Правительство Российской Федерации

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

УДК 515.14
№ госрегистрации АААА-А17-117100450007-6
Инв. №

УТВЕРЖДАЮ

Проректор НИУ ВШЭ
канд. экон. наук, доц.

___________________ М.М. Юдкевич

«_____» __________________ _______ г.

# ОТЧЕТ
# О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА. РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ, ИХ КВАНТОВЫХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ И ДРУГИХ СОВРЕМЕННЫХ ОБОБЩЕНИЙ. РАЗРАБОТКА НОВЫХ МЕТОДОВ И КОНЦЕПЦИЙ В ЭТОЙ ТЕОРИИ, ОСНОВАННЫХ НА ИДЕЯХ ТЕОРИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ, СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТЕОРИИ ЭКВИВАРИАНТНЫХ КВАНТОВЫХ КОГОМОЛОГИЙ КОЛЧАННЫХ МНОГООБРАЗИЙ. РАЗВИТИЕ КОМБИНАТОРНЫХ, ГОМОЛОГИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВ МОДУЛЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ И ИХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К ПРОБЛЕМАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЕЙ КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ, СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ, ИЗУЧЕНИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СТРУКТУР, КОНТРОЛИРУЮЩИХ ДИНАМИКУ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ ПОЛЯ КОЛЧАННОГО ТИПА, АНАЛИЗ ИХ СООТВЕТСТВИЙ С ДВУМЕРНЫМИ КОНФОРМНЫМИ ТЕОРИЯМИ

(заключительный)

Руководитель темы:

зав. Международной лабораторией
теории представлений и математической
физики д-р физ.-мат. наук, проф. ________________________ Б.Л. Фейгин
подпись, дата

Москва 2017

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

| | | |
|---|---|---|
| Руководители | | |
| Научный руководитель лаборатории, к.ф.-м.н | подпись, дата | А.Ю. Окуньков (общая координация работы) |
| Заведующий лаборатории, д.ф.-м.н | подпись, дата | Б.Л. Фейгин (общая координация работы) |
| Заместитель заведующего лабораторией, д.ф.-м.н | подпись, дата | А.В. Забродин (введение, заключение,реферат) |
| Заместитель заведующего лабораторией, к.ф.-м.н | подпись, дата | П.Н. Пятов (введение, заключение,реферат) |
| Заместитель заведующего лабораторией, к.ф.-м.н | подпись, дата | Л.Г. Рыбников (введение, заключение,реферат) |
| Менеджер научного проекта | подпись, дата | Е.А. Жингель (введение, заключение,реферат) |
| Исполнители | | |
| Младший научный сотрудник | подпись, дата | В.Э. Ахмедова (раздел 1) |
| Главный научный сотрудник, Ph.D. | подпись, дата | Р.В. Безрукавников (общая координация работы) |
| Научный сотрудник, к.ф.-м.н. | подпись, дата | М.А. Берштейн (раздел 1) |
| Научный сотрудник, к.ф.-м.н. | подпись, дата | Ю.М. Бурман (раздел 1) |
| Научный сотрудник, д.ф.-м.н. | подпись, дата | А.И. Буфетов (раздел 1) |
| Младший научный сотрудник, к.ф.-м.н. | подпись, дата | Б.С. Бычков (раздел 1) |
| Стажер-исследователь | подпись, дата | И.С. Вильковиский (раздел 1) |
| Младший научный сотрудник | подпись, дата | П.Г. Гавриленко (раздел 1) |
| Стажер-исследователь | подпись, дата | Р.В. Гейко (раздел 1) |
| Стажер-исследователь | подпись, дата | Р.Р. Гонин (раздел 1) |

| | | |
|---|---|---|
| Научный сотрудник,<br>к.ф.-м.н | подпись, дата | Е.А. Горский<br>(раздел 1) |
| Стажер-исследователь | подпись, дата | Д.И. Зубов<br>(раздел 1) |
| Стажер-исследователь | подпись, дата | А.Н. Иванов<br>(раздел 1) |
| Стажер-исследователь | подпись, дата | А.И. Ильин<br>(раздел 1) |
| Стажер-исследователь | подпись, дата | А.В. Ильина<br>(раздел 1) |
| Стажер-исследователь | подпись, дата | Д.А. Калинов<br>(раздел 1) |
| Стажер-исследователь | подпись, дата | С.Ю. Коротких<br>(раздел 1) |
| Стажер-исследователь | подпись, дата | Т.И. Левинсон<br>(раздел 1) |
| Главный научный сотрудник,<br>к.ф.-м.н | подпись, дата | И.В. Лосев<br>(общая координация работы) |
| Младший научный сотрудник | подпись, дата | А. Ляшик<br>(раздел 1) |
| Стажер-исследователь | подпись, дата | А.А. Матвеева<br>(раздел 1) |
| Стажер-исследователь | подпись, дата | М.Г. Матушко<br>(раздел 1) |
| Научный сотрудник,<br>к.ф.-м.н. | подпись, дата | И.Ю. Махлин<br>(раздел 1) |
| Научный сотрудник,<br>к.ф.-м.н | подпись, дата | А.Ю. Орлов<br>(раздел 1) |
| Научный сотрудник,<br>к.ф.-м.н | подпись, дата | В.А. Побережный<br>(раздел 1) |
| Стажер-исследователь | подпись, дата | П.П. Попов<br>(раздел 1) |
| Научный сотрудник,<br>д.ф.-м.н | подпись, дата | П.А. Сапонов<br>(раздел 1) |

| | | |
|---|---|---|
| Научный сотрудник,<br>д.ф.-м.н | подпись, дата | А.Н. Сергеев<br>(раздел 1) |
| Стажер-исследователь | подпись, дата | В.В. Скворцова<br>(раздел 1) |
| Стажер-исследователь | подпись, дата | А.М. Слинкин<br>(раздел 1) |
| Стажер-исследователь | подпись, дата | А.К. Стоян<br>(раздел 1) |
| Стажер-исследователь | подпись, дата | К.Р. Ступаков<br>(раздел 1) |
| Стажер-исследователь | подпись, дата | К.А. Сырцева<br>(раздел 1) |
| Научный сотрудник,<br>Ph.D. | подпись, дата | Т. Такебе<br>(раздел 1) |
| Стажер-исследователь | подпись, дата | Д.С. Толпыго<br>(раздел 1) |
| Младший научный сотрудник | подпись, дата | А.А. Трофимова<br>(раздел 1) |
| Стажер-исследователь | подпись, дата | А.М. Утиралова<br>(раздел 1) |
| Стажер-исследователь | подпись, дата | П.А. Филиппова<br>(раздел 1) |
| Научный сотрудник,<br>к.ф.-м.н | подпись, дата | А.С. Хорошкин<br>(раздел 1) |
| Стажер-исследователь | подпись, дата | П.Ю. Шлыков<br>(раздел 1) |
| Младший научный сотрудник | подпись, дата | А.И. Щечкин<br>(раздел 1) |

# РЕФЕРАТ

Отчет на 173 страниц, 1 часть, 0 рис., 272 источников.

Перечень ключевых слов: ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ РЕКУРСИЯ, ЧИСЛА ГУРВИЦА, СИСТЕМА ШЛЕЗИНГЕРА, УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ, $\tau$-ФУНКЦИЯ, КОНФОРМНЫЙ БЛОК, АЛГЕБРА ВИРАСОРО, ПРЕПОТЕНЦИАЛЫ, ИНСТАНТОННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ, ВЕРТЕКСНЫЕ АЛГЕБРЫ, АФФИННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ, ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА, ГРАВИТАЦИОННЫЙ КОЛЛАПС, СВОБОДНО БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ МЕРЫ, КВАНТОВО- КЛАССИЧЕСКОЕ СООТВЕТСТВИЕ, МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ, СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ, ФУНКЦИЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ, АНЗАЦ БЕТЕ, ПРОЦЕСС С ПРОСТЫМИ ЗАПРЕТАМИ, ГОМОЛОГИИ ХЕГОРА-ФЛОЕРА, АЛГЕБРЫ ЧЕРЕДНИКА, ИНВАРИАНТЫ УЗЛОВ, ГОМОЛОГИИ ХОВАНОВА-РОЗАНСКОГО, ГОМОЛОГИИ КОШУЛЯ, ЯНГИАНЫ, R-МАТРИЦЫ, КВАНТОВЫЕ ГРУППЫ

Цели работы: развитие общего подхода к разнообразным вопросам, находящимся на стыке теории интегрируемых систем с теорией представлений квантовых и бесконечномерных групп и алгебр.

Задачи: сохранение и преумножение традиций российской математико-физической школы, занимающей лидирующие позиции в современной мировой науке; развитие новых направлений и методов математики с опорой на идеи, возникающие в современной фундаментальной физике; вовлечение преподавателей, аспирантов и студентов НИУ ВШЭ в научную деятельность лаборатории, содействие их контактам с зарубежными исследователями; укрепление международныых связей факультета математики НИУ ВШЭ, повышение его авторитета в ряду ведущих математико-физических вузов мира.

Объекты научного исследования: квантовые когомологии в теории интегрируемых систем, вопросы зеркальной симметрии, многомерные гипергеометрические функции и геометрическая теория представлений, эллиптические конформные блоки и эллиптические гипергеометрические функции, обобщенные Янгианы, геометрическое соответствие Ленглендса.

Методы исследований: алгебраический и теоретико-представленческий анализ классических и квантовых теорий поля, статистической физики и случайных процессов, исследование интегрируемых структур стоящих за калибровочными киверными теориями и анализ их соответствия с двумерными конформными теориями поля, развитие комбинаторных, гомологических и геометрических методов в теории пространств модулей различных геометрических и аналитических структур с приложениями к проблемам математической физики.

Полученные результаты:

— Исследовано явное выражение для $\tau$-функции уравнения Пенлеве III($D_8$) в виде суммы по конформным блокам алгебры Вирасоро с центральным зарядом 1. Изучена группа Бэклунда второго порядка этого уравнения.

— Доказано, что дуальная статсумма Некрасова на самодуальном омега-фоне (а) дается детерминантом Фредгольма с обобщенным ядром Бесселя и (б) совпадает с тау-функцией, связанной с общим решением уравнения Пенлеве III ($D_8$).

— Исследованы представления W-алгебр, отвечающие твист-полям, построено обобщение соответствующих вертексных операторов для D- и B-серий. Показано, что вычисление характеров таких представлений приводит к нетривиальным соотношениям, содержащим решеточные тэта-функции.

— Установлено соответствие между уравнениями Книжника-Замолодчикова ассоциированными с $GL(N)$ и $n$-частичной квантовой моделью Калоджеро в случае, когда $n$ не обязательно равно $N$.

— Исследованы разложения многократных интегралов и тау функций иерархии ВКР по характерам ортогональной и симплектической групп. Построены разложения по характерам интегралов по ортогональной и симплектической группам, которые являются примерами тау функции ВКР.

— Исследованы многоматричные модели, которые можно трактовать как интегралы от произведений тау-функций от матричных аргументов. Иногда такие интегралы сами являются тау-функциями. Детально рассмотрены модели, которые генерируют числа Гурвица $H^{E,F}$, где $E$ – эйлерова характеристика базовой поверхности, а $F$ – число точек ветвления.

— Выведены непрерывные симметрии разностного уравнения Хироты, коммутирующие со сдвигами независимых переменных. Представлено действие этих симметрий на зависимые переменные этого уравнения. Даны примеры уравнений и их пар Лакса, возникающих при такой процедуре.

— Найдены бетевские вектора для квантовых интегрируемых систем связанных с суперсимметричными янгианами $Y(\mathfrak{gl}(m|n)$ в терминах генераторов токов дубля янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$.

— Изучены скалярные произведения бетевских векторов в моделях, решаемых иерархическим алгебраическим анзацем Бете и описываемых $\mathfrak{gl}(m|n)$-супералгеброй.

С использованием ко-произведенческих свойств бетевских векторов получена формула суммирования для их скалярных произведений.

— Описаны плоские деформации некоторых факторов алгебры многочленов по мономиальным идеалам в классе градуированных коммутативных алгебр.

— Исследован рост размерности неприводимых представлений полупростых алгебр Ли над $\overline{F_p}$ в зависимости от простого $p$.

— Построен пучок Прочези на терминализации симплектической фактор-особенности и показано, что квантования этих терминализаций являются простыми пучками алгебр.

— Доказано, что замыкание пространства параметров подалгебр Бете в янгиане $gl_n$, параметризующее все возможные вырождения, есть компактификация Делиня-Мамфорда пространства модулей стабильных рациональных кривых с $n+2$ отмеченными точками.

— Определена степень бифуркационного множества полиномиального отображения общего положения.

— Изучено новое семейство дискретных детерминантных точечных процессов, связанных с ортогональными полиномами на вещественной оси. Доказано, что q-преобразование Лапласа весовых функций ASEP эквивалентно среднему от простого мультипликативного функционала, определенного на ансамбле Лагерра. Это позволяет получить асимптотики при больших временах для ASEP в трех предельных режимах.

— Исследованы орбиты и полиномиальные инварианты некоторого аффинного действия супергруппоида Вейля суперbegin алгебры Ли $gl(n,m)$ в зависимости от параметра действия и показано, что для общих значений параметра все орбиты конечны и различимы с помощью явно заданных инвариантов.

— Рассмотрен квазиклассический предел двух классов обобщенных Янгианов и доказано, что все такие Янгианы являются деформациями (квантованием) коммутативной алгебры $\mathrm{Sym}(gl(m)[t^{-1})$, если соответствующая $R$-матрица является деформацией матрицы перестановки.

— Предложена конструкция локальных характеристических чисел для наборов голоморфных дифференциальных 1-форм на особых многообразиях с изолированными особенностями.

— Доказана бесконечномерность когомологий графовых комплексов в различных гомологических степенях, как в классическом комплексе Концевича, так и для волосатых граф-комплексов Ароне-Турчина

— Показано что усреднение симметризованного хроматического многочлена Стенли графа $G$ с точностью до перескалирования переменных является формальной $\tau$-функцией интегрируемой системы Кадомцева-Петвиашвили.

— Получено явное решение общей одномерной, ограниченной трёхточечной двумерной и специальной двумерной проблемы Римана-Гильберта на эллиптической кривой.

Организационные результаты:

— подготовка к изданию научных докладов, статей и других публикаций, содержащих результаты научной деятельности лаборатории;

— организация и проведение международных конференций и школ, студенческих школ и научных семинаров

— организация визитов в лабораторию зарубежных специалистов

— организация курсов лекций

# СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Теория представлений групп и алгебр — это одна из центральных областей математики, имеющая множество как математических, так и физических приложений. Различные аспекты этой теории проявляются и находят разнообразные приложения в таких областях математики и физики, как алгебраическая геометрия, перечислительная комбинаторика, теория нелинейных дифференциальных уравнений, квантовая механика и теория поля, статистическая физика и теория стохастических процессов, топология узлов и многие другие. С точки зрения математической физики теория представлений является ядром теории интегрируемых систем, которая в последние двадцать лет привлекает все больше исследователей, ставит новые задачи и является источником множества идей, зачастую приводящих к рождению новых направлений в современной математике и теоретической физике.

Исследования, проводившиеся в международной лаборатории теории представлений и математичесой физики в 2017 году, соответствовали передовым тенденциям развития вышеупомянутых областей математики и физики, и были направлены на разработку новых методов и концепций в теории представлений полупростых алгебр Ли и их деформаций; развитие комбинаторных, гомологических и геометрических методов в теории пространств модулей алгебраических кривых с приложениями к проблемам математической физики; развитие нового подхода в теории интегрируемых систем, связанного с квантовыми когомологиями пространств флагов; нахождение и исследование зеркальной симметрии для кокасательных расслоений пространств флагов; дальнейшее изучение и развитие связей между общими гипергеометрическими функциями и фробениусовыми структурами, ассоциированными с квантовыми когомологиями; изучение связей между динамическими квантовыми группами и геометрией аффинных грассманианов; вычисление характеристических классов глобальных локусов сингулярностей в пространствах модулей отображений алгебраических кривых и развитие связей с интегрируемыми иерархиями; выявление геометрической и теоретико-представленческой природы обнаруженного недавно нетривиального соответствия между квантовыми интегрируемыми системами и классическими интегрируемыми иерархиями; развитие структурной теории для алгебр обобщенных янгианов; развитие теории представлений и геометрической теории эллиптических деформаций алгебр Ли с приложениями к интегрируемым системам с эллиптическими R-матрицами; алгебраический анализ интегрируемых иерархий солитонных уравнений, интегрируемых моделей классической и квантовой теории поля и статистической физики; анализ интегрируемых структур конформных теорий поля, суперсимметричных калибровочных теорий поля и их деформаций.

В соответствии с возложенными на неё задачами Лаборатория провела следующие мероприятия:

1. подготовила и опубликовала 29 статей (все с аффилиацией НИУ ВШЭ и с благодарностью Программе государственной поддержки ведущих университетов РФ "5-100"), 8 препринтов (все с аффилиацией НИУ ВШЭ и благодарностью Программе “5-100”) и более 59 презентаций докладов на международных и российских научных конференциях;
2. организовала и провела международную конференцию "Классические и квантовые интегрируемые системы"(CQIS-2017, Дубна, 24-29.07.2017), международную конференцию “Квантовая информация и топологическая рекурсия” (QUATR-17, Москва, 19-23.6.2017), международную школу “Частицы, поля и струны” (Москва, 17-24.04.2017), международную школу-конференцию «Передовые методы современной теоретической физики: интегрируемые и стохастические системы» (Дубна, 06-12.08.2017), школу-конференцию по теории струн, интегрируемым моделям и теории представлений (Москва, 21-27.01.2017), а также проводила еженедельный семинар по математической физике, семинары в сотрудничестве с ведущими зарубежными специалистами и другие мероприятия, содействующие созданию творческой атмосферы в Лаборатории, и ориентированные на подготовку молодых учёных, аспирантов и студентов;
3. пригласила и организовала прием 4 ведущих зарубежных специалистов из Канады, Японии, Великобритании и США.

Ниже приводится краткое описание основных научных результатов, полученных в Лаборатории в 2017 году:

Исследовано явное выражение (введенное Гамаюном, Иорговым и Лисовым) для $\tau$-функции уравнения Пенлеве III($D_8$) в виде суммы по конформным блокам алгебры Вирасоро с центральным зарядом 1. Изучена группа Бэклунда второго порядка этого уравнения, в частности, в контексте вышеупомянутой явной формулы для $\tau$-функции. Уравнение Пенлеве имеет два типа билинейных форм, мы называем их уравнениями типа Тоды и типа Окамото. Эти уравнения связывают $\tau$-функции уравнений Пенлеве и их Бэклунд-преобразования. Мы получаем эти уравнения из теории представлений, используя вложение прямой суммы двух алгебр Вирасоро в некоторую супералгебру и разложение модулей, индуцированное этим вложением. Уравнения типа

Тоды и типа Окамото соответствуют секторам Невье-Шварца и Рамона этой супералгебры.

Показано, что дуальная статсумма Некрасова на самодуальном омега-фоне (а) дается детерминантом Фредгольма с обобщенным ядром Бесселя и (б) совпадает с тау-функцией, связанной с общим решением уравнения Пенлеве III ($D_8$), или радиального уравнения синус-Гордона. В частности, разложение детерминанта Фредгольма по главным минорам дает Некрасовские комбинаторные суммы по парам диаграмм Юнга.

Исследованы представления W-алгебр, отвечающие твист-полям, построено обобщение соответствующих вертексных операторов для D- и B-серий. Показано, что вычисление характеров таких представлений приводит к нетривиальным соотношениям, содержащим решеточные тэта-функции. Предложена конструкция конформных блоков твист-полей, которая в случае D-серии выражает их в терминах геометрических данных соответствующего многообразия Прима.

Установлено соответствие между уравнениями Книжника-Замолодчикова ассоциированными с $GL(N)$ и $n$-частичной квантовой моделью Калоджеро в случае, когда $n$ не обязательно равно $N$. Это можно рассматривать как естественное “квантование” квантово-классического соответствия между квантовой моделью Годена и классической моделью Калоджеро.

Изучались разложения многократных интегралов и тау функций иерархии ВКР по характерам ортогональной и симплектической групп. В частности, построены разложения по характерам интегралов по ортогональной и симплектической группам, которые являются примерами тау функции ВКР.

Рассмотрены многоматричные модели, которые можно рассматривать как интегралы от произведений тау-функций от матричных аргументов. Иногда такие интегралы сами являются тау-функциями. Рассматриваются модели, которые генерируют числа Гурвица $H^{E,F}$, где $E$ – эйлерова характеристика базовой поверхности, а $F$ – число точек ветвления. Показано, что в случае, если подынтегральные выражения содержат произведения $n > 2$ матриц, интеграл генерирует числа Гурвица с эйлеровой характеристикой $E \leqslant 2$ и числом точек ветвления $F \leqslant n+2$, причем оба числа $E$ и $F$ зависят от $n$ и от порядка сомножителей в матричном произведении. Число $E$ может быть четным или нечетным (соответственно описывая римановы (и некоторые клейновы) или только клейновы (неориентируемые) базовые поверхности) в зависимости от присутствия тау-функции ВКР в подынтегральном выражении.

Посредством процедуры одевания выведены непрерывные симметрии разностного уравнения Хироты, коммутирующие со сдвигами независимых переменных. Представлено действие этих симметрий на зависимые переменные этого уравнения. Коммутативность этих симметрий позволяет интерпретировать их параметры как “времен” нелинейных интегрируемых дифференциально-разностных и дифференциальных уравнений в частных производных. Даны примеры уравнений и их пар Лакса, возникающих при такой процедуре. Помимо таких, обычных симметрий, введены дополнительные симметрии и описано их действие на данные рассеяния.

Найдены бетевские вектора для квантовых интегрируемых систем связанных с суперсимметричными янгианами $Y(\mathfrak{gl}(m|n)$ в терминах генераторов токов дубля янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$. Использован метод проекций на пересечения разных типов Борелевских подалгебр в этой бесконечномерной алгебре для построения бетевских векторов. С использованием этих проекций суперсимметричные бетевские вектора могут быть выражены через элементы матрицы монодромии. С помощью двух различных, но изоморфных токовых представления дубля Янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$, получены два различных представления для бетевских векторов. Эти бетевские вектора также удовлетворяют некому рекурентному соотношению, что и доказывает их эквивалентность.

Изучены скалярные произведения бетевских векторов в моделях, решаемых иерархическим алгебраическим анзацем Бете и описываемых $\mathfrak{gl}(m|n)$-суперəлгеброй. С использованием ко-произведенческих свойств бетевских векторов получена формула суммирования для их скалярных произведений. Эта формула описывает скалярное произведения бетевских векторов в терминах суммы по разбиениям бетевских параметров. Получена рекурсия для бетевских векторов. Это позволяет найти рекурсии для старших коэффициентов старших произведений.

Изучены плоские деформации некоторых факторов алгебры многочленов по мономиальным идеалам в классе градуированных коммутативных алгебр.

Исследован рост размерности неприводимых представлений полупростых алгебр Ли над $\overline{F_p}$ в зависимости от простого $p$.

Построен пучок Прочези на терминализации симплектической фактор-особенности и показано, что квантования этих терминализаций являются простыми пучками алгбер. Это имеет приложения к обобщенному неравенству Бернштейна и к извращенности функторов перехода стенок.

Доказано, что замыкание пространства параметров подалгебр Бете в янгиане $gl_n$, параметризующее все возможные вырождения, есть компактификация Делиня-Мамфорда пространства модулей стабильных рациональных кривых с $n+2$ отмеченными точками.

Найдена степень бифуркационного множества полиномиального отображения общего положения.

Изучено новое семейство дискретных детерминантных точечных процессов, связанных с ортогональными полиномами на вещественной оси. Корреляционные ядра этих процессов определены посредством спектральных проекторов соответствующих матриц Якоби. Для классических весов такие ансамбли возникают как предел гипергеометрических ортогональных полиномиальных ансамблей. Доказано, что q-преобразование Лапласа весовых функций ASEP эквивалентно среднему от простого мультипликативного функционала, определенного на ансамбле Лагерра. Это позволяет получить асимптотики при больших временах для ASEP в трех предельных режимах.

Исследованы орбиты и полиномиальные инварианты некоторого аффинного действия супергруппоида Вейля суперaлгебры Ли $gl(n,m)$ в зависимости от параметра действия и показано, что для общих значений параметра все орбиты конечны и различимы с помощью явно заданных инвариантов. Дано подробное описание специального множества параметров, для которых алгебра инвариантов не является конечно порождённой и не разделяет орбиты, причём некоторые из орбит бесконечны. В частности, все орбиты конечны, если и только если $\kappa$ не является специальным параметром, меньшим нуля. В этом случае алгебра полиномиальных инвариантов конечно порождена. Кроме того, если $\kappa$ также не является положительным специальным параметром, то эта алгебра разделяет орбиты.

Рассмотрен квазиклассический предел двух классов обобщенных Янгианов: один представляет Янгианы, связанные с алгеброй уравнения отражений (брейдинговые Янгианы), другой — обобщенные Янгианы RTT типа. Доказано, что все такие Янгианы являются деформациями (квантованием) коммутативной алгебры $\mathrm{Sym}(gl(m)[t^{-1})$, если соответствующая $R$-матрица является деформацией матрицы перестановки. Для обоих случаев явно вычислены соответствующие скобки Пуассона.

Найдены степени ряда стратов в послойной проективизации пространтства Гурвица и вычислены серии двойных чисел Гурвица.

Предложена конструкция локальных характеристических чисел для наборов голоморфных дифференциальных 1-форм на особых многообразиях с изолированными особенностями.

Доказана бесконечномерность когомологий графовых комплексов в различных гомологических степенях, как в классическом комплексе Концевича, так и для волосатых граф-комплексов Ароне-Турчина

Показано что усреднение симметризованного хроматического многочлена Стенли графа $G$ с точностью до перескалирования переменных является формальной $\tau$-функцией интегрируемой системы Кадомцева-Петвиашвили.

Вычислены числа Гурвица-Севери для гибких и полужёстких троек.

Получено явное решение общей одномерной, ограниченной трёхточечной двумерной и специальной двумерной проблемы Римана-Гильберта на эллиптической кривой.

Подробное изложение полученных результатов представлено в основной части отчета. Она разделена на разделы, в каждом из которых обсуждается одно из направлений исследований, проводимых Лабораторией. Каждый раздел содержит собственное введение, где определяются основные понятия, вводятся определения и ставится задача, после чего следует описание методов исследования и полученных результатов. Ссылки на литературу собраны в списке использованных источников. Полученные результаты опубикованы в статьях и препринтах.

# 1 Основные научные результаты

## 1.1 Преобразование Бэклунда $\tau$-функции уравнения Пенлеве III($D_8$)

### 1.1.1 Введение

Эти исследования являются продолжением исследований [4]. Мы продолжаем изучать связь между уравнениями Пенлеве и конформной теорией поля. В данном случае мы ограничиваемся наиболее вырожденным случаем уравнения Пенлеве III. Это уравнение имеет различные названия: оно называется уравнением Пенлеве III($D_8$) в геометрическом подходе (см. напр. [25]), его также называют уравнением Пенлеве III$_3$ (см. напр. [10]) и оно также эквивалентно радиальному уравнению синус-Гордона (см. напр. [8]).

Гамаюн, Иоргов, Лисовой в работе [10] (вытекающей из их работы [9]) предположили, что $\tau$ функция этого уравнения может быть представлена в виде

$$\tau(\sigma,s|z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C(\sigma+n)s^n\mathcal{F}((\sigma+n)^2|z), \tag{1.1.1}$$

где $s,\sigma$ — константы интегрирования, функция $\mathcal{F}(\Delta|z)$ обозначает Уиттекеровский предел конформного блока алгебры Вирасоро в модуле Верма со старшим весом $\Delta$ и центральным зарядом $c=1$, а функция структурных констант $C(\sigma) = 1/(\mathsf{G}(1-2\sigma)\mathsf{G}(1+2\sigma))$, где $\mathsf{G}$ — $\mathsf{G}$-функция Барнса. Эта формула была доказана в [14] и [4] двумя разными способами.

С другой стороны, известно, что рассматриваемое уравнение Пенлеве имеет преобразование Бэклунда $\pi$ порядка 2. Главная тема данного исследования — связь между разложением (1.1.1) и этим преобразованием Бэклунда. Нашей изначальной целью была $q$-деформация формулы (1.1.1), соответствующие результаты изложены в работе [5].

Соответствие между функцией $\tau$ и ее Бэклунд-преобразованием $\tau_1 = \pi(\tau)$ может быть записано в форме билинейных соотношений. Мы имеем два типа билинейных соотношений, а именно типа Окамото и типа Тоды

$$\begin{cases} D^2_{[\log z]}(\tau,\tau_1) - \dfrac{1}{2}\left(z\dfrac{d}{dz} - \dfrac{1}{8}\right)(\tau\tau_1) = 0, \\ D^3_{[\log z]}(\tau,\tau_1) - \dfrac{1}{2}\left(z\dfrac{d}{dz} - \dfrac{1}{8}\right)D^1_{[\log z]}(\tau,\tau_1) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} D^2_{[\log z]}(\tau,\tau) = -2z^{1/2}\tau_1^2, \\ D^2_{[\log z]}(\tau_1,\tau_1) = -2z^{1/2}\tau^2, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

где $D^k_{[\log z]}$ — дифференциальные операторы Хироты (1.1.9) (см. Предложения 1.1.2 и 1.1.3). Мы получаем эти уравнения методом, стандартным в теории уравнений Пенлеве, единственным отличием является тот факт, что преобразование $\pi$ имеет порядок

2, в отличии от преобразований Бэклунда бесконечного порядка, используемых обычно. Мы также доказываем обратное утверждение, а именно, что до некоторой степени уравнения (1.1.2) определяют $\tau$-функцию уравнения Пенлеве III($D_8$).

Далее мы показываем связь между исходной и Бэклунд-преобразованной тау-функцией в терминах параметров формулы (1.1.1)

$$\tau_1(\sigma,s|z) \propto \tau(\sigma - 1/2,s|z),$$

где $\propto$ означает константную (по отношению к $z$) пропорциональность. Далее мы обсуждаем в этой работе интерпретацию билинейных соотношений (1.1.2) (на $\tau$-функцию (1.1.1)) в терминах теории представлений алгебры Вирасоро. Так же, как в работе [4] основной инструмент — это вложение $\mathrm{Vir} \oplus \mathrm{Vir} \subset \mathrm{F} \oplus \mathrm{NSR}$ прямой суммы двух алгебры Вирасоро в сумму майорановского фермиона и алгебры Супер Вирасоро.

Используя сектор Навье-Шварца, в работе [4] нами уже было доказано (по фактору некоторых деталей), что правая часть (1.1.1) удовлетворяет уравнениям типа Тоды.

Это доказывает формулу (1.1.1), что, по сути, есть небольшое упрощение доказательства в [4] где мы использовали другое билинейное соотношение порядка 4. Оказывается, что рассмотрение Рамоновского сектора алгебры $\mathrm{F} \oplus \mathrm{NSR}$ позволяет получить, что правая часть (1.1.1) удовлетворяет уравнениям типа Окамото.

Уравнение Пенлеве III($D_8$) имеет два алгебраических решения. Соответствующие $\tau$-функции имеет вид $\tau(z) \propto z^{1/16}e^{\mp 4\sqrt{z}}$. В данном исследовании мы даем интерпретацию этих $\tau$-функций в терминах теории представлений алгебры Вирасоро. А именно, эти $\tau$-функции соответствуют специальным представлениям старшего веса $(n+1/4)^2, n \in \mathbb{Z}$, изученных Алексеем Замолодчиковым в [28], которые складываются в фоковский модуль твистованной алгебры Гейзенберга. Отметим также, что в этом случае $\tau$-функция совпадает со специальным случаем дуальной статсуммы, введенной Некрасовым и Окуньковым в статье [22].

### 1.1.2 Преобразования Бэклунда, уравнения типа Окамото и типа Тоды

Уравнение Пенлеве III($D_8$) на функцию $w(z)$ имеет вид

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{w}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 - \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{2w^2}{z^2} - \frac{2}{z}. \tag{1.1.3}$$

Мы далее переходим к гамильтоновой (или $\zeta$) форме Пенлеве III($D_8$). Уравнения Пенлеве могут быть переписаны как уравнения эволюции неавтономной гамильтоновой системы. Это означает, что они могут быть получены исключением вспомогательного импульса из уравнений

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial w}$$

где гамильтониан $H(z)$ для уравнения Пенлеве III($D_8$) имеет вид

$$\zeta = zH = p^2w^2 - w - z/w. \tag{1.1.4}$$

Также удобно использовать функцию $\zeta(z) = zH(z)$, которая, по сути, есть гамильтониан по отношению к времени $\log z$. Далее мы обозначаем точкой производную по $z$ и штрихом производную по $\log z$. Уравнения Гамильтона на $p$, $w$ пишутся как

$$\dot{w} = 2pw^2/z, \qquad \dot{p} = -2p^2w/z + 1/z - 1/w^2. \tag{1.1.5}$$

Отметим, что если мы знаем функцию $\zeta(z)$ на решениях уравнения движения, то мы можем восстановить $w(z)$ и $p(z)$. Дифференцируя (1.1.4) единожды и дважды и используя уравнения Гамильтона для дифференцирования $p(z)$ и $w(z)$ мы можем выразить эти функции по формулам

$$w(z) = -\frac{1}{\dot{\zeta}(z)}, \quad p(z) = \frac{z\ddot{\zeta}(z)}{2}. \tag{1.1.6}$$

Подставляя эти выражения в (1.1.4), мы получаем гамильтонову (или $\zeta$) форму уравнения Пенлеве III($D_8$).

$$(z\ddot{\zeta}(z))^2 = 4\dot{\zeta}(z)^2(\zeta(z) - z\dot{\zeta}(z)) - 4\dot{\zeta}(z). \tag{1.1.7}$$

Тогда может быть проверено явно, что каждое решение уравнения (1.1.7) соответствует согласно первой формуле (1.1.6) решению уравнения (1.1.3). И обратно, решение $w(z)$ уравнения (1.1.3) дает нам $p(z)$ согласно первой формуле (1.1.5) и далее $\zeta(z)$ которое дано формулой (1.1.4) удовлетворяет (1.1.7). Таким образом, мы имеем однозначное соответствие между решениями $w(z)$ уравнения (1.1.3) и решениями $\zeta(z)$ уравнения (1.1.7).

Замечание 1.1.1. Уравнение Пенлеве III($D_8$) появляется в физических задачах, в частности, как радиальное уравнение синус-Гордона на функцию $v(r)$ (см. напр. [8, Chapter 3])

$$v_{rr} + \frac{v_r}{r} = 1/2 \sin 2v$$

Это уравнение эквивалетно уравнению (1.1.3) с точностью до замены

$$w(z)/\sqrt{z} = e^{2iv}, \quad z = r^4/4096$$

Давайте введем $\tau$-функцию по формуле

$$\zeta(z) = z\frac{d\log\tau(z)}{dz} \quad \text{и обратно} \quad \tau = \exp\left(\int \zeta(z) d\log z\right). \tag{1.1.8}$$

Отметим, что $\tau$ -функция определена с точностью до умножения на константу.

Уравнение на $\tau$-функцию можно получить из уравнения (1.1.7). А именно, нужно продифференцировать (1.1.7) по $z$ и разделить получившееся на $\ddot{\zeta}(z)$. Подставляя первое соотношение (1.1.8) и домножая на $\tau^2$ мы получаем билинейное уравнение на $\tau$-функцию. Удобно записать эти уравнения, используя производные Хироты $D^k_{[x]}$. Здесь и далее мы будем использовать производные Хироты только от логарифма переменной. Эти производные определены на функциях $f(z)$,$g(z)$ следующим образом:

$$f(e^{\alpha}z)g(e^{-\alpha}z) = \sum_{k=0}^{\infty} D^k_{[\log z]}(f(z),g(z))\frac{\alpha^k}{k!}. \tag{1.1.9}$$

Простейшими примерами производных Хироты являются

$$D^0_{[\log z]}(f(z),g(z)) = f(z)g(z), \qquad D^1_{[\log z]}(f(z),g(z)) = z\dot{f}(z)g(z) - f(z)z\dot{g}(z).$$

Тогда $\tau$-форма уравнения Пенлеве III($D_8$) может быть написана в виде

$$D^{III}(\tau(z),\tau(z)) = 0, \quad \text{где} \quad D^{III} = \frac{1}{2}D^4_{[\log z]} - z\frac{d}{dz}D^2_{[\log z]} + \frac{1}{2}D^2_{[\log z]} + 2zD^0_{[\log z]}. \tag{1.1.10}$$

Поскольку мы дифференцируем (1.1.7) для получения (1.1.10), мы получаем лишние решения уравнения (1.1.10). Более точно, уравнение (1.1.10) эквивалентно так называемому уравнению Пенлеве III($D_7$)

$$(z\ddot{\zeta}(z))^2 = 4(\dot{\zeta}(z))^2(\zeta(z) - z\dot{\zeta}(z)) - 4\dot{\zeta}(z) + 1/\theta_*$$

Здесь мы будем рассматривать только решения (1.1.10), соответствующие случаю $\theta_* = \infty$, т.е. Пенлеве III($D_8$) в виде (1.1.7). Эти решения могут быть выделены фиксированием асимптотики $\tau$-функции.

Нижеследующие утверждения следуют из результатов, доказанных в [23], (см. также книгу [8] и оригинальные работы [21] [16], [24]).

Предложение 1.1.1. Существует двухпараметрическое семейство решений уравнения (1.1.7) такое, что асимптотическое поведение соответствующих функций $w(z)$ и $\tau(z)$ в пределе $z \to 0$ даются

$$\begin{aligned} &w(\sigma,\widetilde{s}|z) = 4\sigma^2\widetilde{s}z^{2\sigma}(1+o(1)), \\ &\tau(\sigma,\widetilde{s}|z) \propto z^{\sigma^2}\left(1 + \frac{z}{2\sigma^2} - \frac{\widetilde{s}^{-1}}{(1-2\sigma)^2(2\sigma)^2}z^{1-2\sigma} + o(|z|)\right), \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

где $\propto$ означает константную (по отношению к $z$) пропорциональность и $\sigma,\widetilde{s}$ — константы интегрирования, принадлежащие области $0 < \mathrm{Re}\,\sigma < 1/2, \widetilde{s} \neq 0$. Более того, любое решение уравнения (1.1.7) с такой асимптотикой принадлежит к этому семейству и для заданных $\sigma$, $\widetilde{s}$ такое решение единственно.

Также было доказано [23], что решения, не принадлежащие к этому семейству могут быть параметризованы меньшим числом параметров (3 вещественных числа)). Поэтому, семейство решений из предложения 1.1.1 можно рассматривать как семейство решений общего положения.

Группа преобразований Бэклунда уравнения Пенлеве III($D_8$) равна $\mathbb{Z}_2$ (см. [25, Sec. 2.3]). Эта группа порождена преобразованием $\pi$ которое действует на решениях уравнения Пенлеве III($D_8$) согласно формуле

$$z \mapsto z, \qquad w \mapsto w_1 = z/w, \qquad p \mapsto p_1 = -\frac{w(2wp-1)}{2z}.$$

Согласно (1.1.4) это преобразование ведет к преобразованию $\zeta(z)$. Преобразованные переменные относительно непреобразованных мы будем обозначать нижним индексом $_1$.

Мы имеем две полезных формулы для преобразования функции $\zeta(z)$

$$\zeta_1 = \zeta - pw + 1/4, \qquad \zeta'\zeta_1' = z$$

которые следуют из (1.1.4) и (1.1.6) соответственно.

В терминах уравнения синус-Гордона (см. замечание 1.1.1) преобразование Бэклунда — это просто симметрия $v \mapsto -v$.

Предложение 1.1.2. (i) Рассмотрим решение $\zeta(z)$ уравнения (1.1.7), Бэклунд-преобразование от него $\zeta_1(z)$ и функции $\tau(z)$ и $\tau_1(z)$ соответствующие $\zeta(z)$ и $\zeta_1(z)$ по формуле (1.1.8). Тогда $\tau(z)$ и $\tau_1(z)$ удовлетворяют уравнениям

$$D^2_{[\log z]}(\tau,\tau_1) - \tfrac{1}{2}\left(z\tfrac{d}{dz} - \tfrac{1}{8}\right)(\tau\tau_1) = 0, \tag{1.1.12}$$

$$D^3_{[\log z]}(\tau,\tau_1) - \tfrac{1}{2}\left(z\tfrac{d}{dz} - \tfrac{1}{8}\right)D^1_{[\log z]}(\tau,\tau_1) = 0. \tag{1.1.13}$$

(ii) Обратно, рассмотрим функции $\tau(z)$ и $\tau_1(z)$, удовлетворяющие (1.1.12), (1.1.13) и функции $\zeta(z)$ и $\zeta_1(z)$ соответствующие $\tau(z)$ и $\tau_1(z)$ согласно (1.1.8) и $\ddot{\zeta}(z) \neq 0$, $\ddot{\zeta}_1(z) \neq 0$. Тогда существует $D \neq 0$ такое что функции $\zeta(z/D), \zeta_1(z/D)$ удовлетворяют уравнению (1.1.7) и при этом $\pi(\zeta(z/D)) = \zeta_1(z/D)$.

Обычно билинейные соотношения в теории уравнений Пенлеве получаются при рассмотрении преобразований Бэклунда бесконечного порядка (см. напр. [25], [26]). Мы следуем этому подходу, рассматривая $\pi$ порядка 2 для уравнения Пенлеве III($D_8$), поэтому мы называем уравнения (1.1.12), (1.1.13) "уравнениями типа Окамото".

Левая часть уравнения (1.1.12) симметрична относительно перестановки $\tau \leftrightarrow \tau_1$, а левая часть уравнения (1.1.13) кососимметрична относительно нее. Это естественно, поскольку $\pi^2 = 1$.

Замечание 1.1.2. Уравнения типа Окамото (1.1.12), (1.1.13) имеет симметрию относительно перемасштабирования $z$, т.е., если $\tau(z)$, $\tau_1(z)$ — это решение уравнения, тогда и $\tau(Dz)$, $\tau_1(Dz)$, $D \neq 0$ — тоже решение. Другими словами, произвольное решение системы (1.1.12), (1.1.13) может быть получено из $\tau$-функции уравнения Пенлеве с помощью такого перемасштабирования, а решение с асимптотическим поведением (1.1.11) соответствует значению $D = 1$

Теперь мы введем другие уравнения, которые будем называть уравнениями типа Тоды, поскольку они аналогичны похожим уравнениям, называемым уравнениями Тоды в [25].

Предложение 1.1.3. (i) Пусть $\zeta(z)$ обозначает решение уравнения (1.1.7), $\zeta_1(z)$ обозначает Бэклунд-преобразование от него, а функции $\tau(z)$ и $\tau_1(z)$ соответствуют $\zeta(z)$ и $\zeta_1(z)$ согласно (1.1.8). Тогда функции $\tau(z)$ и $\tau_1(z)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} D^2_{[\log z]}(\tau,\tau) &= 2Cz^{1/2}\tau_1^2, \\ D^2_{[\log z]}(\tau_1,\tau_1) &= 2C^{-1}z^{1/2}\tau^2. \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

(ii) Рассмотрим функции $\tau(z)$ и $\tau_1(z)$, удовлетворяющие (1.1.14) и функции $\zeta(z)$ и $\zeta_1(z)$ соответствующие $\tau(z)$ и $\tau_1(z)$ согласно (1.1.8) при условии $\ddot{\zeta}(z) \neq 0$, $\ddot{\zeta}_1(z) \neq 0$. Тогда существуют $K$, такие, что функции $\zeta(z)-K, \zeta_1(z)-K$ удовлетворяют уравнениям (1.1.7) и при этом $\pi(\zeta(z) - K) = \zeta_1(z) - K$.

Константа $C$ в (1.1.14) зависит от относительных нормировок $\tau$ и $\tau_1$.

Замечание 1.1.3. Часто уравнения типа Тоды пишутся в логарифмической форме, т.е. уравнения (1.1.14) могут быть переписаны в виде

$$\left(z\frac{d}{dz}\right)^2 \log\tau = Cz^{1/2}\tau_1^2/\tau^2, \quad \left(z\frac{d}{dz}\right)^2 \log\tau_1 = C^{-1}z^{1/2}\tau^2/\tau_1^2 \tag{1.1.15}$$

Замечание 1.1.4. Уравнения типа Тоды (1.1.14) симметричны относительны умножения $\tau$-функции на $z^K$, т.е., если $\tau(z)$, $\tau_1(z)$ — это их решение, то и $z^K\tau(z)$, $z^K\tau_1(z)$ для произвольного $K$ — тоже решение. Другими словами, произвольное решение уравнений (1.1.14) может быть получено из $\tau$-функции уравнения Пенлеве с помощью такого умножения, а решение с асимптотическим поведением (1.1.11) соответствует значению $K = 0$.

Ниже мы увидим, как появляются уравнения типа Тоды и типа Окамото в терминах теории представлений алгебры Вирасоро.

### 1.1.3 $\tau$-функция уравнения Пенлеве III($D_8$) как сумма по конформным блокам

В работе [10] сформулирована следующая гипотеза про степенное разложение $\tau$-функции в окрестности 0 (фактически, эта гипотеза основана на результатах статьи [9]), которая была доказана в [4] и [14].

Теорема 1.1.1. Разложение $\tau$-функции уравнения Пенлеве III($D_8$) в окрестности $z = 0$ может быть представлено в виде

$$\tau(\sigma,s|z) \propto \sum_{n\in\mathbb{Z}} C(\sigma+n)s^n\mathcal{F}((\sigma+n)^2|z), \quad \operatorname{Re}\sigma \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right\}, \quad s\in\mathbb{C}\setminus\{0\}, \tag{1.1.16}$$

где $\mathcal{F}(\sigma^2|z) = F_{c=1}(\sigma^2|z)$ — Уиттекеровский предел конформного блока для алгебры Вирасоро. Коэффициенты $C(\sigma)$ определены как где $\mathsf{G}(\cdot)$ — $\mathsf{G}$-функция Барнса. Параметры $s$ и $\sigma$ в (1.1.16) — константы интегрирования уравнения (1.1.7). Обозначение $\propto$ значит константную пропорциональность.

Замечание 1.1.5. Параметр $\sigma$ в формуле (1.1.16) может принимать значения $\sigma \in \mathbb{C}\setminus\left\{\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right\}$. Мы будем использовать меньшую область его значений для того, чтобы сравнивать эти $\tau$-функции с $\tau$-функциями семейства предложения 1.1.1.

Фактически формула (1.1.16) дает нам полный степенной ряд, чьи первые слагаемые можно увидеть в асимптотике (1.1.11) (см. ниже). Параметры $\sigma$ в этих формулах одни и те же, а связь между $s$ и $\widetilde{s}$ дана ниже.

Преобразование Бэклунда действует на $\tau$-функциях согласно формулам (1.1.4) и (1.1.8). Мы хотим понять, как оно соотносится с разложением (1.1.16). Мы увидим, что преобразование Бэклунда эквивалентно вполне конкретному преобразованию параметров $\sigma,\widetilde{s}$.

$\tau$-функция (1.1.16) имеет очевидные симметрии

$$\tau(\sigma,s|z) = s\tau(\sigma+1,s|z), \quad \tau(\sigma,s|z) = \tau(-\sigma,s^{-1}|z). \tag{1.1.17}$$

Поэтому мы можем сдвинуть $\operatorname{Re}\sigma$ в интервал $(0,\frac{1}{2})$.

Отметим, что коэффициенты $C(\sigma+n)$ в (1.1.16) могут быть преобразованы в рациональные функции. А именно

$$\frac{C(\sigma+n)}{C(\sigma)}=\left(\frac{\Gamma(-2\sigma)}{\Gamma(2\sigma)}\right)^{2n}\begin{cases}\dfrac{(-1)^{\lfloor n\rfloor}}{(2\sigma)^{2n}\prod\limits_{i=1}^{2n-1}(2\sigma+i)^{2(2n-i)}}, & n\geqslant 0\\ \dfrac{(-1)^{\lfloor -n\rfloor}}{(2\sigma)^{-2n}\prod\limits_{i=1}^{-2n-1}(-2\sigma+i)^{2(-2n-i)}}, & n<0\end{cases}=\left(\frac{\Gamma(-2\sigma)}{\Gamma(2\sigma)}\right)^{2n}\widetilde{C}(\sigma,n),$$

где $2n\in\mathbb{Z}$. Так что мы можем ввести $\widetilde{s}(s,\sigma)=s\left(\frac{\Gamma(-2\sigma)}{\Gamma(2\sigma)}\right)^2$ и рассмотреть

$$\tau(\sigma,\widetilde{s}|z)\propto\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widetilde{C}(\sigma,n)\widetilde{s}^n\mathcal{F}((\sigma+n)^2|z)\propto\tau(\sigma,s|z).$$

Предложение 1.1.4. Преобразование Бэклунда $\tau$-функции задается формулой $\tau_1(\sigma,s|z)=\pi(\tau(\sigma,s|z))\propto\tau(1/2-\sigma,s^{-1}|z)$.

Доказательство данного утверждения следует из сравнения асимптотик и основано на предложении 1.1.1, при этом оно не использует контекста теории представлений, в частности, формулу (1.1.16) . Из уравнений Тоды и теории представлений данное утверждение также может быть доказано.

Замечание 1.1.6. Степенное разложение функции $\tau_1$ можно записать как

$$\tau_1(\sigma,s|z)\propto\sum_{n\in\mathbb{Z}+1/2}C(\sigma+n)s^n\mathcal{F}((\sigma+n)^2|z),\quad \operatorname{Re}\sigma\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right\},\quad s\in\mathbb{C}\setminus\{0\},\quad(1.1.18)$$

что отличается от формулы (1.1.16) только в области суммирования.

Используя предложение 1.1.4 и предложения 1.1.2, 1.1.3 мы видим, что $\tau(\sigma,s|z)$ дающаяся правой частью (1.1.16) удовлетворяет уравнениям на функцию $\tau(\sigma|z)$ которое следует из уравнений типа Окамото и типа Тоды, рассматриваемых как уравнения на функции от $\sigma$ и $z$. Эти уравнения дифференциальные по $z$ и разностные по $\sigma$. В частности, уравнение типа Окамото переходит в

$$D^2_{[\log z]}(\tau(\sigma|z),\tau(\sigma-1/2|z))-\tfrac{1}{2}\left(z\tfrac{d}{dz}-\tfrac{1}{8}\right)(\tau(\sigma|z)\tau(\sigma-1/2|z))=0,\qquad(1.1.19)$$

$$D^3_{[\log z]}(\tau(\sigma|z),\tau(\sigma-1/2|z))-\tfrac{1}{2}\left(z\tfrac{d}{dz}-\tfrac{1}{8}\right)D^1_{[\log z]}(\tau(\sigma|z),\tau(\sigma-1/2|z))=0.\quad(1.1.20)$$

Аналогичная форма уравнения типа Тоды дана в следующем замечании.

