $\lambda$  стремится к бесконечности. Коэффициент диффузии частицы, связанный со вторым кумулянтном,

$$\Delta = \frac{(1-c)^{3/2}}{c^2} \frac{b^2 a}{2\sqrt{2L}},$$

убывает как  $L^{-1/2}$ , как и ожидалось для класса КПЖ. В пределе  $\lambda \rightarrow \infty$ , получим

$$\Delta \simeq \frac{\lambda^{1/4}}{\sqrt{L}} \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{p(1-p)}{[c(1-c)]^{1/4}},$$

откуда снова можно угадать, что в переходном режиме  $\lambda \sim L^2$  характер движения частиц меняется с субдиффузионного к диффузионному. Однако, как было замечено выше, эта область значений  $\lambda$  лежит за пределами применимости метода перевала, и необходимо использовать альтернативный метод асимптотического анализа.

**Переходный режим:**  $\lambda/N^2 = const, \gamma N^2 = const$

Когда  $\lambda \sim N^2$ , интегралы  $\mathcal{I}_{nN}(h(z), r(z))$  и  $\mathcal{I}_{nN}(h(z), s(z))$  могут быть асимптотически вычислены в терминах модифицированных функций Бесселя, так же как во второй части раздела 1.9.3.2. В результате получим следующее выражение для  $\ln \Lambda_0(\gamma)$

$$\ln \Lambda_0(\gamma) = \gamma p M + N^{-2} p(1-p) \mathcal{G}_\theta(N^2 \rho \gamma), \quad 1.9.18$$

в котором функция  $\mathcal{G}_\theta(t)$ , параметризованная параметром кроссовера  $\theta$ , определенным в (1.9.3.2), задана параметрически в виде:

$$\mathcal{G}_\theta(t) = \frac{\theta^2}{4} \sum_{k=1}^{\infty} I_2(k\theta) \frac{B^k}{k}, \quad t = -\frac{\theta}{2} \sum_{k=1}^{\infty} I_1(k\theta) \frac{B^k}{k}.$$

Чтобы увидеть нетривиальный скейлинг, масштаб параметра  $\gamma$  должен расти с  $N$  так, чтобы имел место предел  $\gamma N^2 = const$ .

Используя асимптотическое выражение для модифицированной функции Бесселя, получим асимптотику функции  $\mathcal{G}_\theta(t)$  при больших значениях  $\theta$  и малых значениях  $t$ , таких что  $t^2 \theta = const$ ,

$$\mathcal{G}_\theta(t) \simeq -\frac{\theta t}{2} + \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\theta}{2\pi}} G\left(t \sqrt{\frac{8\pi}{\theta}}\right), \quad \theta \rightarrow \infty$$

где  $G(x)$  — скейлинговая функция Дерриды-Лебовица(1.9.17).

В противоположном пределе ДА все  $M$  частиц образуют единый кластер, совершающий простое бернуллиевское случайное блуждание. В этом случае точная произ-

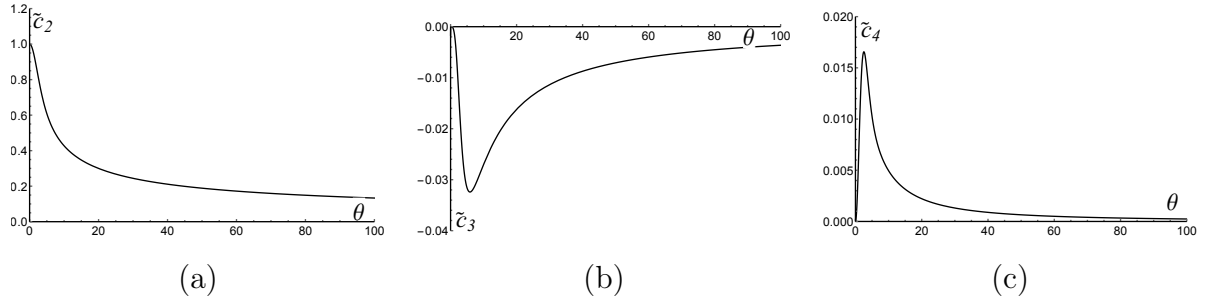


Рисунок 11 — The rescaled cumulants of total number of particle jumps  $\tilde{c}_n$  v.s.  $\theta$  in the transition regime  $N \rightarrow \infty$ ,  $\lambda N^{-2} = const$ .

водящая функция кумулянтов дается выражением

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \langle e^{\gamma Y_t} \rangle &= \ln(1 - p + pe^{\gamma M}). \\ &\simeq Mp\gamma + M^2 p(1-p) \frac{\gamma^2}{2}, \end{aligned}$$

где во второй строчке мы приводим два первых члена разложения при малых  $\gamma$ . Именно эти два члена отвечают за существование конечного предела

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M^2 \left( \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \langle e^{\gamma Y_t} \rangle - Mp\gamma \right) = M^4 \gamma^2$$

при условии  $\gamma M^2 = const$ . Такое предельное выражение согласуется с поведением функции (1.9.18) при малых  $\theta$ , вытекающим из разложения  $\mathcal{G}_\theta(t)$ :

$$\mathcal{G}_\theta(t) \simeq \frac{t^2}{2} - \frac{\theta^2 t}{8}, \quad \theta \rightarrow 0.$$

Распределение усредненного по времени числа прыжков частиц (1.9.18) имеет вид

$$\text{Prob}(Y_t/t < y) \sim \exp \left[ -\frac{p(1-p)t}{N^2} \widehat{\mathcal{G}}_\theta \left( \frac{y - Mp}{\rho p(1-p)} \right) \right],$$

где ФБУ  $\widehat{\mathcal{G}}_\theta(x)$  — преобразование Лежандра функции  $\mathcal{G}_\theta(t)$ . Присутствие множителя  $tN^{-2}$  обычно для диффузионных систем, хотя, чисто квадратичного (гауссового) поведения одной частицы, имеет нетривиальный функциональный вид. Из проведенного выше асимптотического анализа  $\mathcal{G}_\theta(t)$  следует, что, когда  $\theta$  меняется от нуля до бесконечности, ФБУ  $\widehat{\mathcal{G}}_\theta(x)$  дает непрерывную интерполяцию между квадратичным гауссовым поведением и ФБУ Дерриды-Лебовица для класса КПЖ.

Дифференцируя  $\Lambda_0(\gamma)$ , получим кумулянты этого распределения. Первый равен

$$J \simeq Mp - p(1-p)\rho \frac{\theta I_2(\theta)}{2 I_1(\theta)},$$

т.е. конечное число кластеров присутствующих на решетке конечную долю времени дает конечную поправку к предельному значению среднего тока, который равен  $Mp$  в пределе ДА. В пределе малых  $\theta$  эта доля равна  $\theta^2/2$ , а сама поправка равна  $p(1-p)\rho\theta^2/8$ , т.е. имеет тот же порядок, и кроме того зависит от плотности частиц.