Замечание 1.1.7. Мы можем явно определить константу $C$ в уравнениях типа Тоды (1.1.14) для $\tau = \tau(\sigma,s|z)$, $\tau_1 = \tau(\sigma - 1/2,s|z)$ где нормировка $\tau(\sigma,s|z)$ дана равенством в формуле (1.1.16). Действительно, первое уравнение из (1.1.14) может быть переписано в виде

$$\zeta' = Cz^{1/2}\frac{\tau(1/2-\sigma,s^{-1}|z)^2}{\tau(\sigma,s|z)^2}$$

где асимптотическое поведение левой и правой частей

$$\zeta' = -\frac{z^{1-2\sigma}}{4\sigma^2\widetilde{s}}(1+o(1)), \qquad r.h.s. = Cz^{1/2}\left(\frac{C(1/2-\sigma)}{C(\sigma)}\right)^2(1+o(1))z^{1/2-2\sigma} \Rightarrow C = -s^{-1}.$$

Соответственно $\tau$-функция из разложения (1.1.16) удовлетворяет дифференциально-разностному уравнению

$$1/2D^2_{[\log z]}(\tau(\sigma|z),\tau(\sigma|z)) = -s^{-1}z^{1/2}\tau(\sigma-1/2)^2,$$

или используя первое соотношение из (1.1.17)

$$1/2D^2_{[\log z]}(\tau(\sigma|z),\tau(\sigma|z)) = -z^{1/2}\tau(\sigma+1/2|z)\tau(\sigma-1/2|z). \tag{1.1.21}$$

Аналогично, для нормировки $\tau_1$, данной равенством в (1.1.18) мы имеем $C = -1$.

Мы используем уравнения (1.1.19), (1.1.20), (1.1.21) ниже.

### 1.1.4 Билинейные соотношения из алгебры $\mathrm{F}\oplus\mathrm{NSR}$ в Рамоновском секторе

Алгебра $\mathrm{F}\oplus\mathrm{NSR}$ — это прямая сумма майорановского фермиона $\mathsf{F}$ и алгебры Супер Вирасоро NSR $\delta = 0,1/2)$

$$\{f_r,f_s\} = \delta_{r+s,0}, \quad \{f_r,G_s\} = 0$$

$$[L_n,L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{(n^3-n)}{8}c_{\text{NSR}}\delta_{n+m,0}$$

$$\{G_r,G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{1}{2}c_{\text{NSR}}\left(r^2-\frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0}$$

$$[L_n,G_r] = \left(\frac{1}{2}n-r\right)G_{n+r}.$$

Центральный заряд параметризуется как

$$c_{\text{NSR}} = 1+2Q^2, \quad Q = b+b^{-1}.$$

Мы будем рассматривать Рамоновский сектор, т.е. все индексы целые.

Параметризация старшего веса $\Delta$

$$\Delta^{\delta} = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{4} - P^2\right),$$

В Рамоновском секторе модуль Верма определяется как $\pi^{\Delta^{\mathrm{R}}}_{\mathrm{F}\oplus\mathrm{NSR}} = \pi^{\mathrm{R}}_{\mathrm{F}} \otimes \pi^{\Delta^{\mathrm{R}}}_{\mathrm{F}\oplus\mathrm{NSR}}$. Здесь $\pi^{\mathrm{R}}_{\mathrm{F}}$ имеет два старших вектора $|1^{\pm}\rangle$

$$f_r|1^{\pm}\rangle = 0, \quad r > 0, \qquad f_0|1^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1^{\mp}\rangle.$$

Модуль $\pi^{\Delta^{\mathrm{R}}}_{\mathrm{NSR}}$ тоже имеет два старших вектора $|\Delta^{\mathrm{R}},\pm\rangle$

$$G_r|\Delta^{\mathrm{R}},\pm\rangle = 0, \quad r > 0, \qquad L_n|\Delta^{\mathrm{R}},\pm\rangle = 0, \quad n > 0,$$

$$G_0|\Delta^{\mathrm{R}},\pm\rangle = -\frac{iP}{\sqrt{2}}|\Delta^{\mathrm{R}},\mp\rangle, \qquad L_0|\Delta^{\mathrm{R}},\pm\rangle = \Delta^{\mathrm{R}}|\Delta^{\mathrm{R}},\pm\rangle.$$

Введем Уиттекеровские вектора

$$|W_{\mathrm{R},\pm}(z)\rangle = z^{\Delta^{\mathrm{R}}}\sum_{2N=0}^{\infty} z^N|N\rangle^{\mathrm{R},\pm}, \qquad |N\rangle^{\mathrm{R},\pm} \in \pi^{\Delta^{\mathrm{R}}}_{\mathrm{NSR}}, \qquad L_0|N\rangle^{\mathrm{R},\pm} = (\Delta^{\mathrm{R}} + N)|N\rangle^{\mathrm{R},\pm}, \tag{1.1.22}$$

где вектора $|N\rangle^{\mathrm{R},\pm}$ удовлетворяют

$$L_1|N\rangle^{\mathrm{R},\pm} = 1/2|N-1\rangle^{\mathrm{R},\pm}, \quad N > 0, \quad G_1|N\rangle^{\mathrm{R},\pm} = 0.$$

Существует вложение алгебры $\mathrm{Vir}\oplus\mathrm{Vir}$ в универсальную обертывающую от $\mathrm{F}\oplus\mathrm{NSR}$ (согласно [7], [19])

$$\begin{aligned} L_n^{(1)} &= \frac{b^{-1}}{b^{-1}-b}L_n - \frac{b^{-1}+2b}{b^{-1}-b}\left(\frac{1}{2}\sum_{r\in\mathbb{Z}+\delta} r : f_{n-r}f_r : + \frac{1-2\delta}{16}\delta_{n,0}\right) + \frac{1}{b^{-1}-b}\sum_{r\in\mathbb{Z}+\delta} f_{n-r}G_r,\\ L_n^{(2)} &= \frac{b}{b-b^{-1}}L_n - \frac{b+2b^{-1}}{b-b^{-1}}\left(\frac{1}{2}\sum_{r\in\mathbb{Z}+\delta} r : f_{n-r}f_r : + \frac{1-2\delta}{16}\delta_{n,0}\right) + \frac{1}{b-b^{-1}}\sum_{r\in\mathbb{Z}+\delta} f_{n-r}G_r. \end{aligned} \tag{1.1.23}$$

Параметризации старшего веса и центрального заряда для алгебры Вирасоро

$$\Delta(P,b) = \frac{Q^2}{4} - P^2, \;\; c(b) = 1 + 6Q^2, \quad \text{где} \quad Q = b + b^{-1}.$$

Центральные заряды $\mathrm{Vir}^{(1)}$ и $\mathrm{Vir}^{(2)}$ даются формулами

$$c^{(\eta)} = c(b^{(\eta)}),\, \eta = 1,2, \quad \text{где} \quad (b^{(1)})^2 = \frac{2b^2}{1-b^2}, \quad (b^{(2)})^{-2} = \frac{2b^{-2}}{1-b^{-2}}.$$

Введем обозначение $\Delta_n^{(\eta)} = \Delta(P_n^{(\eta)},b^{(\eta)})$, $\eta = 1,2$, где

$$P_n^{(1)} = P^{(1)} + nb^{(1)},\ P_n^{(2)} = P^{(2)} + n\left(b^{(2)}\right)^{-1}, \qquad P^{(1)} = \frac{P}{\sqrt{2-2b^2}},\ P^{(2)} = \frac{P}{\sqrt{2-2b^{-2}}}.$$

Как и в случае Навье-Шварцевского сектора, в случае Рамоновского сектора имеется разложение

Теорема 1.1.2. Для общего $P$ модуль $\pi^{\Delta^{\mathrm{R}}}_{\mathrm{F}\oplus\mathrm{NSR}}$ изоморфен сумме $\mathrm{Vir}\oplus\mathrm{Vir}$ модулей

$$\pi^{\Delta^{\mathrm{R}}}_{\mathrm{F}\oplus\mathrm{NSR}} \cong \pi^{\Delta^{\mathrm{R}},0}_{\mathrm{F}\oplus\mathrm{NSR}} \oplus \pi^{\Delta^{\mathrm{R}},1}_{\mathrm{F}\oplus\mathrm{NSR}} \cong \bigoplus_{2n+1/2\in\mathbb{Z}} \pi^{n,0}_{\mathrm{Vir}\oplus\mathrm{Vir}} \oplus \bigoplus_{2n+1/2\in\mathbb{Z}} \pi^{n,1}_{\mathrm{Vir}\oplus\mathrm{Vir}}.$$

где старшие веса $\pi^{n,\epsilon}_{\mathrm{Vir}\oplus\mathrm{Vir}}$ равны $(\Delta_n^{(1)},\Delta_n^{(2)})$. Индекс $\epsilon = 0,1$ обозначает т.н. четность.

Мы будем рассматривать случай $c^{(1)} = c^{(2)} = 1$. В этом случае разложение вектора Уиттекера для алгебры $\mathrm{F}\oplus\mathrm{NSR}$ будет иметь вид

Предложение 1.1.5.

$$z^{1/16}|1^{\mu}\otimes W_{\mathrm{R},\nu}(z)\rangle = \sum_{2n+1/2\in\mathbb{Z}} l_n^{\mu,\nu}(P,i)\left(|W^{(1)}(z/4)\rangle_n \otimes |W^{(2)}(z/4)\rangle_n\right),$$

где $l_n$ от $z$ не зависят.

Мы хотим вычислять $\widehat{\mathcal{F}_k}$

$$\widehat{\mathcal{F}_k} = z^{1/16}\langle 1^+\otimes W_{\mathrm{R},+}(1)|H^k|1^+\otimes W_{\mathrm{R},+}(z)\rangle,$$

где $H = iL_0^{(1)} - iL_0^{(2)}$.

С одной стороны

$$\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{\mathcal{F}}_k\frac{\alpha^k}{k!} = z^{1/16}\langle 1^+\otimes W_{\mathrm{R},+}(1)|e^{\alpha H}|1^+\otimes W_{\mathrm{R},+}(z)\rangle =$$

$$=\sum_{2n+1/2\in\mathbb{Z}} l_n^{+,+}(P,i)l_n^{+,+}(P,i)\langle W_n^{(1)}(1/4)|e^{\alpha i L_0^{(1)}}|W_n^{(1)}(z/4)\rangle\langle W_n^{(2)}(1/4)|e^{\alpha - iL_0^{(2)}}|W_n^{(2)}(z/4)\rangle =$$

$$= \sum_{2n+1/2\in\mathbb{Z}} l_n^{+,+}(P,i)l_n^{+,+}(P,i)\mathcal{F}_n^{(1)}(\frac{1}{4}ze^{\alpha i})\mathcal{F}_n^{(2)}(\frac{1}{4}ze^{-\alpha i}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{2n+1/2\in\mathbb{Z}} l_n^{+,+}(P,i)l_n^{+,+}(P,i)i^k D^k_{[\log z]}(\mathcal{F}_n^{(1)}(z/4),\mathcal{F}_n^{(2)}(z/4))\frac{\alpha^k}{k!},$$

С другой стороны мы можем вычислять действие степеней $H$ в терминах генераторов $\mathrm{F}\oplus\mathrm{NSR}$ используя (1.1.23) $H = -\sum_{r\in\mathbb{Z}} f_{-r}G_r$.

Сравнивая два способа вычислений, мы получим

$$\widehat{\mathcal{F}_0} = z^{1/16}\mathcal{F}_{\mathrm{R}}, \qquad \widehat{\mathcal{F}_1} = -\frac{iP}{2}z^{1/16}\mathcal{F}_{\mathrm{R}},$$

$$\widehat{\mathcal{F}_2} = -1/2z^{1/16}\left(z\frac{d}{dz} - 1/16\right)\mathcal{F}_{\mathrm{R}}, \qquad \widehat{\mathcal{F}_3} = -\frac{iP}{4}z^{1/16}\left(z\frac{d}{dz} - 1_{\text{NSR}}/16\right)\mathcal{F}_{\mathrm{R}},$$

откуда

$$\widehat{\mathcal{F}_2} = -\frac{1}{2}\left(z\frac{d}{dz} - 1/8\right)\widehat{\mathcal{F}_0}$$

$$\widehat{\mathcal{F}_3} = -\frac{1}{2}\left(z\frac{d}{dz} - 1/8\right)\widehat{\mathcal{F}_1}.$$

В терминах конформных блоков алгебры Вирасоро

$$\sum_{2n+1/2\in\mathbb{Z}} l_n^{+,+}(\sigma)^2 D^2_{[\log z]}(\mathcal{F}((\sigma+n)^2|z),\mathcal{F}((\sigma-n)^2|z)) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(z\frac{d}{dz} - \frac{1}{8}\right)\sum_{2n+1/2\in\mathbb{Z}} l_n^{+,+}(\sigma)^2\mathcal{F}((\sigma+n)^2|z)\mathcal{F}((\sigma-n)^2|z),$$

$$\sum_{2n+1/2\in\mathbb{Z}} (-1)^{2n-1/2} l_n^{+,+}(\sigma)^2 D^3_{[\log z]}(\mathcal{F}((\sigma+n)^2|z),\mathcal{F}((\sigma-n)^2|z)) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(z\frac{d}{dz} - \frac{1}{8}\right)\sum_{2n+1/2\in\mathbb{Z}} (-1)^{2n-1/2} l_n^{+,+}(\sigma)^2 D^1_{[\log z]}(\mathcal{F}((\sigma+n)^2|z),\mathcal{F}((\sigma-n)^2|z)).$$

Далее, для завершения доказательства утверждения о том, что $\tau$-функция (1.1.16) удовлетворяет уравнениям типа Окамото мы разделяем эти соотношения на два — с целыми и полуцелыми степенями и сравниваем $l_n^{+,+2}$ с коэффицинтами, приходящими из $C(\sigma+n)$ формулы (1.1.16).

## 1.2 Соответствие Мацуо-Чередника и квантово-классическая дуальность в интегрируемых системах

### 1.2.1 Введение

Рациональные уравнения Книжника-Замолодчикова (КЗ) [38] имеют вид

$$\hbar\partial_{x_i}\Big|\Phi\Big\rangle = \left(\mathbf{g}^{(i)} + \kappa\sum_{j\neq i}^{n}\frac{\mathbf{P}_{ij}}{x_i - x_j}\right)\Big|\Phi\Big\rangle,$$

где $\Big|\Phi\Big\rangle = \Big|\Phi\Big\rangle(x_1,\ldots,x_n)$ принадлежит тензорному произведению $\mathcal{V} = V\otimes V\otimes\ldots\otimes V = V^{\otimes n}$ векторных пространств $V = \mathbb{C}^N$, $\mathbf{P}_{ij}$ – перестановка $i$-го и $j$-го факторов, $\mathbf{g} =$

$\mathrm{diag}(g_1, \ldots, g_N)$ – диагональная $N \times N$ матрица и $\mathbf{g}^{(i)}$ – это оператор в $\mathcal{V}$, действующий как $\mathbf{g}$ на $i$-м факторе (и тождественно на всех остальных).

Замечательное соответствие между уравнениями КЗ и квантовой моделью Калоджеро [33], определенной гамильтонианом

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar^2 \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 - \sum_{i \neq j}^{n} \frac{\kappa(\kappa - \hbar)}{(x_i - x_j)^2},$$

было установлено Мацуо и Чередником в [39, 34] (см. также [35, 45]) в случае $N = n$. В этом случае можно искать решения (1.2.1) в виде

$$\Big|\Phi\Big\rangle = \sum_{\sigma \in S_n} \Phi_\sigma \Big|e_\sigma\Big\rangle, \qquad \Big|e_\sigma\Big\rangle = e_{\sigma(1)} \otimes e_{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes e_{\sigma(n)},$$

где $e_a$ – стандартные базисные вектора в $V = \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^N$ и $S_n$ – симметрическая группа. Если такой вектор $\Big|\Phi\Big\rangle$ решает уравнения КЗ, тогда функция

$$\Psi = \sum_{\sigma \in S_n} \Phi_\sigma$$

является собственной функцией гамильтониана Калоджеро:

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi = E\Psi, \qquad E = g_1^2 + g_2^2 + \ldots + g_N^2.$$

Это соответствие может быть распространено на тригонометрические версии обеих моделей.

Мы покажем, что подобное соответствие существует также в случае, когда число отмеченных точек $n$ не обязательно равно $N = \dim V$. В этой форме оно выглядит как квантовая деформация квантово-классического соответствия [29, 30, 37, 41, 46] между квантовой моделью Годена и классической моделью Калоджеро (см. в [32] обсуждение отображения Мацуо-Чередника в этом контексте).

Система уравнений КЗ – это нестационарная версия квантовой модели Годена, причем $\hbar$ является параметром нестационарности. Мы обозначили его $\hbar$, поскольку он становится настоящей постоянной Планка в соответствующей квантовой модели Калоджеро. Спектральная задача для модели Годена – это “квазиклассический” предел КЗ при $\hbar \to 0$. Действительно, при $\hbar \to 0$ решения КЗ имеют асимптотический вид [42]

$$\Big|\Phi\Big\rangle = \Big(\Big|\phi_0\Big\rangle + \hbar\Big|\phi_1\Big\rangle + \ldots\Big) e^{S/\hbar}$$

который, при подстановке в уравнения КЗ (1.2.1), приводит в лидирующем порядке к задаче на собственные значения

$$\mathbf{H}_i\Big|\phi_0\Big\rangle = p_i\Big|\phi_0\Big\rangle, \qquad p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

для коммутирующих гамильтонианов Годена $\mathbf{H}_i = \mathbf{g}^{(i)} + \kappa \sum\limits_{j\neq i}^{n} \dfrac{\mathbf{P}_{ij}}{x_i - x_j}$ с постоянной Планка $\kappa$. В квантово-классическом соответствии собственные значения $p_i$ отождествляются с импульсами частиц модели Калоджеро-Мозера с координатами $x_i$.

### 1.2.2 Гамильтонианы Годена и уравнения КЗ

Пусть $\mathsf{e}^{\kappa}_{ab}$ – генераторы "$\kappa$-зависимой версии" универсальной обертывающей алгебры $U(gl(N))$ с коммутационными соотношениями $[\mathsf{e}^{\kappa}_{ab}, \mathsf{e}^{\kappa}_{a'b'}] = \kappa(\delta_{a'b}\mathsf{e}^{\kappa}_{ab'} - \delta_{ab'}\mathsf{e}^{\kappa}_{a'b})$. Поскольку при $\kappa = 0$ операторы $\mathsf{e}^{\kappa}_{ab}$ коммутируют, параметр $\kappa$ играет роль формальной потоянной Планка. Пусть $\pi$ – $N$-мерное векторное представление $U^{(\kappa)}(gl(N))$. Мы имеем $\pi(\mathsf{e}^{\kappa}_{ab}) = \kappa e_{ab}$, где $e_{ab}$ – стандартный базис в пространстве $N\times N$ матриц: матрица $e_{ab}$ имеет всего один ненулевой элемент (равный 1) в месте $ab$: $(e_{ab})_{a'b'} = \delta_{aa'}\delta_{bb'}$. Отметим, что $\mathbf{I} = \sum_a e_{aa}$ – единичная матрица, а $\mathbf{P} = \sum_{ab} e_{ab} \otimes e_{ba}$ – оператор перестановки, действующий в пространстве $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N$.

В тензорном произведении $U^{(\kappa)}(gl(N))^{\otimes n}$ генераторы $\mathsf{e}^{\kappa}_{ab}$ могут быть реализованы как $\mathsf{e}^{\kappa\,(i)}_{ab} := \mathbf{I}^{\otimes(i-1)} \otimes \mathsf{e}^{\kappa}_{ab} \otimes \mathbf{I}^{\otimes(n-i)}$. Ясно, что они коммутируют при любых $i \neq j$ и $a$,$b$, поскольку нетривиально действуют в разных пространствах. Аналогично, для любой матрицы $\mathbf{g} \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^N)$ определим $\mathbf{g}^{(i)}$, действующий в тензорном произведении $\mathcal{V} = (\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$: $\mathbf{g}^{(i)} = \mathbf{I}^{\otimes(i-1)} \otimes \mathbf{g} \otimes \mathbf{I}^{\otimes(n-i)} \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$. В этих обозначениях $\mathbf{P}_{ij} := \sum\limits_{a,b} e^{(i)}_{ab} e^{(j)}_{ba}$ – оператор перестановки $i$-го и $j$-го тензорных факторов в $\mathcal{V} = \mathbb{C}^N \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^N$. Ясно, что $\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{P}_{ji}$ и $\mathbf{P}^2_{ij} = \mathbf{I}$.

Зафиксируем $n$ различных чисел $x_i \in \mathbb{C}$ и диагональную $N\times N$ матрицу $\mathbf{g} = \mathrm{diag}\,(g_1, \ldots, g_N)$. (Мы предполагаем, что $n \geqslant N$ и что $g_i$ все различны и не равны 0.) Будем называть $\mathbf{g}$ матрицей твиста. Коммутирующие гамильтонианы Годена имеют вид

$$\mathbf{H}_i = \frac{1}{\kappa}\left(\sum_{a=1}^{N} g_a \mathsf{e}^{\kappa\,(i)}_{aa} + \sum_{j\neq i}\sum_{a,b=1}^{N} \frac{\mathsf{e}^{\kappa\,(i)}_{ab}\mathsf{e}^{\kappa\,(j)}_{ba}}{x_i - x_j}\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Гамильтонианы квантовой модели Годена [36] с гильбертовым пространством $\mathcal{V} = (\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$ – это ограничения операторов (1.2.2) на $N$-мерное векторное представление $\pi$:

$$\mathbf{H}_i = \sum_{a=1}^{N} g_a e^{(i)}_{aa} + \kappa \sum_{j\neq i}\sum_{a,b=1}^{N} \frac{e^{(i)}_{ab} e^{(j)}_{ba}}{x_i - x_j} = \mathbf{g}^{(i)} + \kappa \sum_{j\neq i} \frac{\mathbf{P}_{ij}}{x_i - x_j}, \quad i = 1, \ldots, n$$

(для краткости мы обозначаем $\pi^{\otimes n}(\mathbf{H}_i)$ той же буквой $\mathbf{H}_i$). Известно, что гамильтонианы Годена образуют коммутативное семейство: $[\mathbf{H}_i, \mathbf{H}_j] = 0$ для всех $i$,$j = 1, \ldots, n$.

Операторы

$$\mathbf{M}_a = \sum_{l=1}^{n} e_{aa}^{(l)}$$

коммутируют между собой и с гамильтонианами Година: $[\mathbf{H}_i, \mathbf{M}_a] = 0$. Ясно, что $\sum_a \mathbf{M}_a = n\mathbf{I}$, и $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{H}_i = \sum\limits_{a=1}^{N} g_a \mathbf{M}_a$. Спектральная задача имеет вид

$$\begin{cases} \mathbf{H}_i \Big|\phi\Big\rangle = H_i \Big|\phi\Big\rangle \\ \mathbf{M}_a \Big|\phi\Big\rangle = M_a \Big|\phi\Big\rangle \end{cases}$$

Общие собственные состояния гамильтонианов могут быть классифицированы в соответствии с собственными значениями операторов $\mathbf{M}_a$.

Пусть

$$\mathcal{V} = V^{\otimes n} \; = \bigoplus_{M_1,\dots,M_N} \mathcal{V}(\{M_a\})$$

весовое разложение гильбертова пространства $\mathcal{V}$ модели Годена в прямую сумму собственных подпространств операторов $\mathbf{M}_a$ с собственными значениями $M_a \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $a = 1, \dots, N$ (напомним, что $M_1 + \ldots + M_N = n$). Тогда собственные состояния для $\mathbf{H}_i$ лежат в подпространствах $\mathcal{V}(\{M_a\})$,

$$\mathrm{dim}\mathcal{V}(\{M_a\}) = \frac{n!}{M_1! \dots M_N!}.$$

Базисные векторы в $\mathcal{V}(\{M_a\})$ таковы: $\Big|J\Big\rangle = e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \ldots \otimes e_{j_n}$, где число индексов $j_k$ таких, что $j_k = a$ равно $M_a$ для всех $a = 1, \dots, N$. Мы также введем дуальные вектора $\Big\langle J \Big| = e^\dagger_{j_1} \otimes e^\dagger_{j_2} \otimes \ldots \otimes e^\dagger_{j_n}$ такие, что $\Big\langle J \Big| J' \Big\rangle = \delta_{J,J'}$.

Система уравнений КЗ – это нестационарная версия модели Годена:

$$\hbar \partial_{x_i} \Big|\Phi\Big\rangle = \mathbf{H}_i \Big|\Phi\Big\rangle, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Она уважает весовое разложение (1.2.2), следовательно, решения принадлежат весовым подпространствам $\mathcal{V}(\{M_a\})$. Уравнения (1.2.2) совместны в силу условий плоской связности

$$[\hbar\partial_{x_i} - \mathbf{H}_i, \, \hbar\partial_{x_j} - \mathbf{H}_j] = 0 \qquad \text{для всех} \quad i{,}j = 1, \dots, n.$$

### 1.2.3 Соответствие КЗ-Калоджеро

Мы утверждаем, что для любого решения уравнений КЗ, принадлежащего подпространству $\mathcal{V}(\{M_a\})$, $\Big|\Phi\Big\rangle = \sum_J \Phi_J\Big|J\Big\rangle$, функция

$$\Psi = \sum_J \Phi_J$$

является собственной функцией гамильтониана Калоджеро с собственным значением $E = \sum_{a=1}^{N} M_a g_a^2$:

$$\left(\hbar^2 \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 - \sum_{i\neq j}^{n} \frac{\kappa(\kappa-\hbar)}{(x_i-x_j)^2}\right)\Psi = E\Psi\,.$$

В частности, при $n = N$ и $M_1 = M_2 = \ldots = M_N = 1$ получается результат [39, 34, 35, 45].

Для доказательства рассмотрим ковектор, равный сумме базисных ковекторов пространства $(\mathcal{V}(\{M_a\}))^*$:

$$\Big\langle\Omega\Big| = \sum_J \Big\langle J\Big|,$$

тогда $\Psi = \Big\langle\Omega\Big|\Phi\Big\rangle$. Применив оператор $\hbar\partial_{x_i}$ к уравнению КЗ (1.2.1), получим:

$$\hbar^2\partial_{x_i}^2\Big|\Phi\Big\rangle = -\hbar\kappa\sum_{j\neq i}\frac{\mathbf{P}_{ij}}{(x_i-x_j)^2}\Big|\Phi\Big\rangle + \left(\mathbf{g}^{(i)} + \kappa\sum_{j\neq i}\frac{\mathbf{P}_{ij}}{x_i-x_j}\right)\hbar\partial_{x_i}\Big|\Phi\Big\rangle$$

$$= -\hbar\kappa\sum_{j\neq i}\frac{\mathbf{P}_{ij}}{(x_i-x_j)^2}\Big|\Phi\Big\rangle + \left(\mathbf{g}^{(i)} + \kappa\sum_{j\neq i}\frac{\mathbf{P}_{ij}}{x_i-x_j}\right)\left(\mathbf{g}^{(i)} + \kappa\sum_{l\neq i}\frac{\mathbf{P}_{il}}{x_i-x_l}\right)\Big|\Phi\Big\rangle$$

$$= -\hbar\kappa\sum_{j\neq i}\frac{\mathbf{P}_{ij}}{(x_i-x_j)^2}\Big|\Phi\Big\rangle + \kappa^2\sum_{j\neq i}\frac{1}{(x_i-x_j)^2}\Big|\Phi\Big\rangle + (\mathbf{g}^{(i)})^2\Big|\Phi\Big\rangle$$

$$+\kappa^2\sum_{j\neq l\neq i}\frac{\mathbf{P}_{ij}\mathbf{P}_{il}}{(x_i-x_j)(x_i-x_l)}\Big|\Phi\Big\rangle + \kappa\sum_{j\neq i}\frac{\mathbf{P}_{ij}}{x_i-x_j}\mathbf{g}^{(i)}\Big|\Phi\Big\rangle + \kappa\sum_{j\neq i}\frac{\mathbf{P}_{ij}}{x_i-x_j}\mathbf{g}^{(j)}\Big|\Phi\Big\rangle.$$

В последних строчках мы приняли во внимание, что $\mathbf{P}_{ij}^2 = \mathbf{I}$ и $\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{P}_{ij}\mathbf{g}^{(j)}$. Так как $\Big\langle\Omega\Big|\mathbf{P}_{ij}\Big|J\Big\rangle = 1$ для всех базисных векторов $\Big|J\Big\rangle$, мы имеем $\Big\langle\Omega\Big|\mathbf{P}_{ij} = \Big\langle\Omega\Big|$. Следовательно, операторы перестановки исчезают после применения $\Big\langle\Omega\Big|$ слева. Взяв сумму $\hbar^2\Big\langle\Omega\Big|\partial_{x_i}^2\Big|\Phi\Big\rangle = \hbar^2\partial_{x_i}^2\Psi$ по $i$ и используя тождества[1]

$$\sum_{j\neq l\neq i}\frac{1}{(x_i-x_j)(x_i-x_l)} = 0,$$

[1]Тождество (1.2.3) следует из $\frac{1}{(x_i-x_j)}\frac{1}{(x_i-x_l)} + \frac{1}{(x_i-x_j)}\frac{1}{(x_l-x_j)} + \frac{1}{(x_i-x_l)}\frac{1}{(x_j-x_l)} = 0$ примененного к сумме симметризованной по отношению к $i$,$j$,$l$.

$$\sum_{i\neq j} \frac{\mathbf{g}^{(i)} + \mathbf{g}^{(j)}}{x_i - x_j} = 0,$$

$$\sum_i \Big\langle \Omega \Big| (\mathbf{g}^{(i)})^2 \Big| \Phi \Big\rangle = \left( \sum_{a=1}^{N} M_a g_a^2 \right) \Psi$$

получаем (1.2.3).

Отметим, что $\Psi = \Big\langle \Omega \Big| \Phi \Big\rangle$ является собственной функцией оператора полного импульса $\hat{\mathcal{P}} = \hbar \sum_j \partial_{x_j}$ с собственным значением $\sum_a M_a g_a$. В приложении мы покажем, что $\Psi$ является также собственной функцией кубического гамильтониана $\hat{\mathcal{H}}_3$. Мы высказываем гипотезу, что $\Psi$ является общей собственной функцией для всех высших гамильтонианов Калоджеро $\hat{\mathcal{H}}_k$ с собственными значениями $E_k = \sum_a M_a g_a^k$. Первые четыре гамильтониана выписаны в явном виде в [44].

### 1.2.4 Тригонометрический случай

Тригонометрическая (гиперболическая) версия системы уравнений КЗ имеет вид [35]

$$\hbar \partial_{x_i} \Big| \Phi \Big\rangle = \left( \mathbf{g}^{(i)} + \kappa\gamma \sum_{j\neq i}^{n} \Big( \coth \gamma(x_i - x_j) \mathbf{P}_{ij} + \mathbf{T}_{ij} \Big) \right) \Big| \Phi \Big\rangle,$$

где использованы те же обозначения, что и в (1.2.1) и

$$\mathbf{T} = \sum_{a>b} (e_{ab} \otimes e_{ba} - e_{ba} \otimes e_{ab}).$$

Этот оператор действует на базисных векторах следующим образом:

$$\mathbf{T} e_a \otimes e_b = \begin{cases} e_b \otimes e_a & \text{если} \quad a < b \\ -e_b \otimes e_a & \text{если} \quad a > b \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Отметим, что $\mathbf{T}_{ji} = -\mathbf{T}_{ij}$. В пределе $\gamma \to 0$ воспроизводятся рациональные уравнения КЗ (1.2.1).

Вычисление, подобное приведенному выше для рационального случая, ведет к следующему утверждению. Для любого решения $\Big| \Phi \Big\rangle = \sum_J \Phi_J \Big| J \Big\rangle$ уравнений КЗ (1.2.4), принадлежащих пространству $\mathcal{V}(\{M_a\})$, функция $\Psi = \sum_J \Phi_J$ решает спектральную задачу для гамильтониана Калоджеро-Сазерленда

$$\left( \hbar^2 \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 - \sum_{i\neq j}^{n} \frac{\kappa(\kappa - \hbar)\gamma^2}{\sinh^2 \gamma(x_i - x_j)} \right) \Psi = E \Psi$$

с собственным значением

$$E=\sum_{a=1}^{N} M_a g_a^2+\frac{\kappa^2\gamma^2}{3}\sum_{a=1}^{N} M_a(M_a^2-1).$$

Вот некоторые подробности вычисления, которое более трудоемко, чем в рациональном случае. Применив оператор $\hbar\partial_{x_i}$ к уравнению КЗ (1.2.4), получим:

$$\hbar^2\partial_{x_i}^2\Big|\Phi\Big\rangle=-\hbar\kappa\gamma^2\sum_{j\neq i}\frac{\mathbf{P}_{ij}}{\sinh^2\gamma(x_i-x_j)}\Big|\Phi\Big\rangle$$

$$+\left(\mathbf{g}^{(i)}+\kappa\gamma\sum_{j\neq i}^{n}\Big(\coth\gamma(x_i-x_j)\mathbf{P}_{ij}+\mathbf{T}_{ij}\Big)\right)\left(\mathbf{g}^{(i)}+\kappa\gamma\sum_{l\neq i}^{n}\Big(\coth\gamma(x_i-x_l)\mathbf{P}_{il}+\mathbf{T}_{il}\Big)\right)\Big|\Phi\Big\rangle.$$

Как и ранее, чтобы получить уравнение для $\Psi=\Big\langle\Omega\Big|\Phi\Big\rangle$, применим $\Big\langle\Omega\Big|=\sum_J\Big\langle J\Big|$ слева и просуммируем по $i$. После раскрытия скобок в правой части возникают несколько различных членов, “желательных” и “нежелательных”. “Желательные” члены таковы:

$$-\hbar\kappa\gamma^2\sum_{j\neq i}\frac{1}{\sinh^2\gamma(x_i-x_j)}\Psi+\kappa^2\gamma^2\sum_{i\neq j}\coth^2\gamma(x_i-x_j)\Psi$$

$$=\sum_{i\neq j}^{n}\frac{\kappa(\kappa-\hbar)\gamma^2}{\sinh^2\gamma(x_i-x_j)}\Psi+n(n-1)\kappa^2\gamma^2\Psi.$$

Оказывается, что “нежелательные” члены либо сокращаются, либо дают вклад в собственное значение. Чтобы это увидеть, нам нужны несколько тождеств. Прежде всего, тригонометрический аналог тождества (1.2.3) имеет вид[1]

$$\sum_{i\neq j\neq l}\coth\gamma(x_i-x_j)\coth\gamma(x_i-x_l)=\frac{1}{3}\,n(n-1)(n-2).$$

Имеется очевидный тригонометрический аналог (1.2.3):

$$\sum_{i\neq j}\coth\gamma(x_i-x_j)(\mathbf{g}^{(i)}+\mathbf{g}^{(j)})=0.$$

Используя (1.2.4), можно доказать тождество

$$(\mathbf{g}^{(i)}-\mathbf{g}^{(j)})\mathbf{T}_{ij}+\mathbf{T}_{ij}(\mathbf{g}^{(i)}-\mathbf{g}^{(j)})=0.$$

[1] Подобно (1.2.3), тождество (1.2.4) следует из формулы суммирования для функции coth: $\coth\gamma(x_i-x_j)\coth\gamma(x_i-x_l)+\coth\gamma(x_i-x_j)\coth\gamma(x_l-x_j)+\coth\gamma(x_i-x_l)\coth\gamma(x_j-x_l)=1$ и $\sum_{i\neq j\neq l}1=n(n-1)(n-2)$.

Наиболее нетривиальные тождества таковы:

$$\sum_{i\neq j}\left\langle\Omega\middle|\mathbf{T}_{ij}^2\middle|\Phi\right\rangle=-\left(n(n-1)-\sum_a M_a(M_a-1)\right)\Psi,$$

$$\sum_{i\neq j\neq l}\left\langle\Omega\middle|\mathbf{T}_{ij}\mathbf{T}_{il}\middle|\Phi\right\rangle=-\frac{1}{3}\left(n(n-1)(n-2)-\sum_a M_a(M_a-1)(M_a-2)\right)\Psi.$$

Они выводятся из определения (1.2.4). Рассмотрим сначала (1.2.4). Оператор $\mathbf{T}_{ij}^2$ действует на произвольном $e_a^{(i)}e_b^{(j)}$ входящем в $\left|\Phi\right\rangle\in\mathcal{V}(\{M_a\})$ следующим образом:

$$\mathbf{T}_{ij}^2\ e_a^{(i)}e_b^{(j)}=\begin{cases}-e_a^{(i)}e_b^{(j)} & \text{if}\quad a\neq b\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Следовательно, мы вычисляем $\sum_{i\neq j}1=n(n-1)$ для всех $\left|J\right\rangle$ и вычитаем члены, соответствующие второй строчке в (1.2.4). Для доказательства (1.2.4) удобно симметризовать $\mathbf{T}_{ij}\mathbf{T}_{il}$ по отношению к перестановкам $i$,$j$,$l$ (помня, что $\mathbf{T}_{ij}=-\mathbf{T}_{ji}$):

$$\sum_{i\neq j\neq l}\left\langle\Omega\middle|\mathbf{T}_{ij}\mathbf{T}_{il}\middle|\Phi\right\rangle=\frac{1}{3}\sum_{i\neq j\neq l}\left\langle\Omega\middle|\mathbf{T}_{ij}\mathbf{T}_{il}+\mathbf{T}_{lj}\mathbf{T}_{ij}+\mathbf{T}_{il}\mathbf{T}_{jl}\middle|\Phi\right\rangle$$

Можно проверить непосредственно, что оператор $\mathbf{T}_{ij}\mathbf{T}_{il}+\mathbf{T}_{lj}\mathbf{T}_{ij}+\mathbf{T}_{il}\mathbf{T}_{jl}$ действует на произвольном $e_a^{(i)}e_b^{(j)}e_c^{(l)}$, входящем в $\left|\Phi\right\rangle\in\mathcal{V}(\{M_a\})$, следующим образом:

$$(\mathbf{T}_{ij}\mathbf{T}_{il}+\mathbf{T}_{lj}\mathbf{T}_{ij}+\mathbf{T}_{il}\mathbf{T}_{jl})\ e_a^{(i)}e_b^{(j)}e_c^{(l)}=\begin{cases}0 & \text{если } a=b=c\\ -e_a^{(l)}e_b^{(i)}e_c^{(j)} & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Следовательно, мы опять вычисляем $\sum_{i\neq j\neq l}1=n(n-1)(n-2)$, затем вычитаем случаи, соответствующие первой строчке в (1.2.4), и ставим общий знак минус.

### 1.2.5 Связь с квантово-классическим соответствием

Мы установили соответствие между решениями уравнения КЗ в различных весовых подпространствах пространства $V^{\otimes n}$ и решениями спектральной задачи для $n$-частичной модели Калоджеро. Оно обобщает ранее известное отображение Мацуо-Чередника на случай, когда $\dim V$ не обязательно равно $n$. В этой более общей форме данное соответствие может быть интерпретировано как естественное "квантование" квантово-классического соответствия [30, 37, 43, 41] между квантовой моделью Годена и классической системой частиц Калоджеро-Мозера.

Гамильтониан этой последней имеет вид

$$\mathcal{H}=\sum_{i=1}^n p_i^2-\sum_{i\neq j}^n\frac{\kappa^2}{(x_i-x_j)^2}$$

со стандартными скобками Пуассона $\{p_i, x_j\} = \delta_{ij}$ (для простоты мы рассматриваем рациональный случай). Известно, что модель интегрируема [40] с матрицей Лакса

$$L_{ij} = p_i \delta_{ij} + \frac{\kappa(1-\delta_{ij})}{x_i - x_j}.$$

Высшие гамильтонианы в инволюции даются следами степеней матрицы Лакса: $\mathcal{H}_k = \operatorname{tr} L^k$, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$. Соответствие с квантовой моделью Годена строится следующим образом. Рассмотрим множество уровней всех классических гамильтонианов,

$$\mathcal{H}_k = \sum_{a=1}^{N} M_a g_a^k, \qquad M_a \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},$$

с фиксированными координатами $x_i$. (Это означает, что собственные значения $n \times n$ матрицы Лакса суть $g_a$ с кратностями $M_a$.) Тогда разрешенные значения импульсов $p_i$ совпадут с собственными значениями гамильтонианов Годена $\mathbf{H}_i$ в весовом подпространстве $\mathcal{V}(\{M_a\})$ для модели с отмеченными точками $x_i$ и матрицей твиста $\mathbf{g} = \operatorname{diag}(g_1, \ldots, g_N)$. В действительности разрешенные значения импульсов $p_i$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений. Различные решения этой системы соответствуют различным собственным состояниям гамильтонианов Годена. Константа связи $\kappa$ играет роль формальной постоянной Планка в модели Годена.

В тригонометрическом случае собственные значения матрицы Лакса

$$L_{ij}^{\mathrm{trig}} = p_i \delta_{ij} + \frac{\kappa\gamma(1-\delta_{ij})}{\sinh \gamma(x_i - x_j)}$$

должны образовывать “струны” длины $M_a$ с центром в $g_a$ (см. [31]):

$$g_a^{(\alpha)} = g_a - (M_a - 1 - 2\alpha)\kappa\gamma, \qquad \alpha = 0,1,\ldots, M_a - 1.$$

Тогда $p_i$ являются собственными значениями тригонометрических гамильтонианов Годена. Формула (1.2.4) для собственных значений $E$ гамильтониана Калоджеро-Сазерленда согласуется с этим, поскольку она в действительности представляет собой сумму квадратов всех $n$ собственных значений тригонометрической матрицы Лакса:

$$E = \sum_{a=1}^{N} \sum_{\alpha=0}^{M_a-1} (g_a^{(\alpha)})^2,$$

как можно легко проверить. Мы опять высказываем гипотезу, что $\Psi$ является общей собственной функцией для всех гамильтонианов модели Каложеро-Сазерленда с собственными значениями $\sum_{a=1}^{N} \sum_{\alpha=0}^{M_a-1} (g_a^{(\alpha)})^k$.

Мы видим, что квантование классической системы частиц Калоджеро с постоянной Планка $\hbar$ ($p_i \to \hbar\partial_{x_i}$) соответствует неавтономной деформации модели Годена, которая представляет собой систему уравнений КЗ с матрицей твиста.

Итак, мы обсудили соответствие Мацуо-Чередника между решениями рациональных или тригонометрических уравнений КЗ в $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$ и решениями спектральной задачи для $n$-частичной модели Калоджеро (соответственно, рациональной или тригонометрической). Ранее известная конструкция [39, 34] обобщена на случай, когда $n$ не обязательно равно $N$. Волновая функция модели Калоджеро строится как сумма всех компонент решения уравнений КЗ в данном весовом подпространстве. Мы также высказали гипотезу, что эта волновая функция является общей собственной функцией для всех высших гамильтонианов Калоджеро. Эта гипотеза проверена прямым вычислением для третьего (кубического) гамильтониана Калоджеро.

Важно отметить, что этот результат проливает некоторый новый свет на квантово-классическое соответствие между квантовой моделью Годена и классической системой частиц Калоджеро [30, 37, 43, 41]. Именно, мы видим, что происходит с другой стороной данного соответствия, если квантовать систему Калоджеро: спектральная задача для модели Годена превращается в ее нестационарную версию, которая является системой уравнений КЗ.

### 1.2.6 Приложение: кубический гамильтониан

Здесь мы покажем, что волновая функция $\Psi$ (1.2.3) является собственной функцией для третьего (кубического) гамильтониана Калоджеро

$$\hat{\mathcal{H}}_3 = \sum_i \hbar^3 \partial_{x_i}^3 - 3\hbar\kappa(\kappa - \hbar) \sum_{i \neq j} \frac{1}{(x_i - x_j)^2}\, \partial_{x_i}.$$

Удобно ввести связность КЗ

$$\nabla_i = \hbar\partial_{x_i} - \mathbf{g}^{(i)} - \kappa \sum_{j \neq i}^{n} \frac{\mathbf{P}_{ij}}{x_i - x_j}\,.$$

Тогда уравнения КЗ (1.2.1) примут вид

$$\nabla_i \Big| \Phi \Big\rangle = 0\,, \qquad i = 1,..,n\,.$$

Ниже мы будем опускать $j \neq i$ в суммах, подразумевая, что индексы суммирования не равны $i$. Прямое вычисление дает

$$\nabla_i^2 = \hbar^2 \partial_{x_i}^2 - 2\hbar \left( \mathbf{g}^{(i)} + \kappa \sum_j \frac{\mathbf{P}_{ij}}{x_i - x_j} \right) \partial_{x_i} + \left(\mathbf{g}^{(i)}\right)^2 + \kappa \sum_j \frac{\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ij} + \mathbf{P}_{ij}\mathbf{g}^{(i)}}{x_i - x_j}$$

$$+ \hbar\kappa \sum_j \frac{\mathbf{P}_{ij}}{(x_i - x_j)^2} + \kappa^2 \sum_{j,k} \frac{\mathbf{P}_{ij}\mathbf{P}_{ik}}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)} \,,$$

$$\nabla_i^3 = \hbar^3 \partial_{x_i}^3 - 3\hbar^2 \left( \mathbf{g}^{(i)} + \kappa \sum_j \frac{\mathbf{P}_{ij}}{x_i - x_j} \right) \partial_{x_i}^2 + 3\hbar^2\kappa \sum_j \frac{\mathbf{P}_{ij}}{(x_i - x_j)^2} \partial_{x_i} - \left(\mathbf{g}^{(i)}\right)^3$$

$$+3\hbar\kappa^2 \sum_{j,k} \frac{\mathbf{P}_{ij}\mathbf{P}_{ik}}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)} \partial_{x_i} + 3\hbar \left(\mathbf{g}^{(i)}\right)^2 \partial_{x_i} + 3\hbar\kappa \sum_j \frac{\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ij} + \mathbf{P}_{ij}\mathbf{g}^{(i)}}{x_i - x_j} \partial_{x_i}$$

$$-2\hbar^2\kappa \sum_j \frac{\mathbf{P}_{ij}}{(x_i - x_j)^3} - \hbar\kappa \sum_j \frac{2\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ij} + \mathbf{P}_{ij}\mathbf{g}^{(i)}}{(x_i - x_j)^2} - 3\hbar\kappa^2 \sum_{j,k} \frac{\mathbf{P}_{ij}\mathbf{P}_{ik}}{(x_i - x_j)^2(x_i - x_k)}$$

$$-\kappa \sum_j \frac{\left(\mathbf{g}^{(i)}\right)^2 \mathbf{P}_{ij} + \mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ij}\mathbf{g}^{(i)} + \mathbf{P}_{ij}\left(\mathbf{g}^{(i)}\right)^2}{(x_i - x_j)} - \kappa^3 \sum_{j,k,l} \frac{\mathbf{P}_{ij}\mathbf{P}_{ik}\mathbf{P}_{il}}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)(x_i - x_l)}$$

$$-\kappa^2 \sum_{j,k} \frac{\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ij}\mathbf{P}_{ik} + \mathbf{P}_{ij}\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ik} + \mathbf{P}_{ij}\mathbf{P}_{ik}\mathbf{g}^{(i)}}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)} \,.$$

Теперь используем (1.2.6). Подставим $\partial_{x_i}^2$ из уравнения $\nabla_i^2 \Big| \Phi \Big\rangle = 0$ с $\nabla_i^2$, записанном как в (1.2.6):

$$\nabla_i^3 = \hbar^3 \partial_{x_i}^3 + 3\hbar^2\kappa \sum_j \frac{\mathbf{P}_{ij}}{(x_i - x_j)^2} \partial_{x_i} + 2\kappa^3 \sum_{j,k,l} \frac{\mathbf{P}_{ij}\mathbf{P}_{ik}\mathbf{P}_{il}}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)(x_i - x_l)}$$

$$-3\hbar\kappa^2 \sum_{j,k} \frac{\mathbf{P}_{ij}\mathbf{P}_{ik}}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)} \partial_{x_i} - 3\hbar \left(\mathbf{g}^{(i)}\right)^2 \partial_{x_i} - 3\hbar\kappa \sum_j \frac{\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ij} + \mathbf{P}_{ij}\mathbf{g}^{(i)}}{x_i - x_j} \partial_{x_i}$$

$$+\hbar\kappa \sum_j \frac{\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ij} - \mathbf{P}_{ij}\mathbf{g}^{(i)}}{(x_i - x_j)^2} + 2\kappa^2 \sum_{j,k} \frac{\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ij}\mathbf{P}_{ik} + \mathbf{P}_{ij}\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ik} + \mathbf{P}_{ij}\mathbf{P}_{ik}\mathbf{g}^{(i)}}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)}$$

$$+2\kappa \sum_j \frac{\left(\mathbf{g}^{(i)}\right)^2 \mathbf{P}_{ij} + \mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ij}\mathbf{g}^{(i)} + \mathbf{P}_{ij}\left(\mathbf{g}^{(i)}\right)^2}{(x_i - x_j)} - 2\hbar^2\kappa \sum_j \frac{\mathbf{P}_{ij}}{(x_i - x_j)^3} + 2\left(\mathbf{g}^{(i)}\right)^3 \,.$$

Здесь и ниже мы подразумеваем, что операторы действуют на решение $\Big|\Phi\Big\rangle$ уравнений КЗ (для краткости мы не пишем вектор $\Big|\Phi\Big\rangle$ явно). Таким же образом сделаем следующие подстановки в правую часть (1.2.6) (используя $\nabla_i\Big|\Phi\Big\rangle = 0$):

$$-3\hbar\left(\mathbf{g}^{(i)}\right)^2\partial_{x_i} = -3\hbar\left(\mathbf{g}^{(i)}\right)^3 - 3\kappa\sum_j\frac{\left(\mathbf{g}^{(i)}\right)^2\mathbf{P}_{ij}}{(x_i-x_j)}\,,$$

$$-3\hbar\kappa\sum_j\frac{\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ij}+\mathbf{P}_{ij}\mathbf{g}^{(i)}}{x_i-x_j}\,\partial_{x_i}$$

$$= -3\kappa^2\sum_{j,k}\frac{\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ij}\mathbf{P}_{ik}+\mathbf{P}_{ij}\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ik}}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)} - 3\kappa\sum_j\frac{\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ij}\mathbf{g}^{(i)}+\mathbf{P}_{ij}\left(\mathbf{g}^{(i)}\right)^2}{(x_i-x_j)}\,.$$

Тогда получим

$$\nabla_i^3 = \hbar^3\partial_{x_i}^3 + 3\hbar^2\kappa\sum_j\frac{\mathbf{P}_{ij}}{(x_i-x_j)^2}\,\partial_{x_i} + 2\kappa^3\sum_{j,k,l}\frac{\mathbf{P}_{ij}\mathbf{P}_{ik}\mathbf{P}_{il}}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)(x_i-x_l)}$$

$$+\hbar\kappa\sum_j\frac{\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ij}-\mathbf{P}_{ij}\mathbf{g}^{(i)}}{(x_i-x_j)^2} + \kappa^2\sum_{j,k}\frac{-\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ij}\mathbf{P}_{ik}-\mathbf{P}_{ij}\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ik}+2\mathbf{P}_{ij}\mathbf{P}_{ik}\mathbf{g}^{(i)}}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)}$$

$$+2\kappa\sum_j\frac{\left(\mathbf{g}^{(i)}\right)^2\mathbf{P}_{ij}+\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ij}\mathbf{g}^{(i)}+\mathbf{P}_{ij}\left(\mathbf{g}^{(i)}\right)^2}{(x_i-x_j)} - 2\hbar^2\kappa\sum_j\frac{\mathbf{P}_{ij}}{(x_i-x_j)^3} - \left(\mathbf{g}^{(i)}\right)^3$$

$$-3\hbar\kappa^2\sum_{j,k}\frac{\mathbf{P}_{ij}\mathbf{P}_{ik}}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)}\,\partial_{x_i}\,.$$

Две суммы по $j,k$ в (1.2.6) должны быть разделены на две части – с $j=k$ и $j\neq k$. Тогда последняя сумма в (1.2.6) с $j\neq k$ должна быть преобразована с помощью $\nabla_i\Big|\Phi\Big\rangle = 0$. Это дает

$$\nabla_i^3 = \hbar^3\partial_{x_i}^3 - 3\hbar\kappa\sum_j\frac{\kappa-\hbar\mathbf{P}_{ij}}{(x_i-x_j)^2}\,\partial_{x_i} + 2\kappa^3\sum_{j,k,l}\frac{\mathbf{P}_{ij}\mathbf{P}_{ik}\mathbf{P}_{il}}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)(x_i-x_l)}$$

$$+\hbar\kappa\sum_j\frac{\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ij}-\mathbf{P}_{ij}\mathbf{g}^{(i)}}{(x_i-x_j)^2} - \kappa^2\sum_{j\neq k}\frac{\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ij}\mathbf{P}_{ik}+\mathbf{P}_{ij}\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ik}+\mathbf{P}_{ij}\mathbf{P}_{ik}\mathbf{g}^{(i)}}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)}$$

$$+2\kappa\sum_j\frac{\left(\mathbf{g}^{(i)}\right)^2\mathbf{P}_{ij}+\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{P}_{ij}\mathbf{g}^{(i)}+\mathbf{P}_{ij}\left(\mathbf{g}^{(i)}\right)^2}{(x_i-x_j)} - 2\hbar^2\kappa\sum_j\frac{\mathbf{P}_{ij}}{(x_i-x_j)^3} - \left(\mathbf{g}^{(i)}\right)^3$$

$$+\kappa^2\sum_j\frac{\mathbf{g}^{(i)}-\mathbf{g}^{(j)}}{(x_i-x_j)^2} - 3\kappa^3\sum_{j\neq k,l}\frac{\mathbf{P}_{ij}\mathbf{P}_{ik}\mathbf{P}_{il}}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)(x_i-x_l)}\,.$$

Наконец заметим, что в двух суммах по трем индексам $j,k,l$ члены, соответствующие совпадающим индексам, сокращаются. Окончательно имеем

$$\nabla_i^3 = \hbar^3\partial_{x_i}^3 - 3\hbar\kappa\sum_j \frac{\kappa-\hbar\mathbf{P}_{ij}}{(x_i-x_j)^2}\,\partial_{x_i} - \kappa^3 {\sum_{j,k,l}}' \frac{\mathbf{P}_{ij}\mathbf{P}_{ik}\mathbf{P}_{il}}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)(x_i-x_l)}$$

$$-\kappa\sum_j \frac{(\kappa-\hbar\mathbf{P}_{ij})(\mathbf{g}^{(j)}-\mathbf{g}^{(i)})}{(x_i-x_j)^2} - \kappa^2\sum_{j\neq k}\frac{\mathbf{P}_{ij}\mathbf{P}_{ik}\left[\mathbf{g}^{(i)}+\mathbf{g}^{(j)}+\mathbf{g}^{(k)}\right]}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)}$$

$$+2\kappa\sum_j \frac{\mathbf{P}_{ij}\left[\left(\mathbf{g}^{(i)}\right)^2+\mathbf{g}^{(i)}\mathbf{g}^{(j)}+\left(\mathbf{g}^{(j)}\right)^2\right]}{(x_i-x_j)} - 2\hbar^2\kappa\sum_j\frac{\mathbf{P}_{ij}}{(x_i-x_j)^3} - \left(\mathbf{g}^{(i)}\right)^3\,,$$

где ${\sum_{j,k,l}}'$ означает суммирование по всем различным индексам. Теперь мы можем написать

$$\sum_i\left\langle\Omega\middle|\nabla_i^3\middle|\Phi\right\rangle = 0 =$$

$$= \sum_i \hbar^3\partial_{x_i}^3\Psi - 3\hbar\kappa(\kappa-\hbar)\sum_{i\neq j}\frac{1}{(x_i-x_j)^2}\,\partial_{x_i}\Psi - \sum_i\left\langle\Omega\right|\left(\mathbf{g}^{(i)}\right)^3\left|\Phi\right\rangle$$

или

$$\hat{\mathcal{H}}_3\Psi = E\Psi\,,\quad \hat{\mathcal{H}}_3 = \sum_i\hbar^3\partial_{x_i}^3 - 3\hbar\kappa(\kappa-\hbar)\sum_{i\neq j}\frac{1}{(x_i-x_j)^2}\,\partial_{x_i}$$

где

$$E = \sum_{a=1}^N M_a g_a^3\,.$$

При переходе от (1.2.6) к (1.2.6) мы использовали $\left\langle\Omega\right|\mathbf{P}_{ij} = \left\langle\Omega\right|$ и тожлества

$${\sum_{i,j,k}}'\frac{\mathbf{g}^{(i)}+\mathbf{g}^{(j)}+\mathbf{g}^{(k)}}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)} = 0\,,$$

$${\sum_{i,j,k,l}}'\frac{1}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)(x_i-x_l)} = 0\,.$$

Все остальные члены сокращаются в силу антисимметрии по $i,j$.

## 1.3 Представление изомонодромных тау-функций через Некрасовские статсуммы и детерминанты Фредгольма

Теория изомонодромных деформаций играет важную роль во многих областях современной нелинейной математической физики. Классические работы [73, 62, 71] устанавливают связь между, например, разными корреляционными функциями и функциями распределения статистической механики и теории случайных матриц и специальными решениями уравнений Пенлеве. Соответствующие функции Пенлеве обычно записываются в терминах Фредгольмовых или Теплицевых операторов. Дальнейшее изучение этих соответствий привело к созданию Трейси и Видомом [72] алгоритмической процедуры получения систем дифференциальных уравнений в частных производных, которым удовлетворяют детерминанты Фредгольма с интегральными ядрами [59] ограниченными на объединение интервалов; изомонодромное происхождение уравнений Трейси-Видома было выяснено в [68] и далее изучено в [57]. Таким образом возникает вопрос:

Ⓒ Может ли общее решение изомонодромных уравнений быть выражено как детерминант Фредгольма?

Одной из основных целей наших исследований является получение конструктивного ответа на этот вопрос в Фуксовом случае. Рассмотрим Фуксову систему с $n$ регулярными особыми точками $a := \{a_0, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} \equiv \infty\}$ на $\mathbb{P}^1 \equiv \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$:

$$\partial_z \Phi = \Phi A(z), \qquad A(z) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{A_k}{z - a_k},$$

где $A_0, \ldots, A_{n-2}$ это $N \times N$ матрицы, независимые от $z$, а $\Phi(z)$ это матрица фундаментального решения, многозначная на $\mathbb{P}^1 \backslash a$. Монодромия $\Phi(z)$ реализует представление фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{P}^1 \backslash a)$ в $\mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$. Где матрицы вычетов $A_0, \ldots, A_{n-2}$ и $A_{n-1} := -\sum_{k=0}^{n-2} A_k$ не являются резонансными. Изомонодромные уравнения даются системой Шлезингера,

$$\begin{cases} \partial_{a_i} A_k = \dfrac{[A_i, A_k]}{a_k - a_i}, & i \neq k, \\ \partial_{a_i} A_i = \displaystyle\sum_{k \neq i} \frac{[A_i, A_k]}{a_i - a_k}. \end{cases}$$

Интегрируя потоки, связанные с аффинными преобразованиями, мы можем без потери общности положить $a_0 = 0$ и $a_{n-2} = 1$, так что остается $n - 3$ нетривиальных времен $a_1, \ldots, a_{n-3}$. В случае $N = 2$ уравнения Шлезингера сводятся к систем Гарнье $\mathcal{G}_{n-3}$, см, например, [61, Chapter 3] для дальнейших деталей. Полагая дальше $n = 4$, мы остаемся только с одним временем $t \equiv a_1$, а система Шлезингера становится эквивалентной нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка — уравнению Пенлеве VI.

Главный объект нашего интереса это изомонодромная тау-функция Джимбо-Мивы-Уено [63]. Она определяется как экспоненциированная первообразная от 1-формы

$$d_a \ln \tau_{\mathrm{JMU}} := \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \mathrm{res}_{z=a_k} \operatorname{Tr} A^2(z)\ da_k.$$

Определение самосогласованно, так как 1-форма справа замкнута на решениях уравнений деформации (1.3). Она задает гамильтонианы системы Шлезингера. Работая с системой Гарнье, мы подразумеваем стандартную калибровку, в которой $\operatorname{Tr} A(z) = 0$ и обозначаем собственные значения матриц $A_k$ с помощью $\pm\theta_k$ с $k = 0,\dots,n-1$. В случае Пенлеве VI удобно модифицировать это обозначение следующим образом: $(\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3) \mapsto (\theta_0,\theta_t,\theta_1,\theta_\infty)$. Логарифмическая производная $\zeta(t) := t(t-1)\frac{d}{dt}\ln\tau_{\mathrm{VI}}(t)$ в этом случае удовлетворяет $\sigma$-форму уравнения Пенлеве VI,

$$\Big(t(t-1)\zeta''\Big)^2 = -2\det\begin{pmatrix} 2\theta_0^2 & t\zeta'-\zeta & \zeta'+\theta_0^2+\theta_t^2+\theta_1^2-\theta_\infty^2 \\ t\zeta'-\zeta & 2\theta_t^2 & (t-1)\zeta'-\zeta \\ \zeta'+\theta_0^2+\theta_t^2+\theta_1^2-\theta_\infty^2 & (t-1)\zeta'-\zeta & 2\theta_1^2 \end{pmatrix}.$$

Монодромия ассоциированных линейных систем дает полный набор сохраняющихся величин для уравнения Пенлеве VI, системы Гарнье и уравнений Шлезингера. Общим решением уравнений деформации мы называем решение, соответствующее общим данным монодромии.

В статье [67] Пальмер (развивая более ранние результаты Мальгранжа [64]) интерпретировал тау-функцию Джимбо-Мивы-Уено (1.3) как детерминант сингулярного оператора Коши-Римана, действующего на функциях с заданной монодромией. Главная идея статьи [67] состоит в том, чтобы изолировать особые точки $a_0,\dots,a_{n-1}$ внутри окружности $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^1$ и представить Фуксову систему (1.3) с помощью граничного пространства функций на $\mathcal{C}$ которые могут быть аналитически продолжены внутрь с определенным ветвлением. Тау-функция получается путем сравнения двух сечений ассоциированного детерминантного расслоения.

Конструкция, предложенная нами, это непосредственное усовершенствование подхода Пальмера, переведенное в подход Римана-Гильберта. Единственная окружность $\mathcal{C}$ заменяется границами $n-3$ колец, разрезающих сферу с $n$ проколами $\mathbb{P}^1\backslash a$ на пары штанов. С каждой парой штанов мы ассоциируем Фуксову систему с 3 регулярными особыми точками, монодромия которой определяется монодромией начальной системы. Мы показываем, что изомонодромная тау-функция пропорциональна детерминанту Фредгольма:

$$\tau_{\mathrm{JMU}}(a) = \Upsilon(a)\cdot\det(1-K),$$

где префактор $\Upsilon(a)$ это известная элементарная функция. Интегральный оператор $K$ действует на голоморфных векторных функциях на объединении колец и содержит проекции на некоторые граничные пространства.

Компенсацией за более сложную модель с грассманианом является то, что ядро $K$ может быть явно написано в терминах 3-точечных решений[1]. В частности, для $N = 2$ (т.е., для системы Гарнье) они имеют представление через гипергеометрические функции. Специализацию нашего результата на $n = 4$ дает следующая

Теорема 1.3.1. Пускай независимая переменная $t$ в уравнении Пенлеве VI изменяется в действительном интервале $]0,1[$ и пускай $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, t < R < 1\}$ это окружность, ориентированная против часовой стрелки. Пускай $\sigma$, $\eta$ будут парами комплексных чисел, удавлетворяющих условиям

$$|\Re\sigma| \leq \frac{1}{2}, \qquad \sigma \neq 0, \pm\frac{1}{2},$$

$$\theta_0 \pm \theta_t + \sigma \notin \mathbb{Z}, \qquad \theta_0 \pm \theta_t - \sigma \notin \mathbb{Z}, \qquad \theta_1 \pm \theta_\infty + \sigma \notin \mathbb{Z}, \qquad \theta_1 \pm \theta_\infty - \sigma \notin \mathbb{Z}.$$

Общее решение уравнения Пенлеве VI (1.3) имеет следующее представление в виде детерминанта Фредгольма:

$$\tau_{\mathrm{VI}}(t) = \mathrm{const} \cdot t^{\sigma^2 - \theta_0^2 - \theta_t^2} (1-t)^{-2\theta_t\theta_1} \det(1 - U), \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{a} \\ \mathsf{d} & 0 \end{pmatrix},$$

где операторы $\mathsf{a}, \mathsf{d} \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathcal{C}))$ действуют на $g = \begin{pmatrix} g_+ \\ g_- \end{pmatrix}$ с $g_\pm \in L^2(\mathcal{C})$ как

$$(\mathsf{a}g)(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \mathsf{a}(z,z')\, g(z')\, dz', \qquad (\mathsf{d}g)(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \mathsf{d}(z,z')\, g(z')\, dz',$$

[1] Мы хотели бы отметить, что в некотором смысле похожая улучшенная конструкция возникала при анализе массивного уравнения Дирака с $U(1)$ ветвлением на Евклидовой плоскости [69]. Каждая точка ветвления там была изолированна отдельной полоской, что в конечном итоге позволяло получать явное представление в виде детерминанта Фредгольма для тау-функции соответствующего оператора Дирака [70]. В физических терминах, детерминант соответствует пересуммированному форм-факторному разложению корреляционной функции $U(1)$ твист-полей в массивной теории Дирака. Статья [69] была важным источником вдохновения настоящей работы, хотя потребовалось 10 лет для того, чтобы осознать, что в киральной задаче полоски должны быть заменены парами штанов.

и их ядра даются явно формулами

$$\mathsf{a}\left(z,z'\right) = \frac{\left(1-z'\right)^{2\theta_1}\begin{pmatrix} K_{++}\left(z\right) & K_{+-}\left(z\right) \\ K_{-+}\left(z\right) & K_{--}\left(z\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_{--}\left(z'\right) & -K_{+-}\left(z'\right) \\ -K_{-+}\left(z'\right) & K_{++}\left(z'\right)\end{pmatrix} - 1}{z-z'},$$

$$\mathsf{d}\left(z,z'\right) = \frac{1-\left(1-\frac{t}{z'}\right)^{2\theta_t}\begin{pmatrix} \bar{K}_{++}\left(z\right) & \bar{K}_{+-}\left(z\right) \\ \bar{K}_{-+}\left(z\right) & \bar{K}_{--}\left(z\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{K}_{--}\left(z'\right) & -\bar{K}_{+-}\left(z'\right) \\ -\bar{K}_{-+}\left(z'\right) & \bar{K}_{++}\left(z'\right)\end{pmatrix}}{z-z'},$$

где

$$K_{\pm\pm}\left(z\right) = {}_2F_1\left[\begin{matrix}\theta_1+\theta_\infty\pm\sigma, \theta_1-\theta_\infty\pm\sigma \\ \pm 2\sigma\end{matrix}; z\right],$$

$$K_{\pm\mp}\left(z\right) = \pm\frac{\theta_\infty^2-\left(\theta_1\pm\sigma\right)^2}{2\sigma\left(1\pm 2\sigma\right)}\, z\, {}_2F_1\left[\begin{matrix}1+\theta_1+\theta_\infty\pm\sigma, 1+\theta_1-\theta_\infty\pm\sigma \\ 2\pm 2\sigma\end{matrix}; z\right],$$

$$\bar{K}_{\pm\pm}\left(z\right) = {}_2F_1\left[\begin{matrix}\theta_t+\theta_0\mp\sigma, \theta_t-\theta_0\mp\sigma \\ \mp 2\sigma\end{matrix}; \frac{t}{z}\right],$$

$$\bar{K}_{\pm\mp}\left(z\right) = \mp\, t^{\mp 2\sigma} e^{\mp i\eta}\frac{\theta_0^2-\left(\theta_t\mp\sigma\right)^2}{2\sigma\left(1\mp 2\sigma\right)}\,\frac{t}{z}\, {}_2F_1\left[\begin{matrix}1+\theta_t+\theta_0\mp\sigma, 1+\theta_t-\theta_0\mp\sigma \\ 2\mp 2\sigma\end{matrix}; \frac{t}{z}\right].$$

Более того, мы показываем, что для специального выбора монодромии в случае Пенлеве VI, $U$ становится эквивалентна гипергеометрическому ядру из статьи [50] и воспроизводит, таким образом, известное ранее семейство решений, даваемых детерминантами Фредгольма [51]. Известно, что гипергеометрическое ядро в разных вырожденных пределах воспроизводит другие ядра из теории случайных матриц.

Другая часть нашей мотивации приходит из соответствия между изомонодромными деформациями и конформной теорией поля. В статье [55] была сформулирована гипотеза о том, что тау-функция, ассоциированная с общим решением уравнения Пенлеве VI совпадает с преобразованием Фурье по промежуточному импульсу от 4-точечных $c = 1$ конформных блоков алгебры Вирасоро. Два независимых доказательства этой гипотезы были предложены в статьях [58] и [49]. Первый подход из [58] также расширяет изначальное утверждение на систему Гарнье. Главная идея этой статьи состоит в том, чтобы рассматривать монодромию со значениями в операторах для конформных блоков с дополнительными вставками полей, вырожденных на втором уровне. Для $c = 1$ преобразование Фурье таких конформных блоков сводит их “квантовую” монодромию к обычным $2\times 2$ матрицам. Это может быть использовано для того, чтобы построить матрицу фундаментального решения Фуксовой системы с заданной $\mathrm{SL}\left(2,\mathbb{C}\right)$

монодромией. Второй подход [49] использует вложение двух копий алгебры Вирасоро в алгебру супер-Вирасоро, расширенную майорановскими фермионами, для того, чтобы доказать некоторые билинейные дифференциально-разностные соотношения для 4-точечных конформных блоков, эквивалентные уравнению Пенлеве VI. Интересной особенностью этого метода является то, что билинейные соотношения оттуда допускают деформацию к общим значениям центрального заряда алгебры Вирасоро.

Среди других достижений стоит отметить статьи [56, 60, 65] в которых асимптотические разложения тау-функций уравнений Пенлеве V, IV и III идентифицированы с преобразованиями Фурье от иррегулярных конформных блоков разных видов. Изучения соотношений между изомонодромными задачами в высшем ранге и конформными блоками $W_N$ алгебр было инициировано в статьях [52, 53, 54].

АГТ соответствие [1] (доказанное в [47]) отождествляет конформные блоки алгебры Вирасоро со статсуммами $\mathcal{N} = 2$ четырехмерных калибровочных теорий. У последних существует комбинаторное описание [66], выражающее их в виде сумм по наборам диаграмм Юнга. Этот факт очень важен для изомонодомной теории, поскольку он дает (в противоречии с укоренившимся фольклором) явное выражение в виде ряда для тау-функций Пенлеве VI и Гарнье. Начиная с самой первой статьи по теме [55] существовала загадка о том, как понять комбинаторное выражение для тау-функции непосредставнно в рамках изомнодромной задачи. Были также попытки отсуммировать этот ряд в детерминантное представление; например, в статье [48] было показано, что обрезанный ряд из $c = 1$ конформных блоков совпадает со статсуммой некоторыми статсуммами дискретных матричных моделей.

Мы показываем, что комбинаторный ряд соответствует разложению детерминанта Фредгольма по главным минорам (1.3), записанному в базисе Фурье в пространстве функций на кольцах, содержащихся в разложении на штаны. Фурье-моды, которые нумеруют выбор строк главных миноров, связаны с координатами Фробениуса диаграмм Юнга. Нужно отметить, что эта комбинаторная структура имеет место также для $N > 2$, где объекты из конформной/калибровочной теорий, соответствующие тау-функциям, все еще должны быть определены и поняты.

В частности, мы доказываем следующий результат, изначально угаданный в [55]:

Теорема 1.3.2. Общее решение уравнения Пенлеве VI (1.3) может быть записано как

$$\tau_{\mathrm{VI}}(t) = \mathrm{const} \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\eta'} \mathcal{B}\left(\vec{\theta}; \sigma + n; t\right),$$

где $\mathcal{B}(\vec{\theta},\sigma;t)$ это двойная сумма по диаграммам Юнга,

$$\mathcal{B}\left(\vec{\theta},\sigma;t\right)=\mathcal{N}^{\theta_1}_{\theta_\infty,\sigma}\mathcal{N}^{\theta_t}_{\sigma,\theta_0}t^{\sigma^2-\theta_0^2-\theta_t^2}(1-t)^{2\theta_t\theta_1}\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{Y}}\mathcal{B}_{\lambda,\mu}\left(\vec{\theta},\sigma\right)t^{|\lambda|+|\mu|},$$

$$\mathcal{B}_{\lambda,\mu}\left(\vec{\theta},\sigma\right)=\prod_{(i,j)\in\lambda}\frac{\left((\theta_t+\sigma+i-j)^2-\theta_0^2\right)\left((\theta_1+\sigma+i-j)^2-\theta_\infty^2\right)}{h_\lambda^2(i,j)\left(\lambda'_j-i+\mu_i-j+1+2\sigma\right)^2}\times$$
$$\times\prod_{(i,j)\in\mu}\frac{\left((\theta_t-\sigma+i-j)^2-\theta_0^2\right)\left((\theta_1-\sigma+i-j)^2-\theta_\infty^2\right)}{h_\mu^2(i,j)\left(\mu'_j-i+\lambda_i-j+1-2\sigma\right)^2},$$

$$\mathcal{N}^{\theta_2}_{\theta_3,\theta_1}=\frac{\prod_{\epsilon=\pm}G\left(1+\theta_3+\epsilon(\theta_1+\theta_2)\right)G\left(1-\theta_3+\epsilon(\theta_1-\theta_2)\right)}{G(1-2\theta_1)G(1-2\theta_2)G(1+2\theta_3)}.$$

Здесь $\sigma\notin\mathbb{Z}/2$, $\eta'$ это два произвольных комплексных параметра, а $G(z)$ обозначают $G$-функции Барнса.

Параметры $\sigma$ играют одну и ту же роль в детерминанте Фредгольма (1.3.1) и в представлении в виде ряда (1.3.2), в то время как $\eta$ и $\eta'$ связаны простым преобразованием. Очевидная квазипериодичность второго представления по отношению к целым сдвигам $\sigma$ становится совершенно неочевидной в детерминанте Фредгольма.

## 1.4 Числа Гурвица: произведения случайных матриц, числа Гурвица-Севери, геометрия пространств Гурвица

### 1.4.1 Произведения случайных матриц

Мы будем рассматривать многоматричные модели, в которых вершины взаимодействия задаются собственными значениями произведения нескольких матриц. Статистическая сумма такой модели есть интеграл от произведения некоторого количества тау-функций. Интеграл берется по матричным элементам каждой входящей матрицы. При этом тау-функции могут зависеть от произведения нескольких матриц. Это зависимость выбирается следующим образом: тау-функция иерархии интегрируемых уравнений, как известно, является функцией от высших времен иерархии. Если высшие времена выражаются через матричные элементы с помощью формулы $p_m=\mathrm{tr}Z^m, m\geq 1$, где $Z$ обозначает произведение $n$ матриц, то такая тау-функция зависит только от собственных значений матрицы $Z$. Такие тау-функции, которые указанным образом зависят от собственных значений некоторой матрицы, мы называем тау-функциями матричного аргумента. Мы изучаем многоматричные модели, которые являются интегралами от произведений тау-функций матричных аргументов. Ситуация хорошо известна для случая $n = 1,2$. В качестве матриц можно брать унитарные, комплексные, нормальные и эрмитовы матрицы.

Нам понадобится разложение статсумм матричных моделей по характерам представлений линейной группы – по функциям Шура. Заметим, что в тех случаях, когда матричный интеграл оказывался тау-функцией, то эта была либо тау-функция релятивистской тодовской цепочки (в дальнейшем соответствии с общепринятыми обозначениями, в будем писать "тау-функция TL"), либо тау-функция иерархии BKP, введенная в работе Каца и ван де Лера. При этом ряд теории возмущений по константам связи оказывается так называемой тау-функцией гипергеометрического типа. Напомним, что иерархия TL возникает в одно- и двуматричной моделях с эрмитовыми и унитарными матрицами, а также в некоторых других, а иерархия BKP возникает в описании ортогонального и симплектического ансамблей, $\beta = 1,4$ циркулярных ансамблей и $\beta = 1,4$ ансамблей Жинибра, в описании ансамблей Пандэ-Меты, интерполирующих между унитарным и ортогональным или между унитарным и симплектическим ансамблями, а также в описании двуматричных моделей с одной эрмитовой, одной симметрической (или анти-симметрической) или с одной эрмитовой, второй самодуальной (или анти-самодуальной) матрицами.

Связи между матричными интегралами и некоторыми типами чисел Гурвица были предъявлены во многих работах. Напомним, что числа Гурвица $H^{\mathrm{e},\mathrm{f}}(d;\Delta^1,\dots,\Delta^{\mathrm{f}})$ пересчитывают неэквивалентные разветвленные $d$-листные накрытия базовой римановой или клейновой поверхности эйлеровой характеристики e другой римановой или клейновой поверхностью, с заданными f профилями ветвления $\Delta^1,\dots,\Delta^{\mathrm{f}}$. Изучались два случая:

(1) накрытия римановой сферы ($\mathrm{e} = 2$), такие, что два профиля, $\Delta^1,\Delta^2$, произвольны, а длины всех остальных профилей фиксированы. Этот случай относится к иерархии двумеризованной тодовской цепочки (или, эквивалентно, иерархии двухкомпонентного КП)

(2) накрытия вещественной проективной плоскости ($\mathrm{e} = 1$) с одним произвольным профилем $\Delta^1$ и с фиксированными длинами профилей во всех остальных точках. Этот случай относится к иерархии BKP Каца-ван де Лера.

Нашей целью является предъявление интегралов от тау-функций и/или произведений тау-функций, которые являются производящими функциями чисел Гурвица $H^{\mathrm{e},\mathrm{f}}$ с произвольно выбранной эйлеровой характеристикой накрываемой поверхности e и произвольным числом точек ветвления f. Мы стартуем с матричных интегралов, который сами являются тау-функциями. Такие интегралы-тау-функции всегда генерируют числа Гурвица либо для римановой сферы (e = 2), либо для вещественной проективной плоскости (e = 1). Сразу скажем, что такие интегралы можно связать с популярной задачей квантового хаоса о нахождении спектра произведений случайных матриц. Далее мы показываем, что при изменение порядка сомножителей в произведении матриц мы получаем другую произодящую функцию чисел Гурвица, но с эйлеровой характеристики e уменьшенной на четное число. В этом случае интеграл не является тау-функцией. (Тем не менее, такие интегралы наследуют некоторые свойства тау-функций.) Кроме тау-функций тодовской решетки под интегралом мы также допускаем тау-функции ВКР (последние дают нечетные эйлеровы характеристики, что соответствует неориентируемым поверхностям).

Рассмотрим набор из $N \times N$ комплексных матриц $Z_\alpha, C_\alpha$, $\alpha = 1,\dots,n$. Здесь и ниже звездочка не означает комплексного сопряжения. Определим произведения

$$\mathrm{Z} := (Z_1C_1)\cdots(Z_nC_n), \tag{1.4.1}$$

$$\mathrm{Z}^* := Z_n^\dagger \cdots Z_1^\dagger, \tag{1.4.2}$$

$$\mathrm{Z}^{(t)} := Z_n^\dagger Z_{n-1}^\dagger \cdots Z_{t+1}^\dagger Z_1^\dagger Z_2^\dagger \cdots Z_t^\dagger, \qquad t \le n \tag{1.4.3}$$

где $Z_\alpha^\dagger$ - матрица, эрмитова сопряженная к $Z_\alpha$. (Матрица $\mathrm{Z}^{(t)}$ получается действием $[\frac{t}{2}]$ транспозиций на $\mathrm{Z}^*$). В формуле (1.4.3) в случае $t = n$ мы полагаем $\mathrm{Z}^{(n)} = Z_1^\dagger Z_2^\dagger \cdots Z_n^\dagger$. Имеем $\mathrm{Z}^{(0)} = \mathrm{Z}^*$.

Также введем обозначения

$$\tau_1^{\mathrm{TL}}(X,\mathbf{p}) = \sum_\lambda s_\lambda(X)s_\lambda(\mathbf{p}) = e^{\mathrm{tr}V(X,\mathbf{p})} = \prod_{i=1}^N e^{\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m}x_i^m p_m},$$

где $x_i$ – собственные значения $X$, и где $\mathbf{p} = (p_1,p_2,\dots)$ обозначает полубесконечный набор параметров и где

$$\tau_1^{\mathrm{BKP}}(X) = \sum_\lambda s_\lambda(X) = \prod_{i=1}^N (1-x_i)^{-1} \prod_{i<j}(1-x_ix_j)^{-1}.$$

Здесь $s_\lambda$ обозначает функцию Шура. Напомним нужный факт: если $X$ является матрицей размера $N \times N$, то

$$s_\lambda(X) = 0, \qquad \ell(\lambda) > N,$$

где $\ell(\lambda)$ – длина разбиения $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_\ell), \lambda_\ell > 0$.

Мы будем изучать интегралы от комплексных матриц, с мерой интегрирования

$$d\mu(Z_\alpha) = c \prod_{i,j=1}^{N} d\mathrm{Re}(Z_\alpha)_{ij} d\mathrm{Im}(Z_\alpha)_{ij} e^{-|(Z_\alpha)_{ij}|^2}$$

и областью интегрирования $\mathbb{C}^{N^2}$, где $c$ – нормировочная константа, которая определяется из условия $\int d\mu(Z_\alpha) = 1$. Также мы рассмотрим интегралы по унитарной группе $\mathbb{U}(N)$, соответствующую меру Хаара мы обозначим $d_*U$, $\int_{\mathbb{U}(N)} d_*U = 1$.

Пусть $A$ и $B$ – нормальные матрицы (то есть матрицы, которые могут быть приведены к диагональному виду с помощью унитарного преобразования). Тогда

$$\int_{\mathbb{U}(N)} s_\lambda(AUBU^{-1}) d_*U = \frac{s_\lambda(A)s_\lambda(B)}{s_\lambda(\mathbb{I}_N)} \ ,$$

Если $A,B \in GL(N)$, имеем

$$\int_{\mathbb{U}(n)} s_\mu(AU)s_\lambda(U^{-1}B) d_*U = \frac{s_\lambda(AB)}{s_\lambda(\mathbb{I}_N)} \delta_{\mu,\lambda} \, .$$

Ниже $p_\infty = (1,0,0,\dots)$.

$$\int_{\mathbb{C}^{n^2}} s_\lambda(AZBZ^+) e^{-\mathrm{Tr} ZZ^+} \prod_{i,j=1}^{n} d^2Z = \frac{s_\lambda(A)s_\lambda(B)}{s_\lambda(p_\infty)}$$

и

$$\int_{\mathbb{C}^{n^2}} s_\mu(AZ)s_\lambda(Z^+B) e^{-\mathrm{Tr} ZZ^+} \prod_{i,j=1}^{n} d^2Z = \frac{s_\lambda(AB)}{s_\lambda(p_\infty)} \delta_{\mu,\lambda}.$$

Это будет являться нашим инструментом при изучении интегралов от тау-функций: как простейших $\tau_1^{\mathrm{TL}}$, $\tau_1^{\mathrm{BKP}}$, так и более общих тау-функций. Заметим, что, если мы припишем степень 1 каждой функции Шура: $\mathrm{Deg}\, s_\lambda = 1$, тогда соотношения (1.4.1) и (1.4.1) сохраняют степень, а в обоих соотношениях (1.4.1) и (1.4.1) степень правой части меньше степени левой части на двойку.

Давайте запишем функцию Шура как квазиоднородный полином в терминах так называемых степенных сумм $\mathbf{p} = (p_1,p_2,\dots)$:

$$s_\lambda(\mathbf{p}) = \frac{\mathrm{dim}\lambda}{d!} \left( p_1^d + \sum_{\substack{\Delta \\ |\Delta|=d}} \varphi_\lambda(\Delta) \mathbf{p}_\Delta \right) ,$$

где $\mathbf{p}_\Delta = p_{\Delta_1} \cdots p_{\Delta_\ell}$, и где $\Delta = (\Delta_1,\dots,\Delta_\ell)$ – разбиения, вес которых совпадает с весом разбиения $\lambda$: $|\lambda| = |\Delta|$. Здесь

$$\mathrm{dim}\lambda = d! s_\lambda(\mathbf{p}_\infty), \qquad \mathbf{p}_\infty = (1,0,0,\dots)$$

обозначает размерность неприводимого представления симметрической группы $S_d$. Мы предполагаем, что $\varphi_\lambda(\Delta)=0$, если $|\Delta|\neq|\lambda|$.

Соотношение (1.4.1) известно как характеристическое отображение, оно связывает функции Шура (неприводимые характеры линейной группы, помеченные $\lambda$) и неприводимые характеры $\chi_\lambda$ симметрической группы $S_d$.

Для заданной матрицы $A$, мы будем использовать обозначение $s_\lambda(A):=s_\lambda(A)$, где $\mathbf{p}(A)=(p_1(A),p_2(A),\dots)$ и $p_k(A)=\mathrm{tr}A^k$. Скажем, если $\mathbb{I}_N$ – единичная $N\times N$ матрица, то при любых $k$ имеем $p_k(\mathbb{I}_N)=N$.

Мы используем следующие специализации функций Шура. Обозначим

$$\mathbf{p}_\infty=(1,0,0,\dots),$$

$$\mathbf{p}(a)=(a,a,a,\dots)\,,$$

$$\mathbf{p}(\mathrm{q},\mathrm{t})=(p_1(\mathrm{q},\mathrm{t}),p_2(\mathrm{q},\mathrm{t}),\dots)\;,\quad p_m(\mathrm{q},\mathrm{t})=\frac{1-\mathrm{q}^m}{1-\mathrm{t}^m}.$$

Тогда

$$\frac{s_\lambda(\mathbf{p}(a))}{s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)}=(a)_\lambda\,,\quad \mathbf{p}(a)=(a,a,a,\dots),$$

где $(a)_\lambda:=(a)_{\lambda_1}(a-1)_{\lambda_2}\cdots(a-\ell+1)_{\lambda_\ell}$, $(a)_n:=a(a+1)\cdots(a+n-1)$, и где $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_\ell)$ – разбиение. Более общий случай:

$$\frac{s_\lambda(\mathbf{p}(\mathrm{q},\mathrm{t}))}{s_\lambda(\mathbf{p}(0,\mathrm{t}))}=(\mathrm{q};\mathrm{t})_\lambda\,,$$

где $(\mathrm{q};\mathrm{t})_\lambda=(\mathrm{q};\mathrm{t})_{\lambda_1}(\mathrm{q}\ \mathrm{t}^{-1};\mathrm{t})_{\lambda_2}\cdots(\mathrm{q}\ \mathrm{t}^{1-\ell};\mathrm{t})_{\lambda_\ell}$, здесь $(\mathrm{q};\mathrm{t})_k=(1-\mathrm{q})(1-\mathrm{q}\ \mathrm{t})\cdots(1-\mathrm{q}\ \mathrm{t}^{n-1})$ есть t – деформированный символ Похгаммера. Предполагается, что $(\mathrm{q};\mathrm{t})_0=1$. Это может быть легко выведено из известных соотношений.

Так как символы Похгаммера (1.4.1) и (1.4.1) равны отношению функций Шура, мы приписываем $\mathrm{Deg}\,(a)_\lambda=0$ и $\mathrm{Deg}\,(\mathrm{q};\mathrm{t})_\lambda=0$. Отметим, что в используемых нами обозначениях имеет место равенство

$$s_\lambda(\mathbb{I}_N)=s_\lambda(\mathbf{p}(N)).$$

Давайте рассмотрим суммы значений нормированных характеров $\varphi_\lambda$ на всех разбиениях $\Delta$ с заданным весом $d$, $d=|\lambda|=|\Delta|$ и с заданной длиной $\ell(\Delta)=d-k$:

$$\phi_k(\lambda)\;:=\;\sum_{\substack{\Delta\\ \ell(\Delta)=d-k}}\varphi_\lambda(\Delta),\quad k=0,\dots,d-1.$$

Заметим, что $\phi_0(\lambda)=1$. Есть два других случая, когда сумма значений нормированных характеров (1.4.1) содержит лишь один член:

(а) $\phi_1(\lambda)=\varphi_\lambda(\Gamma), \Gamma=(1^{d-2}2)$ (for $d>1$). Заметим, что $\phi_1(\lambda)=\varphi_\lambda(\Gamma)$, это соответствует минимально разветвленному профилю: ко-длина этого профиля равна единице. Это профиль простой точки ветвления, во многих приложениях такие ветвления представляют наибольший интерес.

(б) $\phi_{d-1}(\lambda)=\varphi_\lambda((d))$ – профиль с диаграммой Юнга, состоящей из одной строки – циклический профиль, описывающий максимально разветвленную точку ветвления (такой профиль играет специальную роль).

Величину $d-\ell(\lambda)$, которая была использованна в определении (1.4.1), мы называем кодлиной разбиения $\lambda$ и обозначаем $\ell^*(\lambda)$. Эта величина входит в так называемое соотношение Римана-Гурвица, которое соотносит эйлерову характеристику базовой поверхности e и эйлерову характеристику ее $d$-листного накрытия e$'$ следующим образом:

$$\mathrm{e}'-d\mathrm{e}+\sum_i \ell^*(\Delta^{(i)})=0,$$

где сумма берется по всем точкам ветвления $z_i, i=1{,}2,\dots$ с профилями ветвления $\Delta^i, i=1{,}2,\dots$ соответственно. Введем

$$\deg \phi_k(\lambda)=k.$$

Эта степень равна кодлине разветвленного профиля в формуле (1.4.1).

Нам нужно соотношение

$$s_\lambda(\mathbf{p}(a))=\frac{\dim\lambda}{d!}a^d\left(1+\sum_{d>k>0}\phi_k(\lambda)a^{-k}\right),\quad d=|\lambda|,$$

которое есть комбинация соотношений (1.4.1) и (1.4.1), и его следствие

$$(s_\lambda(\mathbf{p}(a)))^c=\left(\frac{\dim\lambda}{d!}\right)^c a^{cd}\left(1+\sum_{m>0}\left(\sum_{d>k>0}\phi_k(\lambda)a^{-k}\right)^m\right)^c=$$

$$=:(s_\lambda(\mathbf{p}_\infty))^c\, a^{cd}\left(1+\sum_{k>0}\tilde\phi_k(\lambda;c)a^{-k}\right),$$

в котором все величины $\tilde\phi_k$ построены из набора $\{\phi_i\,, i>0\}$ следующим образом:

$$\tilde\phi_k(\lambda;c)=\sum_{l\geq 1}c(c-1)\cdots(c-l+1)\sum_{\substack{\mu\\ \ell(\mu)=l,\,|\mu|=k}}\frac{\phi_\mu(\lambda)}{|\mathrm{Aut}\,\mu|},\quad \phi_\mu(\lambda):=\phi_{\mu_1}(\lambda)\cdots\phi_{\mu_l}(\lambda),$$

где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{l'})$ - разбиение, которое также может быть записано в виде $\mu = (1^{m_1} 2^{m_2} 3^{m_3} \cdots)$, и где $m_i$ обозначает, сколько раз в разбиении числа $|\mu| = k$ встречается число $k$. Таким образом, набор всех отличных от нуля чисел $m_{j_a}$, $a = 1, \dots l'$, $(l' \le l)$ определяет разбиение $\mu$ длинны $\ell(\mu) = \sum_{a=1}^{l'} m_{j_a} = l$ и веса $|\mu| = \sum_{a=1}^{l'} j_a m_{j_a} = k$. Тогда порядок группы автоморфизмов разбиения $\mu$ равен

$$|\mathrm{Aut}\,\mu| = m_{j_1}! \cdots m_{j_{l'}}!.$$

Ясно, что $\tilde{\phi}_k(\lambda; 1) = \phi_k(\lambda)$. Имеем

$$\deg \tilde{\phi}_k = k.$$

Введем

$$H_N^{\mathrm{e},k}(d; \Delta^1, \dots, \Delta^k) = \sum_{\substack{\lambda \\ |\lambda|=d,\, \ell(\lambda)\le N}} \left(\frac{\dim\lambda}{d!}\right)^{\mathrm{e}} \varphi_\lambda(\Delta^1) \cdots \varphi_\lambda(\Delta^k),$$

где $\Delta^i$ - разбиение, помеченное номером $i = 1, \dots, k$. Здесь $\dim\lambda$ это размерность неприводимого представления группы $S_d$, и

$$\varphi_\lambda(\Delta^{(i)}) := |C_{\Delta^{(i)}}| \, \frac{\chi_\lambda(\Delta^{(i)})}{\dim\lambda}, \quad \dim\lambda := \chi_\lambda\left((1^d)\right),$$

$\chi_\lambda(\Delta)$ – характер симметрической группы $S_d$, вычисленный на элементе циклового типа $\Delta$, и в сумме (1.4.1) $\chi_\lambda$ пробегает все комплексные характеры $S_d$ (они помечены разбиениями $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ веса $d = |\lambda|$). Предполагается, что $d = |\lambda| = |\Delta^1| = \cdots = |\Delta^k|$. $|C_\Delta|$ обозначает мощность циклового класса $C_\Delta$ в $S_d$.

Формула характеров Медныха-Поздняковой-Джонса утверждает, что для $N \geqslant d$ число $H_N^{\mathrm{e},k}(d; \Delta^1, \dots, \Delta^k)$ является числом Гурвица, которое пересчитывает разветвленные $d$-листные накрытия накрываемой клейновой поверхности с эйлеровой характеристикой $\mathrm{e}' = d\mathrm{e} + \sum_{i=1}^k (\ell(\Delta^i) - d)$.

Заметим, что если мы извлечем числа Гурвица из формулы для отношения функций Шура, как это сделано во многих работах, то, благодаря формуле (1.4.1), мы видим, что степень Deg дает эйлерову характеристику e накрываемой поверхности.

Введем такие суммы чисел Гурвица:

$$S^{\mathrm{e},k+p}(N; d; \Delta^1, \dots, \Delta^k; l_1^*, \dots, l_p^*) := \sum_{\substack{\lambda \\ |\lambda|=d,\, \ell(\lambda)\leqslant N}} \left(\frac{\dim\lambda}{d!}\right)^{\mathrm{e}} \prod_{i=1}^k \varphi_\lambda(\Delta^i) \prod_{i=1}^p \phi_{l_i^*}(\lambda)$$

$$= \sum_{\substack{\Delta^{k+1} \\ \ell^*(\Delta^{k+1})=l_1^*}} \sum_{\substack{\Delta^{k+p} \\ \ell^*\left(\Delta^{k+p}\right)=l_p^*}} H_N^{\mathrm{e},k+p}\left(d; \Delta^1, \dots, \Delta^{k+p}\right),$$

где предполагается, что веса всех разбиений, $|\Delta^i|, i = 1, \ldots, k + p$, одинаковы и равны $d = |\lambda|$. Последняя формула – это сумма чисел Гурвица для накрываемой поверхности эйлеровой характеристики e при условии, что эйлерова характеристика разветвленного $d$-листного накрытия равна

$$\mathrm{e}' = \mathrm{e}d - \sum_{i=1}^{k} \ell^*(\Delta^i) - \sum_{i=1}^{p} l_i^*.$$

Число точек ветвления равно $k + p$, причем в $k$ точках ветвления профили ветвлений заданы разбиениями $\Delta^i, i = 1, \ldots, k$, а в остальных $p$ точках ветвления задана только длинна разбиений, соответственно равная $d - l_i^*, i = 1, \ldots, p$. В рассматриваемых нами случаях параметр $N$ будет размером матриц, и мы можем устремить этот параметр $N$ к бесконечности, так что, если когда это не приведет к путанице, мы будем опускать пометку $N$ у чисел $H_N^{\mathrm{e},k}$.

Гулденом и Джаксоном было показано, что производящая функция

$$\sum_{\Delta} \sum_{l_1^*, \ldots, l_p^* = 1}^{d} S^{2,p+1}\left(d; \Delta; l_1^*, \ldots, l_p^*\right) \mathbf{p}_\Delta \prod_{i=1}^{p} a_i^{d - l_i^*}$$

чисел Гурвица, является примером тау-функции КП, более точно – гипергеометрической тау-функции КП:

$$\tau_r^{\mathrm{TL}}(n, \mathbf{p}, \mathbf{p}^*) = \sum_{\lambda} s_\lambda(\mathbf{p}) s_\lambda(\mathbf{p}^*) r_\lambda(n), \quad r_\lambda(n) := \prod_{(i,j) \in \lambda} r(n + j - i)$$

с отождествлением $\mathbf{p}^* = \mathbf{p}_\infty$ и $r(x) = \prod_{i=1}^{p} (x + a_i)$, где $a_i$ – произвольные комплексные параметры. Произведение в правой части выражения (1.4.1) называется произведением содержаний.

Отметим далее, что можно ввести проективные аналоги чисел Гурвица Гулдена-Джаксона, $S^{1,p+1}$, то есть чисел Гурвица Гулдена-Джаксона в которых накрываемая поверхность – это вещественная проективная плоскость. Было показано, что проективные числа Гурвица Гулдена-Джаксона генерируются гипергеометрической тау-функцией иерархии ВКР, именно, тау-функцией

$$\tau_r^{\mathrm{B}}(N, n, \mathbf{p}) = \sum_{\substack{\lambda \\ \ell(\lambda) \le N}} s_\lambda(\mathbf{p}) r_\lambda(n)$$

с таким же отождествлением $r$, как было указано выше для гипергеометрической тау-функции иерархии КП. В этой формуле $N, n, \mathbf{p}$ - это набор свободных параметров, называемых высшими временами иерархии ВКР. Примерами произведений содержаний являются символы Похгаммера, прикрепленные к диаграммам Юнга $\lambda$, и их t-деформированные версии:

$$(a)_\lambda = \prod_{(i,j)\in\lambda} (a+j-i) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} (a-i+1)_{\lambda_i}\,, \quad (\mathrm{q};\mathrm{t})_\lambda = \prod_{(i,j)\in\lambda} \left(1-\mathrm{q}\mathrm{t}^{j-i}\right).$$

где $(a)_k := a(a+1)\cdots(a+k-1)$.

Мы также выписываем нижеследующие специализации произведений содержаний, которые могут быть выражены через функции Шура:

$$\prod_{i=1}^{k} ((a_i+N)_\lambda)^{n_i} \prod_{i=1}^{k'} \left((\mathrm{q}_i\mathrm{t}^{N-1};\mathrm{t}_i)_\lambda\right)^{\tilde n_i} = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{s_\lambda(\mathbf{p}(a_i+N))}{s_\lambda(\mathbf{p}_\infty)}\right)^{n_i} \prod_{i=1}^{k'} \left(\frac{s_\lambda(\mathbf{p}(\mathrm{q}_i\mathrm{t}^{N-1};\mathrm{t}_i))}{s_\lambda(\mathbf{p}(0;\mathrm{t}_i))}\right)^{\tilde n_i}.$$

Если мы выбираем произведения содержаний указанным способом, то обе гипергеометрические тау-функции (1.4.1) и (1.4.1) целиком выражаются в терминах функций Шура и, следовательно, в терминах чисел Гурвица и параметров производящей функции.

Введем следующие взвешенные суммы чисел Гурвица:

$$G^{\mathrm{e},k;p}\left(N;d;\Delta^1,\dots,\Delta^k \,\middle|\, \begin{matrix} k_1,\dots,k_p \\ n_1,\dots,n_p \end{matrix}\right) :=$$

$$\sum_{\substack{\lambda \\ |\lambda|=d,\,\ell(\lambda)\le N}} \left(\frac{\dim\lambda}{d!}\right)^{\mathrm{e}} \prod_{i=1}^{k} \varphi_\lambda(\Delta^i) \prod_{i=1}^{p} \tilde\phi_{k_i}(\lambda;n_i).$$

Для достаточно больших $N$ (именно, для $N \geqslant \ell(\lambda)$) это взвешенная сумма чисел Гурвица, пересчитывающая неэквивалентные $d$-листные накрытия (базовой) связной клейновой поверхности эйлеровой характеристики e (не обязательно связными) клейновыми поверхностями с эйлеровой характеристикой

$$\mathrm{e}' = d\mathrm{e} - \sum_i \ell^*(\Delta^{(i)}) - \sum_{j=1}^{p} k_j$$

Как следует из (1.4.1), упомянутые веса зависят от набора $\{n_j\}$.