Одночастичный коэффициент диффузии, полученный из второго кумулянта,

$$\Delta = p(1-p) \left[ \frac{I_1(2\theta)}{I_1^2(\theta)} \left( \frac{I_2(2\theta)}{I_1(2\theta)} - \frac{I_2(\theta)}{I_1(\theta)} \right) \right],$$

конечен в термодинамическом пределе, так же как и в одночастичном случайном блуждании, где он в точности равен  $p(1-p)$ . В переходном режиме это значение исправлено на величину в квадратных скобках. В пределе  $\theta \rightarrow 0$  этот множитель стремится к единице, восстанавливая одночастичный результат. При  $\theta \rightarrow \infty$  коэффициент диффузии ведет себя как  $\Delta \simeq (3p(1-p)/4)\sqrt{\pi/\theta}$ , что сигнализирует о переходе к режиму типа КПЖ. Отличие переходного режима как от режима КПЖ, так и от предела ДА, проявляется в поведении следующих кумулянтов. Как видно из формулы (1.9.18) они ведут себя как  $c_n \sim N^{2(n-1)}$ , в отличие от  $c_n \sim N^{3/2(n-1)}$  в режиме КПЖ и  $c_n \sim N^n$  в пределе ДА. Интересно, что порядок роста кумулянтов  $N$  в переходном режиме при  $n \geq 3$  выше чем в режиме КПЖ и чем впереди ДА. Поэтому мы ожидаем, что кумулянты, перемасштабированные так, чтобы убрать их зависимость от  $N$ ,

$$\tilde{c}_n = \lim_{N \rightarrow \infty} c_n \times [N^{2(n-1)} \rho^n p(1-p)]^{-1} = \mathcal{G}_\theta^{(n)}(0)$$

будут стремиться к нулю в обоих пределах  $\theta \rightarrow 0$  и  $\theta \rightarrow \infty$ , достигая экстремумов при некотором конечном значении  $\theta$ . Действительно, как видно на рис. 11 у третьего и четвертого кумулянта наблюдается немонотонное поведение с минимумом и максимумом при некоторых конечных значениях  $\theta$ , соответственно. Величина, которую можно использовать, чтобы охарактеризовать близость к режиму КПЖ, — универсальное отношение кумулянтов

$$R(\theta) = \frac{c_3^2}{c_2 c_4} = \frac{(\mathcal{G}_\theta^{(3)}(0))^2}{\mathcal{G}_\theta''(0) \mathcal{G}_\theta^{(4)}(0)},$$

зависящее от единственного параметра  $\theta$ . Как показано на рис. 11, начиная с нуле-

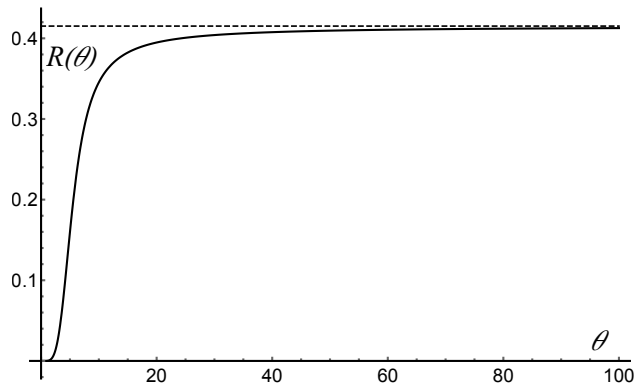


Рисунок 12 — Universal cumulant ratio  $R(\theta)$ . The dashed line shows the limiting KPZ value  $R(\infty)$ .

вого значения при  $\theta = 0$  отношение  $R(\theta)$  монотонно стремится к своему предельному

значению

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} R(\theta) = \frac{2(3/2 - 8/3^{3/2})^2}{15/2 - 24/\sqrt{3} + 9/\sqrt{2}} \simeq 0.41517,$$

найденному в [192] для режима КПЖ.

### 1.9.5 Универсальность и связь с уравнением КПЖ

В контексте стохастических моделей концепция универсальности предполагает, что в скейлинговом пределе множество различных моделей описывается вероятностными распределениями одного функционального вида. Понятие скейлингового предела подразумевает, что пространственно временные переменные измеряются в шкалах, связанных между собой простыми степенными законами. Показатели степеней, которые принято называть критическими индексами, — это фиксированный набор чисел, характеризующий данный класс универсальности. Степенные законы фиксируют связь между масштабами с точностью до некоторых размерных констант, зависящих от параметров конкретной модели. Соответственно, характеристики случайных величин, такие как кумулянты или корреляторы, зависят только от этих констант. В приложении к задаче о росте фронта класса КПЖ в системе размера  $L$  распределение высоты  $h(x,t)$  фронта, являющегося случайной функцией пространственной и временной координат  $x$  и  $t$ , характеризуется двумя наборами амплитуд [184]

$$a_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} t^{-n/3} \left\langle (h(x,t) - \bar{h})^n \right\rangle_c \quad 1.9.19$$

$$b_n = \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} L^{-n/2} \left\langle (h(x,t) - \bar{h})^n \right\rangle_c \quad 1.9.20$$

для транзиентной  $t \ll L^{3/2}$ , и стационарной,  $t \gg L^{3/2}$ , частей эволюции, соответственно, где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\langle x^n \rangle_c$  — обозначение кумулянта порядка  $n$  случайной величины  $x$ , а  $\bar{h} = L^{-1} \int_0^L h(x,t) dx$  средняя по данной реализации случайного процесса высота фронта. Кроме того можно определить поправки конечного времени (размера) к средней высоте фронта, т.е. разницу с высотой вычисленной в пределе бесконечного времени (в бесконечной системе)

$$a_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} t^{2/3} (\langle \partial h / \partial t \rangle - v_\infty) \quad 1.9.21$$

$$b_v = \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} L (\langle \partial h / \partial t \rangle - v_\infty), \quad 1.9.22$$

где  $v_\infty = \lim_{t, L \rightarrow \infty} \langle \partial h / \partial t \rangle$ . В статье [184] сформулирована гипотеза о том, что все эти величины можно выразить через два размерных инварианта. Впервые это утверждение было получено при исследовании самого уравнения КПЖ

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \tilde{\nu} \Delta h + \tilde{\lambda} (\nabla h)^2 + \eta,$$

которое служило первым прототипом системы принадлежащей к классу универсальности КПЖ. Здесь мы снабдили обозначения для параметров  $\tilde{\lambda}$  and  $\tilde{\nu}$  значком тильды чтобы отличать их от параметров  $\nu$  и  $\lambda$  нашей модели и сохранить обозначения принятые для уравнения КПЖ. Белый шум  $\eta$  полностью характеризуется ковариацией

$$\langle \eta(x,t)\eta(x',t') \rangle = D\delta(x-x')\delta(t-t').$$

Для фронта, описываемого уравнением (1.9.5) два упомянутых выше размерных инварианта — это  $\tilde{\lambda}$  и  $A = D/2\tilde{\nu}$ . В терминах этих констант транзитные амплитуды (1.9.19, 1.9.21) имеют вид

$$a_n = \left( |\tilde{\lambda}| A^2 \right)^{n/3} \tilde{c}_n \text{ and } a_v = (|\tilde{\lambda}| A^2) \tilde{c}_v,$$