Обобщенные числа Гурвица генерируются следующим производящим рядом по степеням $k$ переменных $\mathbf{p}^{(i)}$ , $i=1,\dots,k$:

$$F^{\mathrm{e},k;p}\left(\begin{matrix} a_1,\dots,a_p \\ n_1,\dots,n_p \end{matrix} \,\middle|\, \mathbf{p}^{(1)},\dots,\mathbf{p}^{(k)}\right) = \sum_{\substack{\lambda \\ \ell(\lambda)\le N}} (s_\lambda(\mathbf{p}_\infty))^{\mathrm{e}-\sum_{j=1}^p n_j - k} \prod_{j=1}^{p} (s_\lambda(\mathbf{p}(a_j)))^{n_j} \prod_{i=1}^{k} s_\lambda(\mathbf{p}^{(i)}).$$

В этой формуле числа $a_i$ , $i=1,\dots,p$ считаются независимыми параметрами. Правая часть формулы (1.4.1) может быть переписана с помощью символов Похгаммера:

$$F^{\mathrm{e},k;p}\left(\begin{matrix} a_1,\dots,a_p \\ n_1,\dots,n_p \end{matrix} \,\middle|\, \mathbf{p}^{(1)},\dots,\mathbf{p}^{(k)}\right) = \sum_{\substack{\lambda \\ \ell(\lambda)\le N}} \left(\frac{\dim\lambda}{|\lambda|!}\right)^{\mathrm{e}-\sum_{j=1}^p n_j - k} \prod_{j=1}^{p} ((a_j)_\lambda)^{n_j} \prod_{i=1}^{k} s_\lambda(\mathbf{p}^{(i)}).$$

Заметим, что мы имеем

$$\operatorname{Deg} F^{\mathrm{e},k;p} = \mathrm{e}.$$

Введенную гипергеометрическую функцию можно рассматривать как версию некоторого дискретного $\beta$-ансамбля, поскольку сумму по разбиениям можно записать как сумму по конусу $h_1 > \cdots > h_N \geq 0$, $h_m = \lambda_m - m + N, m = 1, \ldots, N$, и затем продолжить выражение под знаком суммы на все попарно несовпадающие неотрицательные значения $h_m$, воспользовавшись антисимметрией функции Шура как функции переменных $h_m, m = 1, \ldots, N$, и заменить сумму по конусу на сумму по всем попарно несовпадающим неотрицательным значениям $h_m$, заработав множитель $1/N!$. Получим

$$F^{\mathrm{e},k;p}\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ n_1, \ldots, n_p \end{matrix}\middle| \mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(k)}\right) = \frac{1}{N!} \sum_{h_1,\ldots,h_N}{}^{'} \prod_{a<b} |h_a - h_b|^{\beta} \prod_{m=1}^{N} (h_m!)^{-\beta} e^{-V_{h_m}} \prod_{i=1}^{k} e^{-U^{(i)}_{h_m}},$$

где $\beta = -\mathrm{e} + \sum_{j=1}^{p} n_j + k$, а $\sum'$ означает суммирование по всем неотрицательным попарно-несовпадающим $h_i, i = 1, \ldots, N$. Введены обозначения:

$$e^{-V_{h_m}} = \prod_{j=1}^{p} \left((a_j - m + 1)_{\lambda_m}\right)^{n_j}, \qquad e^{-U^{(i)}_{h_m}} = s_{(\lambda_m)}(\mathbf{p}^{(i)}), \qquad h_m = \lambda_m - m + N,$$

см. (1.4.1). Далее, пусть $p_j^{(i)} = \mathrm{tr} C_i^j = \sum_{m=1}^{N} e^{j y_m^{(i)}}, i = 1, \ldots, g \leq k$ (здесь $C_i, i = 1, \ldots, g$ – матрицы размера $N \times N$ с набором собственных значений $e^{y_m^{(i)}}, m = 1, \ldots, N$). Тогда

$$F^{\mathrm{e},k;p}\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ n_1, \ldots, n_p \end{matrix}\middle| \mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(k)}\right) =$$

$$\frac{1}{N!} \sum_{h_1,\ldots,h_N}{}^{'} \prod_{a<b}^{N} \frac{|h_a - h_b|^{\beta}}{\prod_{i=1}^{g}\left(e^{y_a^{(i)}} - e^{y_b^{(i)}}\right)} \prod_{m=1}^{N} (h_m!)^{-\beta} e^{-V_{h_m}} \prod_{i=1}^{g} e^{y_m^{(i)} h_m} \prod_{i=g+1}^{k} e^{-U^{(i)}_{h_m}}.$$

Спецификация

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\middle| \mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}\right) := F^{2,2;p+q}\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q \\ 1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1 \end{matrix}\middle| \mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}\right)$$

может рассматриваться как так называемая гипергеометрическая функция матричного аргумента (случай $\mathbb{C}$), (это отождествление (1.4.1) будет верно, только если все $a_i$ различны, иначе формула запишется в более громоздком виде). Случай $q = 0$, который соответствует либо производящей функции чисел Гурвица Гульдена-Джаксона (1.4.1), где $\mathrm{e} = 2$ и $k = 1$ ), либо ее аналогу для иерархии тодовской решетки ((1.4.1), то есть при $\mathrm{e} = 2$ и $k = 2$) представляет особенный интерес, поскольку вместе со своим проективным аналогом

$${}_p\tilde{F}_q\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\middle| \mathbf{p}\right) := F^{1,1;p+q}\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q \\ 1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1 \end{matrix}\middle| \mathbf{p}\right),$$

содержит всю информацию о числах Гурвица, которую только можно получить с помощью интегрируемых систем.

Из написанного выше следует

$$F^{\mathrm{e},k;p}\left(\begin{matrix} a_1,\ldots,a_p \\ n_1,\ldots,n_p \end{matrix}\Big|\, \mathbf{p}^{(1)},\ldots,\mathbf{p}^{(k)}\right) =$$

$$\sum_{d>0} \sum_{\substack{\Delta^1,\ldots,\Delta^k \\ |\Delta^1|=\cdots=|\Delta^k|=d}} \sum_{k_1,\ldots,k_p} G^{\mathrm{e},k;p}\left(N;d;\Delta^1,\ldots,\Delta^k \Big| \begin{matrix} k_1,\ldots,k_p \\ n_1,\ldots,n_p \end{matrix}\right) \prod_{j=1}^{p} a_j^{dn_j-k_j} \prod_{i=1}^{k} \mathbf{p}^{(i)}_{\Delta^i}.$$

Ряды теории возмущений для матричных интегралов являются примерами гипергеометрических функций, порождающих числа Гурвица (1.4.1), (1.4.1) и (1.4.1).

### 1.4.2 Геометрия пространств Гурвица

Пространство Гурвица $\mathcal{H}_{g;\kappa}$ — пространство мероморфных функций степени $k_1+\ldots+k_m=n$ на алгебраических кривых рода $g$ со следующими свойствами:

– каждая мероморфная функция имеет $m$ занумерованных полюсов заданных порядков $k_1,\ldots,k_m$;

– сумма критических значений функции равна нулю.

Здесь и далее через $\kappa$ мы обозначаем набор $k_1,\ldots,k_m$.

Согласно [257] это пространство является гладким комплексным орбиобразием (при $g=0$ или достаточно больших $n$ даже комплексным многообразием). Пусть далее $\mathcal{M}_{g;m}$ — пространство модулей комплексных кривых рода $g$ с $m$ отмеченными точками, тогда пространство $\mathcal{H}_{g;\kappa}$ расслоено над $\mathcal{M}_{g;m}$: каждой функции можно сопоставить кривую ее определения с $m$ отмеченными на ней полюсами.

Через $\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa}$ обозначается пополнение пространства $\mathcal{H}_{g;\kappa}$ состоящее из стабильных мероморфных функций [257], [255], [256]. Послойная проективизация $P\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa}$ расслоения $\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa}$ является компактным комплексным орбиобразием.

Точка ветвления в образе называется невырожденной, если она имеет $n-1$ различных прообразов, один из которых является точкой ветвления кратности 2 (при этом остальные $n-2$ прообраза — точки гладкости накрытия), и вырожденной в противном случае. По формуле Римана–Гурвица общая мероморфная функция степени $n$ на кривой рода $g$ с фиксированными кратностями $k_1,\ldots,k_m$ прообразов бесконечности имеет $n+m+2g-2$ точки невырожденного ветвления. Функции с меньшим количеством точек ветвления в образе образуют дискриминант в пространстве $P\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa}$. Каждой точке ветвления в образе можно сопоставить разбиение $\mu$ числа $n$, представляющее собой неупорядоченный набор кратностей прообразов данной точки.

Замыкание в $P\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa}$ множества функций, имеющих ветвления предписанного типа, будем обозначать через $P\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa;\mu_1;\dots;\mu_l}$, где индекс состоит из рода $g$, кратностей полюсов и набора разбиений кратностей прообразов над конечными точками вырожденного ветвления. Эти подмногообразия называются стратами дискриминанта.

Каждый страт дискриминанта $P\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa;\mu_1;\dots;\mu_l}$ представляет собой комплексное подмногообразие чистой размерности в $P\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa}$, и следовательно, по двойственности Пуанкаре определяет однородный элемент кольца когомологий $H^*(P\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa})$. Будем обозначать его через $\sigma_{g;\kappa;\mu_1;\dots;\mu_l}$,

$$\sigma_{g;\kappa;\mu_1;\dots;\mu_l} = [P\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa;\mu_1;\dots;\mu_l}] \in H^*(P\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa}).$$

Ниже мы иногда будем опускать части разбиений, равные 1 (отвечающие некритическим прообразам), в индексах стратов дискриминанта.

М.Э. Казарян и С.К. Ландо доказали, что введенные когомологические классы удовлетворяют универсальным выражениям, которые выполняются в любом пространстве Гурвица и зависят только от самих разбиений $\mu_1;\dots;\mu_l$. В частности, они выполняются в пространстве Гурвица $\mathcal{H}_{g;\kappa}$ — пространстве мероморфных функций на алгебраической кривой рода $g$ с $m$ отмеченными полюсами кратностей $k_1,\dots,k_m$.

Заметим, что степень страта $\sigma_{\mu_1;\dots;\mu_l}$ в пространстве Гурвица $P\overline{\mathcal{H}}_{g;\kappa}$ с точностью до коэффициента равна степени страта большей коразмерности $\sigma_{\mu_1;\dots;\mu_l;\kappa}$, где $\kappa = (k_1,\dots,k_m) \vdash n$ — разбиение над дополнительным критическим значением в пространстве $P\overline{\mathcal{H}}_{g;1^n}$. Например, вычисление степени каустики $\sigma_{3^1}$ в пространстве Гурвица $P\overline{\mathcal{H}}_{g;1^{n-3}3^1}$ сводится к вычислению степени самопересечения каустики — страта $\sigma_{3^1;3^1}$ — в пространстве Гурвица $P\overline{\mathcal{H}}_{g;1^n}$.

Используя описанный подход, мы получили замкнутые формулы для степеней стратов $\sigma_{0;3^1;\kappa}$ и $\sigma_{0;2^2;\kappa}$ в пространстве $P\overline{\mathcal{H}}_{0;1^n}$.

Теорема 1. Справедливы равенства:

$$\deg \sigma_{\kappa;1^{n-3}3^1} = \frac{n^{m-4}}{|\mathrm{Aut}(\kappa,1^{n-3}3^1)|}\frac{n!}{|\mathrm{Aut}(\kappa)|}\cdot$$
$$\cdot \prod_{i=1}^{m} \frac{k_i^{k_i}}{k_i!}\left(n^2 + \left(3(m-2) - \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{k_i}\right)n + 3\binom{m-2}{2}\right),$$

$$\deg\sigma_{\kappa;1^{n-4}2^2} = \frac{n^{m-4}}{|\mathrm{Aut}(\kappa,1^{n-4}2^2)|}\frac{n!}{|\mathrm{Aut}(\kappa)|}\cdot$$
$$\cdot\prod_{i=1}^{m}\frac{k_i^{k_i}}{k_i!}\left(\frac{1}{2}n^3+(m-5)n^2+\left(\frac{1}{2}(m-2)^2-5(m-2)+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{k_i}\right)n-4\binom{m-2}{2}\right).$$

Кроме того, в качестве следствий мы получаем следующие выражения для серий двойных чисел Гурвица:

Следствие 2. Справедливы равенства

$$h_{0;\kappa;1^{n-3}3^1} = \frac{(n+m-4)!}{|\mathrm{Aut}(\kappa)|}n^{m-4}\prod_{i=1}^{m}\frac{k_i^{k_i}}{k_i!}\left(n^2+\left(3(m-2)-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{k_i}\right)n+3\binom{m-2}{2}\right)$$

и

$$h_{0;\kappa;1^{n-4}2^2} = \frac{(n+m-4)!}{|\mathrm{Aut}(\kappa)|}n^{m-4}\cdot$$
$$\cdot\prod_{i=1}^{m}\frac{k_i^{k_i}}{k_i!}\left(\frac{1}{2}n^3+(m-5)n^2+\left(\frac{1}{2}(m-2)^2-5(m-2)+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{k_i}\right)n-4\binom{m-2}{2}\right)$$

В препринте [254] получены новые рекурсивные формулы для рассматриваемых нами серий двойных чисел Гурвица рода 0. Соберем числа Гурвица $h_{0;\kappa;\nu}$ в производящий ряд:

$$H_\nu^{(0)}(q_1,q_2,\ldots) = \sum_n\sum_{\kappa\vdash n}h_{0;\kappa;\nu(n)}q_\kappa,$$

где разбиение $\nu$ в левой части фиксировано, а разбиение $\nu(n)$ в правой части получается из $\nu$ приписыванием нескольких единиц так, чтобы $|\nu(n)|=|\kappa|$; и если $\kappa=(k_1,\ldots,k_m)$, то $q_k=q_{k_1}\ldots q_{k_m}$. Далее, пусть

$$z_{d,r}(q) = \sum_n\sum_{\kappa\vdash n}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(\lambda)|}\binom{m+r-3}{d}n^{m+r-3-d}\prod_{i=1}^{n}\frac{k_i^{k_i}}{k_i!}q_{k_1}\ldots q_{k_m},$$

тогда, в частности, ряды $H_\nu^{(0)}(q_1,q_2,\ldots)$ полиномиально выражаются через $z_{d,r}$. Например:

$$H_{3^1}^{(0)}(q) = z_{0,1}(q)-\frac{z_{0,1}^2(q)}{2}+3z_{1,1}(q)+2z_{2,1}(q),$$
$$H_{2^2}^{(0)}(q) = -6z_{0,1}(q)+z_{0,1}^2(q)+z_{0,2}(q)-11z_{1,1}(q)+2z_{1,2}(q)-6z_{2,1}(q)+2z_{2,2}(q).$$

Мы показали, что ряды $z_{d,r}(q)$ порождают алгебру со счетным базисом, а именно, что на пространстве рядов $z_{d,r}$ можно корректно определить дифференциальный оператор, позволяющий генерировать тождества между функциями $z_{d,r}$ для различных $d$ и $r$.

Теорема 3. Предположим, что выполняется функциональное равенство $f(z_{d_1,r_1}, z_{d_2,r_2}, \ldots, z_{d_s,r_s}) = 0$ (здесь $f$ — многочлен с рациональными коэффициентами). Тогда выполнено и равенство $Df = 0$, где $D$ — дифференциальный оператор вида $z_{d,r+1}\frac{\partial}{\partial z_{d,r}}$.

Следствие 4. Ряды $z_{d,r}(q)$ при $d \geqslant 1$ и $r \geqslant 2$ полиномиально выражаются через ряды $z_{0,i}(q), i \geqslant 2$.

Следствие 5. Пространство рядов $z_{d,r}$ образует алгебру со счетным базисом $z_{0,i}, z_{i,1}$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

### 1.4.3 Числа Гурвица-Севери

Как известно, числа Гурвица определяются как число классов изоморфизма пар $(\Sigma, f)$, где $\Sigma$ — компактная комплексная кривая, а

$$f : \Sigma \to \mathbb{C}P^1$$

голоморфное отображение с заданным типом особенностей. Две пары $(\Sigma_1, f_1)$, $(\Sigma_2, f_2)$ называются изоморфными, если существует голоморфный диффеоморфизм

$$h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$$

такой, что $f_2 \circ h = f_1$. Тип особенностей функции $f$, также иногда называемый паспортом голоморфной функции, задается набором разбиений $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ числа $n$ — степени отображения $f$. Предположим, разбиение $\lambda_i$ имеет вид $(\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{im_i})$. Говорят, что $f$ имеет особенность данного типа, если она имеет $s$ критических значений, причем прообраз $i$-го из них (для всех $i = 1, \ldots, s$) состоит из $m_i$ критических точек кратностей $\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{im_i}$. При этом "критической точкой кратности 1" условно называется некритическая точка.

Вычисление классического числа Гурвица легко сводится к комбинаторной задаче об умножении перестановок: с точностью до тривиальных множителей число Гурвица равно количеству способов представить единичную перестановку в виде произведения $s$ перестановок (элементов группы $S_n$), имеющих циклические типы $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$. Для произвольного $s$ и набора разбиений $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ решение этой задачи лежит за пределами возможностей современной науки. Хорошо изучен, например, в статье Казаряна и Ландо об алгебро-геометрическом доказательстве гипотезы Виттена, частный случай, когда одно из разбиений ($\lambda_1 = \lambda$) — произвольное, а все остальные имеют вид $2^1 1^{n-2}$, то есть, когда прообраз критического значения состоит из одной критической точки минимальной кратности, и нужного количества некритических точек. И этом случае соответствующее число Гурвица $h_{g,\lambda}$ может быть вычислено быстрым алгоритмом; набор $h_{g,\lambda}$ удовлетворяет ряду тождеств, связанных с теорией интегрируемых систем.

Числа Гурвица-Севери имееют более сложное описание и устройство. Для их определения необходимо ввести понятие многообразия Севери. Взяв точку $p \in CP^2$; определим многообразие Севери $W_{g,d,\ell}$ как множество неприводимых приведенных плоских нодальных кривых степени $d+\ell$ и рода $g$, имеющих $\ell$-кратный узел в точке $p$ и таких, что все остальные узлы их простые. Такое множество непусто если, и только если

$$g \leq \left( \begin{array}{c} d+\ell-1 \\ 2 \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \ell \\ 2 \end{array} \right)$$

На многообразии Севери действует (локально свободно) трехмерная группа $G \subset PGL(3,C)$ проективных преобразований плоскости, сохраняющих точку $p$ и все проходящие через нее прямые. Пространство орбит $W_{g,d,\ell}/G$ – гладкое почти всюду многообразие размерности $3d + 2\ell + g - 4$.

Обозначим $\kappa : NC \to C$ отображение нормализации кривой $C$ и рассмотрим на каждой кривой $C$ мероморфную функцию

$$\alpha_C = \pi_p \circ \kappa : NC \to p^\perp \; CP^1,$$

где $p^\perp$ — множество прямых в $CP^2$, проходящих через точку $p$, а $\pi_p$ сопоставляет произвольной точке $x \neq p$ прямую $(px)$.

Кривая $C$ общего положения имеет $\ell$ различных касательных в точке $p$ ("локальные касательные") и $2d + 2g - 2$ различных прямых, проходящих через $p$ и касающихся $C$ в точке $q \neq p$ ("удаленные касательные"). Кроме того, кривая $C$ имеет

$$\binom{d+\ell-1}{2} - \binom{\ell}{2} - g = \binom{d-1}{2} + \ell(d-1) - g \geq 0$$

простых узлов вне точки $p$. Таким образом, для кривой определены три дивизора на $p^\perp$ — дивизор локальных касательных, дивизор удаленных касательных и дивизор прямых, проходящих через $p$ и еще один узел. Эти дивизоры инвариантны при действии группы $G$; второй из них совпадает с дивизором критических значений функции $\alpha$.

Тройка значений $(g,d,\ell)$ называется гибкой, если $\dim W_{g,d,\ell}/G \geq 2d + 2g - 2 + \ell$ (размерность $W/G$ больше общего количества касательных через точку $p$), то есть $d + \ell \geq g + 2$. Тройка называется полужесткой, если $\dim W_{g,d,\ell}/G < 2d + 2g - 2 + \ell$ (тройка не гибкая), но $\dim W_{g,d,\ell}/G \geq 2d+2g-2$ (размерность больше числа удаленных касательных), то есть $d + \ell < g + 2 \leq d + 2\ell$. В остальных случаях тройка называется жесткой.

Число Гурвица–Севери плоских кривых $\mathfrak{H}_{g,d,\ell}$ было впервые введено в частном случае Онгаро и Б. Шапиро, а в общем случае, позднее, — в работе Ю. Бурмана и Б. Шапиро в рамках исследований нашей лаборатории. Оно определяется как количество классов изоморфизма пар $(\Sigma,f)$, где $\Sigma \subset CP^2$ — плоская кривая, а

$$f : \Sigma \to CP^1$$

проекция кривой $\Sigma$ из точки $p \in CP^2$, имеющая данные особенности. При определении типа особенности, в отличие от классического случая, нужно рассматривать не только критические точки функции $f$, соответствующие касательным к кривой $\Sigma$, проведенным через центр проекции $p$, но и узлы кривой $\Sigma$. Кроме того, центру проекции $p$ разрешается лежать на кривой, в том числе и в узле произвольной кратности, а при определении типа особенности следует различать касательные к кривой в точке $p$ и касательные, проходящие через $p$, но касающиеся кривой в другой точке. Для полного и корректного определения чисел Гурвица-Севери жесткий, полужесткий и гибкий случаи приходится рассматривать отдельно.

Числом Гурвица–Севери гибкой тройки $(g,d,\ell)$ называется число орбит в $W_{g,d,\ell}/G$, для которых дивизоры удаленных и локальных кривых принимают заранее заданное значение, и заранее заданный набор прямых (количество которых определяется соображениями размерности), проходящих через $p$, содержит узлы кривой. Для полужесткого случая число Гурвица–Севери определяется как число орбит, у которых дивизор удаленных касательных принимает заданное значение, и заранее заданный набор кривых (число определяется размерностью) состоит из локальных касательными. Для жестких троек число Гурвица–Севери это число орбит, для которых заранее заданный набор прямых (число определяется размерностью) состоит из удаленных касательных.

Основные два результата по числам Гурвица-Севери полученные нами имеют следующий вид:

Пусть $(g,d,\ell)$ — гибкая тройка. Тогда число Гурвица–Севери равно

$$\binom{d}{2}^{d+\ell-g-2} d^\ell h_{g,1^d}/d!,$$

где $h_{g,1^d}$ — число Гурвица, т.е. число рациональных функций на кривой рода $g$ с заданным набором из $d$ простых критических значений.

Пусть $(g,d,\ell)$ — полужесткая тройка. Тогда число Гурвица–Севери равно

$$d^{d+2\ell-g-2}\binom{2g-d-\ell-1}{g-3}h_{g,1^d}/d!.$$

Жесткий случай пока остается малоисследованным.

### 1.5 Инварианты графов

Продолжались работы по исследованию инвариантов графов. Обозначим через $W_G$ симметризованный хроматический многочлен Стенли графа $G$. Этот многочлен является обобщением обычного хроматического многочлена графа. Он зависит от переменных $q_1,q_2,\dots$ (на самом деле, для графа с $n$ вершинами он зависит лишь от первых $n$ переменных $q_1,\dots,q_n$). Рассмотрим результат усреднения инварианта $W$:

$$\mathcal{W}(q_1,q_2,\dots)=\sum_G\frac{W_G}{|\mathrm{Aut}(G)|}$$

здесь суммирование идет по всем простым графам $|G|$, а через $|\mathrm{Aut}(G)|$ обозначен порядок группы автоморфизмов графа $G$.

Одним из основных результатов работы в 2017 г. явилось доказательство следующего утверждения:

После подходящего перешкалирования переменных $q_i = c_ip_i$ $i = 1,2,\dots$ для некоторых положительных констант $c_i$, функция $\mathcal{W}$ становит- ся формальной $\tau$-функцией интегрируемой системы Кадомцева-Петвиашвили дифференциальных уравнений в частных производных.

Как следствие получаем, что логарифм $\log\mathcal{W}$ функции $\mathcal{W}$ после того же перешкалирования переменных становится формальным решением интегрируемой системы Кадомцева-Петвиашвили.

Отметим, что логарифм функции $\mathcal{W}$ представляется такой же суммой, что и сама функция $\mathcal{W}$, только суммирование ведется по всем связным графам. Как мы установили, сформулированная выше теорема является частным случаем аналогичной теоремы, справедливой для произвольного инварианта графов со значениями в кольце многочленов $\mathbb{C}[q_1,q_2,\dots]$, являющегося гомоморфизмом градуированных алгебр Хопфа. Насколько нам известно, эти утверждения носят оригинальный характер — впервые установлена связь нелокальных инвариантов графов и структуры алгебры Хопфа с интегрируемыми системами. В настоящее время работа в данном направлении продолжается, и мы предпринимаем попытки найти другие проявления этой связи и обобщить полученные результаты.

## 1.6 Симметрии разностного уравнения Хироты

### 1.6.1 Введение

Разностное уравнение Хироты было введено в билинейной форме (HBDE) как уравнение на $\tau$-функцию в [74, 75],

$$\tau^{(1)}(n)\tau^{(2,3)}(n) + \tau^{(2)}(n)\tau^{(3,1)}(n) + \tau^{(3)}(n)\tau^{(1,2)}(n) = 0,$$

где $\tau(n) = \tau(n_1,n_2,n_3)$ – функция 3 целых чисел (независимых переменных) $n_1,n_2,n_3 \in \mathbb{Z}$. Здесь и ниже верхние индексы 1, 2, 3 в скобках означают единичные сдвиги $\tau^{(i)}(n) = \tau(n)|_{n_i \to n_i+1}$, матрица $\tau^{(i,j)}$ антисимметрична и $\tau^{(i,j)}(n) = \tau(n)_{n_i \to n_i+1, n_j \to n_j+1}$ при $1 \leqslant i < j \leqslant 3$. HBDE широко обсуждается в литературе, поскольку, как известно, оно порождает многие интегрируемые разностные и дифференциальные уравнения, такие как уравнение Кадомцева–Петвиашвили (KP), модифицированное уравнение Кадомцева–Петвиашвили, уравнение двумеризованной цепочки Тоды, уравнение sine-Гордон, Бенжамина–Оно и т.д. Благодаря этому уравнение HDE часто рассматривается как фундаментальная интегрируемая система.

Это уравнение возникает также как модельно-независимое функциональное соотношение для собственных значений квантовой трансфер-матрицы. Детальное обсуждение результатов, связанных с этим уравнением дано в [76, 77], см. также приведенную там литературу. Октохедральная структура HDE рассмотрена в [78]. Его эллиптические решения были рассмотрены в [79]. В [80] разностное уравнение Хироты названо обобщенной иерархией КП. Некоторые близкие уравнения выведены в [81].

Здесь мы используем форму разностного уравнения Хироты, которая удобна и естественна для метода обратной задачи рассеяния, но отлична от HBDE в (1.6.1). Введем “полевую переменную,” т.е. функцию $v(n) = v(n_1,n_2,n_3)$ заданную посредством равенств

$$v^{(1)}(n) - v^{(3)}(n) = \frac{\tau^{(3,1)}(n)\tau(n)}{\tau^{(1)}(n)\tau^{(3)}(n)}, \qquad v^{(2)}(n) - v^{(1)}(n) = \frac{\tau^{(1,2)}(n)\tau(n)}{\tau^{(2)}(n)\tau^{(1)}(n)},$$

где по аналогии с предыдущим использовано обозначение

$$v^{(1)}(n)=v(n_1+1,n_2,n_3),\qquad v^{(2)}(n)=v(n_1,n_2+1,n_3),\ \text{etc.},$$
$$v^{(11)}(n)=v(n_1+2,n_2,n_3),\qquad v^{(12)}(n)=v(n_1+1,n_2+1,n_3),\ \text{etc.},$$

но в отличие от $\tau^{(i,j)}$ матрица $v^{(i,j)}$ симметрична. Суммируя уравнения в (1.6.1), мы получаем в силу (1.6.1)

$$v^{(3)}(n)-v^{(2)}(n)=\frac{\tau^{(2,3)}(n)\tau(n)}{\tau^{(2)}(n)\tau^{(3)}(n)}.$$

Заметим, что все эти три уравнения получаются последовательно циклической перестановкой индексов $\{1,2,3\}$. Теперь по (1.6.1) имеем, что $(v^{(2)}-v^{(1)})^{(3)}(v^{(3)}-v^{(1)})=(v^{(3)}-v^{(1)})^{(2)}(v^{(2)}-v^{(1)})$, или

$$v^{(12)}(v^{(2)}-v^{(1)})+v^{(23)}(v^{(3)}-v^{(2)})+v^{(31)}(v^{(1)}-v^{(3)})=0,$$

что и является той формой разностного уравнения Хироты (HDE), которая используется в дальнейшем. Как известно (см., напр., [76]) это уравнение есть условие совместности для пары Лакса, данной любыми двумя уравнениями из следующих трех:

$$\varphi^{(i)}=\varphi^{(j)}+\bigl(v^{(i)}-v^{(j)}\bigr)\varphi,\quad i,j=1,2,3.$$

Имеет смысл отметить, что в силу рациональной зависимости правых частей (1.6.1) и (1.6.1) от $\tau$, уравнения (1.6.1) и (1.6.1) описывают разные классы решений, см. [82]. Например, первое из них не имеет решений таких, что некоторые из разностей в левых частях исчезают при некоторых $n$. С другой стороны, уравнение (1.6.1) плохо определено так, как оно есть: любая функция $v(n)$, такая что

$$v^{(i)}=v^{(j)}\ \text{для}\ i\neq j$$

удовлетворяет этому уравнению. Ниже мы выведем дополнительные условия, которые разрешают эту проблему.

Здесь уравнение HDE используется для демонстрации общего подхода к построению симметрий интегрируемых уравнений. В [82] было показано, что HDE может быть выведено как одевание коммутаторного тождества на ассоциативной алгебре. Точнее, пусть дана некоторая ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Зафиксируем некоторые комплексные, взаимно различные параметры $a_1$, $a_2$ и $a_3$. Легко видеть, что для произвольной пары $A$, $B$ элементов этой алгебры, таких что в ней существуют $(A-a_1)^{-1}$, $(A-a_2)^{-1}$ и $(A-a_3)^{-1}$, мы имеем следующее тождество:

$$a_{12}\big\{(A-a_1)(A-a_2)B(A-a_1)^{-1}(A-a_2)^{-1}+(A-a_3)B(A-a_3)^{-1}\big\}+$$
$$+\operatorname{cycle}(1,2,3)=0,$$

где

$$a_{ij}=a_i-a_j,\quad a_i\neq a_j\quad \text{при}\quad i\neq j.$$

Ввиду взаимной коммутатитвности элементов $A-a_i$, можно ввести зависимость $B$ от дискретных "времен" $n_i\in\mathbb{Z}$, $i=1,2,3$, посредством уравнений:

$$B(n_1,n_2,n_3)=\left(\prod_{i=1}^{3}(A-a_i)^{n_i}\right)B\left(\prod_{i=1}^{3}(A-a_i)^{n_i}\right)^{-1}.$$

Обозначая для краткости $B(n)=B(n_1,n_2,n_3)$ и используя обозначения типа (1.6.1) и (1.6.1), получаем, что $B(n)$ удовлетворяет в силу (1.6.1) следующему разностному уравнению:

$$a_{12}\big\{B^{(12)}+B^{(3)}\big\}+\operatorname{cycle}(1,2,3)=0,$$

что есть линеаризованная версия HDE (1.6.1), как объясняется ниже после (1.6.2). В [82] была введена специальная процедура одевания, позволившая провести такую "делинеаризацию" уравнения (1.6.1). Там же был описан вывод из HDE посредством предельных процедур дифференциальных и разностно-дифференциальных интегрируемых уравнений. Прямая и обратная задачи для HDE были рассмотрены в [83]. Здесь наше построение основано на абелевой версии HDE для простоты. См. [84], где дано аналогичное рассмотрение для неабелева HDE.

### 1.6.2 Процедура одевания

Для введения процедуры одевания фиксируем представление ассоциативной алгебры. Мы реализуем ее как множество операторов $F$, $G$, и т.д., заданных своими символами $\widetilde{F}(n_1,z)$, $\widetilde{G}(n_1,z)$, и т.д., являющимися функциями от дискретной переменной $n_1\in\mathbb{Z}$ и $z\in\mathbb{C}$. Предположим, что эти символы обладают преобразованием Фурье

$$\widetilde{F}(n_1,z)=\oint\limits_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{2\pi i\zeta}\zeta^{n_1}f(\zeta,z),$$

где $f(\zeta,z)$ – функция (распределение) от своих переменных, $\zeta,z\in\mathbb{C}$, $|\zeta|=1$. Обозначения типа $f(\zeta,z)$ не означают, что предположены какие-либо свойства аналитичности символов по отношению к переменной $z$. Так что существует нетривиальная операция

$\overline{\partial}$-дифференцирования на этом множестве операторов, т.е. каждому оператору $F$ сопоставляется оператор $\overline{\partial}F$ с символом

$$\widetilde{(\overline{\partial}F)}(n_1,z)=\frac{\partial\widetilde{F}(n_1,z)}{\partial\overline{z}},$$

где производная понимается в смысле распределения. На этом пространстве операторов мы определяем произведение

$$\widetilde{(FG)}(n_1,z)=\oint\limits_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{2\pi i\zeta}\widetilde{F}(n_1,z\zeta)\sum_{m_1\in\mathbb{Z}}\zeta^{n_1-m_1}\widetilde{G}(m_1,z),$$

если интеграл существует. Легко проверить ассоциативность этого закона композиции.

В качестве простейших примеров рассмотрим единичный оператор и оператор сдвига. Символ единичного (в смысле композиции (1.6.2)) оператора равен 1, а символ оператора $T$, который сдвигает переменную $n_1$, равен

$$\widetilde{T}(n_1,z)=z,$$

так что по (1.6.2) для любого $F$:

$$\widetilde{(TF)}(n,z)=z\widetilde{F^{(1)}}(n,z),\quad \widetilde{(FT^{-1})}(n,z)=\frac{1}{z}\widetilde{F}(n,z),$$
$$\widetilde{(TFT^{-1})}(n,z)=\widetilde{F^{(1)}}(n,z),$$

где было использовано обозначение (1.6.1). Мы видим, что символ оператора $T$ аналитичен, так что по (1.6.2)

$$\overline{\partial}T=0,$$

что крайне существенно для последующего построения. Легко видеть, что любой оператор $F$ с символом $\widetilde{F}(n,z)=f(|z|)$, т.е. независящим от $n_1$ и $\arg z$, коммутирует с произвольным оператором в смысле композиции (1.6.2).

Пусть теперь элемент $B$ в (1.6.1) – оператор в этом классе, т.е. задается символом

$$\widetilde{B}(n_1,z)=\oint\limits_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{2\pi i\zeta}\zeta^{n_1}b(\zeta,z),$$

с некоторой функцией $b(\zeta,z)$, ср. (1.6.2). Сравнение равенств (1.6.1) и (1.6.2) показывает, что естественно положить

$$A=T_1+a_1,\quad \text{i.e.}\quad \widetilde{A}(n,z)=z_1+a_1,$$

так что шифт $n_1$ в (1.6.1) (см. обозначение (1.6.1)) дает

$$B^{(1)} = TBT^{-1},$$

справедливое для произвольного оператора в силу (1.6.2). Специфическим для $B$ является зависимость от дискретных переменных $n_2$ и $n_3$, данная посредством (1.6.1) и (1.6.2):

$$B^{(2)}(n_2,n_3) \equiv B(n_2+1,n_3) = (T+a_{12})B(n_2,n_3)(T+a_{12})^{-1},$$

$$B^{(3)}(n_2,n_3) \equiv B(n_2,n_3+1) = (T+a_{13})B(n_2,n_3)(T+a_{13})^{-1}.$$

В дальнейшем мы обозначаем $B(n)$, а символ как $\widetilde{B}(n_1,n_2,n_3,z)$ ($\widetilde{B}(n,z)$ для краткости). Для операторов, символы которых зависят от всех трех дискретных переменных закон композиции (1.6.2) принимает вид

$$\widetilde{(FG)}(n,z) = \oint\limits_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{2\pi i\zeta} \widetilde{F}(n,z\zeta) \sum_{m_1\in\mathbb{Z}} \zeta^{n_1-m_1} \widetilde{G}(m_1,n_2,n_3,z).$$

В силу этого уравнения, а также (1.6.2), (1.6.2) и (1.6.2) символ оператора $B(n)$ равен

$$\widetilde{B}(n,z) = \oint\limits_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{2\pi i\zeta} \zeta^{n_1} \left(\frac{z\zeta + a_{12}}{z+a_{12}}\right)^{n_2} \left(\frac{z\zeta + a_{13}}{z+a_{13}}\right)^{n_3} b(\zeta,z).$$

Естественно исключить его экспоненциальный рост по $n_2$ и $n_3$. Так что мы накладываем условия $|z\zeta + a_{12}| = |z+a_{12}|$, $|z\zeta + a_{13}| = |z+a_{13}|$, которые эквивалентны либо $\zeta = 1$, либо $\overline{z}/z = \zeta\overline{a}_{12}/a_{12} = \zeta\overline{a}_{13}/a_{13}$. Первое условие приводит к тривиальному постоянному оператору по (1.6.2), так что мы рассмотрим только второе. В силу его: $\overline{a}_{12}/a_{12} = \overline{a}_{13}/a_{13}$, а тогда (сдвигая фазу $z$, если необходимо) мы можем выбрать все $a_j$ вещественными. Это означает, что функция $b(\zeta,z)$ имеет носитель на поверхности $\zeta = \overline{z}/z$. В простейшем случае $b(\zeta,z) = \delta_c(\zeta z/\overline{z})\widetilde{R}(z)$, где $\delta_c$ – $\delta$-функция на единичной окружности и $\widetilde{R}(z)$ – произвольная функция от $z \in \mathbb{C}$. Таким образом представление (1.6.2) для символа $B$ имеет вид

$$\widetilde{B}(n,z) = \left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^{n_1} \left(\frac{\overline{z}+a_{12}}{z+a_{12}}\right)^{n_2} \left(\frac{\overline{z}+a_{13}}{z+a_{13}}\right)^{n_3} \widetilde{R}(z).$$

Принимая во внимание свойства зависящего от $n$ множителя, естественно наложить условие, что $\widetilde{R}(\overline{z}) = \overline{\widetilde{R}(z)}$. Тогда также $\widetilde{B}(n,\overline{z}) = \overline{\widetilde{B}(n,z)}$. В общем случае функция $b(\zeta,z)$ в (1.6.2) может быть пропорциональна конечной сумме производных $\delta_c(\zeta)$, что мы не рассматриваем здесь, чтобы избежать асимптотического роста $\widetilde{B}(n,z)$ по $n$.

Процедура одевания основана на построении одевающего оператора $K(n)$ посредством $\overline{\partial}$-проблемы

$$\overline{\partial}K(n) = K(n)B(n), \qquad \lim_{z\to\infty}\widetilde{K}(n,z) = 1,$$

где $\widetilde{K}(n,z)$ – символ оператора $K(n)$. Эволюции (1.6.2)–(1.6.2) порождают эволюции оператора одевания: $\overline{\partial}K^{(j)}(n) = K^{(j)}(n)B^{(j)}(n)$, где использовано обозначение (1.6.1) для $K(n)$. Для описания этих сдвигов необходимо уточнить асимптотическое условие (1.6.2), предполагая разложение

$$\widetilde{K}(n,z) = \sum_{j=0}^{M} k_j(n)z^{-j} + o(z^{-M}), \qquad z\to\infty, \qquad k_0(n)\equiv 1,$$

где $M$ – некоторое конечное положительное число и функции $k_j(n)$ не зависят от $z$, т.е. являются операторами, совпадающими со своими символами. В силу (1.6.2) и (1.6.2)–(1.6.2) имеем $\overline{\partial}K^{(j)}(T+a_{1j}) = K^{(j)}(T+a_{1j})B$, ($j = 1,2,3$, где $a_{11} = 0$ по (1.6.1)). Таким образом, $K^{(j)}(T+a_{1j})$ для любого $j = 1,2,3$ удовлетворяет тому же уравнению, что и в (1.6.2), но его символ растет линейно на $z$-бесконечности. Предполагая однозначную разрешимость задачи (1.6.2), видим, что существуют операторы $P_j$ с символами, которые являются целыми функциями от $z$, такими что $K^{(j)}(T+a_{1j}) = P_jK$. Асимптотическое разложение (1.6.2) показывает, что символы $\widetilde{P}_j(n,z)$ суть полиномы первого порядка по $z$. Их коэффициенты находятся из последнего равенства и (1.6.2). Так $P_1 = T$, так что $K^{(1)} = TKT^{-1}$, как и должно быть для любого рассматриваемого оператора. Но результаты сдвигов по второй и третьей дискретным переменным менее тривиальны:

$$K^{(2)}(T+a_{12}) = K^{(1)}T + \big[u^{(2)} - u^{(1)} + a_{12}\big]K,$$
$$K^{(3)}(T+a_{13}) = K^{(1)}T + \big[u^{(3)} - u^{(1)} + a_{13}\big]K,$$

где для простоты мы овозначили

$$u = k_1$$

(см. (1.6.2)), так что мы рассматриваем $u$ как оператор с символом $\widetilde{u}(n,z) = u(n)$. Уравнения (1.6.2) и (1.6.2) являются одетыми версиями уравнений

$$B^{(2)}(T+a_{12}) = B^{(1)}T + a_{12}B, \qquad B^{(3)}(T+a_{13}) = B^{(1)}T + a_{13}B,$$

которые следуют из (1.6.2)–(1.6.2). По построению эволюции оператора $K$ по дискретным “временам” совместны и совместность уравнений (1.6.2) и (1.6.2) дает:

$$u^{(12)}(u^{(2)}-u^{(1)}+a_{12})+a_{12}u^{(3)}+\text{cycle}(1{,}2{,}3)=0,$$

что дает разностное уравнение Хироты на функцию $u=u(n_1,n_2,n_3)$. Понятно, что (1.6.1) – линеарезация этого уравнения.

Подстановка разложения (1.6.2) в (1.6.2) и (1.6.2) определяет коэффициенты $k_j$ этого разложения. Таким способом мы получаем

$$\begin{aligned}k_{j+1}^{(2)}+a_{12}k_j^{(2)}&=k_{j+1}^{(1)}+(u^{(2)}-u^{(1)}+a_{12})k_j,\\ k_{j+1}^{(3)}+a_{13}k_j^{(3)}&=k_{j+1}^{(1)}+(u^{(3)}-u^{(1)}+a_{13})k_j,\quad j\geqslant 0.\end{aligned}$$

В частности:

$$\begin{aligned}k_2^{(2)}-k_2^{(1)}&=(u^{(2)}-u^{(1)})u-a_{12}(u^{(2)}-u),\\ k_2^{(3)}-k_2^{(1)}&=(u^{(3)}-u^{(1)})u-a_{13}(u^{(3)}-u),\\ k_3^{(2)}-k_3^{(1)}&=-a_{12}k_2^{(2)}+(u^{(2)}-u^{(1)}+a_{12})k_2,\\ k_3^{(3)}-k_3^{(1)}&=-a_{13}k_2^{(3)}+(u^{(3)}-u^{(1)}+a_{13})k_2.\end{aligned}$$

Эти соотношения нелокальны и требуют предположений об асимптотическом поведении коэффициентов $k_j(n)$ по $n$ для однозначной разрешимости.

Для ипрощения предыдущих соотношений введем решения Йоста посредством

$$\varphi(n,z)=z^{n_1}(z+a_{12})^{n_2}(z+a_{13})^{n_3}\widetilde{K}(n,z),$$

Тогда равенства (1.6.2) и (1.6.2) для пары Лакса запишутся как

$$\begin{aligned}\varphi^{(2)}&=\varphi^{(1)}+\bigl(u^{(2)}-u^{(1)}+a_{12}\bigr)\varphi,\\ \varphi^{(3)}&=\varphi^{(1)}+\bigl(u^{(3)}-u^{(1)}+a_{13}\bigr)\varphi.\end{aligned}$$

Отметим также, что разность этих уравнений дает равенство

$$\varphi^{(3)}=\varphi^{(2)}+\bigl(u^{(3)}-u^{(2)}+a_{23}\bigr)\varphi,$$

которое симметрично по отношению к предыдущим. Таким образом любые два из этих уравнений могут быть взяты в качестве пары Лакса. Заменим зависимую переменную:

$$v(n)=u(n)-a_1n_1-a_2n_2-a_3n_3,$$

где по построению $u(n) \to 0$, когда $n \to \infty$. Тогда по (1.6.1) и (1.6.1) $v^{(i)} - v^{(j)} = u^{(i)} - u^{(j)} + a_{ji}$, так что по (1.6.2) мы имеем HDE (1.6.1) и его лаксову пару (1.6.1), как следует из (1.6.2) и (1.6.2)– (1.6.2). Более того, условие (1.6.1) и асимптотическое поведение $v(n)$ в (1.6.2) разрешает проблему некорректности задачи (1.6.1).

### 1.6.3 Непрерывные симметрии разностного уравнения Хироты

В случае, когда рассматриваемое нелинейное уравнение интегрируемо, т.е. обладает нетривиальной парой Лакса, построение симметрий этого уравнения эквивалентно построению здесь лаксовой пары (1.6.2), (1.6.2). Ввиду существования обратной задачи, такая процедура, будучи крайне сложной сама по себе, может быть заменена следующими двумя шагами. Принимая во внимание, что пара Лакса (1.6.2), (1.6.2) (или, точнее говоря, (1.6.2), (1.6.2)) возникла в результате одевания "голой" пары (1.6.2), начнем с построения симметрий уравнения (1.6.2). Тогда симметрии самого уравнения HDE будут следовать из процедуры одевания, т.е. из обратной задачи (1.6.2). В силу (1.6.2)–(1.6.2) простейший набор симметрий пары (1.6.2) дается операторами, которые коммутируют с оператором $T$, т.е. функциями от самого этого оператора. Явно, мы вводим зависимость оператора $B$ от новой (непрерывной) перемнной $t$ посредством соотношения

$$B_t(n,t) = [W, B(n,t)],$$

где символ оператора $W$ равен $\widetilde{W}(n,z) = w(z)$, будучи мероморфной функцией от $z$. В силу закона композиции (1.6.2) любой такой оператор коммутирует с оператором $T$, так что благодаря (1.6.2)–(1.6.2):

$$(B_t)^{(j)} = (B^{(j)})_t,$$

где скобки означают порядок операций. Более того, пусть дан оператор $W'$ того же типа. введем зависимость от $t'$ по аналогии с (1.6.3). Тогда $[W,W'] = 0$ и эти симметрии коммутируют: $\partial_{t'}\partial_t B(n,t,t') = \partial_{t'}\partial_t B(n,t,t')$. В терминах символов, мы в силу (1.6.2) имеем

$$\widetilde{B}(n,t,z) = \oint\limits_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{2\pi i\zeta} \zeta^{m_1} \left(\frac{z\zeta + a_{12}}{z + a_{12}}\right)^{m_2} \left(\frac{z\zeta + a_{13}}{z + a_{13}}\right)^{m_3} e^{t(w(z\zeta) - w(z))} b(\zeta,z),$$

что сохраняет форму $\widetilde{B}$, переопределяя лишь $b(\zeta,z)$. Наш следующий шаг – определить одевающий оператор по (1.6.2), так что $\overline{\partial} K_t(n,t) = K_t(n,t)B(n,t) + K(n,t)B_t(n,t)$, или в силу (1.6.3):

$$\overline{\partial} K_t(n,t) + K(n,t)B(n,t)W = \big(K_{t_n}(n,t) + K(n,t)W\big)B(n,t).$$

Ниже мы рассмотрим специальные случаи таких симметрий, допускающих интегрирование этого уравнения в силу (1.6.2).

#### 1.6.3.1 Симметрии типа КП

Этот набор симметрий порождается простейшим выбором оператор $W$ в (1.6.3): $w(z) = z, z^2, \ldots$. Иными словами, мы вводим зависимость оператора $B$ от времен $t_1, t_2, \ldots$ посредством уравнений $B_{t_m} = [T^m, B]$, $m = 1,2,\ldots$, и определяем зависимость одевающего оператора от этих времен посредством (1.6.3): $\overline{\partial} K_{t_m} + KBT^m = (K_{t_m} + KT^m)B$. Благодаря (1.6.2) это уравнение эквивалентно

$$\overline{\partial}\big(K_{t_m} + KT^m\big) = \big(K_{t_m} + KT^m\big)B.$$

Мы видим, что сумма $K_{t_m} + KT^m$ удовлетворяет тому же $\overline{\partial}$-уравнению, что и в (1.6.2), но с другим (полиномиальным по $z$) асимптотическим поведением символа на $z$-бесконечности. Итак, для любого $m$ существует оператор $P_m$, такой что $\overline{\partial} P_m = 0$ и

$$K_{t_m} + KT^m = P_m K.$$

Предполагая дифференцируемость асимптотики в (1.6.2), видим, что символ $\widetilde{P}_m(n,t,z)$ – полином $m$-ой степени по $z$,

$$P_m = \sum_{j=0}^{m} p_{m,j} T^j,$$

где символы $\widetilde{p}_{m,j}(n,t)$ зависят от $n$ и $t$, но не от $z$. Коэффициенты $p_{m,j}$ этого полинома определяются (по аналогии со стандартной процедурой одевания Захарова–Шабата, [87]) равенством

$$(\widetilde{K}(n,t,z)z^m)_+ = \big((\widetilde{P_m K})(n,t,z)\big)_+,$$

где $+$ означает полиномиальную по $z$ часть символа операторов.

При подстановке (1.6.2), где теперь коэффициенты $k_j$ зависят от $t_n$, в (1.6.3.1) мы получаем рекурсионные соотношения для коэффициентов в (1.6.3.1):

$$k_{m-m'} = \sum_{i=m'}^{m} p_{m,i} k_{i-m'}^{(1\times i)},$$

где $k_m^{(1\times i)}(n_1,n_2,n_3,t) = k_m(n_1+i,n_2,n_3,t)$ в соответствии с (1.6.1). В частности,

$$p_{m,m}(t,n,z) \equiv 1$$

и для трех младших симметрий мы имеем явно:

$$\begin{aligned}
P_1 &= T + k_1 - k_1^{(1)} \equiv T + u - u^{(1)},\\
P_2 &= T^2 + (k_1 - k_1^{(11)})T + k_2 - k_2^{(11)} - (k_1 - k_1^{(11)})k_1^{(1)},\\
P_3 &= T^3 + (k_1 - k_1^{(111)})T^2 + (k_2 - k_2^{(111)} - (k_1 - k_1^{(111)})k_1^{(11)})T+\\
&\quad + k_3 - k_3^{(111)} - (k_2 - k_2^{(111)} - (k_1 - k_1^{(111)})k_1^{(11)})k_1^{(1)} + (k_1^{(111)} - k_1)k_2^{(11)},
\end{aligned}$$

где для верхних индексов в скобках использовано обозначение из (1.6.1), (1.6.1).

Заметим, что действие первой симметрии на оператор одевания дается в терминах зависимой переменной $u$ уравнения HDE (1.6.2):

$$K_{t_1} = (K^{(1)} - K)T + (u - u^{(1)})K,$$

но действие этой симметрии на само $u = k_1$ включает в себя $k_2$. Действительно, по (1.6.2) $1/z$-член в (1.6.3.1) дает

$$\begin{aligned}
u_{t_1} &= k_2^{(1)} - k_2 - (u^{(1)} - u)u.\\
k_{2,t_1} &= k_3^{(1)} - k_3 - (u^{(1)} - u)k_2,
\end{aligned}$$

и так далее. Коэффициент $k_2$ в (1.6.2) дается по (1.6.2), (1.6.2), так что действие этой симметрии на $u$ нелокально.