где  $\tilde{c}_n$  и  $\tilde{c}_v$  — универсальные числа. Эти числа, как стало известно позже, должны связаны с кумулянтами распределения Трейси-Видома, зависящего от крупномасштабной формы начальных условий. Для стационарных амплитуд (1.9.20, 1.9.22) в системе с периодическими граничными условиями мы имеем

$$b_2 = \frac{A}{12}, \quad b_n = 0, \quad n > 2$$

и

$$b_v = -\frac{A\tilde{\lambda}}{2}.$$

Зануление всех амплитуд  $b_n$ , кроме второго, объясняется гауссовым стационарным распределением высоты фронта. Гипотеза об универсальности, предложенная в [184], предполагает, что для фронта класса КПЖ амплитуды (1.9.19-1.9.22) также зависят от параметров  $\tilde{\lambda}$  и  $A$ , которые вообще говоря можно определить, не ссылаясь на уравнение КПЖ, и измерить экспериментально. Параметр  $\tilde{\lambda}$ , связанный с откликом фронта на малый наклон  $h(x,t) \rightarrow h(x,t) + \kappa x$ , определяется как

$$\tilde{\lambda} = \frac{\partial^2 v_\infty}{\partial \kappa^2},$$

а параметр  $A$  дается амплитудой корреляционной функции

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle (h(x,t) - h(y,t))^2 \rangle_c = A|x-y|.$$

Изучаемую здесь систему типа ППЗ можно связать с растущим фронтом соотношением

$$h_{i+1} - h_i = 1 - 2\tau_i,$$

в котором  $\tau_i = 0,1$  — число заполнения  $i$ -го узла,  $h_i$  — высота фронта над ребром, соединяющим узлы  $i-1$  и  $i$  решетки,  $i = 1, \dots, L$ . Чтобы это соответствие было согласовано

на высоту фронта необходимо наложить спиральные граничные условия

$$h_{i+L} = h_i - (L - 2M),$$

которая дает наклон фронта  $\kappa = 1 - 2c$ . Изменение высоты фронта  $(h_i(t) - h_i(0))$  есть ни что иное, как удвоенное число частиц прошедшее через ребро  $(i - 1, i)$  за время  $t$ . Соответственно, средняя скорость фронта — это удвоенный ток вычисленный в системе типа ППЗ,  $v_\infty = 2j^{ASEP}$ , где  $j^{ASEP}$  — поток вычисленный в (1.9.5). Тогда мы имеем

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 j^{ASEP}}{\partial c^2}.$$

Из (1.9.3.3) получаем для  $i \ll j$

$$\begin{aligned} \langle (h_i - h_j)^2 \rangle_c &= 4 \sum_{i \leq k, l \leq j+1} (\langle \tau_k \tau_l \rangle - c^2) \\ &\simeq 4c(1 - c) \coth\left(\frac{1}{2\xi}\right) |i - j|, \end{aligned}$$

т.е.  $A = 4c(1 - c) \coth(1/(2\xi))$ , где  $\xi$  — корреляционная длина (1.9.3.3). Поправки конечного размера  $b_v$  к предельной скорости фронта равна удвоенной поправке к потоку частиц, полученной в (1.9.4) и (1.9.4.2). Одно из подтверждений универсальности — это наблюдение того, что соотношение (1.9.22) между  $b_v$  и параметрами  $\tilde{\lambda}$  и  $A$ , определенных в (1.9.5) и (1.9.5), соответственно, в точности выполняется.

Еще одно свидетельство универсальности можно получить, используя результаты раздела 1.9.4. Заметим, что амплитуды (1.9.19-1.9.22) характеризует положение фронта относительно его среднего положения  $\bar{h}$ . В то же время основной вклад в абсолютное значение высоты фронта дает положение его центра масс, с точностью до конечного начального значения, равное  $\bar{h} \simeq 2L^{-1}Y_t$ . Поэтому универсальная ФБУ величины  $Y_t$  также характеризует движение центра масс фронта. С другой стороны ее скейлинговое выражение должно зависеть только от размерных инвариантов  $\tilde{\lambda}$  и  $A$ . В частности с помощью простого анализа размерностей в сочетании со скейлинговым анзацем [193] можно показать, что дисперсия величины  $\bar{h}$ , связанная с коэффициентом диффузии частицы соотношением  $\langle \bar{h}^2 \rangle_c = 4c^2 \Delta t$ , имеет вид

$$\langle \bar{h}^2 \rangle_c = s_0 A^{3/2} |\tilde{\lambda}| L^{-1/2} t,$$

где  $s_0 = \sqrt{\pi}/4$  — универсальное число, впервые полученное в [194]. Сравнивая эту формулу с выражением (1.9.4.2), полученным для  $\Delta$ , мы видим, что скейлинговая гипотеза (1.9.5) верна. Эти же аргументы можно применить к кумулянтам произвольного порядка. Вся модельная зависимость производящей функции кумулянтов (и следовательно ФБУ), полученных в разделе 1.9.4, содержится в константах  $a$  и  $b$ . Нетрудно показать,

что эти константы связаны с размерными инвариантами  $A$  и  $\tilde{\lambda}$  из данного раздела:

$$a = \frac{\sqrt{2A} |\tilde{\lambda}| (1-c)^{3/2}}{4\sqrt{\pi}},$$

$$b = -\operatorname{sgn} \tilde{\lambda} \frac{\sqrt{\pi A/2}}{(1-c)^{3/2}}.$$

В духе гипотез об универсальности, можно предположить, что эта связь является универсальной чертой систем класса КПЖ. Насколько нам известно это соотношение не возникало в литературе ранее.

В заключение посмотрим, что происходит при приближении к пределу ДА. При  $\lambda \rightarrow \infty$  мы имеем асимптотики

$$A \simeq 8\sqrt{\lambda} [c(1-c)]^{3/2} \quad \text{и} \quad \tilde{\lambda} \simeq -\frac{3(1-p)p}{8(1-c)^{5/2}c^{1/2}} \sqrt{\frac{1}{\lambda}}.$$

Как мы видели, режим КПЖ (в частности универсальный скейлинговый вид ФБУ) сохраняется вплоть до значений  $\lambda$  порядка  $\lambda \sim N^2$ , т.е.  $A$  и  $\tilde{\lambda}$  порядка  $L$  и  $1/L$  соответственно. Заметим, что произведение  $\tilde{\lambda}A$  пропорционально значению  $b_v$ , связанному с типичным размером флуктуаций, остается конечным в пределе  $\lambda \rightarrow \infty$ . Таким образом, вплоть до масштаба  $\lambda \sim N^2$ , рост  $\lambda$  влияет только на неуниверсальные постоянные при сохранении универсальной функциональной формы ФБУ (1.9.4.2). На масштабе  $\lambda \sim N^2$  функциональная форма ФБУ начинает постепенно меняться, пока не достигает чисто гассового вида в пределе ДА.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате работы по проекту получены следующие научные результаты:

Получено принципиально доказательство топологической рекурсии для случая орбифолдных чисел Гурвица, основанное на комбинаторном доказательстве квазиполиномиальности этих чисел.