Коэффициенты полиномов (1.6.3.1)–(1.6.3.1) принимают намного более простую форму, если их выразить в терминах $u$ и его производных по $t_m$. Так, для второй симметрии, т.е. (1.6.3.1) при $m=2$, мы получаем по (1.6.3.1) и $t_1$-производной (1.6.3.1): $K_{t_2} - K_{t_1t_1} = (P_2 - P_1^2 - P_{1,t_1})K + 2K_{t_1}T$. Но благодаря (1.6.3.1) и (1.6.3.1), (1.6.3.1) имеем: $P_2 - P_1^2 - P_{1,t_1} = -2u_{t_1}$, так что

$$K_{t_2} - K_{t_1t_1} - 2K_{t_1}T = -2u_{t_1}K.$$

Далее, в силу (1.6.3.1) можно вывести, что

$$\begin{aligned}
K_{t_3} - K_{t_1t_1t_1} = (P_3 - P_1^3 - 2P_{1,t_1}P_1 - P_1P_{1,t_1} - P_{1,t_1t_1})K+\\
+ 3(P_1K)_{t_1}T.
\end{aligned}$$

Для упрощения правой части мы используем (1.6.3.1) и (1.6.3.1), что позволяет получить

$$
\begin{aligned}
&k_2 - k_2^{(111)} - (k_1 - k_1^{(111)})k_1^{(11)} = -(u + u^{(1)} + u^{(11)})_{t_1} + \\
&\qquad + (u^{(11)} - u^{(1)})^2 + (u^{(1)} - u)(u^{(11)} - u), \\
&k_3^{(111)} - k_3 = (k_2 + k_2^{(1)} + k_2^{(11)})_{t_1} + \\
&\qquad + (u^{(1)} - u)k_2 + (u^{(11)} - u^{(1)})k_2^{(1)} + (u^{(111)} - u^{(11)})k_2^{(11)},
\end{aligned}
$$

и что дает окончательно

$$
P_3 - P_1^3 - 2P_{1,t_1}P_1 - P_1P_{1,t_1} - P_{1,t_1t_1} = -3u_{t_1}T - \frac{3}{2}u_{t_1t_1} - \frac{3}{2}u_{t_2}.
$$

Понятно, что таким же образом могут быть рассмотрены симметрии, отвечающие высшим временам $t_m$. Специфическое свойство всех этих симметрий – аналитичность (полиномиальность) оператора $W$, что позволило записать уравнение (1.6.3) в виде (1.6.3.1) и контролировать асимптотическое поведение символа оператора $P_m$ посредством (1.6.3.1).

#### 1.6.3.2 Сингулярные симметрии

Здесь мы рассматриваем симметрии, заданные операторами $W$ с символами $w(z)$, являющимися мероморфными функциями $z$. Произвольные симметрии такого типа требуют рассмотрения, основанного на объекте более общем, чем решения Йоста – так называемой функции Коши–Йоста, см. ([88]), ([89]). Поэтому здесь мы рассматриваем только простейшие примеры таких симметрий: т.е те, где $W$ выбирается как один из операторов $(T + a_{1j})^{-1}$, см. обозначение (1.6.1) (в частности, $a_{11} = 0$). Введем зависимость оператора $B$ от набора $t_- = \{t_{-1}, t_{-2}, t_{-3}\}$ трех непрерывных параметров посредством соотношений (ср. (1.6.3))

$$
B_{t_{-j}}(n,t_-) = [(T + a_{1j})^{-1}, B(n,t_-)], \quad j = 1,2,3.
$$

Тогда (1.6.3) дает $\overline{\partial}K_{t_{-j}} + KB(T + a_{1j})^{-1} = K_{t_{-j}}B + K(T + a_{1j})^{-1}B$. Умножая это уравнение справа на $(T + a_{1j})$, получаем

$$
\overline{\partial}\big(K_{t_{-j}}(T + a_{1j}) + K\big) = \big(K_{t_{-j}}(T + a_{1j}) + K\big)B^{(-j)},
$$

где $B^{(-j)} = (T + a_{1j})^{-1}B(T + a_{1j})$, ср. (1.6.2), т.е.

$$
\widetilde{B}^{(-j)}(n_1,n_2,n_3,t_{-1},z) = \widetilde{B}(n_1,n_2,n_3,t_{-1},z)\big|_{n_j \to n_j - 1}, \quad j = 1,2,3.
$$

Принимая теперь во внимание (1.6.2), видим, что существуют операторы $V_j$, такие что

$$K_{t_{-j}}(n,t_-)(T + a_{1j}) + K(n,t_-) = V_j(n,t_-)K^{(-j)}(n,t_-).$$

В терминах символов операторов это уравнение имеет вид

$$(z + a_{1j})\widetilde{K}_{t_{-j}}(n,t_-,z) + \widetilde{K}(n,t_-,z) = (\widetilde{V_j K})^{(-j)}(n,t_-,z),$$

а благодаря асимптотическому условию в (1.6.2) символы операторов $V_j$ не зависят от $z$, так что $(\widetilde{V_j K})^{(-j)}(n,t_-,z) = \widetilde{V}_j(n,t_-)\widetilde{K}^{(-j)}(n,t_-,z)$. Несмотря на сингулярное поведение символов операторов $(T + a_{1j})^{-1}$, мы не интересуемся здесь преобразованиями, изменяющими спектр лаксова оператора, так что оператор одевания $K$ и его производные $K_{t_{-j}}$ не имеют полюсных особенностей по $z$. Поэтому, полагая в предыдущем равенстве $z = a_{j1}$, мы получаем для символов операторов $V_j$ выражения:

$$\widetilde{V}_j(n,t_-) = \frac{\widetilde{K}(n,t_-,a_{j1})}{\widetilde{K}^{(-j)}(n,t_-,a_{j1})}.$$

Это соотношение нелокально в терминах коэффициентов $k_j$ разложения (1.6.2). С другой стороны, действие этой симметрии на эти коэффициенты легко дается посредством (1.6.3.2). Скажем, благодаря (1.6.2)

$$u_{t_{-j}} = V_j - 1.$$

Таким же способом могут быть введены другие “сингулярные” симметрии и выведено их действие на оператор одевания и решение HDE.

#### 1.6.3.3 Формулировка в терминах решений Йоста

Для упрощения предыдущих формул мы переопределим решения Йоста (ср. (1.6.2)) как

$$\varphi(n,t,t_-,z) = z^{n_1}(z + a_{12})^{n_2}(z + a_{13})^{n_3}\times$$
$$\times\, e^{t_1 z + t_2 z^2 + t_3 z^3 + t_{-1} z^{-1} + t_{-2}(z+a_{12})^{-1} + t_{-3}(z+a_{13})^{-1}}\widetilde{K}(n,t,t_-,z).$$

При этом мы не меняем равенства (1.6.2)–(1.6.2), а предыдущие результаты принимают следующий вид. Вместо (1.6.3.1) мы получаем

$$\varphi_{t_1} = \varphi^{(1)} + (u - u^{(1)})\varphi.$$

Далее, по (1.6.3.1) при $n=2$ и (1.6.3.1) мы редуцируем (1.6.3.1) к

$$\varphi_{t_2} = \varphi^{(11)} + (u - u^{(11)})\varphi^{(1)} + (k_2 - k_2^{(11)} - (u - u^{(11)})u^{(1)})\varphi,$$

где коэффициент $k_2$ должен быть определен по (1.6.2). Таким образом, в смысле переменных HDE $n_1$, $n_2$ и $n_3$ эта симметрия нелокальна. С другой стороны, принимая во внимание зависимость от $t_1$, мы выводим по (1.6.3.1), что $k_2 - k_2^{(11)} = -u_{t_1} - u_{t_1}^{(1)} - (u^{(1)} - u)u - (u^{(11)} - u^{(1)})u^{(1)}$, так что (1.6.3.3) принимает вид

$$\varphi_{t_2} = \varphi^{(11)} + (u - u^{(11)})\varphi^{(1)} + \bigl((u^{(1)} - u)^2 - u_{t_1} - u_{t_1}^{(1)}\bigr)\varphi.$$

Наконец, в силу (1.6.3.3) сведем это уравнение к более простому и знакомому виду:

$$\varphi_{t_2} = \varphi_{t_1t_1} - 2u_{t_1}\varphi.$$

Аналогично, действие симметрии (1.6.3.1) в терминах сдвигов дискретных переменных дается выражением, содержащим $k_3$. Но в терминах производных по $t_1$ уравнение (1.6.3.1) сводится к

$$\varphi_{t_3} = \varphi_{t_1t_1t_1} - 3u_{t_1}\varphi_{t_1} - \frac{3}{2}u_{t_1t_1}\varphi - \frac{3}{2}u_{t_2}\varphi$$

в силу (1.6.3.1). Необходимо отметить, что непосредственная проверка того, что приведенные выше соотношения дают симметрии HDE требует привлечения равенств (1.6.2), (1.6.2)–(1.6.2) и (1.6.3.1), (1.6.3.1), (и некоторых их следствий) и весьма трудоемка. При нашем подходе коммутативность этих симметрий с эволюцией HDE следует из простых соотношений линейного случая.

Заметим также, что при подстановке (1.6.3.3) симметрия (1.6.3.2) сводится к

$$\varphi_{t_{-j}} = V_j\varphi^{(-j)},$$

где $V_j = 1 + u_{t_{-j}}$ by (1.6.3.2). Совместность этой симметрии с парой Лакса (1.6.2) и (1.6.2) следует по (1.6.3.2), (1.6.3.2), если принять во внимание, что в силу (1.6.2) и (1.6.2)

$$a_{1j}\widetilde{K^{(j)}}(n,t,t_-,0) = \bigl[u^{(j)} - u^{(1)} + a_{1j}\bigr]\widetilde{K}(n,t,t_-,0), \quad j = 1,2,3.$$

## 1.7 Токовое представление для дубля супер-янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$ и векторы Бете

### 1.7.1 Введение

Проблема вычисления формфакторов и корреляционных функций в квантовых интегрируемых моделях является одной из важнейших в области точно решаемых моделей статистической физики и малоразмерной квантовой механики. Начиная с самых ранних лет развития Квантового Метода Обратной Задачи (КМОЗ) [92, 93], в этом направлении было получено множество результатов. Одним из наиболее значимых результатов для моделей, связанных с различными деформациями аффинной алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}(2)$, является детерминантное представление для частного случая скалярного произведения, в котором один из векторов является собственным вектором трансфер-матрицы [94]. Этот результат позволяет вплотную перейти к проблеме вычисления корреляционных функций [95] локальных операторов в интегрируемых моделях (см. обзорную статью [96] и ссылки там же).

Одним из важнейших понятий КМОЗ является вектор Бете. В моделях, связанных с алгеброй $\widehat{\mathfrak{gl}}(2)$, вектор Бете является мономом от правого верхнего элемента матрицы монодромии (оператора рождения), действующим на вектор псевдо-вакуума. Он зависит от набора комплексных переменных, которые называются параметрами Бете. Отличительной особенностью этих векторов является то, что они становятся собственными векторами трансфер-матрицы при условии, что параметры Бете удовлетворяют специальной системе уравнений (уравнения Бете). В этом случае мы будем называть их on-shell векторы Бете. В противном случае, если параметры Бете являются комплексными числами в общем положении, соответствующие векторы называются off-shell векторы Бете, или просто векторы Бете. В данной работе мы имеем дело с универсальной матрицей монодромии. Это означает, что она зависит только от генераторов алгебры, лежащей в основе модели. Соответствующие векторы Бете называются универсальными векторами Бете.

Основной темой нашего исследования является изучение векторов Бете, построенных из генераторов дубля янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$. Наша первая цель состоит в том, чтобы найти для них явные формулы. Вторая цель заключается в получении формул действия матричных элементов матрицы монодромии на off-shell векторы Бете. Достижение этих двух целей позволяет ставить задачу о вычислении скалярных произведений векторов Бете, которые, в свою очередь, необходимы для изучения формфакторов и корреляционных функций в интегрируемых моделях с суперсимметрией $\mathfrak{gl}(m|n)$ .

Для моделей, связанных с симметриями высокого ранга, КМОЗ основан на так называемом иерархическом анзаце Бете, который был разработан в пионерских работах [97, 98, 99]. В этих работах была предложена рекурсивная процедура, которая позволяет строить векторы Бете, отвечающие алгебре $\widehat{\mathfrak{gl}}(N)$, по известным векторам Бете, отвечающим алгебре $\widehat{\mathfrak{gl}}(N-1)$. С формальной точки зрения этот метод позволяет получить явные формулы для векторов Бете в терминах некоторых многочленов от операторов рождения (верхнетреугольных элементов матрицы монодромии), действующих на псевдо-вакуумный вектор. Однако эта процедура является довольно громоздкой, поэтому в указанных выше ранних работах таких явных представлений получено не было, за исключением графических представлений, найденных Н. Решетихиным в работе [100] для моделей с алгеброй $\widehat{\mathfrak{gl}}(3)$. С помощью этой диаграммной техники была получена формула для скалярного произведения off-shell векторов Бете в терминах сумм по разбиениям наборов параметров Бете (формула сумм).

В работах [101, 102] векторы Бете интегрируемых моделей, связанных с деформированными алгебрами $\widehat{\mathfrak{gl}}(N)$, были представлены в виде следов произведений матриц монодромии, R-матриц и некоторых проекций. Эти результаты были обобщены на случай суперсимметричных алгебр в работе [103]. Данный подход позволяет в некоторых случаях вычислить нормы иерархических векторов Бете, но не их скалярные произведения.

Альтернативный подход к построению векторов Бете был предложен в работе [104]. В рамках этого метода исследуется связь между двумя различными реализациями квантовой алгебры Хопфа $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}(N))$, связанной с аффинной алгеброй $\widehat{\mathfrak{gl}}(N)$: первая реализация осуществляется в терминах универсальной матрицы монодромии $\mathrm{T}(z)$ и RTT-коммутационных соотношений, а вторая — в терминах полных токов, которые определяются с помощью гауссового разложения матрицы монодромии. В дальнейшем, в статье [105] было показано, что два различных типа формул для универсальных off-shell векторов Бете (построенных из матрицы монодромии) отвечают двум различным токовым реализациям квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}(N))$ и связанных с ними проекциями.

Помимо этого, подход, который использует генераторы токов деформированной алгебры токов, позволяет вычислить действие матричных элементов матрицы монодромии на универсальные векторы Бете. Эти формулы действия оказались очень полезными для вычисления формфакторов в различных квантовых интегрируемых моделях, связанных с рациональными и тригонометрическими деформациями аффинной алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}(3)$ [106, 107, 108]. В последнее время аналогичные результаты были получены для моделей с супералгебрами $\widehat{\mathfrak{gl}}(1|2)$ и $\widehat{\mathfrak{gl}}(2|1)$ [109, 110]. В этих работах существенным образом использовались явные формулы для векторов Бете и формулы действия [111, 112].

Мы используем подход работы [104]. В рамках этого метода универсальный off-shell вектор Бете определяется как проекция произведения полных токов, примененных к псевдо-вакуумному вектору. Хотелось бы отметить, что мы получаем явные формулы для универсальных векторов Бете в терминах токовых генераторов дубля янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$ для двух различных гауссовых разложений универсальной матрицы монодромии и двух различных токовых реализаций этой алгебры. Эти различные гауссовы разложения соответствуют вложениям либо $DY(\mathfrak{gl}(m-1|n))$, либо $DY(\mathfrak{gl}(m|n-1))$ в $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$. На языке RTT-соотношения это отвечает вложениям либо в верхний левый, либо в нижний правый угол универсальной матрицы монодромии. Используя первый или второй тип этих вложений, мы получаем два различных представления для векторов Бете, которые мы обозначим соответственно через $\mathbb{B}(\bar{t})$ и $\hat{\mathbb{B}}(\bar{t})$, где $\bar{t}$ — это набор параметров Бете. Мы доказываем, что эти два представления эквивалентны, то есть $\mathbb{B}(\bar{t}) = \hat{\mathbb{B}}(\bar{t})$.

### 1.7.2 Универсальная матрица монодромии

Мы используем следующий подход. Мы не рассматриваем какие-либо конкретные суперсимметричные точно решаемые модели, определяемые конкретной матрицей монодромии $\mathrm{T}(z)$, удовлетворяющей стандартному RTT-соотношению. Вместо этого мы трактуем T-оператор как универсальную матрицу монодромии, матричные элементы которой являются производящими рядами для полного набора генераторов в дубле янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$, действующими в общем пространстве представлений этой алгебры, которая является рациональной деформацией аффинной алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}(m|n)$. Эти представления не конкретизированы, за исключением требования существование левого и правого псевдо-вакуумных векторов, что обеспечивает применимость алгебраического анзаца Бете. Для построения векторов Бете мы будем использовать только один T-оператор $\mathrm{T}^{+}(z)$ из пары $\{\mathrm{T}^{+}(z), \mathrm{T}^{-}(z)\}$, которые порождают всю алгебру $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$. Собственные значения $\lambda_i(z)$ диагональных матричных элементов на псевдо-вакуумном векторе являются свободными функциональными параметрами, которые, при необходимости могут быть положены равными нулю.

Прежде всего мы дадим определение $\mathbb{Z}_2$-градуированных линейных пространств и правил их умножения, а также опишем матрицы, действующие в этих пространствах.

#### 1.7.2.1 $\mathbb{Z}_2$-градуированное линейное пространство и обозначения

Пусть $\mathbb{C}^{m|n}$ есть $\mathbb{Z}_2$-градуированное пространство с базисом $\mathrm{e}_i$, $i = 1,\ldots,m+n$. Будем предполагать, что базисные векторы $\{\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\ldots,\mathrm{e}_m\}$ являются четными, а векторы $\{\mathrm{e}_{m+1},\mathrm{e}_{m+2},\ldots,\mathrm{e}_{m+n}\}$ — нечетными. Введем $\mathbb{Z}_2$-градуировку индексов

$$[i] = 0 \quad \text{при} \quad i = 1,2,\ldots,m \quad \text{и} \quad [i] = 1 \quad \text{при} \quad i = m+1,m+2,\ldots,m+n.$$

Пусть $\mathrm{E}_{ij} \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{m|n})$ есть матрица с единственным ненулевым элементом, равным 1, который находится на пересечении $i$-ой строки и $j$-ого столбца.

Базисные векторы $\mathrm{e}_i$ и матрицы $\mathrm{E}_{ij}$ имеют градуировку

$$[\mathrm{e}_i] = [i], \qquad [\mathrm{E}_{ij}] = [i] + [j] \mod 2.$$

Тензорное произведение также градуировано в соответствии с правилом

$$(\mathrm{E}_{ij} \otimes \mathrm{E}_{kl}) \cdot (\mathrm{E}_{pq} \otimes \mathrm{E}_{rs}) = (-)^{([k]+[l])([p]+[q])} \mathrm{E}_{ij}\mathrm{E}_{pq} \otimes \mathrm{E}_{kl}\mathrm{E}_{rs}\,.$$

Пусть P — градуированный оператор перестановки, действующий в тензорном произведении $\mathbb{C}^{m|n} \otimes \mathbb{C}^{m|n}$ следующим образом

$$\mathrm{P} = \sum_{a,b}^{m+n} (-)^{[b]}\ \mathrm{E}_{ab} \otimes \mathrm{E}_{ba}.$$

Пусть

$$g(u,v) = \frac{c}{u-v}$$

есть рациональная функция спектральных параметров $u$ и $v$, а $c$ — параметр деформации. С помощью переопределения спектральных параметров мы всегда можем положить $c = 1$, однако мы сохраним его для удобства в дальнейшем.

Определим $\mathrm{R}(u,v) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{m|n} \otimes \mathbb{C}^{m|n})$ как рациональную суперсимметричную R-матрицу, ассоциированную с векторным представлением $\mathfrak{gl}(m|n)$,

$$\mathrm{R}(u,v) \ = \ \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + g(u,v)\mathrm{P},$$

где мы ввели единичную матрицу в пространстве $\mathbb{C}^{m|n}$

$$\mathbb{I} = \sum_{i=1}^{m+n} \mathrm{E}_{ii}.$$

#### 1.7.2.2 Соотношения для универсальной матрицы монодромии

Супералгебра $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$ является градуированной ассоциативной алгеброй с единицей $\mathbf{1}$, порожденной модами T-оператора: $\mathrm{T}_{i,j}(\ell)$, $\ell \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant i,j \leqslant N+1$

$$\mathrm{T}^{\pm}(u) = \mathbb{I} \otimes \mathbf{1} + \sum_{\substack{\ell \geqslant 0 \\ \ell < 0}} \sum_{i,j=1}^{N+1} \mathrm{E}_{ij} \otimes \mathrm{T}_{i,j}(\ell) u^{-\ell-1},$$

где $\ell \geqslant 0$ (соответственно, $\ell < 0$) относится к индексу '+' (соответственно, к индексу '−') операторов $\mathrm{T}^{\pm}(u)$, и $N = m+n-1$ является числом простых корней супералгебры $\mathfrak{gl}(m|n)$. Элементы матрицы монодромии $\mathrm{T}^{\pm}_{i,j}(u)$ удовлетворяют соотношению

$$\mathrm{R}(u,v) \cdot (\mathrm{T}^{\mu}(u) \otimes \mathbb{I}) \cdot (\mathbb{I} \otimes \mathrm{T}^{\nu}(v)) = (\mathbb{I} \otimes \mathrm{T}^{\nu}(v)) \cdot (\mathrm{T}^{\mu}(u) \otimes \mathbb{I}) \cdot \mathrm{R}(u,v),$$

где $\mu,\nu = \pm$. Для того, чтобы матрица монодромии[1] $\mathrm{T}(u)$ была глобально четной, мы фиксируем градуировку элементов матрицы монодромии следующим образом

$$[\mathrm{T}_{i,j}(u)] = [i] + [j] \mod 2.$$

Тензорное произведение матриц и генераторов алгебры также градуировано, то есть

$$(\mathrm{E}_{ij} \otimes \mathrm{T}_{i,j}(u)) \cdot (\mathrm{E}_{kl} \otimes \mathrm{T}_{k,l}(v)) = (-)^{([i]+[j])([k]+[l])} \mathrm{E}_{ij}\mathrm{E}_{kl} \otimes \mathrm{T}_{i,j}(u)\mathrm{T}_{k,l}(v).$$

Подалгебры, образованные модами $\mathrm{T}(\ell)_{i,j}$ при $\ell \geqslant 0$ и $\ell < 0$ T-операторов $\mathrm{T}^{\pm}(u)$ суть стандартные борелевские подалгебры $U(\mathfrak{b}^{\pm}) \subset DY(\mathfrak{gl}(m|n))$. Эти борелевские подалгебры являются подалгебрами Хопфа дубля янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$. Их коалгебраическая структура задается градуированным копроизведением

$$\Delta\left(\mathrm{T}^{\pm}_{i,j}(u)\right) = \sum_{k=1}^{n+m} (-)^{([i]+[k])([k]+[j])} \mathrm{T}^{\pm}_{k,j}(u) \otimes \mathrm{T}^{\pm}_{i,k}(u)\,.$$

Благодаря коммутационным соотношениям (1.7.2.2) универсальная трансфер-матрица $\mathfrak{t}(u)$, определенная как суперслед универсальной матрицы монодромии $\mathrm{T}^{+}(u)$

$$\mathfrak{t}(u) = \mathrm{str}\left(\mathrm{T}^{+}(u)\right) \equiv \sum_{i=1}^{n+m} (-)^{[i]} \mathrm{T}^{+}_{i,i}(u),$$

коммутирует при произвольных значениях спектральных параметров

$$[\mathfrak{t}(u),\mathfrak{t}(v)] = 0.$$

[1] Мы используем символ $\mathrm{T}(u)$ для обозначения матриц $\mathrm{T}^{+}(u)$ или $\mathrm{T}^{-}(u)$ в том случае, когда они обладают одинаковыми свойствами.

Таким образом, ее можно рассматривать в качестве производящей функции для коммутирующих интегралов движения в соответствующей суперсимметричной квантовой интегрируемой модели.

Все коммутационные соотношения (1.7.2.2) можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned}[\mathrm{T}^{\mu}_{i,j}(u),\mathrm{T}^{\nu}_{k,l}(v)\} &\equiv \mathrm{T}^{\mu}_{i,j}(u)\mathrm{T}^{\nu}_{k,l}(v) - (-)^{([i]+[j])([k]+[l])}\mathrm{T}^{\nu}_{k,l}(v)\mathrm{T}^{\mu}_{i,j}(u) \\ &= (-)^{[i]([k]+[l])+[k][l]} g(u,v)\Big(\mathrm{T}^{\nu}_{k,j}(v)\mathrm{T}^{\mu}_{i,l}(u) - \mathrm{T}^{\mu}_{k,j}(u)\mathrm{T}^{\nu}_{i,l}(v)\Big).\end{aligned}$$

Если в формуле (1.7.2.2) сделать замену индексов и спектральных параметров: $i \leftrightarrow k$, $j \leftrightarrow l$ и $u \leftrightarrow v$, то мы получим эквивалентное соотношение

$$\begin{aligned}[\mathrm{T}^{\mu}_{i,j}(u),\mathrm{T}^{\nu}_{k,l}(v)\} &= \mathrm{T}^{\mu}_{i,j}(u)\mathrm{T}^{\nu}_{k,l}(v) - (-)^{([i]+[j])([k]+[l])}\mathrm{T}^{\nu}_{k,l}(v)\mathrm{T}^{\mu}_{i,j}(u) \\ &= (-)^{[l]([i]+[j])+[i][j]} g(u,v)\Big(\mathrm{T}^{\mu}_{i,l}(u)\mathrm{T}^{\nu}_{k,j}(v) - \mathrm{T}^{\nu}_{i,l}(v)\mathrm{T}^{\mu}_{k,j}(u)\Big),\end{aligned}$$

где $\mu,\nu = \pm$.

Отметим, что согласно коммутационным соотношениям (1.7.2.2) и (1.7.2.2) нечетные матричные элементы матрицы монодромии не коммутируют, в отличие от четных элементов

$$\mathrm{T}^{\mu}_{i,j}(u)\mathrm{T}^{\nu}_{i,j}(v) = \frac{h_{[i]}(v,u)}{h_{[j]}(v,u)}\mathrm{T}^{\nu}_{i,j}(v)\mathrm{T}^{\mu}_{i,j}(u)\,.$$

Здесь и далее мы будем использовать градуированные рациональные функции[1]

$$f_{[i]}(u,v) = 1 + g_{[i]}(u,v) = 1 + \frac{c_{[i]}}{u-v} = \frac{u-v+c_{[i]}}{u-v}\,, \qquad h_{[i]}(u,v) = \frac{f_{[i]}(u,v)}{g_{[i]}(u,v)}.$$

и[2]

$$c_{[i]} = (-)^{[i]}c\,.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться следующей комбинацией символа Кронекера

$$\epsilon_{i,j} = 1 - \delta_{i,j}\,,$$

которая равна нулю при $i = j$ и равна 1 в противном случае.

[1] Мы также сохраним обычные обозначения $f(u,v) = \frac{u-v+c}{u-v}$ и $h(u,v) = \frac{u-v+c}{c}$ и время от времени будем ими пользоваться.

[2] Введение данного градуированного параметра деформации позволяет записать многие соотношения систематическим образом, и именно это является той причиной, по которой мы не положили параметр деформации $c$ равным 1.

### 1.7.2.3 Морфизм в $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$, сингулярные векторы и гауссово разложение

Поскольку R-матрица (1.7.2.1) и универсальная матрица монодромии (1.7.2.2) являются глобально четными, мы можем легко проверить, что отображение[1]

$$\Psi: \ \mathrm{T}^{\pm}_{ij}(u) \to (-)^{[i]([j]+1)}\mathrm{T}^{\mp}_{ji}(u)$$

задает антиморфизмом дубля янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$, который является супер- (или градуированным) транспонированием, согласованным с определением суперследа. Это отображение обладает свойством

$$\Psi(A\cdot B) = (-)^{[A][B]}\Psi(B)\cdot\Psi(A)$$

для произвольных элементов $A,B \in DY(\mathfrak{gl}(m|n))$ и будет использоваться, чтобы связать правые и левые состояния или, что эквивалентно, векторы Бете и дуальные к ним векторы.

Пусть $|0\rangle$ и $\langle 0|$ — суть векторы, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\mathrm{T}^{\pm}_{i,j}(u)|0\rangle = 0\,, \quad i>j\,, \quad \mathrm{T}^{\pm}_{i,i}(u)|0\rangle = \lambda^{\pm}_i(u)|0\rangle\,, \quad i=1,\ldots,N+1$$

и

$$\langle 0|\mathrm{T}^{\pm}_{i,j}(u) = 0\,, \quad i<j\,, \quad \langle 0|\mathrm{T}^{\pm}_{i,i}(u) = \lambda^{\pm}_i(u)\langle 0|\,, \quad i=1,\ldots,N+1\,,$$

где в формуле (1.7.2.3) элементы матрицы монодромии действуют направо, в то время как в формуле (1.7.2.3) они действуют налево. Такие векторы, если они существуют, называются сингулярными векторами. Если векторы псевдо-вакуума $|0\rangle$ и $\langle 0|$ принадлежат конечномерным представлениям дубля янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$, тогда функции $\lambda^{\pm}_i(u)$ являются совпадающими рациональными функциями спектрального параметра [113], разложенные в разных областях: функция $\lambda^{+}_i(u)$ является рядом по $u^{-1}$, а та же самая функция $\lambda^{-}_i(u)$ — рядом по $u$. В дальнейшем мы будем использовать одно обозначение $\lambda_i(u)$ для функций $\lambda^{\pm}_i(u)$.

Для T-операторов, зафиксированных соотношениями (1.7.2.2), существует две возможности ввести гауссовы координаты. Первая возможность состоит в том, что мы

[1] Мы сохранили индексы $\pm$ для того, чтобы сделать антиморфизм согласованным с центрально расширенным дублем янгиана.

вводим $\mathrm{F}^{\pm}_{j,i}(u)$, $\mathrm{E}^{\pm}_{i,j}(u)$, $1 \leqslant i < j \leqslant N+1$ и $k^{\pm}_{\ell}(u)$, $\ell = 1,\ldots,N+1$, так что

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}^{\pm}_{i,j}(u) &= \mathrm{F}^{\pm}_{j,i}(u)k^{\pm}_{i}(u) + \sum_{1\leqslant \ell < i} \mathrm{F}^{\pm}_{j,\ell}(u)k^{\pm}_{\ell}(u)\mathrm{E}^{\pm}_{\ell,i}(u),\\
\mathrm{T}^{\pm}_{i,i}(u) &= k^{\pm}_{i}(u) + \sum_{1\leqslant \ell < i} \mathrm{F}^{\pm}_{i,\ell}(u)k^{\pm}_{\ell}(u)\mathrm{E}^{\pm}_{\ell,i}(u),\\
\mathrm{T}^{\pm}_{j,i}(u) &= k^{\pm}_{i}(u)\mathrm{E}^{\pm}_{i,j}(u) + \sum_{1\leqslant \ell < i} \mathrm{F}^{\pm}_{i,\ell}(u)k^{\pm}_{\ell}(u)\mathrm{E}^{\pm}_{\ell,j}(u)\,.
\end{aligned}
$$

Во втором случае мы вводим $\hat{\mathrm{F}}^{\pm}_{j,i}(u)$, $\hat{\mathrm{E}}^{\pm}_{i,j}(u)$, $1 \leqslant i < j \leqslant N+1$ и $\hat{k}^{\pm}_{\ell}(u)$, $\ell = 1,\ldots,N+1$, так что

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}^{\pm}_{i,j}(u) &= \hat{\mathrm{F}}^{\pm}_{j,i}(u)\hat{k}^{+}_{j}(u) + \sum_{j<\ell\leqslant N+1} (-)^{([\ell]+[i])([\ell]+[j])}\hat{\mathrm{F}}^{\pm}_{\ell,i}(u)\hat{k}^{\pm}_{\ell}(u)\hat{\mathrm{E}}^{\pm}_{j,\ell}(u),\\
\mathrm{T}^{\pm}_{j,j}(u) &= \hat{k}^{\pm}_{j}(u) + \sum_{j<\ell\leqslant N+1} (-)^{([\ell]+[j])}\hat{\mathrm{F}}^{\pm}_{\ell,j}(u)\hat{k}^{\pm}_{\ell}(u)\hat{\mathrm{E}}^{\pm}_{j,\ell}(u),\\
\mathrm{T}^{\pm}_{j,i}(u) &= \hat{k}^{\pm}_{j}(u)\hat{\mathrm{E}}^{\pm}_{i,j}(u) + \sum_{j<\ell\leqslant N+1} (-)^{([\ell]+[i])([\ell]+[j])}\hat{\mathrm{F}}^{\pm}_{\ell,j}(u)\hat{k}^{\pm}_{\ell}(u)\hat{\mathrm{E}}^{\pm}_{i,\ell}(u).
\end{aligned}
$$

Можно проверить, что из антиморфизма (1.7.2.3) и гауссова разложения (1.7.2.3)–(1.7.2.3) вытекают следующие соотношения для гауссовых координат

$$
\Psi\left(\mathrm{F}^{\pm}_{j,i}(u)\right) = (-)^{[i]([j]+1)}\mathrm{E}^{\mp}_{i,j}(u)\,,\quad \Psi\left(\mathrm{E}^{\pm}_{i,j}(u)\right) = (-)^{[j]([i]+1)}\mathrm{F}^{\mp}_{j,i}(u)\,,\quad \Psi\left(k^{\pm}_{\ell}(u)\right) = k^{\mp}_{\ell}(u)\,.
$$

Аналогично,

$$
\Psi\left(\hat{\mathrm{F}}^{\pm}_{j,i}(u)\right) = (-)^{[i]([j]+1)}\hat{\mathrm{E}}^{\mp}_{i,j}(u)\,,\quad \Psi\left(\hat{\mathrm{E}}^{\pm}_{i,j}(u)\right) = (-)^{[j]([i]+1)}\hat{\mathrm{F}}^{\mp}_{j,i}(u)\,,\quad \Psi\left(\hat{k}^{\pm}_{\ell}(u)\right) = \hat{k}^{\mp}_{\ell}(u)\,.
$$

Из формул гауссова разложения также следует

$$
\mathrm{E}^{\pm}_{i,j}(u)|0\rangle = \hat{\mathrm{E}}^{\pm}_{i,j}(u)|0\rangle = 0\,,\quad i<j\,,\quad k^{\pm}_{\ell}(u)|0\rangle = \hat{k}^{\pm}_{\ell}(u)|0\rangle = \lambda^{\pm}_{\ell}(u)|0\rangle\,,
$$

и

$$
\langle 0|\mathrm{F}^{\mp}_{j,i}(u) = \langle 0|\hat{\mathrm{F}}^{\mp}_{j,i}(u) = 0\,,\quad i<j\,,\quad \langle 0|k^{\mp}_{\ell}(u) = \langle 0|\hat{k}^{\mp}_{\ell}(u) = \lambda^{\mp}_{\ell}(u)\langle 0|\,.
$$

#### 1.7.2.4 Токовая реализация дубля янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$

Пусть

$$
F_i(u) = \mathrm{F}^{+}_{i+1,i}(u) - \mathrm{F}^{-}_{i+1,i}(u)\,,\quad E_i(u) = \mathrm{E}^{+}_{i,i+1}(u) - \mathrm{E}^{-}_{i,i+1}(u)
$$

суть полные токи [114]. Отметим, что согласно формулам (1.7.2.3) мы имеем

$$\Psi\left(F_i(u)\right) = -(-)^{[i]([i+1]+1)}E_i(u) = -E_i(u)\,,$$
$$\Psi\left(E_i(u)\right) = -(-)^{[i+1]([i]+1)}F_i(u) = -(-)^{\delta_{i,m}}F_i(u)\,, \quad i = 1,\ldots,N.$$

Эти формулы доказывают, что градуированное транспонирование является идемпотентом порядка 4, а его квадрат дает количество нечетных элементов.

С помощью непосредственных вычислений [115, 116] и гауссова разложения (1.7.2.3)–(1.7.2.3), можно получить следующие нетривиальные коммутационные соотношения в терминах полных токов $F_i(t)$, $E_i(t)$ и картановских токов $k_i^{\pm}(t)$:

$$k_i^{\pm}(u)F_i(v)k_i^{\pm}(u)^{-1} = f_{[i]}(v,u)\ F_i(v),$$
$$k_{i+1}^{\pm}(u)F_i(v)k_{i+1}^{\pm}(u)^{-1} = f_{[i+1]}(u,v)\ F_i(v),$$
$$k_i^{\pm}(u)^{-1}E_i(v)k_i^{\pm}(u) = f_{[i]}(v,u)\ E_i(v),$$
$$k_{i+1}^{\pm}(u)^{-1}E_i(v)k_{i+1}^{\pm}(u) = f_{[i+1]}(u,v)\ E_i(v),$$
$$((u-v)\epsilon_{i,m} - c_{[i]})\ F_i(u)F_i(v) = ((u-v)\epsilon_{i,m} + c_{[i]})\ F_i(v)F_i(u),$$
$$((u-v)\epsilon_{i,m} + c_{[i]})\ E_i(u)E_i(v) = ((u-v)\epsilon_{i,m} - c_{[i]})\ E_i(v)E_i(u),$$
$$(u-v)\ F_i(u)F_{i+1}(v) = (u-v-c_{[i+1]})\ F_{i+1}(v)F_i(u),$$
$$(u-v-c_{[i+1]})\ E_i(u)E_{i+1}(v) = (u-v)\ E_{i+1}(v)E_i(u),$$
$$[E_i(u),F_j(v)\} = E_i(u)F_j(v) - (-)^{([i]+[i+1])([j]+[j+1])}F_j(v)E_i(u) =$$
$$= \delta_{i,j}c_{[i+1]}\delta(u,v)\Big(k_{i+1}^{-}(u)\cdot k_i^{-}(u)^{-1} - k_{i+1}^{+}(v)\cdot k_i^{+}(v)^{-1}\Big),$$

где $\delta(u,v)$ является рациональной $\delta$-функцией, заданной равенством (1.7.2.4). Эти вычисления также приводят к соотношениям Серра. Для токов $F_i(u)$, $i = 1,\ldots,N$, отвечающих простым корням (простых токов), они имеют вид:

$$\mathrm{Sym}_{u_1,u_2}\Big(((u_2-u_1)\delta_{i,m} - c_{[i+1]})(F_i(u_1)F_i(u_2)F_{i+1}(v) -$$
$$- 2F_i(u_1)F_{i+1}(v)F_i(u_2) + F_{i+1}(v)F_i(u_1)F_i(u_2))\Big) = 0\,,$$

$$\mathrm{Sym}_{u_1,u_2}\Big(((u_1-u_2)\delta_{i,m} + c_{[i]})(F_i(u_1)F_i(u_2)F_{i-1}(v) -$$
$$- 2F_i(u_1)F_{i-1}(v)F_i(u_2) + F_{i-1}(v)F_i(u_1)F_i(u_2))\Big) = 0\,,$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Sym}_{u_1,u_2}\Big((u_1-u_2+c)\big[F_m(u_1)F_m(u_2)F_{m-1}(v_1)F_{m+1}(v_2)-&\\
-2F_m(u_1)F_{m-1}(v_1)F_m(u_2)F_{m+1}(v_2)\big]+&\\
+2c\ F_{m-1}(v_1)F_m(u_1)F_m(u_2)F_{m+1}(v_2)+&\\
+(u_2-u_1+c)\big[F_{m-1}(v_1)F_{m+1}(v_2)F_m(u_1)F_m(u_2)-&\\
-2F_{m-1}(v_1)F_m(u_1)F_{m+1}(v_2)F_m(u_2)\big]\Big)&=0\,.
\end{aligned}
$$

Применяя к этим соотношениям антиморфизм $\Psi$, мы получим аналогичные формулы для токов $E_i(u)$, $i=1,\dots,N$. Результат сводится к замене в формулах (1.7.2.4)–(1.7.2.4) $F_i(u)\to E_i(u)$ и $c\to -c$.

Рациональная, или что то же самое, аддитивная $\delta$-функция, которая была использована в равенстве (1.7.2.4), может быть представлена в виде разности двух рядов

$$
\delta(u,v)=\delta(v,u)=\frac{1}{(u-v)_>}-\frac{1}{(u-v)_<}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{v^n}{u^{n+1}}\,,
$$

где

$$
\frac{1}{(u-v)_>}=\frac{1}{u}\sum_{k\geqslant 0}\Big(\frac{v}{u}\Big)^k,\qquad \frac{1}{(u-v)_<}=-\frac{1}{v}\sum_{k\geqslant 0}\Big(\frac{u}{v}\Big)^k\,.
$$

Здесь символ '$>$' у рациональной функции $\frac{1}{(u-v)_>}$ означает, что $|u|>|v|$, и эту рациональную функцию следует понимать в смысле первого ряда в формуле (1.7.2.4). В свою очередь, символ '$<$' у рациональной функции $\frac{1}{(u-v)_<}$ означает, что $|u|<|v|$, и эту рациональную функцию следует понимать в смысле второго ряда в формуле (1.7.2.4). Ниже мы также будем пользоваться обозначением $\frac{1}{(u-v)_{\lessgtr}}$, чтобы подчеркнуть, что для разложения рациональной функции $\frac{1}{u-v}$ можно пользоваться любым из двух рядов в формуле (1.7.2.4).

Известно [105], что другое гауссово разложение матрицы монодромии (1.7.2.3)–(1.7.2.3) дает еще одну токовую реализацию дубля янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$. Коммутационные соотношения между картановскими токами $\hat{k}_i^{\pm}(u)$ и токами $\hat{F}_i(u)$, $\hat{E}_i(u)$, которые отвечают простым корням,

$$
\hat{F}_i(u)=\hat{\mathrm{F}}^+_{i+1,i}(u)-\hat{\mathrm{F}}^-_{i+1,i}(u)\,,\quad \hat{E}_i(u)=\hat{\mathrm{E}}^+_{i,i+1}(u)-\hat{\mathrm{E}}^-_{i,i+1}(u)\,,
$$

приведены ниже

$$
\hat{k}_i^{\pm}(u)\hat{F}_i(v)\hat{k}_i^{\pm}(u)^{-1}=f_{[i]}(v,u)\ \hat{F}_i(v),
$$
$$
\hat{k}_{i+1}^{\pm}(u)\hat{F}_i(v)\hat{k}_{i+1}^{\pm}(u)^{-1}=f_{[i+1]}(u,v)\hat{F}_i(v),
$$

$$\hat{k}_i^{\pm}(u)^{-1}\hat{E}_i(v)\hat{k}_i^{\pm}(u) = f_{[i]}(v,u)\ \hat{E}_i(v),$$

$$\hat{k}_{i+1}^{\pm}(u)^{-1}\hat{E}_i(v)\hat{k}_{i+1}^{\pm}(u) = f_{[i+1]}(u,v)\ \hat{E}_i(v),$$

$$((u-v)\epsilon_{i,m} + c_{[i]})\ \hat{F}_i(u)\hat{F}_i(v) = ((u-v)\epsilon_{i,m} - c_{[i]})\ \hat{F}_i(v)\hat{F}_i(u),$$

$$((u-v)\epsilon_{i,m} - c_{[i]})\ \hat{E}_i(u)\hat{E}_i(v) = ((u-v)\epsilon_{i,m} + c_{[i]})\ \hat{E}_i(v)\hat{E}_i(u),$$

$$(u-v-c_{[i+1]})\ \hat{F}_i(u)\hat{F}_{i+1}(v) = (u-v)\ \hat{F}_{i+1}(v)\hat{F}_i(u),$$

$$(u-v)\ \hat{E}_i(u)\hat{E}_{i+1}(v) = (u-v-c_{[i+1]})\ \hat{E}_{i+1}(v)\hat{E}_i(u),$$

$$\begin{aligned}[\hat{E}_i(u),\hat{F}_j(v)\} =&\hat{E}_i(u)\hat{F}_j(v) - (-)^{([i]+[i+1])([j]+[j+1])}\hat{F}_j(v)\hat{E}_i(u) = \\ =&\delta_{i,j}c_{[i+1]}\delta(u,v)\Big(\hat{k}_i^{+}(u)\cdot\hat{k}_{i+1}^{+}(u)^{-1} - \hat{k}_i^{-}(v)\cdot\hat{k}_{i+1}^{-}(v)^{-1}\Big)\,.\end{aligned}$$

Соотношения Серра для простых токов $\hat{E}_i(u)$, $i = 1,\ldots,N$, теперь имеют вид

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}_{u_1,u_2}\Big(&((u_2-u_1)\delta_{i,m} - c_{[i+1]})(\hat{E}_i(u_1)\hat{E}_i(u_2)\hat{E}_{i+1}(v) - \\ &- 2\hat{E}_i(u_1)\hat{E}_{i+1}(v)\hat{E}_i(u_2) + \hat{E}_{i+1}(v)\hat{E}_i(u_1)\hat{E}_i(u_2))\Big) = 0\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}_{u_1,u_2}\Big(&((u_1-u_2)\delta_{i,m} + c_{[i]})(\hat{E}_i(u_1)\hat{E}_i(u_2)\hat{E}_{i-1}(v) - \\ &- 2\hat{E}_i(u_1)\hat{E}_{i-1}(v)\hat{E}_i(u_2) + \hat{E}_{i-1}(v)\hat{E}_i(u_1)\hat{E}_i(u_2))\Big) = 0\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}_{u_1,u_2}\Big(&(u_1-u_2+c)\big[\hat{E}_m(u_1)\hat{E}_m(u_2)\hat{E}_{m-1}(v_1)\hat{E}_{m+1}(v_2) - \\ &- 2\hat{E}_m(u_1)\hat{E}_{m-1}(v_1)\hat{E}_m(u_2)\hat{E}_{m+1}(v_2)\big] + \\ &+ 2c\ \hat{E}_{m-1}(v_1)\hat{E}_m(u_1)\hat{E}_m(u_2)\hat{E}_{m+1}(v_2) + \\ &+(u_2-u_1+c)\big[\hat{E}_{m-1}(v_1)\hat{E}_{m+1}(v_2)\hat{E}_m(u_1)\hat{E}_m(u_2) - \\ &- 2\hat{E}_{m-1}(v_1)\hat{E}_m(u_1)\hat{E}_{m+1}(v_2)\hat{E}_m(u_2)\big]\Big) = 0\,.\end{aligned}$$

Благодаря антиморфизму $\Psi$ аналогичные соотношения существуют для токов $\hat{F}_i(u)$, $i = 1,\ldots,N$, для которых в формулах (1.7.2.4)–(1.7.2.4) следует сделать замену $\hat{E}_i(u) \to \hat{F}_i(u)$ и $c \to -c$. Действие антиморфизма (1.7.2.3) на токи $\hat{F}_i(u)$, $\hat{E}_i(u)$ and $\hat{k}_\ell(u)$ дается теми же формулами, что и в (1.7.2.4).

Заметим, что в коммутационных соотношениях (1.7.2.4), (1.7.2.4), (1.7.2.4) и (1.7.2.4) можно заменить $c_{[i]}$ на $c_{[i+1]}$. Действительно, если $i \neq m$, то $c_{[i]} = c_{[i+1]}$, в то время как при $i = m$ множитель $(u-v)\epsilon_{i,m}$ обращается в ноль, поэтому в этих коммутационных соотношениях можно использовать либо $c_{[i]}$, либо $c_{[i+1]}$.

### 1.7.3 Универсальные векторы Бете

Из соотношений (1.7.2.2) следует, что подалгебры $U^{\pm}$, порожденные модами T--операторов $\mathrm{T}_{ij}(n)$, образуют две борелевские подалгебры в дубле янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$. Помимо этого, в силу (1.7.2.2) они являются подалгебрами Хопфа. Будем называть подалгебры $U^{\pm}$ стандартными борелевскими подалгебрами в дубле янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$.

Как мы уже упоминали, универсальные векторы Бете строятся из матричных элементов одной универсальной матрицы монодромии $\mathrm{T}^{+}_{ij}$ и принадлежат стандартной "положительной" борелевской подалгебре $U^{+}$. Цель данного раздела заключается в том, чтобы выразить универсальные векторы Бете через токовые генераторы дубля янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$ в рамках подхода, развитого в работах [104, 105, 117].

Мы рассмотрим формулы для векторов Бете, которые согласованы с двумя различными способами вложения алгебры меньшего ранга в алгебру большего ранга. А именно, из явных формул для правых векторов Бете $\mathbb{B}(\bar{t})$ можно сделать вывод, что вектор Бете $\mathbb{B}(\bar{t})$ может быть получен путем решения иерархических соотношений, основанных на вложении дубля янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m-1|n))$ в бóльшую алгебру $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$. Аналогичным образом, вектор Бете $\hat{\mathbb{B}}(\bar{t})$ получается в ходе разрешения иерархических соотношений, основанных на вложении дубля янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m|n-1))$ в $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$. Для того чтобы выразить векторы Бете $\mathbb{B}(\bar{t})$ и $\hat{\mathbb{B}}(\bar{t})$ в терминах токовых генераторов, мы будем использовать два различных типа гауссовых разложений матричных элементов матрицы монодромии и соответствующие токовые генераторы [105].

Общая теория соотношения между векторами Бете и токами была разработана в работе [117] и затем применялась в работах [104, 105] к построению иерархических векторов Бете в квантовых интегрируемых моделях, основанных на квантовой аффинной алгебре $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}(N))$. Основным инструментом, использовавшимся в этих работах, был метод проекций на пересечения борелевских подалгебр различного типа.

Для описания векторов Бете $\mathbb{B}(\bar{t})$ и $\mathbb{C}(\bar{t})$ мы будем использовать токовые генераторы, связанные с гаусовым разложением (1.7.2.3)–(1.7.2.3), и антиморфизм (1.7.2.3). В случае векторов Бете $\hat{\mathbb{B}}(\bar{t})$ и $\hat{\mathbb{C}}(\bar{t})$ мы воспользуемся тем же самым антиморфизмом и токовыми генераторами, связанными со вторым гаусовым разложением (1.7.2.3)–(1.7.2.3).