Предложено новое выражение изомодромной  $\tau$ -функции системы Шлезингера для 4-точечной  $\mathfrak{sl}_N$  изомодромной задачи в терминах двумерной конформной теории поля за пределами известного  $N = 2$  случая.

Установлен изоморфизм между двумя конформными вертексными алгебрами, которые естественно возникают в связи с уравнениями раздутия Накаджимы-Ёшиоки, и доказана основная теорема, относящиеся к представлениям алгебр и к случаю специальных значений центрального заряда (минимальные модели).

Дано альтернативное доказательство формулы для характера подпространства Фейгина-Стойановского интегрируемого представления аффинной алгебры Ли  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C})$ .

Получены средние значения тензора энергии импульса при гравитационном коллапсе тонкой оболочки в скалярной теории поля. На древесном уровне найден термальный поток, соответствующий излучению Хокинга. Посчитана двухпетлевые поправки к древесной корреляционной функции и показано, что они растут со временем, тем самым ломая теорию возмущений.

Показано, что секулярный рост петлевых поправок к двухточечным корреляционным функциям не зависит от калибровки, а ток от рожденных пар во внешнем постоянном электрическом поле растет со временем и нарушает трансляционную и инверсионную инвариантности КЭД во внешнем постоянном электрическом поле.

Доказано, что собственные значения случайных эрмитовых матриц, распределенных по мерам, которые являются эргодическими относительно действия сопряжениями бесконечномерной унитарной группой, удовлетворяют закону больших чисел, а также установлена связь таких моделей случайных матриц и объектов свободной вероятности — свободно безгранично делимых мер.

В предположении установленного недавно соответствия Пенлеве-Калоджеро найдены потенциалы, форма которых определяется из условия совместности линейных задач, ассоциированных с соответствующей обратной задачей. Показано, что квантово-классическое соответствие может быть принято за альтернативное определение уравнений Пенлеве.

Установлено замечательное соответствие между квантовыми суперсимметричными спиновыми цепочками и классическими интегрируемыми системами многих частиц типа Руйсенаарса-Шнайдера.

Построена функция больших отклонений потока частиц в модели обобщенного полностью асимметричного процесса с запретами, объединяющая два универсальных



режима: класс универсальности Кардара-Паризи-Жанга и гауссовское случайное блуждание единого кластера, и описан переход между этими режимами.

Вычислены гомологии Хегора-Флоера алгебраических зацеплений.

Получена явная общая формула для характеров представлений рациональных алгебр Чередника с минимальным носителем, и доказано, что инвариант Решетихина-Тураева для произвольного торического узла совпадает с характером некоторого представления такого типа.

Доказана эквивалентность определений Аганаджич-Шакирова и Чередника  $t$ -деформированных полиномиальных инвариантов торических узлов.

Предложено гипотетическое описание для стабильных  $sl(3)$ -гомологий Хованова-Розанского торических узлов в терминах гомологий Кошуля некоторой явной нерегулярной последовательности.

Предложено новое доказательство формулы Буске-Мелу-Шеффера для случая разложений циклической перестановки, которое, как можно надеяться, допускает обобщение на положительные рода.

Полученные результаты составили содержание 28 опубликованных и принятых к печати статей и 1 обзор, 9 препринтов и 1 главу в монографии, а также были доложены на многих международных научных конференциях. При участии Лаборатории было организовано две международных конференции и три школы-конференции. Кроме того были организованы визиты в Лабораторию иностранных ученых, которые провели несколько курсов лекций для студентов и специалистов. Передовые тенденции развития математической физики и теории представлений регулярно обсуждались на постоянно действующем научном семинаре. Важная часть работы лаборатории это работа со студентами и аспирантами. Их занятость в творческом научном процессе работы Лаборатории безусловно позитивно отражается на их научном кругозоре и, уже начиная с начальных курсов, ориентирует их на работу на передовом рубеже современной математики и математической физики. В заключение стоит отметить, что за год работы лаборатория реализовала большинство поставленных задач и безусловно внесла весомый вклад как в научную и образовательную активность НИУ ВШЭ, так и в развитие современной математической мысли.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Harnad J., Orlov A. Y. Hypergeometric  $\tau$ -Functions, Hurwitz Numbers and Enumeration of Paths // Communications in Mathematical Physics. 2015. Vol. 338. No. 1. P. 267-284. doi
2. van de Leur J., Orlov A. Y. Pfaffian and Determinantal Tau Functions // Letters in Mathematical Physics. 2015 doi
3. Gorsky E., Nemethi A. Lattice and Heegaard-Floer homologies of algebraic links // International Mathematics Research Notices. 2015
4. Gorsky E., Negut A. Refined knot invariants and Hilbert schemes // Journal de Mathematiques Pures and Appliquees. 2015. Vol. 104. No. 3. P. 403-435.
5. Gorsky E., Etingof P., Losev I. Representations of Rational Cherednik algebras with minimal support and torus knots // Advances in Mathematics. 2015. Vol. 277. P. 124-180. doi
6. Gorsky E., Lewark L. On stable  $sl_3$ -homology of torus knots // Experimental Mathematics. 2015. Vol. 24. No. 2. P. 162-174.
7. Bershtein M., Feigin B. L., Litvinov A. Coupling of two conformal field theories and Nakajima-Yoshioka blow-up equations // Letters in Mathematical Physics. 2015 doi
8. Gavrylenko P. Isomonodromic  $\tau$ -functions and  $W_N$  conformal blocks // Journal of High Energy Physics. 2015. No. 09. P. 167.
9. Sergeev A., Veselov A. P. Jack-Laurent symmetric functions // Proceedings of the London Mathematical Society. 2015. Vol. 111 doi
10. Khoroshkin A. Characteristic classes of flags of foliations and Lie algebra cohomology // Transformation Groups. 2015. P. 1-40.
11. Sergeev A. Dunkl operators at infinity and Calogero-Moser systems // International Mathematical Research Notes. 2015
12. Zabrodin A., Zotov A. Classical-Quantum Correspondence and Functional Relations for Painleve Equations // Constructive Approximation. 2015. Vol. 41. No. 3. P. 385-423. doi
13. Tsuboi Z., Zabrodin A., Zotov A. Supersymmetric quantum spin chains and classical integrable systems // Journal of High Energy Physics. 2015. Vol. 2015. No. 5, Article number 86 doi
14. Kharchev S., Zabrodin A. Theta vocabulary I // Journal of Geometry and Physics. 2015. Vol. 94. P. 19-31. doi
15. Derbyshev A. E., Povolotsky A. M., Priezhev V. Emergence of jams in the generalized totally asymmetric simple exclusion process // Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2015. Vol. 91. P. 022125 . doi

16. Dunin-Barkowski Petr, Kazarian Maxim, Orantin N., Shadrin S., Spitz L. Polynomiality of Hurwitz numbers, Bouchard-Marino conjecture, and a new proof of the ELSV formula // *Advances in Mathematics*. 2015. Vol. 279. P. 67-103. doi
17. Sergeev A., Veselov A. Jack-Laurent symmetric functions for special values of parameters // *Glasgow Mathematical Journal*. 2015
18. Буфетов А. И. Бесконечные детерминантные меры и эргодическое разложение бесконечных мер Пикрелла I. Построение бесконечных детерминантных мер // *Известия Российской академии наук. Серия математическая*. 2015
19. Bufetov A. I., Qiu Y. Equivalence of Palm measures for determinantal point processes associated with Hilbert spaces of holomorphic functions // *Comptes Rendus Mathematique*. 2015. Vol. 353. No. 6. P. 551-555.
20. Zabrodin A., Akhmedova V. Эллиптическая параметризация пфаффовых интегрируемых иерархий в пределе нулевой дисперсии // *Theoretical and Mathematical Physics*. 2015. Vol. 185. P. 410-422.
21. Бычков Б. С. О разложениях циклической перестановки в произведение данного числа перестановок // *Функциональный анализ и его приложения*. 2015. Т. 49. № 2. С. 1-6.
22. Bufetov A., Петров Л. Law of Large Numbers for Infinite Random Matrices over a Finite Field // *Selecta Mathematica, New Series*. 2015. Vol. 21. No. 4. P. 1271-1338. doi
23. Bufetov A., Горин В. Stochastic Monotonicity in Young Graph and Thoma Theorem // *International Mathematics Research Notices*. 2015. Vol. 23. P. 12920-12940. doi
24. Bufetov A., Бородин А. М. An irreversible local Markov chain that preserves the six vertex model on a torus // *Annales de l'Institut Henri Poincare. Section B: Probabilites et Statistiques*. 2015
25. Кричевер И. М. Коммутирующие разностные операторы и комбинаторное преобразование Гэйла // *Функциональный анализ и его приложения*. 2015. Т. 49. № 3. С. 22-40.
26. Dunin-Barkowski P., Lewanski D., Popolitov A., Shadrin S. Polynomiality of orbifold Hurwitz numbers, spectral curve, and a new proof of the Johnson–Pandharipande–Tseng formula // *Journal of the London Mathematical Society*. 2015. Vol. 92. No. 3. P. 547-565. doi
27. Dunin-Barkowski P., Popolitov A., Shabat G., Sleptsov A. On the Homology of Certain Smooth Covers of Moduli Spaces of Algebraic Curves // *Differential Geometry and its Applications*. 2015. Vol. 40. P. 86-102. doi
28. Gavrylenko P., Marshakov A. Exact conformal blocks for the W-algebras, twist fields and isomonodromic deformations / *Working papers by Cornell University. Series "Working papers by Cornell University"*. 2015. No. 1507.08794.

29. Gorsky E., Nemethi A. On the set of L-space surgeries for links / Working papers by Cornell University. Series "Working papers by Cornell University". 2015.
30. Gorsky E., Hom J. Cable links and L-space surgeries / Working papers by Cornell University. Series "Working papers by Cornell University". 2015.
31. Gorsky E., Mazin M. Rational Parking Functions and LLT Polynomials / Working papers by Cornell University. Series "Working papers by Cornell University". 2015.
32. Gorsky E., Negut A. Infinitesimal change of stable basis / Working papers by Cornell University. Series math "arxiv.org". 2015.
33. Yurii M. Burman. Higher determinants and the matrix-tree theorem / Working papers by Cornell University. Series math "arxiv.org". 2015. No. 1508.02245.
34. Dunin-Barkowski Petr, Norbury P., Orantin N., Popolitov A., Shadrin S. Dubrovin's superpotential as a global spectral curve / Working papers by Cornell University. Series math "arxiv.org". 2015. No. 1509.06954.
35. Petr Dunin-Barkowski, Orantin N., Popolitov A., Shadrin S. Combinatorics of loop equations for branched covers of sphere / Working papers by Cornell University. Series math "arxiv.org". 2014. No. 1412.1698.
36. Bufetov A., Borodin A., Corwin I. Directed random polymers via nested contour integrals // Working papers by Cornell University. Series math "arxiv.org". 2015
37. Казарян М. Э., Ландо С. К. Комбинаторные решения интегрируемых иерархий // Успехи математических наук. 2015. Т. 70. № 3. С. 70-106.
38. Krichever I. M., Grushevsky S. Real-Normalized Differentials and the Elliptic Calogero-Moser System // Complex Geometry and Dynamics, Abel Symposia. 2015. No. 10
39. G. Borot, B. Eynard, N. Orantin, Abstract loop equations, topological recursion, and applications, arXiv: 1303.5808.
40. G. Borot, S. Shadrin, Blobbed topological recursion: properties and applications, arXiv: 1502.00981.
41. V. Bouchard, D. Hernández Serrano, X. Liu, M. Mulase, *Mirror symmetry for orbifold Hurwitz numbers*, J. Differ. Geom. 98 (2014), 375–423.
42. N. Do, O. Leigh, P. Norbury, *Orbifold Hurwitz numbers and Eynard-Orantin invariants*, arXiv: 1212.6850.
43. P. Dunin-Barkowski, M. Kazarian, N. Orantin, S. Shadrin, L. Spitz, *Polynomiality of Hurwitz numbers, Bouchard-Mariño conjecture, and a new proof of the ELSV formula*, arXiv: 1307.4729.
44. P. Dunin-Barkowski, N. Orantin, S. Shadrin, L. Spitz, *Identification of the Givental formula with the spectral curve topological recursion procedure*, arXiv: 1211.4021.