#### 1.7.3.1 Обозначения и соглашения

Мы будем обозначать наборы переменных чертой: $\bar{u}$, $\bar{v}$ и т.д. Для упрощения дальнейших формул мы используем сокращенные обозначения для произведений функций, зависящих от одной или двух переменных. А именно, всякий раз, когда функция

$\lambda_j$ зависит от набора переменных $\lambda_j(\bar u)$, это означает произведение функций $\lambda_j(u_\ell)$ по набору $\bar u$. Аналогичным образом, обозначения $f_{[i]}(\bar u,\bar v)$ (или $g_{[i]}(\bar u,\bar v)$, $h_{[i]}(\bar u,\bar v)$) означают двойные произведения этих функций по соответствующим наборам. Например,

$$\lambda_j(\bar u) = \prod_{u_\ell\in\bar u} \lambda_j(u_\ell), \qquad f_{[i]}(\bar u,\bar v) = \prod_{u_\ell\in\bar u\,,\ v_{\ell'}\in\bar v} f_{[i]}(u_\ell,v_{\ell'}).$$

Помимо этого, мы используем то же соглашение при рассмотрении произведений коммутирующих операторов. Например,

$$\mathrm{T}_{i,j}(\bar u) = \prod_{\ell} \mathrm{T}_{i,j}(u_\ell), \qquad \text{при} \qquad [i]+[j]=0 \mod 2.$$

Введем также несколько рациональных функций которые появятся в тексте далее. Во-первых, для любой функции $x(u_1,u_2)$ мы полагаем

$$\Delta_x(\bar u) = \prod_{1\leqslant\ell<\ell'\leqslant a} x(u_{\ell'},u_\ell) \quad \text{и} \quad \Delta'_x(\bar u) = \prod_{1\leqslant\ell<\ell'\leqslant a} x(u_\ell,u_{\ell'}),$$

где $a=\#\bar u$.

Во-вторых, для произвольных наборов параметров $\bar u$ и $\bar v$ определим

$$\gamma_i(\bar u) = \frac{\Delta_{f_{[i]}}(\bar u)}{\Delta_h(\bar u)^{\delta_{i,m}}} \quad \text{и} \quad \gamma_i(\bar u,\bar v) = \frac{f_{[i]}(\bar u,\bar v)}{h(\bar u,\bar v)^{\delta_{i,m}}}\,. \tag{1.7.1}$$

Первая из этих функций совпадает с функцией $\Delta_{f_{[i]}}(\bar u)$ при $i\neq m$ и с функцией $\Delta_g(\bar u)$ при $i=m$. Вторая функция совпадает с функцией $f_{[i]}(\bar u,\bar v)$ при $i\neq m$ и с функцией $g(\bar u,\bar v)$ при $i=m$. Аналогично определим

$$\hat\gamma_i(\bar u) = \frac{\Delta_{f_{[i+1]}}(\bar u)}{\Delta'_h(\bar u)^{\delta_{i,m}}} \quad \text{и} \quad \hat\gamma_i(\bar u,\bar v) = \frac{f_{[i+1]}(\bar u,\bar v)}{h(\bar v,\bar u)^{\delta_{i,m}}}\,.$$

При $i\neq m$, $\hat\gamma_i(\bar u) = \Delta_{f_{[i+1]}}(\bar u)$ и $\hat\gamma_i(\bar u,\bar v) = f_{[i+1]}(\bar u,\bar v)$, а при $i=m$, $\hat\gamma_m(\bar u) = \Delta'_g(\bar u)$ и $\hat\gamma_m(\bar u,\bar v) = g(\bar v,\bar u)$. Заметим, что функция $\gamma_m(\bar u)$ отличается от функции $\hat\gamma_m(\bar u)$ на множитель $(-)^{\#\bar u(\#\bar u-1)/2}$. Аналогично

$$\gamma_m(\bar u,\bar v) = (-)^{\#\bar u\cdot\#\bar v}\hat\gamma_m(\bar u,\bar v)\,.$$

Заметим также, что $\gamma_i(\bar u)=\hat\gamma_i(\bar u)$ и $\gamma_i(\bar u,\bar v)=\hat\gamma_i(\bar u,\bar v)$ при $i\neq m$.

#### 1.7.3.2 Вектор Бете $\mathbb{B}(\bar t)$ и дуальный вектор Бете $\mathbb{C}(\bar t)$

Прежде всего мы объясним связь между вектором Бете $\mathbb{B}(\bar t)$ и токовым представлением (1.7.2.4)–(1.7.2.4).

Пусть $U_F \subset DY(\mathfrak{gl}(m|n))$ является подалгеброй дубля янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$, порожденной модами простых токов $F_i(\ell)$, $i = 1,\ldots,N$, $\ell \in \mathbb{Z}$, и модами "положительных" картановских токов $k_j(\ell')$, $j = 1,\ldots,N+1$, $\ell' \geqslant 0$. В рамках конструкции квантового дубля подалгебра $U_E \subset DY(\mathfrak{gl}(m|n))$, являющаяся дуальной к $U_F$, порождается модами простых токов $E_i(\ell)$, $i = 1,\ldots,N$, $\ell \in \mathbb{Z}$, и модами "отрицательных" картановских токов $k_j(\ell')$; $j = 1,\ldots,N+1$; $\ell' < 0$.

Будем называть подалгебры $U_F$ и $U_E$ токовыми борелевскими подалгебрами. Они являются подалгебрами Хопфа в дубле янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$ по отношению к так называемому копроизведению Дринфельда

$$\begin{aligned}
&\Delta^{(D)}(F_i(z)) = F_i(z) \otimes \mathbf{1} + k^+_{i+1}(z)\left(k^+_i(z)\right)^{-1} \otimes F_i(z),\\
&\Delta^{(D)}(k^\pm_j(z)) = k^\pm_j(z) \otimes k^\pm_j(z),\\
&\Delta^{(D)}(E_i(z)) = \mathbf{1} \otimes E_i(z) + E_i(z) \otimes k^-_{i+1}(z)\left(k^-_i(z)\right)^{-1},
\end{aligned}$$

которое очевидным образом отличается от копроизведения, заданного соотношением (1.7.2.2).

Для того чтобы выразить векторы Бете $\mathbb{B}(\bar t)$ через генераторы токов, требуется только одна токовая борелевская подалгебра $U_F$ и ее коалгебраические свойства, определяемые первыми двумя равенствами в формуле (1.7.3.2). Рассмотрим следующие пересечения токовой борелевской подалгебры со стандартной борелевской подалгеброй $U^\pm$:

$$U^-_F = U_F \cap U^-\,, \qquad U^+_F = U_F \cap U^+\,.$$

Каждое из этих пересечений есть подалгебра в $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$ [117], и они являются коидеалами по отношению к копроизведению (1.7.3.2)

$$\Delta^{(D)}(U^+_F) = U^+_F \otimes U_F\,, \qquad \Delta^{(D)}(U^-_F) = U_F \otimes U^-_F\,.$$

Для того чтобы это увидеть, введем разложение следующей комбинации картановских токов

$$k^+_{i+1}(z)\left(k^+_i(z)\right)^{-1} = \mathbf{1} + \sum_{\ell\geqslant 0} \kappa_i(\ell) z^{-\ell-1}\,.$$

Тогда копроизведение (1.7.3.2) отображает моды $F_i(\ell)$ токов $F_i(z)$ в

$$\Delta^{(D)}\left(F_i(\ell)\right) = F_i(\ell) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes F_i(\ell) + \sum_{\ell'\geqslant 0} \kappa_i(\ell') \otimes F_i(\ell-\ell'-1)\,.$$

В силу соотношений (1.7.3.2) свойства (1.7.3.2) становятся очевидными.

Согласно конструкции Картана–Вейля дубля янгиана, мы должны определить глобальное упорядочение образующих этой алгебры. Есть два различных варианта для этого упорядочения. Выберем упорядочение таким образом, чтобы элементы подалгебры $U_F^-$ предшествовали элементам подалгебры $U_F^+$ [117, 118]. Будем говорить, что произвольный элемент $\mathcal{F} \in U_F$ упорядочен, если он представлен в виде

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_- \cdot \mathcal{F}_+ ,$$

где $\mathcal{F}_\pm \in U_F^\pm$.

Согласно общей теории [117] можно определить проекции любых упорядоченных элементов подалгебры $U_F$ на подалгебры (1.7.3.2) с помощью формул

$$P_f^+(\mathcal{F}_- \cdot \mathcal{F}_+) = \varepsilon(\mathcal{F}_-)\, \mathcal{F}_+ , \quad P_f^-(\mathcal{F}_- \cdot \mathcal{F}_+) = \mathcal{F}_-\, \varepsilon(\mathcal{F}_+) , \quad \mathcal{F}_\pm \in U_F^\pm ,$$

где отображение коединицы $\varepsilon : U_F \to \mathbb{C}$ определено по правилу

$$\varepsilon(F_i(\ell)) = 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon(k_j(\ell)) = 0 .$$

Пусть $\overline{U}_F$ есть пополнение алгебры $U_F$, образованное бесконечными суммами мономов, являющимися упорядоченными произведениями вида $\mathcal{A}_{i_1}(\ell_1) \cdots \mathcal{A}_{i_a}(\ell_a)$ с $\ell_1 \leqslant \cdots \leqslant \ell_a$, где $\mathcal{A}_{i_l}(\ell_l)$ совпадает с $F_{i_l}(\ell_l)$ или $k_{i_l}(\ell_l)$. Можно доказать [117], что

(1) действие проекций (1.7.3.2) может быть продолжено $\overline{U}_F$;
(2) для любых $\mathcal{F} \in \overline{U}_F$ с $\Delta^{(D)}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}' \otimes \mathcal{F}''$ выполнено следующее равенство

$$\mathcal{F} = P_f^-\left(\mathcal{F}'\right) \cdot P_f^+\left(\mathcal{F}''\right) .$$

Формула (1.7.3.2) является важным инструментом для вычисления универсальных векторов Бете. Она позволяет представить произвольное произведение токов в упорядоченной форме, используя простые формулы токового копроизведения Дринфельда.

Теперь мы можем дать определение универсального вектора Бете. Пусть

$$\bar{t} \ = \{t_1^1, \ldots, t_{r_1}^1; t_1^2, \ldots, t_{r_2}^2; \ldots; t_1^N, \ldots, t_{r_N}^N\}$$

является некоторым набором параметров. Верхний индекс указывает тип параметра, отвечающего простому корню, а нижний индекс соответствует различным параметрам заданного типа. Каждому типу $\ell = 1, \ldots, N$ отвечает $r_\ell$ параметров Бете.

Определим упорядоченное произведение полных токов

$$\mathcal{F}(\bar{t}) = \prod_{1\leqslant a\leqslant N}^{\longrightarrow} \left( \prod_{1\leqslant \ell\leqslant r_a}^{\longrightarrow} F_a(t^a_\ell) \right),$$

где символом $\overset{\longleftarrow}{\prod_a} A_a$ (соответственно, символом $\overset{\longrightarrow}{\prod_a} A_a$) обозначено упорядоченное произведение некоммутирующих операторов $A_a$, так что $A_\ell$ находится справа (соответственно, слева) от $A_{\ell'}$, если $\ell' \geqslant \ell$:

$$\prod_{j\geqslant a\geqslant i}^{\longleftarrow} A_a = A_j\, A_{j-1}\, \cdots\, A_{i+1}\, A_i \quad \text{и} \quad \prod_{i\leqslant a\leqslant j}^{\longrightarrow} A_a = A_i\, A_{i+1}\, \cdots\, A_{j-1}\, A_j\, .$$

Произведение токов $\mathcal{F}(\bar{t})$ является формальным рядом по отношениям $t^b_k/t^c_l$ и $t^a_i/t^a_j$, принимающим значения в пополнении $\overline{U}_F$ (см. [117]). Произведение (1.7.3.2) имеет полюсы при некоторых значениях отношений $t^b_k/t^c_l$ и $t^a_i/t^a_j$. Операторнозначные коэффициенты в этих полюсах принимают значения в пополнении $\overline{U}_F$ и могут быть отождествлены с токами, отвечающим сложным корням. Отметим также, что в силу коммутационных соотношений между токами произведение (1.7.3.2), а также его проекции, являются $c$-симметричными.

Введем нормированное произведение токов

$$\mathsf{F}(\bar{t}) = \frac{\prod_{\ell=1}^{N} \gamma_\ell(\bar{t}^\ell)}{\prod_{\ell=1}^{N-1} f_{[\ell+1]}(\bar{t}^{\ell+1},\bar{t}^\ell)}\ \mathcal{F}(\bar{t}),$$

где $\gamma_\ell$ определено формулой (1.7.1). Тогда универсальный off-shell вектор Бете $\mathbb{B}(\bar{t})$ определяется как проекция от этого нормированного произведения, примененная к сингулярному вектору $|0\rangle$

$$\mathbb{B}(\bar{t}) = P^+_f\left(\mathsf{F}(\bar{t})\right) \prod_{s=1}^{N} \lambda_s(\bar{t}^s)|0\rangle\, .$$

Обратим внимание на то, что благодаря коммутационным соотношениям между токами (1.7.2.4) и (1.7.2.4) нормированное произведение токов (1.7.3.2) симметрично относительно перестановок параметров Бете одного типа.

Нормировка универсального off-shell вектора Бете выбирается таким образом, чтобы убрать все нули и полюсы, возникающие из произведения токов. Например, в соответствии с коммутационными отношения (1.7.2.4) произведения токов $\mathcal{F}_\ell(\bar{t}^\ell)$ имеют полюсы, если $t^\ell_j - t^\ell_i + c_{[\ell]} = 0$ при $j > i$ и $\ell \neq m$, и нули для всех $\ell$, если $t^\ell_j - t^\ell_i = 0$. Потенциальные сингулярности компенсируются рациональными функциями, которые находятся в числителе множителя в формуле (1.7.3.2). С другой стороны, произведения токов $\mathcal{F}_\ell(\bar{t}^\ell)\mathcal{F}_{\ell+1}(\bar{t}^{\ell+1})$ имеют полюсы, если $t^{\ell+1}_j - t^\ell_i = 0$, и нули, если $t^{\ell+1}_j - t^\ell_i + c_{[\ell+1]} = 0$

для всех $i,j$. Данные возможные сингулярности компенсируются произведением рациональных функций $f_{[\ell+1]}(\bar{t}^{\ell+1},\bar{t}^{\ell})^{-1}$, которые находятся в знаменателе множителя в формуле (1.7.3.2).

Наша стратегия состоит в том, чтобы сначала вычислить проекцию в формуле (1.7.3.2), а затем записать результат этого вычисления как некий многочлен от матричных элементов матрицы монодромии. После этого мы определим дуальный вектор Бете $\mathbb{C}(\bar{t})$ по формуле

$$\mathbb{C}(\bar{t}) = \Psi\big(\mathbb{B}(\bar{t})\big),$$

где с помощью соотношений $\Psi(|0\rangle) = \langle 0|$ и $\Psi(\langle 0|) = |0\rangle$ мы продолжили антиморфизм (1.7.2.3) с алгебры на векторы представления этой алгебры.

Альтернативный способ получения формулы для дуального вектора Бете можно осуществить с помощью метода проекций и иного выбора токовой борелевской подалгебры, копроизведения Дринфельда и связанных с ними проекций от упорядоченного произведения токов

$$\mathcal{E}(\bar{t}) = \prod_{N\geqslant a\geqslant 1}^{\longleftarrow} \left( \prod_{r_a\geqslant \ell\geqslant 1}^{\longleftarrow} E_a(t^a_\ell) \right).$$

Здесь мы не занимаемся этими вычислениями.

#### 1.7.3.3 Вектор Бете $\hat{\mathbb{B}}(\bar{t})$ и дуальный вектор Бете $\hat{\mathbb{C}}(\bar{t})$

Для описания вектора Бете $\hat{\mathbb{B}}(\bar{t})$ и дуального к нему вектора $\hat{\mathbb{C}}(\bar{t})$ следует пользоваться второй токовой реализацией (1.7.2.4)–(1.7.2.4) дубля янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$, заданной токами $\hat{F}_i(z)$, $\hat{E}_i(z)$ и $\hat{k}^{\pm}_j(z)$, которые связаны с элементами матрицы монодромии посредством гауссова разложения (1.7.2.3)–(1.7.2.3) и формулами Френкеля–Динга (1.7.2.4).

Как и в предыдущих разделах, для описания вектора Бете $\hat{\mathbb{B}}(\bar{t})$ мы определим борелевскую подалгебру $\hat{U}_F$ такую, что “положительные” картановские токи $\hat{k}^+_j(z)$ принадлежат $\hat{U}_F$ и имеют следующие коалгебраические свойства

$$\hat{\Delta}^{(D)}(\hat{F}_i(z)) = \mathbf{1}\otimes \hat{F}_i(z) + \hat{F}_i(z)\otimes \hat{k}^+_i(z)\left(\hat{k}^+_{i+1}(z)\right)^{-1},$$
$$\hat{\Delta}^{(D)}(\hat{k}^+_j(z)) = \hat{k}^+_j(z)\otimes \hat{k}^+_j(z).$$

Мы вновь рассматриваем пересечения этой токовой борелевской подалгебры со стандартными борелевскими подалгебрами $U^{\pm}$

$$\hat{U}^-_F = \hat{U}_F\cap \hat{U}^-\,, \qquad \hat{U}^+_F = \hat{U}_F\cap \hat{U}^+\,,$$

и проверяем свойства коидеальности этих пересечений

$$\hat{\Delta}^{(D)}(\hat{U}_F^+) = \hat{U}_F \otimes \hat{U}_F^+\,, \qquad \hat{\Delta}^{(D)}(\hat{U}_F^-) = \hat{U}_F^- \otimes \hat{U}_F\,,$$

по отношению к копроизведению (1.7.3.3).

Используя то же упорядочение для генераторов Картана–Вейля подалгебры $\hat{U}_F$, что и упорядочение элементов в подалгебре $U_F$, мы будем говорить, что произвольный элемент $\hat{\mathcal{F}} \in \hat{U}_F$ упорядочен, если

$$\hat{\mathcal{F}} = \hat{\mathcal{F}}_- \cdot \hat{\mathcal{F}}_+\,,$$

где $\hat{\mathcal{F}}_\pm \in \hat{U}_F^\pm$.

И снова, согласно общей теории, сформулированной в работе [117], мы можем определить проекции любых упорядоченных элементов в подалгебрах $\hat{U}_F$ и $\hat{U}_E$ на подалгебры (1.7.3.3), используя формулы

$$\hat{P}_f^+(\hat{\mathcal{F}}_- \cdot \hat{\mathcal{F}}_+) = \hat{\varepsilon}(\hat{\mathcal{F}}_-)\,\hat{\mathcal{F}}_+\,, \quad \hat{P}_f^-(\hat{\mathcal{F}}_- \cdot \hat{\mathcal{F}}_+) = \hat{\mathcal{F}}_-\,\hat{\varepsilon}(\hat{\mathcal{F}}_+)\,, \quad \hat{\mathcal{F}}_\pm \in \hat{U}_F^\pm\,,$$

где отображение коединицы $\hat{\varepsilon} : DY(\mathfrak{gl}(m|n)) \to \mathbb{C}$ определено согласно правилам

$$\hat{\varepsilon}(\hat{F}_i(\ell)) = 0\,, \quad \varepsilon(\hat{k}_j(\ell)) = 0\,,$$

а $\hat{F}_i(\ell)$ и $\hat{k}_j(\ell)$ являются модами токов $\hat{F}_i(z)$ и $\hat{k}_i^+(z)$ во второй токовой реализации дубля Янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$.

Определив пополнение $\overline{\hat{U}}_F$, можно проверить [117], что:

(1) действие проекций (1.7.3.3) может быть продолжено на алгебры $\overline{\hat{U}}_F$;
(2) для любого $\hat{\mathcal{F}} \in \overline{\hat{U}}_F$ с $\hat{\Delta}^{(D)}(\hat{\mathcal{F}}) = \hat{\mathcal{F}}' \otimes \hat{\mathcal{F}}''$ мы имеем

$$\hat{\mathcal{F}} = \hat{P}_f^-\left(\hat{\mathcal{F}}''\right) \cdot \hat{P}_f^+\left(\hat{\mathcal{F}}'\right)\,.$$

Рассмотрим нормированное упорядоченное произведение токов для набора (1.7.3.2) параметров Бете

$$\hat{\mathsf{F}}(\bar{t}) = \frac{\prod_{\ell=1}^{N} \hat{\gamma}_\ell(\bar{t}^\ell)}{\prod_{\ell=1}^{N-1} f_{[\ell+1]}(\bar{t}^{\ell+1},\bar{t}^\ell)}\; \hat{\mathcal{F}}(\bar{t})\,,$$

где

$$\hat{\mathcal{F}}(\bar{t}) = \prod_{N\geqslant a\geqslant 1}^{\longleftarrow} \left( \prod_{r_a\geqslant \ell\geqslant 1}^{\longleftarrow} \hat{F}_a(t_\ell^a) \right).$$

Универсальные off-shell векторы Бете, связанные со второй токовой реализацией дубля янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$, определяются через действие проекций, определенных выше, на сингулярные вектор $|0\rangle$ следующим образом

$$\hat{\mathbb{B}}(\bar{t}) = \hat{P}_f^+\left(\hat{\mathsf{F}}(\bar{t})\right)\prod_{s=1}^{N}\lambda_{s+1}(\bar{t}^s)|0\rangle\,.$$

Нормировка этого универсального off-shell вектора Бете снова выбрана таким образом, чтобы убрать все нули и полюсы, возникающие из произведения токов.

Дуальный вектор Бете $\hat{\mathbb{C}}(\bar{t})$ определяется с помощью антиморфизма (1.7.2.3):

$$\hat{\mathbb{C}}(\bar{t}) = \Psi\big(\hat{\mathbb{B}}(\bar{t})\big)\,.$$

## 1.8 Вырождение подалгебр Бете в янгиане $Y(\mathfrak{gl}_n)$

### 1.8.1 Введение

Янгиан для $\mathfrak{gl}_n$ это ассоциативная алгебра, исторически первый пример квантовой группы. Янгиан $Y(\mathfrak{gl}_n)$ это алгебра Хопфа являющаяся деформацией $U(\mathfrak{gl}_n[t])$, где $\mathfrak{gl}_n[t]$ это бесконечномерная алгебра Ли полиномов со значениями в $\mathfrak{gl}_n$. Эта алгебра была впервые рассмотрена в работах Л. Фадеева и Ленинградской школы при изучении обратной задачи рассеяния. В $Y(\mathfrak{gl}_n)$ существует семейство коммутативных подалгебр, параметризованных комплексными матрицами $C \in \mathrm{Mat}_n$, называемые подалгебрами Бете. Это семейство возникло из интегрируемых систем в статистической механике и алгебраического анзаца Бете.

Обозначим через $T$ максимальный тор $GL_n$, то есть подгруппу диагональных матриц в $GL_n$. В настоящей работе мы ограничимся подалгебрами Бете, для которых $C \in T$. Пусть $T^{reg}$ — множество регулярных элементов тора, то есть множество диагональных матриц из $T$ с попарно различными собственными значениями. Мы будем часто использовать вложение $GL_n \subset \mathfrak{gl}_n = \mathrm{Mat}_n$ и рассматривать $C$ как элемент картановской подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}_n$. Известно, что $B(C)$ является свободной полиномиальной алгеброй и что она является максимальной коммутативной подалгеброй в $Y(\mathfrak{gl}_n)$ для всех $C \in T^{reg}$.

Для нерегулярного $C \in T\backslash T^{reg}$, подалгебра $B(C)$ становится меньше. Но существует естественный способ построить коммутативную подалгебру такого же размера, как и для $C \in T^{reg}$ для любого $C_0 \in \mathfrak{h}\backslash T^{reg}$ посредством предельного перехода. Например, можно получить подалгебру Гельфанда-Цейтлина в янгиаге как предел некоторого однопараметрического семейства подалгебр Бете, где $C(t) \in T^{reg}$ при $t \neq 0$ и $C(0) = E_{11}$. В общем случае, такая подалгебра не единственна, так как она зависит от однопараметрического семейства $C(t)$ такого, что $C(0) = C_0$. Наша цель описать все возможные предельные подалгебры.

Образы подалгебр Бете в универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{gl}_n)$ при гомоморфизме вычисления известны как "алгебры сдвига аргумента."Задача описания всевозможных пределов подалгебр сдвига аргумента была поставлена Винбергом в конце 1990-ых годов. Ответ был дан В.Шуваловым, и, позже, в более алгебро-геометрических терминах, L. Aguirre, G. Felder and A. Veselov. Грубо говоря, их описание состоит в следующем. Алгебры сдвига аргумента сами параметризованы регулярными $n \times n$-матрицами с точностью до пропорциональности и прибавления скалярной матрицы. Это пространство параметров можно рассматривать как пространство конфигураций $n$ попарно различных точек на комплексной прямой. Оказывается, что предельные алгебры сдвига аргумента параметризованы замыканием Делиня-Мамфорда этого пространства, и что все предельные подалгебры максимальные коммутативные и свободные. Более того,существует точная индуктивная процедура, строящая предельные подалгебры сдвига аргумента из подалгебр сдвига аргумента для меньших $n$. Естественно ожидать похожего описания предельных подалгебр для янгиана.

### 1.8.2 Пределы подалгебр Бете

Предельные подалгебры могут быть определены в алгебро-геометрических терминах (мы делаем это в разделе 2). Грубо говоря, конструкция подалегбр Бете может быть рассмотрена как регулярное отображение из $T^{reg}$ в "Грассманиан"подпространств в $Y(\mathfrak{gl}_n)$ такой же размерности, как $B(C)$. Пространство $T^{reg}$ является некомпактным, тогда как Грассманиан (в некотором смысле) компактен. Поэтому мы можем взять замыкание образа этого отображения и получить новые подалгебры с таким же рядом Пуанкаре. Мы называем эти подалгебры предельными.

Так как подалгебры $B(C)$ не меняются при растяжениях $C$, пространство параметров для семейства $B(C)$ есть фактор $T^{reg}/\mathbb{C}^*$ множества регулярных элементов тора по подгруппе скалярных матриц. Мы можем рассматривать пространство $T^{reg}/\mathbb{C}^*$ как пространство модулей $M_{0,n+2}$ рациональных кривых с $n+2$ отмеченными точками (мы можем сопоставить матрице $C$ с собственными значениями $z_1,\ldots,z_n$ кривую $\mathbb{P}^1$ с отмеченными точками $0,z_1,\ldots,z_n,\infty$). Поэтому предельные подалгебры семейства $B(C)$ параметризуются некоторой компактификацией пространства $M_{0,n+2}$. Основной результат настоящей статьи это следующая теорема.

Основная теорема Замыкание $T^{reg}/\mathbb{C}^*$, параметризующее предельные подалгебры, изоморфно компактификации Деліня-Мамфорда $\overline{M_{0,n+2}}$. Все предельные подлгебры есть максимальные коммутативные и свободные алгебры в $Y(\mathfrak{gl}_n)$.

На самом деле мы опишем все предельные подалгебры как произведения меньших подалгебр Бете и некоторых алгебр сдвига аргумента (которые являются образами подалгебр Бете в универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{gl}_n)$ при отображении вычисления).

Естественно ожидать такие результаты в свете биспектральной двойственности (см. Мухин, Тарасов, Варченко), которая соотносит образы подалгебр Бете в тензорном произведении с алгеброй высших Гамильтонианов тригонометрической модели Годена для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_k$. Последние являются образами подалгебры Годена в тензорном произведении $n+1$ копии универсальной обертывающей алгебры $\mathfrak{gl}_k$. С другой стороны, доказано, что замыкание пространства параметров этого семейства подалгебр Годена это $\overline{M_{0,n+2}}$. Проблема в этом подходе состоит в том, что мы имеем дело с образами подалгебры Бете в некотором конкретном представлении, поэтому замыкание пространства параметров может оказаться другим. Мы используем другой подход, базирующийся на подлгебрах сдвига аргумента и централизаторной конструкции Ольшанского.

Основная идея доказательства состоит в сведении задачи о замыкании к задаче о замыкании в $U(\mathfrak{gl}_N)$, где $N$ достаточно большое. Для этого мы с одной стороны используем центарлизаторную конструкцию Ольшанского, которая приближает янгиан $Y(\mathfrak{gl}_n)$ с помощью подалгебр $U(\mathfrak{gl}_{n+k})^{\mathfrak{gl}_k}$, с другой стороны, результаты Шувалова и Тарасова, которые описывают предельные подалгебры алгебр сдвига аргумента.

### 1.8.3 Подалгебры сдвига аргумента

Пусть $\hat{F}(C) \subset U(\mathfrak{gl}_n)$ — образ $B(C) \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$ при отображении вычисления $Y(\mathfrak{gl}_n) \to U(\mathfrak{gl}_n)$. Подалгебры $\hat{F}(C)$ не меняется при добавлении скалярной матрицы к $C$. Присоединенная градуированная $\hat{F}(C)$ есть Пуассоново коммутативная алгебра $F(C) \subset S(\mathfrak{gl}_n)$ известная как алгебра сдвига аргумента так как она порождена инвариантами присоединенного представления $S(\mathfrak{gl}_n)$ сдвинутых на $tC$ для всех $t \in \mathbb{C}$.

Пусть $C$ диагональная матрица с попарно различными собственными значениями $z_1, \ldots, z_n$. Тогда алгебра $F(C)$ содержит квадратичные элементы $H_i := \sum\limits_{j \neq i} \frac{e_{ij}e_{ji}}{z_i - z_j}$ которые являются коэффициентами (некоторой версии) $KZ$ связности. Более того $F(C)$ и $\hat{F}(C)$ однозначно определены подпространствами $Q_C \subset S(\mathfrak{gl}_n)$ которое является линейным пространством, порожденным $H_i$. Заметим, что $H_i$ не меняются при афинном преобразовании всех $z$, следовательно пространство параметров соответсвующих алгебр сдвига аргумента есть конфигурационное пространство $n$ попарно различных точек на афинной прямой, или, эквивалентно, конфигурационным пространством $M_{0,n+1}$ $n+1$ различной точки на проективной прямой. Из результатов Aguirre, Felder and Veselov следует, что замыкание семейства подпространств $Q_C \subset S(\mathfrak{gl}_n)$ есть компактификация Деліня-Мамфорда $\overline{M_{0,n+1}}$, что важно для нашего доказательства.

### 1.8.4 Централизаторная конструкция

Пусть $A_0 = \mathbb{C}[\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\ldots,]$ — фильтрованная алгебра многочелнов от бесконечного числа переменных, так что $\deg \mathcal{E}_i = i$. Централизаторная конструкция Ольшанского это набор сюръективных гомоморфизмов фильтрованных алгебр $Y(\mathfrak{gl}_n)\otimes A_0 \to U(\mathfrak{gl}_{n+k})^{\mathfrak{gl}_k}$, обобщающих отображение вычисления. Известно, что пересечение ядер этих гомоморфизмов нулевое, следовательно, этот набор гомоморфизмов можно рассматривать как асимптотический изоморфизм, то есть для любой фильтрованной компоненты $Y(\mathfrak{gl}_n)\otimes A_0$ существует $K \in \mathbb{Z}$ такое, что для любого $k > K$ ограничение гомоморфизма на фильтрованную компоненту является изоморфизмом. Идея доказательства состоит в анализе пространства параметров образов $B(C)$ при централизаторной конструкции. Так как централизаторная конструкция — изоморфизм, то замыкание пространство стабилизируется для $k >> 0$.

### 1.8.5 План доказательства

Мы докажем, что образ $B(C)\otimes A_0$ в централизаторе $U(\mathfrak{gl}_{n+k})^{\mathfrak{gl}_k}$ содержится в некоторой нерегулярной алгебре сдвига аргумента $\hat{F}(C^{(k)})$ и, более того, $\hat{F}(C^{(k)})$ асимптотически изоморфно $B(C)\otimes A_0$. Далее мы покажем, что замыкание пространства параметров для подалгебр $\hat{F}(C^{(k)})$ есть $\overline{M_{0,n+2}}$ (реализованное как подмногообразие в $\overline{M_{0,n+k+1}}$, параметризующее все алгебры сдвига аргумента в $U(\mathfrak{gl}_{n+k})$). Так как замыкание пространства параметров для $\hat{F}(C^{(k)})$ не зависит от $k$, замыкание пространства параметров для алгебр Бете в $Y(\mathfrak{gl}_n)$ есть тоже $\overline{M_{0,n+2}}$.

Далее, из результатов Шувалова и Тарасова мы выводим, что любая предельная алгебра вида $\hat{F}(C^{(k)})$ является свободной полиномиальной и максимальной коммутативной подалгеброй в $U(\mathfrak{gl}_{n+k})^{\mathfrak{gl}_k}$. Так как $B(C)\otimes A_0$ асимптотически изоморфно $\hat{F}(C^{(k)})$, тот же факт верен для предельных подалгебр Бете, отвечающих точкам в $\overline{M_{0,n+2}}$. Используя результаты Шувалова, а именно описание предельных подалгебр сдвига аргументы, мы явно описываем простейшие пределы, отвечающие общей точки в страте коразмерности 1 в $\overline{M_{0,n+2}}$, в терминах подалгебр Бете и алгебр сдвига аргумента для меньших $n$. Повторяя эту процедуру мы получаем явное описание всех предельных подалгебр Бете.

### 1.8.6 Обобщение для янгианов других типов

Для любой полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$(или, более общо, для лююой алгебры Каца-Муди $\mathfrak{g}$) можно построить янгиан $Y(\mathfrak{g})$, квантовую группу, получаемую из рациональной $R-$ матрицы для $\mathfrak{g}$. Для любого элемента $C$ картанова тора $T$ соответствующей группы Ли $G$ можно сопоставить подалгебру Бете, порожденную следами произведений $C$ с $R-$ матрицей во всех неприводимых представлениях. Это коммутативная подалгебра, которая, гипотетически, макимальная коммутативная для регулярного $C$. Многообразие, параметризующие все возможные пределы таких коммутативных подалгебр является компактификацией множества $T^{reg}$ регулярных элементов тора (как про-алгебраическая схема). Наша теорема для случая $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ утверждает, что это замыкание есть $\overline{M_{0,n+2}}$. Естественное обобщение этого утверждения на алгебры Ли других типов это Де Кончини- Прочези замыкание дополнения до некоторого набора подмногообразий в торическом многообразии. Рассмотрим торическое многообразие $X$ (на нем действует максимальный тор $T \subset G$) которое отвечает вееру из корневых гиперплоскостей. Другими словами, $X$ есть замыкание общей $T$- орбиты в многообразии флагов $G/B$. Мы можем рассматривать $T^{reg}$ как дополнение к набору гиперповерхностей в $X$. Следую работе Де Кончини и Прочези, можно построить компактификацию $M_{\mathfrak{g}}$ $T^{reg}$ с помощью раздутия неразложимых пересечений гиперповерхностей в $X$.

Гипотеза. $M_{\mathfrak{g}}$ есть пространство параметров подалгебр Бете в янгиане $Y(\mathfrak{g})$.

Замечание. Заметим, что $\overline{M_{0,n+2}}$ есть замыкание Де Кончини-Прочези $T^{reg}$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$.

Замечание. Для бесконечных систем корней (например, для афинных алгебр Каца-Муди) $M_{\mathfrak{g}}$ не является хорошо определенной алгебраической схемой, но хорошо определено как про-алгебраическая схема. С другой стороны, в этом случае подалебры Бете сами являются не подалгебрами янгиана, а некоторого пополнения, которое есть обратный предел определенных факторов янгиана. Поэтому, мы можем обобщить нашу гипотезу для янгианов бесконечномерных алгебр Ли, говоря, что эти два обратных предела изоморфны.

### 1.8.7 Приложение к кристалам

По аналогии с алгебрами сдвига аргумента и подалгебрами Годена, мы ожидаем что для вещественного значения параметра соответствующая предельная подалгебра имеет простой спектр в любом неприводимом представлении в любом неприводимом(или интегрируемом) представлении янгиага. Тогда можно построить накрытие $M_{\mathfrak{g}}(\mathbb{R})$ для любого неприводимого представления $Y(\mathfrak{g})$. Слои этого накрытия есть множества общих собственных подпротранств для элементов подалгебры Бете в этом представлении. Для модулей Кириллова-Решитихина, мы ожидаем естественную биекцию слоев этого накрытия с соответствующими слоями кристалла Кириллова-Решитихина, следовательно, получаем действие фундаментальной группы $\pi_1(M_{\mathfrak{g}}(\mathbb{R}))$ на кристалле. Мы так же ожидаем, что это действие может быть описано в комбинаторных терминах.

## 1.9 Производные эквивалентности для алгебр симплектических отражений

Цель данной статьи — установить производную эквивалентность между категориями модулей над симплектическими алгебрами (введенных Этингофом и Гинзбургом) и рассмотреть некоторые приложения.

Давайте кратко напомним что такое эти алгебры. Пусть $V$ — конечномерное симплектическое векторное пространство над $\mathbb{C}$. Пусть $\Gamma$ — конечная подгруппа $\mathrm{Sp}(V)$. Тогда мы можем рассмотреть смэш-произведение $\mathbb{C}[V]\#\Gamma$, которое совместимо с естественной градуировкой. Симплектическая алгебра отражений $H_c$ это фильтрованная деформация $\mathbb{C}[V]\#\Gamma$ (замечание для экспертов: в этой статье мы рассматриваем только деформации с $t = 1$, о которых нужно думать как о "кватнованиях"$\mathbb{C}[V]\#\Gamma$). Здесь $c$ — параметр деформации, то есть $\Gamma$-инвариантная функция, со значениями в $\mathbb{C}$, определенная на множестве $S$ симплектических отражений в $\Gamma$. Пусть $\mathfrak{p}$ обозначает пространство таких функций. Под симплектическим отражением мы имеем ввиду элемент $s \in \Gamma$, такой что $\mathrm{rk}(s-1) = 2$. Мы напомним определение $H_c$ позже.

Рассмотрим $\mathbb{C}\Gamma \subset H_c$ и усредняющий идемпотент $e \in \mathbb{C}\Gamma$. Сферическая подалгебра $eH_ce$ есть квантование $\mathbb{C}[V]^{\Gamma}$. Многообразие $V/\Gamma$ есть коническая симплектическая особенность. Рассмотрим ее $\mathbb{Q}$-факториальную разрешению $X$. Мы можем говорить о фильтрованном квантовании $\mathcal{O}_X$. Это есть пучки фильтрованных алгебр $X$ (в так называемой конической топологии). Фильтрованное квантование $X$ параметризуется $H^2(X^{reg},\mathbb{C})$, для $\lambda \in H^2(X^{reg},\mathbb{C})$ мы пишем $\mathcal{D}_\lambda$ для соответствующего квантования. Более того, известно, что есть афинный изоморфизм $\mathfrak{p} \xrightarrow{\sim} H^2(X^{reg},\mathbb{C})$, $c \leftrightarrow \lambda$, такой что $eH_ce \cong \Gamma(\mathcal{D}_\lambda)$.

Далее, рассмотрим первый основной результат этой статьи (который стандартен, если $X$ гладкое, но, для большинства $\Gamma$ многообразие $X$ не гладкое).

Теорема 1.9.1. Пучок алгебр $\mathcal{D}_\lambda$ простой для любого $\lambda \in H^2(X^{reg},\mathbb{C})$.

Наш следующий основной результат — доказательство гипотезы из [227, Section 7.1]. Мы говорим, что параметры $c,c' \in \mathfrak{p}$ имеют целая разность если их образы в $H^2(X^{reg},\mathbb{C})$ лежат в образе $\mathrm{Pic}(X^{reg})$.

Теорема 1.9.2. Пусть $c,c' \in \mathfrak{p}$ имеют целочисленную разность. Тогда существует производная эквивалентность $D^b(H_c\text{-mod}) \xrightarrow{\sim} D^b(H_{c'}\text{-mod})$.

Эта теорема доказана, с помощью стратегии, использованной в [148, Section 5] в частном случае "wreath-product"групп. Мы конструируем некоторый пучок $\mathcal{P}$ на $X$, который мы называем пучок Прочези, который обобщает понятие расслоения Прочези в случае когда $X$ гладкое. Затем мы квантуем его до правого $\mathcal{D}_c$-модуля, обозначаемого через $\mathcal{P}_c$ (где мы пишем $\mathcal{D}_c$ для $\mathcal{D}_\lambda$, где $\lambda \in H^2(X^{reg},\mathbb{C})$ отвечает $c \in \mathfrak{p}$). Можно показать, что для подходящего выбора $\mathcal{P}$, мы имеем $\mathrm{End}_{\mathcal{D}_c^{opp}}(\mathcal{P}_c) \xrightarrow{\sim} H_c$.

Теорема 1.9.3. Верно нижеследующее:

а) Когда $c,c'$ имеют целую разность, категории $\mathrm{Coh}(\mathcal{D}_c), \mathrm{Coh}(\mathcal{D}_{c'})$ когеренtных $\mathcal{D}_c$- and $\mathcal{D}_{c'}$-модулей эквивалетны.

б) Функтор $\Gamma(\mathcal{P}_c \otimes_{\mathcal{D}_c} \bullet) : D^b(\mathrm{Coh}(\mathcal{D}_c)) \xrightarrow{\sim} D^b(H_c\text{-mod})$ — эквивалентоность.

Опишем некоторые приложения и следствия из нашей конструкции. Любая пара $(X,\mathcal{P})$ $\mathbb{Q}$-факториальных разрешений $X$ $V/\Gamma$ и пучок Прочези $\mathcal{P}$ на $X$ дают $t$-структуру на $D^b(H_c\text{-mod})$. Ниже мы опишем, что теорема [156, Theorem 3.1] обобщает нашу ситуацию (и даже более общую): некоторые t-структуры, которые мы рассматриваем сохраняют друг друга.

Мы так же устанавливаем следующий факт ((2) гипотеза в статье Этингофа и Гинзбурга [147]):

Теорема 1.9.4. Следующее верно для всех $c \in \mathfrak{p}$.

а) Регулярный $H_c$-бимодуль $H_c$ имеет конечную длину.

б) Обобщенное неравенство Бернштейна выполнено для $H_c$: $\mathrm{GK\text{-}dim}(M) \geqslant \mathrm{GK\text{-}dim}\, H_c/\, \mathrm{An}$

Сведение (2) к (1) было сделано в [228]. Мы описываем необходимые модификации доказательства из [228] которые доказывают (1).

### 1.10 Многокомпонентная редукция бездисперсионной иерархии DKP

DKP иерархия является одним из примеров интегрируемых иерархий с $D_\infty$ симметрией, введеная Джимбо и Мива в 1983 году [164]. Она была впоследствии переоткрыта и стала известна как связанная иерархия КП [165] и Пфаффова решетка [166, 167], см. также [168, 169, 170]. Решения и алгебраическая структура были изучены в работе [171, 172, 173], связь с матричными интегралами была получена в [166, 167, 168, 174, 175].

Бездисперсионная версия иерархии DKP ( dDKP иерархия) была предложена в [176, 177]. Она является бесконечной системой дифференциальных уравнений на вещественно-значную функцию $F = F(\mathbf{t})$ бесконечного числа (вещественных) "времен" $\mathbf{t} = \{t_0, t_1, t_2, \ldots\}$. Дифференциальные уравнения получаются разложением уравнений

$$e^{D(z)D(\zeta)F}\left(1 - \frac{1}{z^2\zeta^2}\, e^{2\partial_{t_0}(2\partial_{t_0}+D(z)+D(\zeta))F}\right) = 1 - \frac{\partial_{t_1}D(z)F - \partial_{t_1}D(\zeta)F}{z-\zeta},$$

$$e^{-D(z)D(\zeta)F}\,\frac{z^2 e^{-2\partial_{t_0}D(z)F} - \zeta^2 e^{-2\partial_{t_0}D(\zeta)F}}{z-\zeta} = z + \zeta - \partial_{t_1}\Big(2\partial_{t_0} + D(z) + D(\zeta)\Big)F,$$

где

$$D(z) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{z^{-k}}{k}\,\partial_{t_k}$$

по степеням $z$, $\zeta$. Функция $F$ соответствует логарифму тау-функции в случае бездисперсионной иерархии KP (см., к примеру, [178, 179]).

В работе [180, 181] было показано, что уравнения (1.10), (1.10), перезаписанные в эллиптической параметризации (а именно, в терминах тэта-функциях Якоби $\theta_a(u,\tau)$ ) принимают хорошую и наводящую на некоторые мысли форму, которая выглядит как естественное продолжение бездисперсионной иерархии КП:

$$(z^{-1} - \zeta^{-1})e^{(\partial_{t_0}+D(z))(\partial_{t_0}+D(\zeta))F} = \frac{\theta_1(u(z)-u(\zeta),\tau)}{\theta_4(u(z)-u(\zeta),\tau)}\,.$$

Здесь функция $u(z)$ определена уравнением

$$e^{\partial_{t_0}(\partial_{t_0}+D(z))F} = z\,\frac{\theta_1(u(z),\tau)}{\theta_4(u(z),\tau)}\,.$$

Модулярный параметр $\tau$ является динамической переменной : $\tau = \tau(\mathbf{t})$. Эта особенность говорит о схожести с уравнением Уизема в роде 1 [182] и интегрируемыми структурами на плоскости [183]. Мы предполагаем, что $\tau$ чисто мнимое.

Рассмотрим решение иерархии, такое что $u(z,\mathbf{t})$ and $\tau(\mathbf{t})$ зависит от времен посредством одной переменной $\lambda = \lambda(\mathbf{t})$: $u(z,\mathbf{t}) = u(z,\lambda(\mathbf{t}))$, $\tau(\mathbf{t}) = \tau(\lambda(\mathbf{t}))$. В [180] было показано, что такие одно-компонентные редукции классифицируются решениями дифференциального уравнения, являющегося эллиптическим аналогом известного уравнения Левнера (см. , [184, Chapter 6]). В комплексном анализе, такое эллиптичсекое уравнение Левнера так же известно как уравнение уравнение Goluzin-Komatu [185, 186], [187, 188, 189, 190]:

$$4\pi \mathrm{i}\, \partial_\lambda u(z,\lambda) = \Big[-\zeta_1\Big(u(z,\lambda)+\xi(\lambda),\, \tfrac{\tau}{2}\Big) + \zeta_1\Big(\xi(\lambda),\, \tfrac{\tau}{2}\Big)\Big]\frac{\partial \tau}{\partial \lambda},$$

где $\zeta_1(u,\tau) := \partial_u \log\theta_1(u,\tau)$ и $\xi(\lambda)$ произвольная (непрерывная) функция переменного $\lambda$ ( “driving function”). Это уравнение является основным в теории параметрических конформных отображений из двусвязных областей с разрезами в кольцевую область. Похожее отношение между хордовым уравнением Левнера и одно-компонентной редукцией dKP было известно из работ Гиббонса и Царева [191, 192]. Дальнейшее развитие этого обсуждалось в работах [193, 194, 195, 196, 197].

В данной работе мы изучаем диагональные $N$-компонентные редукции иерархии dDKP, при условии, что $u$ зависит от времен посредством $N$ вещественных переменных $\lambda_j$. Начальная точка – система $N$ эллиптических уравнений Левнера, характеризующиеся зависимостью $u(z)$ от переменных $\lambda_j$:

$$4\pi \mathrm{i}\, \partial_{\lambda_j} u(z,\{\lambda_i\}) = \Big[-\zeta_1\Big(u+\xi_j\,,\, \tfrac{\tau}{2}\Big) + \zeta_1\Big(\xi_j\,,\, \tfrac{\tau}{2}\Big)\Big]\frac{\partial \tau}{\partial \lambda_j},$$

Их условие совместности представляется как эллиптическая система Гиббонса-Царева. Временная зависимость от переменных $\lambda_j$ фиксируется системой квазилинейных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_k} = \phi_{j,k}(\{\lambda_i\})\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_0},$$

с $\phi_{j,k}(\{\lambda_i\})$, определенных с помощью "эллиптичсеких функций Фабера". Мы показываем, что система (1.10) совместна, и соответствующая диагональная метрика является метрикой Егоровского типа. Система (1.10) может быть решена обобщенным методом годографа, разработанного Царевым в [198]. Общая теория уравнений гидродинамического типа описана в [199, 200, 201].

## 1.11 Степень бифуркационного множества общего полиномиального отображения

Поставим в соответствие точке $a$ решетки $\mathbb{Z}^n$ моном $x^a = x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}$, а конечному множеству $A \subset \mathbb{Z}^n$ – пространство многочленов Лорана $\mathbb{C}^A = \left\{\sum_{a\in A} c_a x^a, c_a \in \mathbb{C}\right\}$ (здесь и далее мы следуем обозначениям работы [?]). Многочлен Лорана $f \in \mathbb{C}^A$ определяет функцию на комплексном торе $f\colon (\mathbb{C}\setminus\{0\})^n \to \mathbb{C}$.

Мы изучим бифуркационное множество отображения $f = (f_0, \ldots, f_k)\colon (\mathbb{C}\setminus\{0\})^n \to \mathbb{C}^{k+1}$, где $f_i \in \mathbb{C}^{A_i}$ – многочлены Лорана общего положения. Напомним, что бифуркационное множество – это минимальное (по включению) алгебраическое множество $B \subset \mathbb{C}^{k+1}$ такое, что над его дополнением $B'$ отображение $f\colon f^{-1}(B') \to B'$ является локально тривиальным расслоением. В нашей ситуации, кроме одного очевидного исключительного случая, бифуркационное множество оказывается алгебраической гиперповерхностью, и мы вычислим ее степень.

Мы будем предполагать без ограничения общности, что $\bigcup_i A_i$ не содержится в собственной подрешетке $\mathbb{Z}^n$ (иначе отображение $f$ разлагается в композицию $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n \to (\mathbb{C} \setminus \{0\})^m \to \mathbb{C}^{k+1}$, где первое отображение – эпиморфизм групп, а второе имеет то же бифуркационное множество, что и $f$, но удовлетворяет желаемому предположению).

Чтобы сформулировать ответ, обозначим через $\sharp A$ число точек решетки $\mathbb{Z}^n$ в выпуклой оболочке множества $A \subset \mathbb{R}^n$, а через $\dim A$ – размерность порожденного им векторного подпространства. Напомним, что суммой Минковского множеств $A_i \subset \mathbb{R}^n$ называется множество $\left\{\sum_i a_i \,|\, a_i \in A_i\right\}$, а сумма пустого семейства по определению полагается равной $\{0\}$.

Теорема 1.11.1. Пусть $A_i \subset \mathbb{Z}^n$ таковы, что $\bigcup_i A_i$ не содержится в собственном подпространстве $\mathbb{R}^n$, и $f_i \in \mathbb{C}^{A_i}$ – многочлены Лорана общего положения.

1) Если существует $I \subset \{0,\dots,k\}$ такое, что $\dim \bigcup_{i\in I} A_i < |I| - 1$, то образ отображения $f = (f_0,\dots,f_k)\colon (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n \to \mathbb{C}^{k+1}$ имеет коразмерность больше 1 (и бифуркационное множество является его замыканием).

2) В противном случае каждая неприводимая компонента $B_i$ бифуркационного множества отображения $f = (f_0,\dots,f_k)\colon (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n \to \mathbb{C}^{k+1}$ имеет коразмерность 1 (т. е. $B_i$ задается неприводимым полиномиальным уравнением $g_i = 0$). В этом предположении справедливо также следующее утверждение.