45. T. Ekedahl, S. Lando, M. Shapiro, and A. Vainshtein, *Hurwitz numbers and intersections on moduli spaces of curves*, Invent. Math. 146 (2001), no. 2, 297–327
46. B. Eynard, *Invariants of spectral curves and intersection theory of moduli spaces of complex curves*, arXiv: 1110.2949.
47. B. Eynard, *A short overview of the “Topological recursion”*, arXiv: 1412.3286
48. B. Eynard, N. Orantin, *Invariants of algebraic curves and topological expansion*, Commun. Number Theory Phys. 1 (2007), no. 2, 347–452.
49. I.P. Goulden, D.M. Jackson, R. Vakil, *Towards the geometry of double Hurwitz numbers*, Adv. Math. 198 (2005), 43–92.
50. P. Johnson, *Equivariant Gromov-Witten theory of one dimensional stacks*, arXiv: 0903.1068
51. P. Johnson, *Double Hurwitz numbers via the infinite wedge*, arXiv: 1008.3266.
52. P. Johnson, R. Pandharipande, H.-H. Tseng *Abelian Hurwitz–Hodge integrals*, Mich. Math. J. **60** (2011), no. 1, 171–198.
53. D. Lewanski, A. Popolitov, S. Shadrin, D. Zvonkine, *Chiodo formulas for the  $r$ -th roots and topological recursion*, preprint 2015.
54. T. Miwa, M. Jimbo, E. Date, *Solitons. Differential equations, symmetries and infinite-dimensional algebras*. Translated from the 1993 Japanese original by Miles Reid. Cambridge Tracts in Mathematics, 135. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
55. A. Okounkov, *Toda equations for Hurwitz numbers*. Math. Res. Lett. **7** (2000), no. 4, 447–453.
56. A. Okounkov and R. Pandharipande, *The equivariant Gromov-Witten theory of  $\mathbb{P}^1$* , arXiv: math/0207233.
57. S. Shadrin, L. Spitz, D. Zvonkine, *Equivalence of ELSV and Bouchard-Mariño conjectures for  $r$ -spin Hurwitz numbers*, Math. Ann. **361** (2015), no. 3-4, 611–645.
58. A.R. Its, V.Yu. Novokshenov, *Lecture Notes in Mathematics 1191*, Springer-Verlag, Berlin, (1986).
59. A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. **B241**, (1984), 333-380.
60. M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo, Publ. RIMS Kyoto Univ. **14**, (1978), 223–267; **15**, (1979), 201–278; **15**, (1979), 577–629; **15**, (1979), 871–972; **16**, (1980), 531–584.
61. O. Gamayun, N. Iorgov, O. Lisovyy, JHEP10(2012)038 [arXiv:1207.0787].
62. M.A. Bershtein, A.I. Shchekhin, [arXiv:1406.3008 [math-ph]].
63. N. Iorgov, O. Lisovyy, J. Teschner, Comm. Math. Phys. **336**, (2015), 671-694 [arXiv:1401.6104 [hep-th]].
64. O. Gamayun, N. Iorgov, O. Lisovyy J. Phys. A: Math. Theor. **46**, (2013), 335203 [arXiv:1302.1832 [hep-th]].
65. A. Its, O. Lisovyy, Yu. Tykhyy [arXiv:1403.1235 [math-ph]].

66. A.B. Zamolodchikov, *Theor. Math. Phys.* **65**:3, (1985), 1205–1213.
67. V.A. Fateev, A.B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B280**, (1987), 644-660.
68. V.A. Fateev, S.L. Lukyanov, *Int. J. Mod. Phys.* **A3** (2), (1988), 507-520.
69. P. Bouwknegt, K. Schoutens, *Phys. Rept.* **223**, (1993), 183-276, [arXiv:hep-th/9210010].
70. P. Bowcock, G.M.T. Watts, *Theor. Math. Phys.* **98**, (1994), 350-356 [arXiv:hep-th/9309146].
71. V.A. Fateev, A.V. Litvinov, *JHEP* **0711**, (2007), 002, [arXiv:0709.3806 [hep-th]].
72. V.A. Fateev, A.V. Litvinov, *JHEP* **0901**, (2009), 033, [arXiv:0810.3020 [hep-th]].
73. V.A. Fateev, A.V. Litvinov, *JHEP* **1201**, (2012), 051, [arXiv:1109.4042 [hep-th]].
74. P. Gavrylenko, N. Iorgov, O. Lisovyy, to appear.
75. M. Jimbo, *Publ. RIMS. Kyoto Univ.* **18** (1982), 1137-1161.
76. N. Nekrasov, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7**, (2004), 831-864, [arXiv:hep-th/0206161].
77. L. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, *Lett. Math. Phys.* **91**, (2010), 167-197, [arXiv:0906.3219 [hep-th]].
78. N. Wyllard, *JHEP* **0911**, (2009), 002, [arXiv:0907.2189 [hep-th]].
79. A. Mironov, A. Morozov, *Nucl. Phys.* **B825**, (2010), 1-37, [arXiv:0908.2569 [hep-th]].
80. A.A. Belavin, M.A. Bershtein, B.L. Feigin, A.V. Litvinov, G.M. Tarnopolsky, *Comm. Math. Phys.* **319**, (2013), 269-301, [arXiv:1111.2803 [hep-th]].
81. I. Coman, M. Gabella, J. Teschner, [arXiv:1505.05898 [hep-th]]
82. V. Fateev, S. Ribault, *JHEP* **0212**, (2012), 001, [arXiv:1109.6764 [hep-th]].
83. L. Bao, V. Mitev, E. Pomoni, M. Taki, F. Yagi *JHEP* **0114**, (2014), 137, [arXiv:1310.3841 [hep-th]]
84. L. F. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, *Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories*, *Lett. Math. Phys.* **91** (2010) 167-197, [arXiv:0906.3219].
85. A. Belavin, A. Polyakov, A. Zamolodchikov, *Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory*. *Nucl. Phys.* **B241** (1984), 333.
86. J. Bernstein, I. Gel'fand, S. Gel'fand, *Category of  $\mathfrak{g}$ -modules* *Funkts. Anal. Prilozh.*, **10 2** (1976), 1–8.
87. B. Feigin, D. Fuchs, *Representations of the Virasoro algebra*. *Representations of Lie Groups and Related Topics*, 465, *Adv. Stud. Contemp. Math.*, 7, Gordon and Breach, New York, 1990.

88. E. Frenkel, D. Ben-Zvi, *Vertex Algebras and Algebraic Curves*, Mathematical Surveys and Monographs 88, American Mathematical Society 2004
89. K. Iohara, Y. Koga, *Representation theory of the Virasoro algebra*, Springer Monographs in Mathematics, London: Springer-Verlag London Ltd (2011)
90. H. Nakajima, K. Yoshioka, *Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory*, *Inventiones mathematicae* **162** **2** (2005), 313-355 [arXiv:math/0306198].
91. G. Olshanski and A. Vershik, Ergodic unitarily invariant measures on the space of infinite hermitian matrices *Contemporary mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, 175, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 137–175
92. А.М. Вершик, Описание инвариантных мер для действия некоторых бесконечномерных групп, *ДАН СССР*, 218:4, 1974, 749–752
93. A. Borodin, A. Bufetov, G. Olshanski, Limit shapes for growing extreme characters of  $U(\infty)$ , *Annals of Applied Probability*, 25:4, 2015, 2339-2381
94. A. Nica, R. Speicher, *Lectures on the Combinatorics of Free Probability*, Cambridge University Press, 2006
95. D. Voiculescu, Addition of certain non-commuting random variables *Journal of Functional Analysis*, 66, 1986, 323-346
96. L. Pastur, V. Vasilchuk, On the Law of Addition of Random Matrices *Communications in Mathematical Physics*, 214, 2000, 249-286
97. I. J. Schoenberg, On Polya frequency functions I. The totally positive functions and their Laplace transforms, *Journal d'Analyse Mathematique* 1, 1951, 331–374
98. B. Feigin, M. Jimbo, S. Loktev, T. Miwa, E. Mukhin, Addendum to "Bosonic Formulas for  $(k, l)$ -Admissible Partitions" *The Ramanujan Journal*, December 2003, Volume 7, Issue 4, 519-530.
99. B. Feigin, A. Stoyanovsky, Quasi-particles models for the representations of Lie algebras and geometry of flag manifold, <http://arxiv.org/abs/hep-th/9308079v1> (препринт)
100. А. В. Стояновский, Б. Л. Фейгин, "Функциональные модели представлений алгебр токов и полубесконечные клетки Шуберта", *Функц. анализ и его прил.*, 28:1 (1994), 68–90
101. M. Brion, Points entiers dans les polyèdres convexes, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 21 (1988), no. 4, 653-663.
102. C. J. Brianchon, Théorème nouveau sur les polyèdres. *J. Ecole (Royale) Polytechnique*, 15 (1837), 317-319.
103. R. Carter, *Lie Algebras of Finite and Affine Type*, Cambridge University Press, 2005.
104. M. Beck, S. Robins, *Computing the Continuous Discretely*, Springer, 2009.

105. M. Jimbo and T. Miwa, *Soliton equations and infinite dimensional Lie algebras*, Publ. RIMS, Kyoto University **19** (1983) 943-1001.
106. R. Hirota and Y. Ohta, *Hierarchies of coupled soliton equations I*, J. Phys. Soc. Japan **60** (1991) 798-809.
107. M. Adler, E. Horozov and P. van Moerbeke, *The Pfaff lattice and skew-orthogonal polynomials*, Int. Math. Res. Notices **1999** (1999), no 11, 569-588.
108. M. Adler, T. Shiota and P. van Moerbeke, *Pfaff  $\tau$ -functions*, Math. Ann. **322** (2002) 423-476.
109. S. Kakei, *Orthogonal and symplectic matrix integrals and coupled KP hierarchy*, J. Phys. Soc. Japan **99** (1999) 2875-2877.
110. S. Isojima, R. Willox and J. Satsuma, *On various solutions of the coupled KP equation*, J. Phys. A: Math. Gen. **35** (2002) 6893-6909.
111. J. van de Leur, *Matrix integrals and the geometry of spinors*, J. Nonlinear Math. Phys. **8** (2001) 288-310.
112. A. Orlov, *Deformed Ginibre ensembles and integrable systems*, Phys. Lett. **A 378** (2014) 319-328.
113. Y. Kodama and K.-I. Maruno,  *$N$ -soliton solutions to the DKP hierarchy and the Weyl group actions*, J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006) 4063-4086.
114. Y. Kodama and V. Pierce, *Combinatorics of dispersionless integrable systems and universality in random matrix theory*, Commun. Math. Phys. **292** (2009) 529-568.
115. M. Adler, V. Kuznetsov and P. van Moerbeke, *Rational solutions to the Pfaff lattice and Jack polynomials*, Ergodic Theory Dynam. Systems **22** (2002) 1365-1405.
116. R. Willox, *On a generalized Tzitzeica equation*, Glasgow Math. J. **47A** (2005) 221-231.
117. K. Takasaki, *Auxiliary linear problem, difference Fay identities and dispersionless limit of Pfaff-Toda hierarchy*, SIGMA **5** (2009) 109.
118. K. Takasaki, *Differential Fay identities and auxiliary linear problem of integrable hierarchies*, Advanced Studies in Pure Mathematics **61** (2011) 387-441.
119. I. Krichever, *The method of averaging for two dimensional integrable equations*, Funct. Anal. Appl. **22** (1989) 200-213.
120. I. Krichever, A. Marshakov and A. Zabrodin, *Integrable Structure of the Dirichlet Boundary Problem in Multiply-Connected Domains*, Commun. Math. Phys. **259** (2005) 1-44.
121. V. Akhmedova and A. Zabrodin, *Dispersionless DKP hierarchy and elliptic Lowner equation*, J. Phys. A: Math. Theor. **47** (2014) 392001 (13pp), arXiv:1404.5135.
122. T. Takasaki and T. Takebe, *Integrable hierarchies and dispersionless limit*, Rev. Math. Phys. **7** (1995) 743-808.
123. T. Takebe, *Lectures on Dispersionless Integrable Hierarchies*, Rikkyo Center of Mathematical Physics Lecture Notes **2** (2014), 1-95.



124. A. Zabrodin, *Hirota's difference equations*, Theor. Math. Phys, **113** (1997) 179-230.
125. S. Kharchev and A. Zabrodin, *Theta Vocabulary I*, preprint ITEP-TH-14/14, arXiv:1502.04603.
126. N. Seiberg, E. Witten, Nucl.Phys., B426 (1994) 19–52, arXiv:hep-th/9407087; N. Seiberg, E. Witten, Nucl.Phys., B431 (1994) 484–550, arXiv:hep-th/9408099.
127. M.R. Adams, J. Harnad and J. Hurtubise, Lett. Math. Phys. 20 (1990) 299–308;  
J. Harnad, Commun. Math. Phys. 166 (1994) 337–365, arXiv:hep-th/9301076.
128. E. Mukhin, V. Tarasov and A. Varchenko, arXiv:math.QA/0510364; Advances in Mathematics, 218 (2008) 216–265, arXiv:math.QA/0605172.
129. K. Bulycheva, H. -Y. Chen, A. Gorsky and P. Koroteev, JHEP 1210 (2012) 116, arXiv:1207.0460 [hep-th].
130. A. Mironov, A. Morozov, Y. Zenkevich and A. Zotov, JETP Letters, Vol. 97 (2013) 45-51; arXiv:1204.0913 [hep-th];
131. A. Mironov, A. Morozov, B. Runov, Y. Zenkevich, A. Zotov, arXiv:1307.1502 [hep-th].
132. V.V. Mangazeev, V.V. Bazhanov and S.M. Sergeev, J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013) 465206, arXiv:1308.4773 [math-ph].
133. A. Mironov, A. Morozov and Sh. Shakirov, Int. J. Mod. Phys. A27 (2012) 1230001, arXiv:1011.5629 [hep-th].
134. D. Gaiotto, arXiv:0904.2715 [hep-th];  
L.F. Alday, D. Gaiotto and Y. Tachikawa, Lett. Math. Phys., Vol . 91 (2010) 167–197, arXiv:0906.3219 [hep-th];  
N. Wyllard, JHEP 0911 (2009) 002, arXiv:0907.2189 [hep-th];  
A. Mironov and A. Morozov, Nucl.Phys. B825 (2009) 1–37, arXiv:0908.2569 [hep-th];  
JHEP 04 (2010) 040, arXiv:0910.5670 [hep-th].
135. N. Nekrasov and S. Shatashvili, Nucl.Phys.B, Proc.Suppl.192–193 2009:91–112 arXiv:0901.4744 [hep-th].
136. N. Nekrasov and S. Shatashvili, arXiv:0908.4052 [hep-th].
137. A. Givental and B. Kim, Commun. Math. Phys. 168 (1995) 609–642, arXiv:hep-th/9312096.
138. E. Mukhin, V. Tarasov and A. Varchenko, St. Petersburg Math. J. **22** (2011) 463-472, arXiv: 0904.2131;  
E. Mukhin, V. Tarasov and A. Varchenko, SIGMA 8 (2012) 072, arXiv:1201.3990 [math.QA].
139. A. Alexandrov, V. Kazakov, S. Leurent, Z. Tsuboi and A. Zabrodin, JHEP 1309 (2013) 064, arXiv:1112.3310 [math-ph].