3) Для точек общего положения $y \in \mathbb{C}^{k+1}$ и $y_i \in B_i$ разность $\chi(f^{-1}(y_i)) - \chi(f^{-1}(y))$ аддитивных эйлеровых характеристик с точностью до знака $(-1)^{n-k}$ является натуральным числом $b_i$.

4) Степень дивизора $\sum_i b_i B_i$ (т. е. степень многочлена $\prod_i g_i^{b_i}$) равна

$$(-1)^{n+1} \sum_{\substack{0\leqslant q<b_0+\dots+b_k\leqslant n+1\\ b_i\geqslant 0}} (-1)^{\sum_i b_i} C_{n+k+1}^{k+\sum_i b_i} \sharp\Big(\{0\} \cup \bigcup_{\substack{c_0+\dots+c_k=q\\ 0\leqslant c_i\leqslant b_i}} \sum_i c_i A_i\Big). \qquad (*)$$

Пункты 1)–3) доказаны в [?, следствие 1.20], доказательство п. 4) дано ниже.

Замечание. (i) Достаточное условие общего положения для многочленов $f_i$ в этой теореме – невырожденность набора $(f_0,\dots,f_k)$ и всех его поднаборов размера $k$ относительно выпуклых оболочек $A_i$ в смысле работы [?]. Напомним определение этого условия: назовем грани $\Gamma_i$ выпуклых оболочек $A_i$ совместимыми, если $\sum_i \Gamma_i$ – грань выпуклой оболочки $A_i$. Для многочлена $f_i(x) = \sum_{a\in A_i} c_a x^a$ обозначим многочлен $\sum_{a\in\Gamma_i} c_a x^a$ через $f_i^{\Gamma_i}(x)$. Набор $(f_0,\ldots,f_k)$ невырожден относительно $(A_0,\ldots,A_k)$, если 0 является регулярным значением отображения $(f_0^{\Gamma_0},\ldots,f_k^{\Gamma_k})\colon (\mathbb{C}\setminus\{0\})^n \to \mathbb{C}^{k+1}$ для каждого набора совместимых граней $\Gamma_i$.

(ii) Число $(*)$ оценивает сверху степень бифуркационного множества без естественных кратностей, которые мы приписали его компонентам. Однако для наиболее естественных классов носителей $A_i$ кратности всех компонент равны 1, так что степень бифуркационного множества в обычном понимании (без кратностей) в точности равна $(*)$. В частности, это верно, если мы исследуем общие многочлены $f_i$ данных степеней. Это следует из явного вычисления кратностей компонент бифуркационного множества в терминах множеств $A_i$ в работе [?].

(iii) Напомним, что смешанный объем – единственная симметричная полилинейная (в смысле сложения по Минковскому) функция $n$ выпуклых тел в $\mathbb{R}^n$, значение которой на $n$ экземплярах одного тела равно его объему. Будем обозначать смешанный объем выпуклых оболочек $A_1,\ldots,A_n \subset \mathbb{R}^n$ мономом $A_1\cdots A_n$. По теореме 24 из [?], выражение $(*)$ равно сумме

$$(n+1)!\sum_{a_0+\cdots+a_k=n+1} \widetilde{A}_0^{a_0}\cdots\widetilde{A}_k^{a_k}, \qquad (**)$$

где $\widetilde{A}_i \subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^1$ – объединение $A\times\{0\}$ и $\{0\}\times[0,1]$.

Доказательство п. 4) теоремы. Пусть $y_0,\ldots,y_k$ – стандартные координаты в $\mathbb{C}^{k+1}$, тогда искомое бифуркационное множество совпадает с бифуркационным множеством проекции графика $f_0(x)-y_0=\cdots=f_k(x)-y_k=0$ в произведении $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^n\times\mathbb{C}^{k+1}$ на второй множитель. Многогранник Ньютона уравнения бифуркационного множества (с учетом кратности) для этой проекции можно вычислить по теореме 4.4.2 работы [?], ответом будет сумма некоторых смешанных расслоенных многогранников $\sum_i M_i$. Так как степень многочлена – это значение опорной функции его многогранника Ньютона в точке $(1,\ldots,1)$, осталось вычислить сумму значений опорных функций многогранников $M_i$ в точке $(1,\ldots,1)$. Это можно сделать по формуле для опорной функции смешанного расслоенного многогранника из работы [?], и ответом окажется выражение $(**)$, которое равно $(*)$ по теореме 24 из [?]. Пункт 4) теоремы доказан.

Более естественная задача – получить аналог доказанной теоремы для отображения $f=(f_0,\ldots,f_k)\colon \mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^{k+1}$ с компонентами общего положения $f_i\in\mathbb{C}^{A_i}$ при условии, что носители $A_i$ содержатся в положительном октанте $\mathbb{Z}^n_+$. Однако эта задача существенно сложнее: аналог п. 1) при такой формулировке верен, но аналог п. 3) – нет.

Гипотеза. Если $A_0,\ldots,A_k\subset\mathbb{Z}^n_+$, то для отображения $f=(f_0,\ldots,f_k)\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^{k+1}$ с компонентами $f_i\in\mathbb{C}^{A_i}$ верен аналог пп. 1) и 2) доказанной теоремы.

### 1.12 О размерности роста модулярных неприводимых представлений полупростых алгебр Ли

В данной работе мы изучаем теорию представлений полупростых алгебр Ли над алгебраически замкнутыми полями польшой положительной характеристики. Пусть $G$ является полупростой алгебраической группой над $\mathbb{C}$ и $\mathfrak{g}$ ее алгебра Ли. Тогда $\mathfrak{g}$ определена над $\mathbb{Z}$, таким образом, для алгебраически замкнутого поля $\mathcal{F}$ характеристики $p$ можно определить $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}$ над $\mathcal{F}$. Универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{g}_{\mathcal{F}})$ конечна над своим центром, а именно, мы имеем вложение центральной алгебры $S(\mathfrak{g}^{(1)}_{\mathcal{F}})\hookrightarrow U(\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}), x\mapsto x^p-x^{[p]}$, где верхний индекс (1) обозначает Фробениусов твист, а индекс $[p]$ отвечает за $p$-ю степень отображения $\mathfrak{g}^{(1)}_{\mathcal{F}}\to\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}$. Образ известен как $p$-центр. В частности, все неприводимые представления $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}$ конечномерны. Ниже мы будем полагать, что $p\gg 0$ (хотя некоторые утверждения имеют место и для более слабых условий).

Пусть $\mathfrak{h}$ Картановская подалгебра $\mathfrak{g}$. Можно отождествить $U(\mathfrak{g}_{\mathcal{F}})^{G_{\mathcal{F}}}\xrightarrow{\sim}\mathcal{F}[\mathfrak{h}^*]^W$ (изоморфизм Хариш-Чандры), центральная подалгебра $U(\mathfrak{g}_{\mathcal{F}})^{G_{\mathcal{F}}}\subset U(\mathfrak{g}_{\mathcal{F}})$ известна как центр Хариш-Чандры. Зафиксируем $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ и рассмотри соответствующую центральную $\mathcal{U}_{\lambda,\mathcal{F}}$ алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathcal{F}})$. Далее, для $\chi\in\mathfrak{g}^{(1)*}_{\mathcal{F}}$ можно рассмотреть следующую центральную редукцию $\mathcal{U}^{\chi}_{\lambda,\mathcal{F}}$, это конечномерная алгебра. Очевидно, что каждое неприводимое представление $U(\mathfrak{g}_{\mathcal{F}})$ пропускается через ровно одно неприводимое $U^{\chi}_{\lambda,\mathcal{F}}$ (некоторое из этих частей нулевые).

Изучение теории представлений алгебр $\mathcal{U}^{\chi}_{\lambda,\mathcal{F}}$ может быть сведено к случа, когда элемент $\chi$ нильпотентен. Здесь алгебра $\mathcal{U}^{\chi}_{\lambda,\mathcal{F}}$ ненулевая тогда и только тогда, когда $\lambda\in\mathfrak{h}^*_{\mathcal{F}_p}$. Напомним некоторые результаты первого автора и его сооавторов о теории представлений $\mathcal{U}^{\chi}_{\lambda,\mathcal{F}}$.

Рассмотрим многообразие флагов $\mathcal{B}$ для $\mathfrak{g}$ (над $\mathbb{C}$). Пусть $e$ нильпотентный элемент $\mathfrak{g}$, лежащий в орбите, соответствующей $\chi$ (так как $p\gg 0$, существует натуральная биекция между нильпотентными орбитами $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^{(1)}_{\mathcal{F}}$). Рассмотрим соответствующий слой Спрингера $\mathcal{B}_e$. В [216] для регулярного $\lambda$, авторы построили отождествления

$$K_0(\mathcal{U}^{\chi}_{\lambda,\mathcal{F}}\text{-mod})\xrightarrow{\sim}K_0(\mathrm{Coh}(\mathcal{B}_e))\xrightarrow{\sim}H_*(\mathcal{B}_e,\mathbb{C})$$

( в настоящей работе все $K_0$-группы будут над $\mathbb{C}$ но, фактически, первый изоморфизм имеет место над $\mathbb{Z}$).

Существует способ отождествить классы простых под действием этого изоморфизма, предугаданный Люстигом и доказанный в [214]. Пространство $K_0(\mathrm{Coh}(\mathcal{B}_e))$ допускает $q$-деформацию, эквивариантная группа $K$-теории $K_0(\mathrm{Coh}^{\mathbb{C}^\times}(\mathcal{B}_e))$ для действия стягиванием $\mathbb{C}^\times$ на $\mathcal{B}_e$, [233, Section 6]. Далее, согласно [214], существует канонический базис $\mathfrak{B}$ в $K_0(\mathrm{Coh}^{\mathbb{C}^\times}(\mathcal{B}_e))$, такой, что классы простоты в $K_0(\mathrm{Coh}(\mathcal{B}_e))$ специализируются элементами $\mathfrak{B}$ to $q = 1$. Единственным, что нужно узнать о $\mathfrak{B}$ является то, что оно независит от $p$ (и зависит не от $\lambda$, а от его р-алькова, но нам не нужно это).

Неявность такого канонического базиса является большой проблемой.К примеру,неясно, как посчитать размерности неприводимых модулей. Цель этой работы - получить явную информацию о каноническом базисе и размерностях соответствующих простых модулей. Мы хотим понять зависимость размерносетй от $p$.

Сперва, напомним, что $K_0(\mathrm{Coh}^{\mathbb{C}^\times}(\mathcal{B}_e))$ - модуль над афинной алгеброй Гекке $\mathcal{H}_q(W^a)$. Здесь и далее мы будем афинную группу Вейля $\mathfrak{g}$ обозначать $W^a$, $W^a = W \ltimes Q$, где $Q$ решетка корней.

Зафиксируем конечную локализацию $R$ для $\mathbb{Z}$ и доминантный регулярный элемент $\lambda \in \mathfrak{h}^*_R$. Тогда для $p \gg 0$, можно ограничить $\lambda$ на элемент в $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{F}_p}$. Далее, зафиксируем $b \in \mathfrak{B}$, и пусть $V_{\lambda,p}(b)$ обозначает соответствующий простой элемент в $\mathcal{U}^\chi_{\lambda,\mathcal{F}}$-mod. Тогда (для $\lambda$ и $b$ фиксированных) $\dim V_{\lambda,p}(b)$ известно и полиномиальна по $p$, в предположении, что $p$ удовлетворяет некоторому условию конгруэнтности, зависящему от $\lambda$. Нашей первой целью будет определить степень этого полинома.

Заметим, что $\lambda$ определяет собственную стандартную параболическую подгруппу $W_{[\lambda]} \subset W^a$. Ма рассматриваем действие $W^a$ на $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$. Пусть $\lambda^\circ$ является пересечением f $W^a\lambda$ с фундаментальным альковом. Для $W_{[\lambda]}$ рассмотрим стандартную параболическую подгруппу, порожденную простыми отражениями, соответствующими стенкам, содержащим $\lambda^\circ$. К примеру, когда $\lambda \in Q$, имеем $W_{[\lambda]} = W$ (как стандартная параболическая подгруппа $W^a$).

Рассмотри разбиение $W_{[\lambda]}$ в двусторонние клетки. Такое разбиение так же определяет разбиение неприводимых $W_{[\lambda]}$-модулей (или $\mathcal{H}_q(W_{[\lambda]})$-модулей для общих $q$) на семейства. Фильтруем модуль $K_0(\mathrm{Coh}^{\mathbb{C}^\times}(\mathcal{B}_e))$ в соответствии с двусторонними клетками $W_{[\lambda]}$. А именно, для заданной $\mathbf{c}$ двусторонней клетки $W_{[\lambda]}$, пусть $K_0(\mathrm{Coh}^{\mathbb{C}^\times}(\mathcal{B}_e))_{\leqslant \mathbf{c}}$ означает пересечение $K_0(\mathrm{Coh}^{\mathbb{C}^\times}(\mathcal{B}_e))$ с суммой всех неприводимых $\mathcal{H}_q(W_{[\lambda]})$-подмодулей в локализованном $K_0$ котрые принадлежат семейству, индексированному двусторонними клетками $\mathbf{c}' \leqslant \mathbf{c}$.

Следующая теорема является основным результатом данной статьи. Напоним, что из двусторонней клетки $\mathbf{c}$ в $W_{[\lambda]}$ мы можем восстановить нильпотентную орбиту $\mathbb{O}_{\mathbf{c}}$ in $\mathfrak{g}$.

Теорема 1.12.1. Верно следующее

а) Для любого регулярного $\lambda \in \mathfrak{h}^*_R$, базис $\mathfrak{B}$ $K_0(\mathrm{Coh}^{\mathbb{C}^\times}(\mathcal{B}_e))$ совместим с фильтрацией $K_0(\mathrm{Coh}^{\mathbb{C}^\times}(\mathcal{B}_e))_{\leqslant \mathbf{c}}$.

б) Let $b \in \mathfrak{B}$ лежащей в $K_0(\mathrm{Coh}^{\mathbb{C}^\times}(\mathcal{B}_e))_{\leqslant \mathbf{c}}$ но в меньших фильтрованных компонентах. Тогда степень многочлена $\dim V_{\lambda,p}(b)$ по $p$ равна $\dim \mathbb{O}_{\mathbf{c}}/2$.

Замечание. Существует классический аналог (2) для категорий в характерестике 0, такой как категория $\mathcal{O}$. Есть результаты Гельфанда-Кириллова о размерностей модулей, отвечающих каноническому базисному элементу равному $\dim \mathbb{O}_{\mathbf{c}}/2$. То есть часть (2) означает, что степень многочлена размерностей есть модулярный аналог размерностей Гельфанда-Кириллова. Эвристически, это может быть проверено следующим образом: модуль размерноси Гельфанда-Кириллова $d$ имеет такой же размер как пространство сечений когерентного пучка на $\mathfrak{g}^*$ с носителем рзмерности $d$, тогда как модуль в характеристике $p$, чья размерность $D$ выражена многочленом степени $d$ имеет такой же размер как пространство сечений таких когерентных пучков ограниченных на фробениусову окрестность точки.

Можно переформулировать (2) следующим образом. Ниже мы увидим, что существует единственный примитивный идеал $\mathcal{J} \in \mathcal{U}$, такой, что простой модуль, отвечающий $b$ зануляется при редукции $\mathcal{J} \bmod p$. Мы увидим, что $\overline{\mathbb{O}}_{\mathbf{c}}$ является ассоциированным многообразием для $\mathcal{J}$, так что степень размерности полинома равна $\frac{1}{2}\,\mathrm{GK\text{-}dim}(\mathcal{U}/\mathcal{J})$. Мы ожидаем, что аналог этого результата имеет место и в большей общности, к примеру, для квантования симплектических особенностей.

Обсудим теперь некоторые применения Теоремы 1.12.1. Во-первых, она позволяет доказать гипотезы второго автора и Острика о классификации конечномерных неприводимых модулей над конечной $W$-алгеброй $\mathcal{W}$ для ($\mathfrak{g}$,$e$), см. [231, Section 7.6]. В частности, эта теорема влечет, что $K_0$ для конечномерных представлений $\mathcal{W}$ с центральным характером $\lambda$ совпадает с $\bigoplus_{\mathbf{c}} K_0(\mathrm{Coh}(\mathcal{B}_e))_{\leqslant \mathbf{c}})$, где сумма берется по всем двусторонним клеткам в $W_{[\lambda]}$ таким, что $\mathbb{O}_{\mathbf{c}} = Ge$. На самом деле, для такой $\mathbf{c}$ мы имеем $K_0(\mathrm{Coh}(\mathcal{B}_e))_{<\mathbf{c}}) = 0$. Первый автор и Каждан планируют использовать часть (1) и результат, отмеченный в предыдущем предложении, чтобы изучать ограничения характеров для unipotent неприводимых представлений p-адических групп.

Другое применение, мотивирующее основной результат, есть усиленная версия результата [211]. Главная мысль loc. cit. есть то, что определение вещественной вариации стабильности, есть концепция, частично вдохновленная Bridgeland stability condition на триангулированных категориях, и теорема утверждает, что категории $\mathcal{U}^{\chi}_{\lambda,\mathcal{F}}$-модулей приводят к такой структуре. Давайте опишем это более детально. Вышеуказанное соответствие $K_0(\mathcal{U}^{\chi}_{\lambda,\mathcal{F}}\text{-mod}) \xrightarrow{\sim} K_0(\mathrm{Coh}(\mathcal{B}_{e,\mathcal{F}}))$ приходит из эквивалентности триангулированных категорий $\mathrm{T}_{\tilde{\lambda}} : D^b(\mathcal{U}_{\lambda,\mathcal{F}}\text{-mod}^{\chi}) \to D^b(\mathrm{Coh}_{\mathcal{B}_e}(T^*\mathcal{B}_{\mathcal{F}}))$, (определение $\mathrm{T}_{\tilde{\lambda}}$ будет напомнено позже). Здесь $\tilde{\lambda}$ элемент решетки весов такой, что $\lambda = \tilde{\lambda} \mod p$; $\mathrm{Coh}_{\mathcal{B}_e}(T^*\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$ обозначает категорию когерентных пучков на $T^*\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ теоретикомножественно имеющих носителем замкнутое подмногообразие $\mathcal{B}_e$, а $\mathcal{U}_{\lambda,\mathcal{F}}\text{-mod}^{\chi}$ есть категория модулей над $\mathcal{U}_{\lambda,\mathcal{F}}$ где ядро $\chi$ действует нильпотентно. Образ абелевой категории $\mathcal{U}_{\lambda,\mathcal{F}}\text{-mod}^{\chi}$ при эквивалентности $\mathcal{L}_{\tilde{\lambda}}$, т.е. сответствующая $t$-структура на $D^b(\mathrm{Coh}_{\mathcal{B}_{\chi}}(T^*\mathcal{B}_{\mathcal{F}}))$ зависит только от $p$-алькова $\tilde{\lambda}$, а не от $\lambda$. Следовательно мы получаем набор $t$-структур на производной категории когерентных пучков, нумеруемых альковами; при этом хотя вышеприведенные конструкции применимы к многообразиям большой простой характеристики, $t$-структуры допускают каноническое поднятие в $D^b(\mathrm{Coh}_{\mathcal{B}_e}(T^*\mathcal{B}_{\mathbb{C}}))$.

Оказывается, что это является частью вещественной вариации стабмльности условияси; содержание этих условий состоит в следующем: для двух соседних альковов, имеющих общую грань коразмерности 1 производная эквивалентность между соответствующей абелевой категорией есть сохраняющая эквивалентность с помощью некоторого полиномиального отображения $Z : \mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}} \to K_0(\mathrm{Coh}(\mathcal{B}_e))^*$ называемго отображением центрального заряда.

Гипотеза выдвинута в loc. cit. [211, Remark 6] и утверждает, что тоже свойство дожно быть и у двух альковов, симметричных относительно грани большей коразмерности относительно стратификации афинными кокорнями $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{R}}$. Мы выводим (утверждение на самом деле эквивалентное) что гипотезу из Theorem 1.12.1. Мы ожидаем, что похожее утверждение выполняется для всех, или по крайней мере для широкого класса симплектических особенностей.

### 1.13 Деформации операд и Граф-комплексы

В знаменитой серии статей по квантовым группам В. Дринфельд определил группу Гротендика-Тейхмюллера ([244]) и объяснил, что она действует на множестве квазитреугольных алгебр Хопфа посредством твистования соответствующей сплетенной тензорной категории их представлений. Дринфельд доказал, что данная группа заведомо не является тривиальнои и заслуживает отдельного подробного рассмотрения. Однако как ее описание, так и описание высших деформаций тензорной категории с заплетением оставалось открытым вопросом в течение длительного периода. В 2000-ых годах Д. Тамаркин([251]), а позднее Т. Вильвахер([252]) и Б. Фрэсс ([245]) объяснили как проунипотентное пополнение группы Гротендика-Тейхмюллера связано с гомотопическими деформациями операды маленьких дисков $E_2$, впервые появившейся у Бордмана и Фогта в [?]. В частности было доказано, что нулевые деформации операды $E_2$ совпадают с алгеброй Ли Гротендика-Тейхмюллера.

На данный момент имеется несколько комплексов различного происхождения, описывающих теорию деформаций операды $E_2$. Одно из них, впервые предложенное Концевичем ([249]), называется Граф-комплексом, поскольку имеет крайне простое комбинаторное описание: комплекс является линейной оболочкой графов, дифференциал задается стягиванием ребра в графе. Когомологии данного комплекса называются графовыми когомологиями, которые удивительным образом возникают и имеют приложения в различных областях математики, таких как, теория деформаций, алгебраическая топология и математическая физика.

В серии совместных работ [247],[248] с Т.Вильвахером и М. Живковичем нам удалось доказать бесконечномерность когомологий графовых комплексов в различных гомологических степенях, как в классическом комплексе Концевича, так и для волосатых граф-комплексов Ароне-Турчина [243]. Последние естественно возникают в описании когомологий пространств вложений по Гудвилю и Вайсу ([246]). Мы построили дополнительные трансгрессивные дифференциалы на графовых комплексах и, простейшая аргументация спектральных последовательностей показывает, что когомологии граф-комплексов должны быть не менее чем вдвое больше чем алгебра Ли Гротендика-Тейхмюллера, которая вложена в нулевые когомологии граф-комплексов. Мы считаем это первым шагом в описании всего пространства графовых когомологий. Безусловно, мы отдаем себе отчет в том, что полное описание графовых когомологий является столь же неподъемной задачей, как и вычисление гомотопических групп сфер, однако различные трансгрессивные дифференциалы помогут найти небольшие закономерности, получить оценки на размерности и построить явные формулы для некоторых коциклов графовых комплексов. Заметим, что единственные известные на данный момент формулы для коциклов, представляющих образующие алгебры Ли Гродендика-Тейхмюллера предложены Вильвахером и Росси [250], однако полученные ими формулы содержат итерированные интегралы, а значит выражаются через целые значения кратных $\zeta$-функций. Возникновение последних, безусловно, требует дополнительных объяснений.

## 1.14 Точно решаемые случаи проблемы Римана-Гильберта на эллиптической кривой

Проблема Римана-Гильберта является одной из классических и наиболее известных обратных задач монодромии. Из того что множество решений линейного дифференциального уравнения есть конечномерное векторное пространство, а аналитическое продолжение всякого решения уравнения с мероморфными коэффициентами также является решением, следует, что с каждым таким линейным дифференциальным уравнением на сфере Римана связано действие фундаментальной группы сферы с проколами в особых точках коэффициентов уравнения на пространстве решений уравнения. Взятый в точке $z_0$ росток фундаментального набора решений $Y_{z_0}(z)$ под действием аналитического продолжения вдоль петли $\gamma$, начинающейся в отмеченной точке $z_0$ переходит в некоторый другой росток $g_\gamma\big(Y(z)\big)$ который, будучи базисом того же самого конечномерного пространства решений связан с исходным базисом умножением справа не некоторую невырожденную матрицу $G_\gamma$.

$$Y_{z_0}(z) \mapsto g_\gamma\big(Y(z)\big) = Y_{z_0}(z) G_\gamma$$

Несложно проверить, что возникающий матричный множитель $G_\gamma$ зависит лишь от гомотопического класса петли $[\gamma]$. Также можно проверить, что характер зависимости $G_\gamma$ от выбора начального ростка $Y_{z_0}(z)$ и отмеченной точки $z_0$ таковы, что описанная конструкция корректно определяет связанное с имеющим мероморфные коэффициенты линейным дифференциальным уравнением порядка $p$ с особыми точками $\{a_1,\ldots,a_n\}$ представление фундаментальной группы сферы Римана с проколами в $\{a_1,\ldots,a_n\}$.

$$\begin{aligned}
&\chi : \pi_1\big(\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus \{a_1,\ldots,a_n\}\big) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{C}^p) \simeq \mathrm{GL}(p,\mathbb{C})\\
&\chi : [\gamma] \mapsto g_\gamma \simeq G_\gamma^{-1}
\end{aligned}$$

где эквивалентности в правых частях отвечают выбору базиса для координатного описания операторов. Полученное таким образом представление фундаментальной группы называется представлением монодромии уравнения, а образ $\mathrm{Im}(\chi)$ группой монодромии уравнения. В 1850-ых годах Б. Риманом впервые был поставлен вопрос о построении, или хотя бы существовании различных классов дифференциальных уравнений с заданными набором особых точек и группой монодромии. Как оказалось позже, на сфере Римана данный вопрос наиболее интересен и содержателен для класса фуксовых систем,

$$\frac{dy}{dz} = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{z-a_i} y, \quad y \in \mathbb{C}^p, \quad B_i \in \mathrm{GL}(p,\mathbb{C}), \quad \sum_{i=1}^{n} B_i = 0$$

то есть, систем линейных дифференциальных уравнений с полюсами первого порядка. Этот случай был выделен в отдельную задачу – проблему Римана-Гильберта, также известную как двадцать первая проблема Гильберта.

Долгое время, проблема Римана-Гильберта ошибочно считалась решенной положительно, хотя и не конструктивно, что убавило интерес к исследованиям в данной области и сместило основное их направление в сторону поисков эффективно решаемых случаев. Однако, в конце двадцатого века ряд неожиданных открытий, а именно, обнаружение Джимбо, Мива и Сато связи проблемы Римана-Гильберта с рядом задач квантовой теории поля и построение ими при некоторых дополнительных ограничениях решения, имеющего физический смысл, и по-построению оказавшегося изомонодромным, свойство, оказавшееся крайне важным в дальнейшем, затем, обнаруженное Б. Мальгранжем свойство Пенлеве у шлезингеровских изомонодромных деформаций и наконец, полученное А. Болибрухом в общем случае отрицательное решение проблемы Римана-Гильберта инициировали до сих пор продолжающийся всплеск интереса к обратным задачам монодромии. В настоящее время наиболее популярными и актуальными направлениями исследования в этой области являются являются следующие три направления: исследование свойств тау-функций изомонодромных деформаций и уравнений Пенлеве и их связей с конформными блоками конформных теорий поля; исследования изомонодромных деформаций на римановых поверхностях, в особенности на эллиптических кривых в связи с многочисленными плодотворными приложениями в теории классических и квантовых интегрируемых систем; и наконец, исследование алгебро-геометрических свойств отображения монодромии и изомонодромных деформаций имеющее помимо физических приложений большую важность для таких областей фундаментальной математики как алгебраическая геометрия, пуассонова геометрия и теория специальных функций.

Как уже упоминалось, в общем случае отрицательное решение проблемы Римана-Гильберта было получено А. Болибрухом. Им же было показано, что всякое неприводимое представление, тем не менее, может быть реализовано монодромией фуксовой системы независимо от положения особых точек. Помимо неприводимости известны и другие достаточные условия положительной разрешимости проблемы Римана-Гильберта. Положительно решается проблема для представлений размерности один и два, для коммутативных групп монодромии, для представлений с хотя бы одной диагонализуемой локальной монодромией, и ряда других случаев. При этом полного описания достаточных условий положительной разрешимости до сих пор не получено. Разработанные при решении задачи подходы и методы, как и сам полученнный результат оказались важными и имеющими множество приложений для большого круга задач современной математической физики и аналитической теории дифференциальных уравнений. Представляют интерес и различные возможные обобщения данной задачи.

Например, можно рассмотреть вопрос об обобщении задачи на случай отличных от сферы римановых поверхностей, в первую очередь, на эллиптические кривые. Первый вопрос с которым при этом придется столкнуться это обобщение понятия фуксовой системы. Естественная попытка обобщения, основанная на том, что классические фуксовы системы очевидно находятся в соответствии с логарифмическими дифференциальными 1-формами на сфере Римана, или, что то же самое, с логарифмическими связностями в тривиальном расслоении на сфере Римана, немедленно столкнется с той трудностью, что в силу несложного подсчета размерностей для римановых поверхностей рода большего нуля число параметров, задающих представление фундаментальной группы проколотой поверхности превосходит число параметров определяющих связность, препятствие к реализации имеет топологическую природу, и в такой постановке, задача очевидно имеет в общем случае отрицательное решение.

По этой причине приходится использовать более сложные конструкции связанные с расслоениями. А именно, можно заметить, что при решении классической задачи на сфере Римана существеннейшую роль играла полустабильность тривиального расслоения на сфере Римана наряду со стабильностью пар расслоение-связность для произвольных голоморфных расслоений с неприводимой монодромией. Напомним, что расслоение $E$ называется полустабильным если для всякого подрасслоения $F$ его наклон

$$\kappa(F) = \deg F / \operatorname{rk} F$$

не превосходит наклона всего расслоения $E$, если же неравенство строгое, то расслоение называется стабильным. Для пар расслоение-связность выполнение тех же условия требуется только от стабилизирующихся связностью подрасслоений $F$. Именно эти понятия являются ключевыми при геометрическом подходе к проблеме Римана-Гильберта, при таком взгляде, можно считать, что тривиальные расслоения в классической задаче возникли только потому, что в силу теоремы Биркгофа-Гротендика на сфере не существует других полустабильных голоморфных расслоений степени ноль. Естественным было бы ожидать, что возможные обобщения должны строиться с использованием именно такого подхода.

Таким образом, мы получаем следующую формулировку обобщения проблемы Римана-Гильберта: по заданным компактной кривой $\Lambda$ рода $g$, набору точек $\{a_1, \ldots, a_n\} \in \Lambda$ и представлению фундаментальной группы проколотой кривой $\Lambda \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ построить на $\Lambda$ полустабильное расслоение степени ноль с логарифмической связностью $\nabla$, имеющей особенности исключительно в точках $\{a_1,\ldots,a_n\}$ и монодромию, реализующую данное представление фундаментальной группы.

В рамках исследовательской деятельности лаборатории мы занимались изучением описанного выше обобщения проблемы Римана-Гильберта на случай эллиптической кривой, обращая особое внимание на возможность явного эффективного построения решения. Были рассмотрены два класса задач — одномерные задачи с произвольным числом особенностей и двумерные задачи с тремя особыми точками. Выбор именно этих случаев был обусловлен тем рядом специфических свойств этих моделей. Во-первых, одномерная задача с как и на сфере, является коммутативной, что позволяет рассчитывать на построение решения проблемы Римана-Гильберта в явном виде. Во-вторых, одномерная модель является простейшей возможной из задач на эллиптической кривой и после ее подробного разбора результаты и методы могут найти свое применение при исследовании более сложных задач, в частности двумерной. В-третьих, как известно, на эллиптической кривой, для того чтобы дивизор степени ноль являлся эффективным требуется выполнение дополнительного условия — дивизор должен "лежать" на решетке периодов кривой, при этом одномерную проблему Римана-Гильберта можно рассматривать как обобщение вопроса об эффективности дивизора степени ноль на случай неоднозначных функций, ветвящихся при обходе особых точек, но инвариантных, или хотя бы квазипериодических при сдвигах по решетке периодов, что, очевидно, отвечает переходу от сечений тривиального расслоения к сечениям расслоения степени ноль общего вида на заданной эллиптической кривой.

Что касается двумерной трехточечной задачи, то интересно сопоставление со сферическим случаем. Дело в том, что на сфере Римана результаты, описывающие различные случаи положительной разрешимости как правило являются теоремами существования, не давая явных способов построения решения. В этом смысле двумерная задача с тремя точками является критической. Как было показано Б. Крыловым, во-первых, она решается положительно для всех возможных начальных данных задачи, и во-вторых, решение всегда можно построить явно. Последнее свойство связано с тем, что все неприводимые представления в этом случае являются жесткими и однозначно восстанавливаются по спектрам локальных монодромий, а все приводимые отвечают некоторым вырождениям задачи и распадаются на несколько классов, в каждом из которых, проведя соответствующий анализ удается получить решение в явном виде. При этом, хорошо известно, что уже для четырех точек в размерности два явное восстановление уравнения по монодромии сводится к решению шестого уравнения Пенлеве, в общем случае решающегося лишь в классе трансцендентов Пенлеве. Соответственно, интерес вызывает вопрос о свойствах аналогичной задачи в эллиптическом случае. А именно, можно ли здесь получить явные решения и имеются ли какие-либо дополнительные ограничения, по сравнению с системами общего вида, на явный вид решения.

### 1.14.1 Связности ранга 1

Перейдем к описанию методов и результатов. Обозначим через $\Lambda_\tau$ эллиптическую кривую, полученную при факторизации комплексной плоскости по решетке $\{1,\tau\}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$. Традиционно основным инструментом для анализа на эллиптических кривых являются тэта-функции. Для наших целей удобно воспользоваться первой тэта-функцией Якоби $\theta(z)$, определяемой как:

$$\theta(z) = \theta_1(z|\tau) = \imath \sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^m q^{(m-\frac{1}{2})^2} e^{(m-\frac{1}{2})2\pi\imath z},$$

где $q(\tau) = e^{\imath\pi\tau} = e^{\imath\pi x - \pi y}$ задает отображение верхней полуплоскости $H = \{\tau \in \mathbb{C}|\mathrm{Im}\tau > 0\}$ в единичный круг $D = \{q \in \mathbb{C} \,|\, |q| < 1\}$. Модуль отношения соседних членов ряда равен $|-q^{2m}e^{2\pi iz}| \leq |q|^{2m}e^{2\pi|z|}$. Следовательно, поскольку $\lim_{m\to\infty}|q|^{2m} = 0$, то $\theta$-функция задается рядом целых функций от $z$, сходящимся абсолютно и равномерно в любом круге. Значит и сама функция $\theta(z)$ является целой.

Для исследования вопросов монодромии требуется информация о ветвлении $\theta(z)$ и ее производной. Непосредственно из определения видно что

$$\begin{aligned}\theta(z+1) &= -\theta(z)\\ \theta(z+\tau) &= -q^{-1}e^{-2\pi iz}\theta(z).\end{aligned}$$

Отсюда выводятся соотношения для производных:

$$\begin{aligned}\theta'(z+1) &= -\theta'(z)\\ \theta'(z+\tau) &= q^{-1}e^{-2\pi iz}\big(2\pi i\theta(z) - \theta'(z)\big).\end{aligned}$$

И следовательно, для логарифмических производных получаем

$$\begin{aligned}\frac{\theta'(z+1)}{\theta(z+1)} &= \frac{\theta'(z)}{\theta(z)}\\ \frac{\theta'(z+\tau)}{\theta(z+\tau)} &= \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} - 2\pi i.\end{aligned}$$

Для сдвинутых тэта-функций имеем

$$\begin{aligned}\theta(z-a+1) &= -\theta(z-a)\\ \theta(z-a+\tau) &= -q^{-1}e^{-2\pi\imath z}\theta(z-a)e^{2\pi\imath a}\end{aligned}$$

где $a$ произвольная точка эллиптической кривой $\Lambda_\tau$.

Из приведенных выше формул для логарифмической производной $\theta(z)$ следует, что так как полюсов внутри фундаментального параллелограмма у $\theta(z)$ нет, то в этом параллелограмме она имеет только один простой ноль. В силу нечетности функции это точка $z = 0$. Рассмотрим как изменяется значение $\theta^\alpha(z)$ при аналитическом продолжении по петле вокруг $z = 0$. Так как ноль простой, то ветвление аналогично ветвлению $z^\alpha$, обозначив через $g^*$ оператор монодромии вокруг нуля получаем

$$g^*\left(\theta^\alpha(z)\right) = \theta^\alpha(z) \cdot e^{2\pi\imath\alpha}.$$

Заметим, далее,что в отличие от сферы, где расслоения традиционно описываются двумя картами с одним склеивающим коциклом, на кривой $\Lambda_\tau$ расслоение можно задать одной картой и двумя сдвигами: на 1 и на $\tau$. Описывать различные голоморфные линейные расслоения $E$ в этом случае удобно через описание их сечений. Напомним, что нас интересуют полустабильные расслоения степени ноль. Сечение $\varphi(z)$ расслоения степени ноль должно иметь равное число нулей и полюсов внутри фундаментального параллелограмма. Далее, сечение $\varphi(z)$ может иметь какую-то монодромию при обходах по $a$- и $b$-циклам, или, что то же самое при сдвигах на 1 и $\tau$. Пусть при сдвиге на 1 сечение $\varphi(z)$ умножается на $\mu(z)$, а при сдвиге на $\tau$ на $\nu(z)$. Так как $\mu(z)$ и $\nu(z)$ должны быть голоморфнообратимы на всей эллиптической кривой, то из компактности следует, что обе эти функции обязаны быть константами $\mu(z) \equiv \mu, \nu(z) \equiv \nu$. Следовательно $\varphi(z) \cdot \mu^{-z} = \varphi(z) \cdot \exp(-z \ln \mu)$ при сдвиге на 1 сохраняет свое значение, при сдвиге на $\tau$ умножается на $\nu \cdot \exp(-\tau \ln \mu) = \nu \cdot \mu^{-\tau}$, и имеет те же самые нули и полюса что и $\varphi(z)$. Таким образом, для описания расслоения $E$ достаточно рассматривать сечения не меняющиеся при сдвиге на 1, и умножающиеся на некоторое $\nu$ при сдвигах на $\tau$.

Параметр $\nu$ при этом определен неоднозначно так как умножение сечения на $e^{2\pi\imath z}$ сохраняет его нули, полюса, инвариантность при сдвигах на единицу, и изменяет $\nu$ на $\nu \cdot e^{2\pi\imath\tau}$. Следовательно $\nu$ определяется с точностью до умножения на целую степень $e^{2\pi\imath\tau}$. В дальнейшем нам будет удобнее работать с параметром $\lambda$ связанным с $\nu$ соотношением $\nu = e^{2\pi\imath\lambda}$.

Рассмотрим, как могут быть устроены мероморфные сечения такого расслоения. То есть нас интересуют функции, инвариантные относительно сдвигов на единицу и умножающиеся на некоторую константу $e^{2\pi\imath\lambda}$ при сдвигах на $\tau$. С такими объектами мы можем эффективно работать с помощью введенной ранее $\theta$-функции.

Определим функцию

$$\varphi_\lambda(z) = \frac{\theta(z-\lambda)}{\theta(z)}.$$

Из свойств $\theta$-функции следует

$$\varphi_\lambda(z+1) = \varphi(z)$$
$$\varphi_\lambda(z+\tau) = \varphi(z)\cdot e^{2\pi\imath\lambda}$$

Кроме того, очевидно $\varphi_\lambda(z)$ имеет ровно один ноль и один полюс на эллиптической кривой. Значит, $\varphi_\lambda(z)$ является однозначным сечением некоторого линейного расслоения $E$ степени ноль. Обозначим это расслоение $\mathcal{O}_\lambda(0)$. Несложно заметить, что для любой точки $b$ на эллиптической кривой $\Lambda_\tau$ функция ${}^b\varphi_\lambda(z) = \varphi_\lambda(z-b)$ отличается от $\varphi_\lambda(z)$ на мероморфную двоякопериодическую функцию, и значит тоже является сечением $\mathcal{O}_\lambda(0)$ . Как легко видеть, модулярный параметр $\lambda$ вместе со степенью $k$ полностью и однозначно определяет линейное расслоение $\mathcal{O}_\lambda(k)$, отношение двух сечений $\varphi,\psi$ с равными $\lambda$ и $k$ это мероморфная функция, то есть, сечение тривиального расслоения $\mathcal{O}_0(0)$.

Из определения $\lambda$ и сказанного выше о неоднозначной определенности $\nu$ немедленно следует, что параметр $\lambda$ определен на комплексной плоскости с точностью до сдвигов по решетке $\{1,\tau\}$ то есть, задающий на кривой $\Lambda_\tau$ расслоение параметр $\lambda$ принимает значения на том же самом факторе по решетке, который задает эллиптическую кривую $\Lambda_\tau$. Это хорошо известный факт о том, что пространство модулей линейных расслоений фиксированной степени на эллиптической кривой само является эллиптической кривой с тем же модулярным параметром.

Произведение $k$ разных сечений вида ${}^{b_i}\varphi_\lambda(z)$, является произведением $\theta$-функций в некоторых целых степенях, сумма которых равна нулю, и значит, задает сечение в расслоении $\mathcal{O}_{k\lambda}(0)$. Переобозначим для удобства нули и полюса этого произведения через $a_i$, тогда построенное сечение имеет вид

$$\varphi(z) = \theta^{k_1}(z-a_1)\cdots\theta^{k_n}(z-a_n),$$

где $k_i$-целые и

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = 0.$$

Из свойств ветвления $\theta(z)$ получаем

$$\varphi(z+1) = (-1)^{\sum k_i}\varphi(z) = \varphi(z)$$
$$\varphi(z+\tau) = \varphi(z)\cdot e^{2\pi\imath\sum k_i a_i}$$

и следовательно, так как $\varphi(z)$ является однозначным сечением $\mathcal{O}_{k\lambda}(0)$, выполняется

$$\sum_{i=1}^{n} k_i a_i = k\lambda.$$

Теперь легко видеть, что всякое выражение вида

$$\varphi(z) = \theta^{\alpha_1}(z-a_1)\cdots\theta^{\alpha_n}(z-a_n)$$

с любыми комплексными $\alpha_i$ такими что $\sum \alpha_i = 0$, а $a_i$ произвольные точки эллиптической кривой будет (многозначным) сечением расслоения $\mathcal{O}_\lambda(0)$, где

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$$

При этом характер многозначности сечения таков, что оно ветвится только при обходе особых точек $a_i$, но не при обходе по $a-$ и $b-$циклам кривой $\Lambda_\tau$.

Найдем теперь в расслоении $\mathcal{O}_\lambda(0)$ форму связности для которой $\varphi_\lambda$ было бы горизонтальным сечением, то есть

$$d\varphi_\lambda(z) = \omega_\lambda(z)\varphi_\lambda(z)$$

Из

$$d\theta^{\alpha_i}(z-a_i) = \alpha_i\theta'(z-a_i)\theta^{\alpha_i-1}(z-a_i)dz$$

получаем что

$$d\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\theta'(z-a_i)}{\theta(z-a_i)}\varphi dz$$

$$\omega_\lambda(z) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\theta'(z-a_i)}{\theta(z-a_i)}dz$$

Построенная форма связности имеет логарифмические особенности в точках $a_i$ и не изменяется при сдвигах на 1 и на $\tau$.

$$\omega_\lambda(z+1) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\theta'(z-a_i+1)}{\theta(z-a_i+1)}dz = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\theta'(z-a_i)}{\theta(z-a_i)}dz = \omega_\lambda(z)$$
$$\omega_\lambda(z+\tau) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\theta'(z-a_i+\tau)}{\theta(z-a_i+\tau)}dz = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\theta'(z-a_i)}{\theta(z-a_i)}dz - 2\pi\imath\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \omega_\lambda(z)$$

Инвариантность при сдвигах формы, задающей связность в данном случае является спецификой одномерной задачи, в общем случае большей размерности форма связности сопрягается на матрицу, зависящую от $\lambda$.

Рассмотрим теперь какой вид могут иметь одномерные представления, входящие в начальные данные проблемы Римана-Гильберта на эллиптической кривой.

$$\chi : \pi_1\left(\Lambda_\tau \setminus \{a_1,\ldots,a_n\}\right) \to \mathrm{GL}(1,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^*$$

На кривой без проколов, как известно, фундаментальная группа порождается парой из $a-$ и $b$-цикла с одним соотношением $aba^{-1}b^{-1} = \mathrm{id}$, отвечающим стягиваемости петли, обходящей фундаментальный параллелограмм по периметру. Очевидно существует такое упорядочивание точек $a_i$ и выбор обходящих их классов петель $\gamma_i$ при котором последовательный обход всех проколов эквивалентен обходу периметра параллелограмма, и следовательно, на проколотой кривой соотношение имеет вид $\gamma_1 \cdots \gamma_n = aba^{-1}b^{-1}$. Что влечет соотношение $g_1 \cdots g_n \nu_2 \nu_1 \nu_2^{-1} \nu_1^{-1} = 1$ на соответствующие матрицы монодромии. Так как задача одномерная, матрицы монодромии являются скалярами, и следовательно коммутируют. Значит, автоматически выполняется $\nu_2 \nu_1 \nu_2^{-1} \nu_1^{-1} = 1$ и следовательно $g_1 \cdots g_n = 1$.

Далее, как уже было указано, монодромии по периодам кривой определены неоднозначно и зависят от выбора тривиализации расслоения. Сечение с данными монодромии $(\nu_1,\nu_2)$ может быть переведено элементарным калибровочным преобразованием с сохранением всех прочих свойств в сечение с ветвлением $(\nu_1',\nu_2')$ если выполняется $\nu_1^{\tau}/\nu_2 = {\nu'}_1^{\tau}/{\nu'}_2$. Следовательно, всегда можно полагать одну из монодромий тривиальной. Выберем для удобства $\nu_1 = 1$, и определим $\lambda$ соотношением $\nu_2 = e^{2\pi i \lambda}$. Порядок $(\nu_1,\nu_2)$ соответствует здесь сдвигам на 1 и $\tau$ на кривой $\Lambda_\tau$. Параметр $\lambda$, как было показано выше, с точностью до сдвигов по решетке $\{1,\tau\}$.

Таким образом, исходные данные монодромии для одномерной проблемы Римана-Гильберта на эллиптической кривой $\Lambda_\tau$ можно задать набором $g_1, \ldots, g_n,\lambda$ таким что $g_1 \cdots g_n = 1$.

Дальнейшие шаги к построению решения таковы: сначала мы строим линейное расслоение $\mathcal{O}_\mu(0)$ с сечением, имеющим требуемую монодромию вокруг проколов и однозначным при сдвигах по периодам, а затем замечаем, что при переходе к расслоению $\mathcal{O}_{\mu-\lambda}$ то же самое сечение получает требуемую монодромию теперь уже полностью. Как следствие, можно заметить, что в тривиальном расслоении задача разрешима если и только если параметр $\lambda$ принадлежит некоторому дискретному множеству.

Реализуем первый шаг. Выберем произвольно числа $\alpha_k$ так, чтобы выполнялось $\exp{(2\pi\imath\alpha_k)} = g_k$. Каждое из $\alpha_k$ определено с точностью до целого слагаемого. При любом их выборе ввиду $g_1 \cdots g_n = 1$ должно выполняться $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = p \in \mathbb{Z}$. Будем называть набор $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ нормализованным если сумма всех его элементов равна нулю. Очевидно, при любом начальном выборе $\alpha_k$ набор можно нормализовать изменением хотя бы одной его компоненты.

Пусть $\alpha_1, \dots \alpha_n$ нормализованный набор, построенный по данным монодромии $g_1, \dots g_n$. Положим

$$\psi(z) = \theta^{\alpha_1}(z-a_1)\cdots\theta^{\alpha_n}(z-a_n)$$

Из свойств тэта-функций следует, что при обходе вокруг $z = a_k$ монодромия $\psi(z)$ равна $\exp(2\pi\imath\alpha_k) = g_k$. При сдвигах же на 1 и $\tau$ происходит умножение $\psi(z)$ на 1 и $\exp\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i\right)$ соответственно. Таким образом, $\psi(z)$ является однозначным (по периодам, но не вокруг проколов) сечением расслоения $\mathcal{O}_\mu(0)$ где $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$. В то же время, на $\psi(z)$ можно смотреть как на многозначное по периодам с монодромиями 1 и $e^{2\pi i\mu}$ соответственно, сечение тривиального расслоения $\mathcal{O}_0(0)$ с той же самой монодромией вокруг проколов. В первом случае соответствующие данные монодромии имеют вид $g_1, \dots, g_n, 0$, во втором $g_1, \dots, g_n, \mu$. В обоих случаях $\psi(z)$ является горизонтальным сечением связности

$$\nabla = d - \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\theta'(z-a_i)}{\theta(z-a_i)} dz$$

Остается заметить, что при переходе от расслоения $\mathcal{O}_\mu(0)$ к расслоению $\mathcal{O}_{\mu-\lambda}(0)$ ветвление произвольного сечения при сдвигах по периодам не меняется для сдвигов на 1 и умножается на $e^\lambda$ для сдвигов на $\tau$. А следовательно, в расслоении $\mathcal{O}_{\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i - \lambda}(0)$ построенная выше логарифмическая связность $\nabla$ имеет монодромию $g_1, \dots, g_n, \lambda$.

Интересным вопросом является единственность построенного решения, которую достаточно проверить для тривиального расслоения. По ходу построений выше мы получили в тривиальном расслоении логарифмическую связность с монодромией $g_1, \dots, g_n, \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$. Покажем, что при заданном наборе $\{a_1,...,a_n\}$ единственное значение параметра $\lambda$ при котором возможна реализация монодромии $g_1, \dots, g_n, \lambda$ в тривиальном расслоении это $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$. Очевидно, из этого будет следовать, что построенные в общем случае расслоение и связность определены однозначно.

Предположим противное, пусть $\eta(z)$ сечение тривиального расслоения с монодромией $g_1, \dots, g_n, \nu$. Тогда отношение $\xi(z) = \eta(z)/\psi(z)$ является однозначной мероморфной функцией внутри фундаментального параллелограмма и следовательно, однозначным мероморфным сечением расслоения $\mathcal{O}_{\nu-\mu}(0)$. Обозначим кратность нуля или полюса в точке $a_i$ через $k_i$ и рассмотрим отношение

$$\widetilde{\xi}(z) = \frac{\xi(z)}{\theta^{k_1}(z-a_1)\cdots\theta^{k_n}(z-a_n)}$$

Знаменатель, очевидно, есть однозначное сечение расслоения $\mathcal{O}_{\sum_{i=1}^n k_i a_i}(0)$, а следовательно, $\widetilde{\xi}(z)$ по построению является гладким и нигде не зануляющимся сечением $\mathcal{O}_{\nu-\mu-\sum_{i=1}^n k_i a_i}(0)$. Покажем, что это возможно только в случае $\nu - \mu - \sum_{i=1}^n k_i a_i = 0$.