140. A. Zabrodin, *Teor. Mat. Fys.* 171:1 (2013) 59-76 (*Theor. Math. Phys.* 174 (2013) 52–67), arXiv:1205.4152 [math-ph].
141. A. Alexandrov, S. Leurent, Z. Tsuboi and A. Zabrodin, arXiv:1306.1111 [math-ph].
142. I. Krichever, O. Lipan, P. Wiegmann and A. Zabrodin, *Commun. Math. Phys.* 188 (1997) 267-304, arXiv:hep-th/9604080.
143. A. Gorsky, A. Zabrodin, A. Zotov, *Spectrum of Quantum Transfer Matrices via Classical Many-Body Systems*, *JHEP* **0114** (2014) 070, arXiv:1310.6958.
144. S. N. M. Ruijsenaars and H. Schneider, *A new class of integrable systems and its relation to solitons*, *Ann. Phys. (NY)* **170**: 370–405 (1986).  
S. N. M. Ruijsenaars, *Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities*, *Commun. Math. Phys.* **110**: 191–213 (1987).
145. G. Aminov, S. Arthamonov, A. Smirnov, A. Zotov, *Rational Top and its Classical R-matrix*, *J. Phys. A: Math. Theor.* 47 (2014) 305207; arXiv:1402.3189 [hep-th].
146. G. Aminov, S. Arthamonov, A. Smirnov and A. Zotov. “Modifications of Bundles as Generating Functions of Lax Operators”, Preprint ITEP-TH 27/13.
147. M. Jimbo, *A q difference analog of  $U(G)$  and the Yang-Baxter equation*, *Lett. Math. Phys.* 10 (1985) 63.
148. L.D. Faddeev, L.A. Takhtajan, N.Y. Reshetikhin, *Quantization of Lie Groups and Lie Algebras* *Leningrad Math. J.* 1 (1990) 193–225.
149. S. Belliard, E. Ragoucy, *Nested Bethe ansatz for “all” closed spin chains*, *J. Phys. A*41 (2008) 295202; arXiv:0804.2822 [math-ph].
150. С. Б. Клейбанов, К. Б. Норкин, В. Б. Привальский, *Обращение матрицы Вандермонда*, *Автомат. и телемех.*, 1977, № 4, 176–177
151. H. Spohn, *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*, (Springer, Berlin, 1991).
152. T.L. Liggett, *Stochastic interacting systems: contact, voter and exclusion processes*, (Springer, Berlin, 1999)
153. G.M. Schütz, Solvable models for many-body systems far from equilibrium. In C.Domb and J.Lebowitz (eds.) *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol.19 (Academic, London, pp.1-251, 2001).
154. S.F. Edwards and D.R. Wilkinson, *Proc. R. Soc. A* **381**,17 (1982)
155. M. Kardar, G. Parisi, and Y. C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 889 (1986)
156. L. H. Gwa and H. Spohn *Phys. Rev. A* **46**, 844 (1992)
157. D. Kim, *Phys. Rev. E* **52**, 3512 (1995)
158. B. Derrida and J.L. Lebowitz, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 209 (1998)
159. J. de Gier and F. H. L. Essler , *Phys. Rev. Lett.* **107**, 010602. (2011)

160. M. Gorissen, A. Lazarescu, K. Mallick, and C. Vanderzande, Phys. Rev. Lett. **109**, 170601 (2012)
161. G.M. Schütz, J. Stat. Phys. **88**, 427 (1997)
162. V. B. Priezzhev, Phys. Rev. Lett. **91**, 050601 (2003)
163. T. Sasamoto, J. Phys. A **38**, L549 (2005)
164. A. Borodin, P.L. Ferrari, M. Prähofer, and T. Sasamoto, J. Stat. Phys. **129** 1055 (2007)
165. T. Imamura and T. Sasamoto, J. Stat. Phys. **128** 799-846 (2007)
166. A. Borodin, P.L. Ferrari, M. Prähofer, and T. Sasamoto, Int. Math. Res. Papers, rpm002 (2007)
167. A. Borodin and P.L. Ferrari, Electron. J. Probab. **13**, 1380 (2008)
168. A. Borodin, P.L. Ferrari and T. Sasamoto, Comm. Pure Appl. Math. **61**, 1603 (2008)
169. A. M. Povolotsky, V. B. Priezzhev and G. M. Schütz, J. Stat. Phys. **142**, 754 (2011)
170. S. S. Poghosyan, A. M. Povolotsky, and V. B. Priezzhev, J. Stat. Mech. **08** P08013 (2012)
171. J.G. Brankov, V.B. Priezzhev and R.V. Shelest, Phys. Rev. E **69** 066136 (2004)
172. A.M. Povolotsky and V.B. Priezzhev, J. Stat. Mech. P07002 (2006)
173. S. S. Poghosyan, V. B. Priezzhev, and G. M. Schütz, J. Stat. Mech. P04022 (2010)
174. A.E. Derbyshev, S.S. Poghosyan, A.M. Povolotsky, and V.B. Priezzhev, J. Stat. Mech. P05014 (2012)
175. A.M. Povolotsky, J. Phys. A **46**, 465205 (2013)
176. I. Corwin, Int. Math. Res. Notices rnu094 (2014)
177. A. Borodin, I. Corwin, L. Petrov, and T. Sasamoto, arXiv:1407.8534
178. A.M. Povolotsky and J. F. F. Mendes, J. Stat. Phys. **123**, 125 (2006)
179. D. S. Lee and D. Kim, Phys. Rev. E **59**, 6476 (1999)
180. A. M. Povolotsky, V. B. Priezzhev, and C. K. Hu, **111**, 1149 (2003)
181. A. M. Povolotsky, Phys. Rev. E **69**, 061109 (2004)
182. T. Antal and G.M. Schütz, Phys. Rev. E **62**, 83 (2000)
183. S.N. Majumdar, S.Krishnamurthy, and M. Barma, Phys. Rev. Lett. **81**, 3691 (1998)
184. J. Krug, P. Meakin, and T. Halpin-Healy, Phys. Rev. A **45**, 638 (1992)
185. M.R. Evans, S. N. Majumdar, and R.K.P. Zia, J. Phys. A **37**, L275 (2004)
186. M. R. Evans, Braz. J. Phys. **30** 42 (2000)
187. P. Bialas, Z. Burda, and D. Johnston, Nucl. Phys. B **493** 505 (1997)

188. J. G. Brankov, V.V. Papoyan, V. S., Poghosyan, and V.B. Priezhev, *Physica A* **368**, 471 (2006)
189. M. Kanai, *J. Phys. A* **40** 7127 (2007)
190. M. Schreckenberg, A. Schadschneider, K. Nagel, and N. Ito, *Phys. Rev. E* **51**, 2939 (1995)
191. N. Rajewsky, L. Santen, A. Schadschneider and M. Schreckenberg *J. Stat. Phys.* **92**, 151 (1998)
192. B. Derrida, C. Appert, *J. Stat. Phys.* **94**, 1 (1999)
193. J. Krug, *Adv. in Phys.* **46**, 139 (1997)
194. B. Derrida, M.R. Evans, and D. Mukamel, *J. Phys. A* **26**, 4911 (1993)