Так как $z$ и $\widetilde{\xi}$ гладкие функции на фундаментальном параллелограмме $\Pi$ и $\widetilde{\xi}$ нигде не равно нулю, то

$$I = \oint_{\Pi} zd\big(\ln \widetilde{\xi}(z)\big) = 0$$

С другой стороны, в силу симметрий $\widetilde{\xi}$

$$\begin{aligned} I_1 &= \textstyle\int_0^1 zd\big(\ln \widetilde{\xi}(z)\big) + \int_{1+\tau}^{\tau} zd\big(\ln \widetilde{\xi}(z)\big) = \int_1^0 \tau \cdot d\big(\ln \widetilde{\xi}(z)\big) = \tau \ln \widetilde{\xi}(z)\Big|_0^1 = 0 \\ I_2 &= \textstyle\int_1^{1+\tau} zd\big(\ln \widetilde{\xi}(z)\big) + \int_{\tau}^{0} zd\big(\ln \widetilde{\xi}(z)\big) = \int_0^{\tau} 1 \cdot d\big(\ln \widetilde{\xi}(z)\big) = \ln \widetilde{\xi}(z)\Big|_0^{\tau} = \\ &= 2\pi\imath\,(\nu - \mu - \textstyle\sum_{i=1}^n k_i a_i) \end{aligned}$$

И следовательно, из $I = I_1 + I_2$ получаем $\nu - \mu - \sum_{i=1}^n k_i a_i = 0$.

Таким образом, для положительной разрешимости проблемы Римана-Гильберта в тривиальном расслоении на эллиптической кривой необходимо чтобы выполнялось $\nu - \mu - \sum_{i=1}^n k_i a_i = 0$ по модулю $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$. Остается заметить, что $\mu + \sum_{i=1}^n k_i a_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^n k_i a_i = \sum_{i=1}^n \widetilde{\alpha}_i a_i = \widetilde{\mu}$ где $\widetilde{\mu}_i = \alpha_i + k_i$ некоторый новый нормализованный набор $\widetilde{\alpha}_i$. И значит модулярный параметр $\nu$ должен совпадать с $\widetilde{\mu} = \sum_{i=1}^n \widetilde{\alpha}_i a_i$ для некоторого нормализованного набора $\widetilde{\alpha}_i$.

Окончательный результат можно сформулировать так. Для заданных эллиптической кривой $\Lambda_\tau$, особых точек $\{a_1, \ldots, a_n\}$ и данных монодромии $g_1, \ldots, g_n, \lambda$ одномерная проблема Римана положительно разрешима в тривиальном расслоении если, и только если для некоторых целых $p, q$ и нормализованного набора $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, где $e^{2\pi\imath\alpha_k} = g_k$ выполняется

$$\lambda = \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k + p + q\tau,$$

Соответствующая форма связности в имеет вид

$$\omega(z) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{\theta'(z - a_k)}{\theta(z - a_k)} dz$$

В общем же случае решение дается той же формой связности в расслоении $\mathcal{O}_{\sum_{k=1}^n \alpha_k a_k - \lambda}(0)$ и других решений не существует.

Как и ожидалось при обсуждении возможных способов обобщения проблемы Римана-Гильберта, оказалось, что для реализации в тривиальном расслоении требуется выполнение некоторых дополнительных условий на монодромию, в классе же полустабильных расслоений степени ноль задача всегда имеет явного вида положительное решение.

### 1.14.2 Связности ранга 2

Перейдем к описанию результатов, достигнутых в двумерном случае. Нами ставилась задача найти возможные обобщения эффективной разрешимости на сфере Римана двумерной трехточечной проблемы Римана-Гильберта на случай эллиптических кривых. С проблемой Римана-Гильберта тесно связана проблема Делиня-Симпсона, связанная в своей мультипликативной и аддитивной версиях с выбором из заданного набора орбит $\mathcal{G}_i$ присоединенного действия группы $\mathrm{GL}(p,\mathbb{C})$ на себе или, в аддитивной версии на алгебре $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ неприводимого набора представителей $g_i \in \mathcal{G}_i$ таким образом, чтобы было выполнено соотношение $g_1 \cdot \dots \cdot g_n = 1$ или $g_1 + \dots + g_n = 0$ соответственно. В общем случае проблема не решена, но при $p = 2$, $n = 3$ имеет простое явное решение, единственное с точностью до общего сопряжения. Именно на этом основана явная разрешимость трехточечной двумерной проблемы Римана-Гильберта. Конкретнее, применяется тот факт, что в случае общего положения (т.е. при отсутствии резонансов) локальная монодромия сопряжена экспоненте вычета. Тогда по представлению монодромии, то есть, по решению мультипликативной проблемы определяются орбиты для соответствующей аддитивной проблемы, а ее, в случае $p = 2$, $n = 3$ явно строящееся решение дает вычеты искомой фуксовой системы.

Сразу можно заметить, что полного аналога точной разрешимости этого случая на эллиптической кривой ожидать не приходится, данные монодромии расширяются, включая в себя монодромии по периодам кривой, появляются дополнительные степени свободы и нарушается жесткость представления. Следовательно, речь идет о поиске и наложении некоторых дополнительных ограничений, и исследовании явной разрешимости в этих редуцированных случаях.

В первую очередь заметим, что поскольку речь идет о двумерных полустабильных расслоениях степени ноль, то есть $E \simeq \mathcal{O}_\lambda(0) \oplus \mathcal{O}_{-\lambda}(0)$, то форма, задающая в них связность должна удовлетворять соотношениям на сдвиги по периодам:

$$\omega(z+1) = \omega(z)$$

$$\omega(z+\tau) = \begin{pmatrix} e^{2\pi\imath\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi\imath\lambda} \end{pmatrix} \omega(z) \begin{pmatrix} e^{-2\pi\imath\lambda} & 0 \\ 0 & e^{2\pi\imath\lambda} \end{pmatrix}$$

Из чего несложно вывести, что 1-форма $\omega(z)$, задающая в расслоении $E$ логарифмическую связность $\nabla$ с особенностями $\{a_1, \dots, a_n\}$ и вычетами

$$\mathrm{res}_{z=a_i}\omega = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta \end{pmatrix},$$

сумма которых равна нулю, имеет вид

$$\omega(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\begin{pmatrix} \alpha_i \theta'(z-a_i) & \beta_i \frac{\theta'(0)}{\theta(-2\lambda)}\theta(z-a_i-2\lambda) \\ \gamma_i \frac{\theta'(0)}{\theta(2\lambda)}\theta(z-a_i+2\lambda) & \delta_i \theta'(z-a_i) \end{pmatrix}}{\theta(z-a_i)} dz + \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} dz.$$

Пусть теперь нам дано неприводимое представление фундаментальной группы

$$\chi : \pi_1\left(\Lambda_\tau \setminus \{a_1, a_2, a_3\}\right) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}),$$

Будем называть его существенно неприводимым если неприводимо индуцированное им представление

$$\chi_{\mathrm{ind}} : \pi_1\left(D \setminus \{a_1, a_2, a_3\}\right) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}),$$

где $D \in \Lambda_\tau$ диск, содержащий особые точки $\{a_1,a_2,a_3\}$.

Пусть теперь $\chi_0$ какое-либо неприводимое представление

$$\chi_0 : \pi_1\left(\mathbb{CP}^1 \setminus \{d_1, d_2, d_3\}, z_0\right) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}),$$

По сказанному выше известно явное решение $(B_1,B_2,B_3)$ соответствующих проблем Делиня-Симпсона и Римана-Гильберта. Так как тройка определяется с точностью до общего сопряжения, можно считать $B_1$ верхнетреугольной, а $B_2$ нижнетреугольной, такой набор будем называть нормализованным для данного представления $\chi_0$.

Рассмотрим теперь описанного выше для связностей на эллиптической кривой вида 1-форму $\Omega(z)$, построенную по вычетам $(B_1,B_2,B_3)$ с нулевой постоянной частью $C_1 = C_2 = 0$ и произвольным параметром $\lambda$. Так как связь вычетов связности с локальной монодромией имеет локальный характер и не зависит от глобальных свойств поверхности можно было бы предположить, что данная связность имеет монодромию такую монодромию $\chi$, что $\chi_{\mathrm{ind}} = \chi_0$. Однако это неверно, так как соотношение в фундаментальной группе тора с тремя проколами имеет вид

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_a\gamma_b\gamma_a^{-1}\gamma_b^{-1}$$

и следовательно, и для матриц монодромии

$$G_1G_2G_3 = G_aG_bG_a^{-1}G_b^{-1}$$

Про монодромию, связанную со сдвигами по периодам в построенной связности нам пока что ничего не известно, но сразу можно заметить, что даже если положить коммутатор в правой части имеет известное фиксированное значение из SL(2,$\mathbb{C}$), то получающаяся задача восстановления монодромии крайне схожа с условиями постановки задачи двумерной четырехточечной задачи изомонодромной деформации, что является одной из эквивалентных форм шестого уравнения Пенлеве, как хорошо известно, требующего для своего решения введения нового класса трансцендентных функций. Следовательно, для достижения явной разрешимости необходимо введение дополнительных ограничений.

Нами был рассмотрен случай $G_a = 1$. Такое условие с одной стороны гарантирует вырождение коммутатора в правой части соотношения на монодромии, что сразу обеспечивает однозначное восстановление монодромии в левой части и влечет ее равенство $\chi_0$, а с другой стороны, допускает непосредственную проверку и реализацию по явному виду $\Omega(z)$.

А именно, как уже указывалось, для монодромии вокруг проколов имеет место соотношение

$$\ln G_k \sim 2\pi i B_k = 2\pi i \mathrm{res}_{z=a_i}\omega(z) = \oint_{\gamma_k} \omega(z).$$

Аналогичное описание допускает и монодромия по периодам эллиптической кривой:

$$\ln G_a \sim \int_0^1 \Omega(z), \ \ \ln G_b \sim \int_0^\tau \Omega(z).$$

Для построенной нами мероморфной формы $\Omega(z)$ автоматически выполняется

$$\exp\left(\int_0^1 \Omega(z)\right) = 1$$

и следовательно,

$$\ln G_a \sim \int_0^1 \Upsilon(z)$$

Действительно, в силу $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ для диагональных членов получаем

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\theta'(z-a_i)}{\theta(z-a_i)} dz = \int_0^1 d\ln\left(\prod_{i=1}^n \theta^{\alpha_i}(z-a_i)\right) = 2\pi\imath k, \ \ k \in \mathbb{Z}$$

Для внедиагональных членов вводем интеграл

$$I_k(\lambda) = \int_0^1 \frac{\theta'(0)}{\theta(-2\lambda)} \frac{\theta(z-a_k-2\lambda)}{\theta(z-a_k)} dz$$

и рассмотрим интеграл

$$\widetilde{I}_k = \oint_\Pi \frac{\theta'(0)}{\theta(-2\lambda)} \frac{\theta(z-a_k-2\lambda)}{\theta(z-a_k)} dz$$

по периметру фундаментального параллелограмма. Сумма вычетов дает $\widetilde{I}_k = 2\pi\imath$ тогда как из соотношений на сдвиги следует $\widetilde{I}_k = \left(1 - e^{4\pi\imath\lambda}\right) I_k(\lambda)$. Таким образом

$$I_k(\lambda) = \frac{2\pi\imath}{1 - e^{4\pi\imath\lambda}}$$

не зависит от $k$ и значит

$$\int\limits_0^1 \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{\theta'(0)}{\theta(-2\lambda)} \frac{\theta(z - a_k - 2\lambda)}{\theta(z - a_k)} dz = \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^n \beta_i I_i(\lambda) = \frac{2\pi\imath}{1 - e^{4\pi\imath\lambda}} \sum_{i=1}^n \beta_i = 0$$

в силу $\sum_{i=1}^n \beta_i = 0$. Проведя аналогичные вычисления для второй строки $\Omega(z)$ получаем

$$\int\limits_0^1 \Omega(z) = \begin{pmatrix} 2\pi\imath k & 0 \\ 0 & 2\pi\imath l \end{pmatrix}, \quad k,l \in \mathbb{Z}$$

и следовательно

$$\exp\left(\int\limits_0^1 \Omega(z)\right) = 1.$$

Отсюда немедленно виден способ явного построению логарифмической связности $\nabla$ с монодромией $\chi$ индуцирующей на $\Pi$ предписанную неприводимую монодромию $\chi_0$.

Для заданной $\chi_0$ мы можем явно построить тройку вычетов $(B_1,B_2,B_3)$, дающих явное решение проблемы Римана-Гильберта для $\chi_0$ на сфере. Построим мероморфную форму $\widetilde{\Omega}(z)$ описанным нами выше способом с вычетами $(B_1,B_2,B_3)$ в точках $\{a_1,a_2,a_3\}$ соответственно и рассмотрим $\widetilde{\nabla} = d - \widetilde{\Omega}(z)$ логарифмическую свящность с нулевой голоморфной частью $\Upsilon(z) = 0$ и произвольным модулярным параметром $\lambda$. Рассмотрим ее монодромию

$$\chi : \pi_1\left(\Lambda_\tau \setminus \{a_1, a_2, a_3\}\right) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}).$$

Она описывается определенной с точностью до общего сопряжения пятеркой матриц $(G_1,G_2,G_3,G_a,G_b)$ из $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ удовлетворяющих соотношениям $G_1G_2G_3 = G_aG_bG_a^{-1}G_b^{-1}$.

Как мы видели, $\ln G_a \sim 0$, следовательно $\ln G_a = 0$ и $G_a = 1$. Условие $G_1G_2G_3 = G_aG_bG_a^{-1}G_b^{-1}$ вырождается в $G_1G_2G_3 = 1$. Как показано выше спектры $G_i$ совпадают со спектрами локальных монодромий $\chi_0$. Так как $\chi_0$ неприводимо, и следовательно жестко, тройка $(G_1,G_2,G_3)$ определена однозначно с точностью до общего сопряжения и совпадает с монодромией $\chi_0$. Сформулируем окончательный результат.

Пусть

$$\chi_0 : \pi_1\left(\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus \{d_1, d_2, d_3\}\right) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}).$$

неприводимое представление, а тройка $(B_1,B_2,B_3)$ произвольное решение соответствующей проблемы Римана-Гильберта. Тогда 1-форма $\widetilde{\Omega}(z)$ построенная с помощью описанной выше процедуры по тройке $(B_1,B_2,B_3)$ с произвольным модулярным параметром $\lambda$ задает логарифмическую связность $\widetilde{\nabla} = d - \widetilde{\Omega}(z)$ в полустабильном векторном расслоении $\mathcal{O}_\lambda(0) \oplus \mathcal{O}_{-\lambda}(0)$ с особыми точками $\{a_1,a_2,a_3\}$ и представлением монодромии

$$\chi : \pi_1\left(\Lambda_\tau \setminus \{a_1, a_2, a_3\}\right) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}),$$

таким что

$$\chi_{\mathrm{ind}} = \chi_0,\ \ \chi(\gamma_a) = 1$$

и

$$\chi(\gamma_b) \sim \exp\left(2\pi i \int\limits_0^\tau \widetilde{\Omega}(z)\right).$$

В заключение отметим, что даже в редуцированном ($G_a$=1) случае шансы вычислить полную монодромию $\chi$ довольно малы. Однако, из построений выше очевидно, что все логарифмические связности с одинаковой индуцированной монодромией $\chi_0$ с условием $G_a = 1$ и тем же самым асимптотическим поведением в окрестности $\{a_1,a_2,a_3\}$ отличаются друг от друга лишь общим сопряжением тройки $(B_1,B_2,B_3)$. А.Болибрухом доказана положительная разрешимость обобщенной проблемы Римана-Гильберта для неприводимых представлений. Среди неприводимых представлений фундаментальной группы тора с тремя проколами имеется одно с индуцированной монодромией $\chi_0$ и такое что $G_a = G_b = 1$. Опуская тонкости связанные с тэта-дивизором деформации мы можем полагать, что это представление допускает реализацию с выбранными нами выше асимптотиками. Из общей теории известно, что этого можно добиться сколь угодно малой деформацией параметра $\lambda$.

Мероморфная 1-форма $\widehat{\Omega}(z)$ связности реализующей такое представление должна отличаться от $\widetilde{\Omega}$ общим сопряжением тройки $(\widehat{B}_1,\widehat{B}_2,\widehat{B}_3) = D(B_1,B_2,B_3)D^{-1}$ и удовлетворять дополнительному условию

$$\int_0^\tau \widehat{\Omega}(z) = \begin{pmatrix} 2\pi\imath k & 0 \\ 0 & 2\pi\imath l \end{pmatrix}, \quad k,l \in \mathbb{Z}$$

Это дает нам систему квадратных уравнений на элементы $D$ с заранее обеспеченным существованием решения.

## 1.15 Конформные блоки и голографическая дуальность

Нами были исследованы различные разложения одноточечных конформных блоков алгебры Вирасоро на торе при больших центральных зарядах, а также связи между этими пределами.

Конформный блок как объект теории представлений алгебры Вирасоро является функцией размерностей входящих в него полей, так, рассмотренный в работе блок является функцией центрального заряда и двух конформных размерностей - внутреннего и внешнего поля. Различные постановки физических задач приводят к различным режимам стремления центрального заряда к бесконечности. Нами были выделены несколько режимов: легкий, когда размерности фиксированы, классический, когда фиксированы отношения обеих размерностей к центральному заряду. Отдельным случаем рассмотрен так называемый глобальный блок, который строится из представлений подалгебры алгебры Вирасоро-алгебры $sl(2)$. Также рассмотрен промежуточный случай между легким и классическим пределами, который их связывает, так называемый "heavy-light"блок.

В случае конформных блоков на сфере легкие и глобальные конформные блоки совпадают, однако, как оказалось, этого не наблюдается в случае блоков на торе. Была явно доказана формула, связывающая эти пределы. Легкий блок появляется как предел квантового, но нами также была найдена и алгебра симметрии, соответствующая легкому блоку. Таким образом, стало возможным его независимое описание и анализ.

Одним из физических мотивов, приводящих к рассмотренным проблемам, является голографическая дуальность. В современном понимании голографическая дуальность связывает статсуммы теории гравитации и конформной теории поля. В квазиклассическом пределе корреляционные функции гравитации вычисляются через классическое действие, которое, с другой стороны, является классическим конформным блоком. Полученные нами результаты и указанные выше наблюдения могут быть полезны для изучения голографической дуальности, поскольку выражают интересующий классический блок через более простые конструкции.

Нами был подробно рассмотрен один из примеров соответствия, следующих из принципа голографической дуальности. Голографическая дуальность предписывает совпадение корреляционных функций трехмерной гравитации и двумерной конформной теории поля. Конформная теория поля появляется как граничная теория и является аналогом граничных условий для полей внутри трехмерного пространства Анти-де-Ситтера.

Ранее другими авторами были рассмотрены явные примеры соответствия четырехточечных корреляторов в одной и другой теории. Мы развили этот подход и продолжили изучать дуальность на примере пятиточечного кореллятора. Вопрос, интересовавший нас при этом, касается принципиальной возможности реализации соответствия. Ранее считалось, что в принципе невозможно воспроизвести произвольный коррелятор конформной теории при помощи теории гравитации. Есть естественные ограничения, связанные с составом полей, входящих в корреляционную функцию, потому как интегрируемым решением уравнений гравитации является черная дыра, создаваемая одной частицей. Отсюда следует, что размерности как минимум двух полей в корреляторе обязаны совпадать.

Гравитационное вычисление предполагает минимизацию классического действия. Следствием данной процедуры является система трансцендентных уравнений. Заранее неизвестно число решений такого уравнения и стоял вопрос, достаточно ли условий, чтобы разрешить их для максимально общего случая. Ранее считалось, что необходимо наложить дополнительные ограничения сверх тех, что являются естественными. Давно была известна связь уравнений минимизации действия $n$ частиц и уравнений на так называемые акцессорные параметры, возникающие в задаче униформизации сферы с $n$ проколами. Таким образом, поставленная задача также связана с проблемой униформизации.

Мы предложили схему разрешения минимизирующих уравнений при помощи введения дополнительных параметров. Также мы провели вычисления параллельно в конформной теории поля и нашли соответствующие прескрипции для сопоставления результатов. Таким образом было показано, что голографическое соответствие реализуется при достаточно общих предположениях. Предложенная схема может быть без труда расширена на многоточечные корреляционные функции.

### 1.16 Комбинаторика и деформации схем Гильберта

В совместной работе Е.Горского с А.Негуцем исследованы стабильные базисы в $K$-теории схемы Гильберта точек на плоскости, введенные в работах А.Ю.Окунькова и Д.Малика. Установлено, что при изменении параметра наклона базис локально постоянен и изменяется при переходе через дискретное множество “стен”. Нами получено описание множества “стен” и сформулирована гипотеза, описывающая матрицу перехода через каждую из таких “стен”. Эта матрица связана с матрицей бар-инволюции на квантовом пространстве Фока, возникающей в работах Леклерка и Тибона по теории представлений квантовых аффинных алгебр.

Разбиение называется $N$-сердцевиной, если ни один из крюков соответствующей диаграммы Юнга не делится на $N$. В классической работе Дж. Андерсон для взаимно простых $M$ и $N$ построена биекция между множеством путей Дика в прямоугольнике $M \times N$ и множеством разбиений, одновременно являющихся $N$- и $M$-сердцевинами. Если $N$ и $M$ не взаимно просты, то такая биекция невозможна, так как число $(N,M)$-сердцевин бесконечно, а число путей Дика конечно. Тем не менее, Е.Горскому в совместной работе с М.Мазиным и М.Вазирани удалось ввести отношение эквивалентности на множестве $(N,M)$-сердцевин и построить биекцию между классами эквивалентности и путями Дика. Для получено $M = N$ доказательство связи между классами эквивалентности и компонентами связности дополнения до набора гиперплоскостей, введенного в работах Ши. Кроме того, сформулирована гипотеза о связи $(N,M)$-сердцевин с гомологиями Хованова-Розанского торического зацепления типа $(N,M)$.

В совместной работе Е.Горского с С.М.Гусейн-Заде предложена конструкция локальных характеристических чисел для наборов голоморфных дифференциальных 1-форм на особых многообразиях с изолированными особенностями. Они вычисляются как эйлеровы характеристики некоторых комплексов, обобщающих резольвенту Эгона-Норскотта детерминантного идеала. Построенная конструкция обобщает понятия локального индекса 1-формы на особом многообразии и локальных характеристических чисел на полных пересечениях, ранее исследованные в работах С.М.Гусейн-Заде, В.Эбелинга и др.

В статье Э.Карлссона и А.Меллита была построена интересная алгебра, действующая на пространстве многочленов от бесконечного числа переменных с дополнительными параметрами. Эта алгебра была ими использована для доказательства так называемой "шаффл-гипотезы"и ее "рациональных аналогов”. В совместной работе Е.Горского, Э.Карлссона и А.Меллита получена геометрическая конструкция этой алгебры и ее представления. Полиномиальное представление отождествлено с эквивариантной K-теорией параболической флаговой схемы Гильберта, тесно связанной с аффинными пространствами Ламона. Дана явная геометрическая конструкция операторов, порождающих алгебру.

## 1.17 Асимметричный процесс с простыми исключениями (ASEP) и детерминантные точечные процессы

С начала 1960-х годов детерминантные (и тесно связанные с ними пфаффианные) случайные точечные процессы служили важнейшим инструментом в асимптотическом анализе точно решаемых вероятностных систем в математике и физике. В конце

1990-х годов область их применения была расширена на модели случайного роста и системы взаимодействующих частиц в размерности (1+1).

Около 10 лет назад работа Трейси и Уидома по асимптотикам частично асимметричного процесса с простыми исключениями (аббревиатура ASEP от английского термина partially asymmetric simple exclusion process) положила начало новой волне исследований. ASEP — это одна из наиболее базовых систем взаимодействующих частиц, асимптотики которой на большом времени, не получалось найти стандартными детерминантными или пфаффианными методами. Трейси и Уидом использовали другой подход (координатный анзац Бете), и за их работами последовал всплеск активности в этом направлении.

Трейси и Уидом показали, что флуктуации потока на больших временах для ASEP со ступенчатыми начальными условиями описываются распределением Трейси–Уидома для гауссовских унитарных ансамблей, которое берет начало в детерминантном точечном процесса Эйри. Тем не менее, до предельного перехода детерминантные процессы никак не видны.

С появлением работ по асимптотикам направленных полимеров в случайной среде появилась надежда на более активное использование детерминантных точечных процессов. Для непрерывного броуновского полимера (или, что эквивалентно, стохастического уравнения в частных производных Кардара–Паризи–Жанга (KPZ) с так называемыми начальными данными типа "узкого клина"), являющегося предельным объектом для ASEP, преобразование Лапласа распределения его статсуммы есть среднее простого мультипликативного функционала детерминантного процесса Эйри (см. результат в этой форме в недавней заметке Бородин–Горин).

Другая форма результата — это модель полу-дискретного броуновского полимера, известная как полимер О'Конелла-Йора. Для этой модели было показано, что преобразование Лапласа статсуммы может быть реализовано через средние по знаковым детерминантным точечным процессам. К сожалению, применение "знаковых"(т.е. неположительных) мер в теории вероятностей ограничено, несмотря на то, что Имамура и Сасамото смогли найти предел своего результата и получить связь KPZ и Эйри, упомянутую в предыдущем абзаце.

Одна из целей данной работы — это установить ясную связь между ASEP и детерминантными точечными процессами, а также показать, как эта связь может быть использована для анализа асимптотик на большом времени.

ASEP может быть реализован как предел другой системы случайного роста, известной как стохастическая шестивершинная модель; ее определение восходит к Гва и

Шпон. Совсем недавно Бородин заметил, что определенные средние для стохастической шестивершинной модели совпадают с другими средними для так называемых мер Шура (введенных ранее Окуньковым); о последних можно думать как о возможных примерах детерминантных точечных процессов.

Найти предел ASEP для этого совпадения — не совсем простая задача, и это — первый из главных результатов настоящей работы. Семейство детерминантных процессов, соответствующих ASEP (со ступенчатыми начальными данными) оказалось новым и ранее не рассмотренным. Мы называем их дискретными ансамблями Лагерра; они живут на $\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0,1,2,\dots\}$, и их корреляционные ядра выражаются через классические ортогональные полиномы Лагерра. Мы доказываем, что результат q-преобразования Лапласа функции высоты ASEP равен среднему мультипликативных функционалов по соответствующему дискретному ансамблю Лагерра.

Затем мы показываем, как из этого результата следуют три различных асимптотических режима для ASEP. Они соответствуют двум предельным режимам дискретного ансамбля Лагерра. В первом пределе, с конечным числом частиц в ASEP, дискретный ансамбль Лагерра сходится к дискретному ансамблю Эрмита. Во втором и третьем пределах, соответствующих сходимости функции высоты ASEP к распределению Трейси–Уидома для гауссовских унитарных ансамблей и к решению уравнения KPZ, упомянутых выше, дискретный ансамбль Лагерра сходится к процессу Эйри. Разница между этими двумя пределами в том, что касается дискретного ансамбля Лагерра, связана исключительно с различным асимптотическим поведением мультипликативного функционала.

Кроме этого, мы объясняем, что соответствующий предел означает для стохастической шестивершинной модели (сходимость к распределению Трейси–Уидома для гауссовских унитарных ансамблей была получена ранее).

Что касается других результатов, мы вводим дискретный ансамбль Якоби, объясняем, как устроен теоретико-операторный механизм возникновения дискретных ансамблей в теории классических ортогональных многочленов, и показываем многочисленные предельные переходы между более классическими и новыми ортогональными многочленами.

Пусть $\mathcal{W} = \mathcal{W}(dt)$ — такая мера на $\mathbb{R}$, что

(a) она абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $dt$;
(b) у нее есть конечные моменты каждого порядка;
(c) проблема моментов для $\mathcal{W}$ является определенной.

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{P}}_0, \widetilde{\mathcal{P}}_1, \dots$ ортогональные многочлены относительно меры $\mathcal{W}$ с положительными старшими коэффициентами; они образуют базис в $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R},\mathcal{W})$. Если $r \in \mathbb{R}$ —точка носителя меры $\mathcal{W}$, рассмотрим ортогональное разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_r^- \oplus \mathcal{H}_r^+$, где $\mathcal{H}_r^- \subset \mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_r^+ \subset \mathcal{H}$ — подпространства функций с носителями, соответственно, $(-\infty,r)$ и $(r,+\infty)$.

У нас есть изоморфизм гильбертовых пространств $\mathcal{H} \leftrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ в смысле соответствия $\widetilde{\mathcal{P}}_n \leftrightarrow \delta_n$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Под действием этого изоморфизма сумма $\mathcal{H} = \mathcal{H}_r^- \oplus \mathcal{H}_r^+$ индуцирует ортогональное разложение $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}) = L_r^- \oplus L_r^+$. Обозначим через $K_r^-$ and $K_r^+$ ортогональные проекции на $L_r^-$ и $L_r^+$ соответственно. Эти операторы определяют детерминантные точечные процессы $\mathbb{P}_r^{\pm}$ на $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Корреляционные ядра этих точечных процессов (т.е., матрицы $K_r^{\pm}$) имеют вид

$$K_r^+(x,y) = \int_r^{+\infty} \widetilde{\mathcal{P}}_x(t)\widetilde{\mathcal{P}}_y(t)\mathcal{W}(dt),$$
$$K_r^-(x,y) = \int_{-\infty}^{r} \widetilde{\mathcal{P}}_x(t)\widetilde{\mathcal{P}}_y(t)\mathcal{W}(dt), \quad x,y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Если выбрать в качестве $\mathcal{W}(dt)$ один из трех классических весов

$$\exp(-t^2)\,dt, \qquad \mathbf{1}_{t>0}\,t^{\beta-1}\exp(-t)\,dt, \qquad \mathbf{1}_{-1<t<1}\,(1-t)^a(1-t)^b\,dt, \qquad t \in \mathbb{R},$$

мы придем к дискретным ансамблям Эрмита, Лагерра и Якоби соответственно. Они сильно отличаются от ортогональных полиномиальных ансамблей, связанных с этими весами; те живут на $\mathbb{R}$ и почти наверное имеют конечное число частиц. Заметим, что индекс и независимая переменная в ортогональном многочлене меняются ролями при переходе от одного типа ансамблей к другому, что имеет определенное сходство с идеей биспектральности. Дискретный ансамбль Эрмита ранее появлялся в работе Бородина и Ольшанского, два специальных случая дискретного ядра Якоби ранее появлялись в работе Бородина и Куана, а дискретный ансамбль Лагерра и обобщенный дискретный ансамбль Якоби появляются как новые результаты.

Ключевая особенность $\mathbb{P}_r^{\pm}$, важная для нас — это то, что для классических весов корреляционные ядра являются спектральными проекциями для довольно простого разностного оператора второго порядка на $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Это не что иное как матрицы Якоби, связанные с соответствующими системами ортогональных многочленов. Другими словами, это трехдиагональные $\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$ матрицы, представляющие оператор вида $\pm(T - \mathrm{const})$ в базисе соответствующих ортогональных многочленов, где $T$ — оператор умножения на независимую переменную $t$ in $L^2(\mathbb{R},\mathcal{W}(dt))$.

Объясним, почему это важно для нас. Классические гипергеометрические многочлены схемы Аски всегда можно рассматривать как собственные функции подходящего дифференциального или разностного оператора второго порядка (с полиномиальными коэффициентами). Поэтому корреляционные ядра соответствующих ортогональных полиномиальных ансамблей можно рассматривать как спектральные проекции соответствующих операторов.

Существует несколько асимптотических режимов, в которых ортогональные полиномиальные ансамбли прекращают быть таковыми (например, число частиц может стремиться к бесконечности), но соответствующие дифференциальные/разностные операторы, как легко видеть, имеют предел. В случае, когда пространства состояний до и после предельного перехода дискретные, в реальности достаточно установить сходимость спектральных проекций для таких операторов, и, следовательно, сходимость соответствующих детерминантных точечных процессов. Более того, вычисления заметно упрощаются по сравнению с традиционными подходами к таким асимптотикам, которые, как правило, включают в себя метод перевала или методы, связанные с проблемой Римана–Гильберта. Однако на данный момент мы не можем дать оценку этому методу в случае, если некоторые из пространств состояний непрерывны, и тогда его следует рассматривать как эвристический. В то же время, для всех известных нам примеров он приводит к верному заключению при достаточно небольшом количестве вычислений, а также дает, возможно, самый простой способ угадать правильный скейлинг.

Подход к асимптотикам корреляционных ядер, связанный с разностными операторами, был впервые использован Бородиным и Ольшанским. Он также немного похож по духу на идею Эделмана и Саттона, приведшую к заметному прогрессу в понимании пределов обобщенных $\beta$-ансамблей в теории случайных матриц, с той существенной разницей что в этом случае приходится иметь дело со случайными трехдиагональными матрицами (что значительно труднее). Другая связанная с этим идея есть в работе Брейера и Дюитса, которые использовали асимптотики матриц Якоби, чтобы доказать гауссовость флуктуаций для соответствующих ортогональных полиномиальных ансамблей в пределе растущего числа частиц.

В нашей работе мы используем описанный новый подход, чтобы доказать несколько предельных утверждений, разными способами реализующих дискретные ансамбли Эрмита, Лагерра и Якоби как предельные случаи. Одно из таких утврждений связано со сходимостью ортогональных полиномомиальных ансамблей Мейкснера к дискретным ансамблям Лагерра. Вместе с известными результатами по связи наблюдаемых для стохастической шестивершинной модели с мерами Шура (ансамбли Мейкснера —

их специальный случай) этот предел и приводит к нашему первому главному результату.

Теорема 1. Рассмотрим ASEP на $\mathbb{Z}$, где частицы занимают все отрицательные целые значения в момент времени 0, интенсивность прыжков налево равна $\mathfrak{l} = q \in (0,1)$, а интенсивность прыжков направо равна $\mathfrak{r} = 1$. Обозначим через $\mathfrak{h}(x)$ число частиц в ASEP справа от позиции $x \in \mathbb{Z}$ (включая саму позицию $x$). Тогда в каждый момент времени $t \geq 0$ и для любых $x \geq 0$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{-q^{\mathbb{Z}_{\leq 0}}\}$ выполнено равенство

$$\mathbb{E}_{(\text{ASEP в момент } t)} \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 + \zeta q^{\mathfrak{h}(x)+i}} = \mathbb{E}_{Z \in \mathrm{DLaguerre}^{+}((1-q)t, x+1)} \prod_{z \in Z} \frac{1}{1 + \zeta q^{z}},$$

где $\mathrm{DLaguerre}^{+}(r; \beta)$ — это детерминантный точечный процесс вида $\mathbb{P}_r^{+}$ с весом Лагерра $\mathcal{W}(dt) = \mathbf{1}_{t>0}\, t^{\beta-1} \exp(-t)\, dt$. Аналогичное соотношение верно и для $x < 0$.

Дальнейший предельный переход от дискретного ансамбля Лагерра к дискретному ансамблю Эрмита, который мы также доказываем операторным методом, ведет к асимптотикам первых частиц в ASEP на большом времени.

Наконец, мы используем сходимость ортогональных полиномиальных ансамблей Мейкснера и Шарлье к дискретным ансамблям Эрмита и Эйри, чтобы сделать аналогичные асимптотические утверждения на большом масштабе для двух случаев стохастической шестивершинной модели в квадранте.

В процессе работы над асимптотическими вопросами мы столкнулись с проблемой нахождения нового предела ядра Кристоффеля–Дарбу для полиномов Мейкснера. Мы уже собирались применить стандартное, но техническое рассуждение вроде метода перевала, чтобы найти предел, когда поняли, что есть намного менее известный, однако значительно более краткий и концептуальный способ получить этот предел — подход, использующий разностные операторы, который обсуждался выше. Дальнейшие естественные вопросы для ASEP и стохастической шестивершинной модели показали необходимость нахождения пределов других ядер той же природы. Операторный подход подходит для них всех, оказывается довольно аккуратным, с очень ограниченным количеством вычислений и общим рассуждением из функционального анализа. Мы решили использовать эту возможность дать полное описание этого метода (которого ранее не было в литературе) и продемонстрировать его мощь на некоторых новых предельных переходах, как тех, которые были нам нужны, так и на тех, которые могут оказаться нужными в будущем. Пример последнего — это сходимость ортогонального полиномиального ансамбля Рака к дискретному ансамблю Якоби, которая (а) с большим трудом устанавливается — либо вообще не может быть установлена — классическим методом перевала и (б) вероятно, будет полезна при изучении моделей случайных замощений.

## 1.18 Орбиты и инварианты супергруппоида Вейля

Мы изучаем орбиты и полиномиальные инварианты некоторого аффинного действия супергруппоида Вейля супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,m)$ в зависимости от параметра действия и показываем, что для типичных значений параметра все орбиты конечны и различимы с помощью явно заданных инвариантов. Мы также даем подробное описание специальное множество параметров, для которых алгебра инвариантов не является конечно порожденной и не разделяет орбиты, причем некоторые из орбит бесконечны.

Пусть $G$ – конечная группа, действующая линейно на конечномерном пространстве $V$ над полем характеристики нуль, и пусть $P[V]^G$ – алгебра полиномиальных инвариантов. Хорошо известно, что эта алгебра конечно порождена и разделяет орбиты, то есть для любых двух орбит существует инвариант $f \in P[V]^G$, принимающий на этих орбитах различные значения. Классическим примером является группа Коксетера, порожденная отражениями в вещественном евклидовом пространстве $V$, в котором, согласно теореме Шевалле, соответствующая алгебра инвариантов конечно порождена.

Рассотрим теперь конечный группоид $\mathfrak{G}$, действующий на аффинном пространстве $V$ частично заданными аффинными отображениями. Нас интересуют следующие вопросы:

Q1. Является ли алгебра инвариантов $P[V]^G$ конечно порожденной?

Q2. Разделяет ли эта алгебра орбиты $\mathfrak{G}$?

Эти вопросы кажутся тесно связанными со следующим вопросом, ответ на который тривиален в случае групп:

Q3. Все ли орбиты конечны?

Как мы увидим далее, ответы на все эти вопросы, вообще говоря, отрицательные. Мы продемонстрируем это в случае так называемого супергруппоида Вейля $\mathcal{W}_{n,m}$, введенного в связи с кольцом Гротендика супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,m)$. Мы будем рассматривать специальное аффинное действие $\Phi_\kappa$ этого группоида, которое будет зависеть от ненулевого параметра $\kappa$, возникающего в теории деформированных квантовых систем Калоджеро-Мозера.

Известно, что алгебра инвариантов $P[V]^{\Phi_\kappa}$ для иррациональных $\kappa$ конечно порождена и изоморфна алгебре, отвечающей квантовым интегралам движения Калоджеро-Мозера. Специальный случай $\kappa = -1$ отвечает супералгебре Ли $\mathfrak{gl}(n,m)$, когда соответствующие инварианты являются суперсимметрическими многочленами и определяются характерами полиномиальных представлений. Известно, что соответствующая алгебра не является конечно порожденной, и что она не разделяет орбиты, и некоторые орбиты оказываются бесконечными.

В нашей работе мы исследуем более детально случай, когда $\kappa$ произвольно, в частности, когда $\kappa$ рационально.

Пусть $\Phi_\kappa$ – действие супергруппоида Вейля $\mathcal{W}_{n,m}$. Мы будем называть параметр $\kappa$ специальным, если

$$\kappa = \pm\frac{p}{q}, \quad \text{для некоторых} \quad 1 \leq p \leq m, 1 \leq q \leq n.$$

Интересно, что то же множество параметров появляется в связи со свойством Коэна-Маколея.

Наши ключевые результаты следующие.

Теорема 1. Все орбиты $\mathcal{W}_{n,m}$ конечны, если и только если $\kappa$ не является специальным параметром, меньшим нуля. В этом случае алгебра полиномиальных инвариантов $P[V]^{\Phi_\kappa}$ конечно порождена. Кроме того, если $\kappa$ также не является положительным специальным параметром, то эта алгебра разделяет орбиты.

Для специальной, подробно описанной подалгебры $\Lambda_{n,m,\kappa} \subset P[V]^{\Phi_\kappa}$, которая совпадает с $P[V]^{\Phi_\kappa}$, когда $\kappa$ не является рациональным числом, большим нуля, мы можем сформулировать утверждение еще точнее.

Теорема 2. Алгебра $\Lambda_{n,m,\kappa}$ разделяет орбиты в том и только в том случае, когда параметр $\kappa$ неспециален.

Мы предполагаем, что полная алгебра инвариантов $P[V]^{\Phi_\kappa}$ также раздляет орбиты и, более общо, что орбиты любого аффинного действия конечного группоида с конечными орбитами разделимы с помощью инвариантов.

Группоид $\mathfrak{G}$ – это категория, в которой все морфизмы обратимы. Мы будем обозначать $\mathfrak{B}$ множество объектов, называемое также базой; множество морфизмов обозначается $\mathfrak{G}$ так же, как и сам группоид.

Если база $\mathfrak{B}$ состоит из одного элемента, тогда $\mathfrak{G}$ имеет естественную групповую структуру. Более общо, каждому $x \in \mathfrak{B}$ можно сопоставить группу изотопии $\mathfrak{G}_x$, состоящую из всех морфизмов $g \in \mathfrak{G}$ элемента $x$ в себя. Для каждого группоида имеется естественное отношение эквивалентности на базе $\mathfrak{B}$: мы полагаем $x \sim y$, если существует морфизм $g : x \to y$.

Для любого множества $X$ можно определить группоид $\mathfrak{G}(X)$, база которого содержит всевозможные подмножества $Y \subset X$ и морфизмами являются всевозможные биекции между ними. Под действием группоида мы будем понимать гомоморфизм $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}(X)$ (который, в свою очередь, является функтором между соответствующими категориями). Если $X$ – аффинное пространство, $Y \subset X$ суть аффинные подпространства, а морфизмы – аффинные биекции, то в этом случае мы будем называть действие группоида аффинным.

Орбита $\mathcal{O}_x$ действия $\mathfrak{G}$ на $X$ состоит из всех точек $y \in X$, для которых существуют элементы $g_1,...,g_k \in \mathfrak{G}$ такие, что $y = g_k(g_{k-1}(...(g_1(x))...))$. В отличие от случая группы, произведение $g_k g_{k-1}...g_1$ может не существовать.

Мы будем рассматривать частный случай супергруппоида Вейля, сопостовляемого любой классической супералгебре Ли $\mathfrak{g}$. Корни $\mathfrak{g}$ образуют корневую систему $R \subset V$ в смысле Сергановой, что является некоторым обобщением корневой системы в случае, когда присутствуют изотропные корни. Для изотропных корней нельзя определить отражение, что ведет к хорошо известной проблеме определения группы Вейля в данной ситуации. Отражения, отвечающие неизотропным корням, образуют малую группу Вейля $W_0$, которая описывает частичную симметрию системы.

Рассмотрим группоид $\mathfrak{T}_{iso}$ с базой $R_{iso}$, являющейся множеством всех изотропных корней в $R$. Множество морфизмов $\alpha \to \beta$ непусто в том и только в том случае, когда $\beta = \pm\alpha$, и тогда это множество состоит только из одного элемента. Мы будем обозначать $\tau_\alpha$ соответствующий морфизм $\alpha \to -\alpha$, $a \in R_{iso}$. Группа $W_0$ действует на $\mathfrak{T}_{iso}$ естественным образом: $\alpha \to w(\alpha)$, $\tau_\alpha \to \tau_{w(\alpha)}$.

Супергруппоид Вейля

$$\mathcal{W}(R) = W_0 \sqcup W_0 \ltimes \mathfrak{T}_{iso}$$

определяется как дизъюнктное объединение группы $W_0$, рассматриваемой как группоид с одноточечной базой $[W_0]$, и группоида-полупрямого произведения $W_0 \ltimes \mathfrak{T}_{iso}$ с базой $R_{iso}$. Такое дизъюнктное объединение является корректно определенной операцией над группоидами.

Ранее мы определили допустимые деформации обобщенных корневых систем. Корни остаются такими же, однако билинейная форма $B$ на $V$ деформируется и для классических серий зависит от параметра $\kappa$, который предполагается ненулевым. Случай $\kappa = -1$ отвечает изначальной обобщенной системе корней.

Пусть $X = V$ с деформированной билинейной формой $( \, , )$. Определим аффинное действие $\Phi_k$ супергруппоида Вейля $\mathcal{W}(R)$ на $V$. Базовая точка $[W_0]$ отображается во все пространство $V$. Пусть $\alpha \in R_{iso}$, тогда $\tau_\alpha$ отображает гиперплоскость $\Pi_\alpha$, заданную уравнением $(\alpha,z) = -\frac{1}{2}(\alpha,\alpha)$ в гиперплоскость $\Pi_{-\alpha}$, заданную уравнением

$(\alpha,z) = \frac{1}{2}(\alpha,\alpha)$. Элементы группы $W_0$ действуют естественным образом и элемент $\tau_\alpha$ действует сдвигом

$$\tau_\alpha(z) = z + \alpha \in \Pi_{-\alpha},\ z \in \Pi_\alpha,$$

суженным на гиперплоскость $\Pi_\alpha$.

Алгебра инвариантов $P[V]^{\Phi_\kappa}$ данного действия тесно связана с алгеброй квантовых интегралов движения соответствующей деформированной системы Калоджеро-Мозера. В действительности, понятие супергруппоида Вейля мотивировано этой связью, а также теорией представлений классических супералгебр Ли: кольцо Гротендика $K(\mathfrak{g})$ конечномерных представлений базовой классической супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ изоморфно кольцу тригонометрических инвариантов $\mathbb{Z}[P_0]^{\Phi_\kappa}$, где $\kappa = -1$ и $P_0$ является весовой решеткой четной части $\mathfrak{g}$.

В случае супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,m)$ система корней в базисе $\varepsilon_i$, $1 \le i \le n$, $\delta_p = \varepsilon_{p+n}$, $1 \le p \le m$ имеет вид

$$R_0 = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j, \delta_p - \delta_q,\ 1 \le i \neq j \le n, 1 \le p \neq q \le m\},$$
$$R_1 = \{\pm(\varepsilon_i - \delta_p),\ 1 \le i \le n, 1 \le p \le m\} = R_{iso}.$$

Малая группа Вейля $W_0 = S_n \times S_m$ действует, переставляя раздельно $\varepsilon_i$, $i = 1,\ldots,n$ и $\delta_p$, $p = 1,\ldots,m$. Обозначим соответствующий супергруппоид Вейля $\mathcal{W}_{n,m}$. Деформированная билинейная форма определяется следующими соотношениями:

$$(\varepsilon_i,\varepsilon_i) = 1,\quad (\varepsilon_i,\varepsilon_j) = 0,\ i \neq j,\quad (\delta_p,\delta_p) = \kappa,\quad (\delta_p,\delta_q) = 0,\ p \neq q,\quad (\varepsilon_i,\delta_p) = 0.$$

При $\alpha = \varepsilon_i - \delta_p \in R_{iso}$ соответствующие гиперплоскости $\Pi_{\pm\alpha}$ задаются уравнениями

$$u_i - \kappa v_p = \pm\frac{1}{2}(1+\kappa).$$

Действие элемента $\tau_\alpha \in \mathcal{W}_{n,m}$ на гиперплоскости $\Pi_{-\alpha}$, в свою очередь, задается формулой

$$\tau_\alpha(z) = (u_1,\ldots,u_i+1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_p-1,\ldots,v_m),$$

где $z = (u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_m)$.

В простейшем примере, когда $n = m = 1$, имеются две прямые $L_\pm$ на плоскости, которые задаются уравнениями

$$u - \kappa v = \pm\frac{1}{2}(1+\kappa),$$

а также сдвиги $(u,v) \to (u+1,v-1)$, отображающие $L_-$ в $L_+$, и обратные сдвиги $(u,v) \to (u-1,v+1)$. В этом случае имеется очень простой группоид $\mathfrak{T}_2$ с базой из двух точек, которые соединены взаимно обратными морфизмами.

При $\kappa \neq -1$ орбиты суть отдельные точки вне указанных выше прямых, а также пары точек $(u,v), (u+1,v-1)$ на этих прямых. Случай $\kappa = -1$ исключителен: в этом случае эти две прямые суть одна и та же прямая $L$, заданная уравнением $u+v = 0$ и сохраняющаяся при сдвигах. Вне прямой $L$ орбиты также являются отдельными точками, однако на прямой орбиты бесконечны, и каждая орбита имеет вид $(u+l, -u-l)$, $l \in \mathbb{Z}$.

Случай произвольных $m$ и $n$ более сложен, но мы далее показываем, что для него имеется похожее описание.

### 1.19 Обобщенные Янгианы и их пуассонова структура

Под термином "обобщенные Янгианы" мы подразумеваем близкие к Янгианам алгебры двух различных классов. Один из этих классов содержит семейство так называемых брейдинговых Янгианов, введенных ранее в одной из наших статей. В некоторых отношениях брейдинговый Янгиан близок по свойствам к алгебре уравнения отражений. Обобщенные Янгианы второго класса, которые мы будем назввать Янгианами RTT типа, задаются теми же формулами, что и обычный Янгиан, но с другими квантовыми $R$-матрицами. Если такая $R$-матрица является простейшей тригонометрической $R$-матрицей, то соответствующий Янгиан RTT типа называется $q$-Янгианом. Одним из результатов данной работы является утверждение о том, что всякий обобщенный Янгиан есть деформация коммутативной алгебры $\mathrm{Sym}(gl(m)[t^{-1}])$ если определяющая его $R$-матрица представляет собой деформацию оператора перестановки. Кроме того, мы приводим явный вид соответствующих скобок Пуассона.

Ранее в наших работах было определено понятие брейдингового Янгиана (это название происходит от английского словосочетания braided Yangian) связанного с широким классом рациональных и тригонометрических $R$-матриц. Фактически, это новое обобщение Янгиана $\mathbf{Y}(gl(m))$, введенного Дринфельдом. Согласно одному из определений, Янгиан $\mathbf{Y}(gl(m))$ является алгеброй, порожденной коэффициентами матричнозначной функции

$$L(u) = \sum_{k\geqslant 0} L[k]u^{-k}.$$

Коэффициенты Лорана $L[k]$ представляют собой конечные $m \times m$ матрицы, причем $L[0] = I$ — единичная матрица. Матричные элементы $L(u)$ удовлетворяют системе перестановочных соотношений

$$R(u,v)L_1(u)L_2(v) - L_1(v)L_2(u)R(u,v) = 0.$$

Здесь $R(u,v) = P - \frac{a}{u-v} I$ — известная $R$-матрица Янга[1]. В дальнейшем символ $I$ будет обозначать единичную матрицу, $P$ — оператор транспозиции или его матрицу. Матрица $L(u)$ (и аналогичные матрицы, рассмотриваемые ниже) называется генерирующей матрицей.

Упомянутая выше $R$-матрица Янга является простейшим примером токовой (то есть, зависящей от спектрального параметра) матрицей, которая является одним из решений квантового уравнения Янга-Бакстера:

$$R_{12}(u,v)R_{23}(u,w)R_{12}(v,w) = R_{23}(v,w)R_{12}(u,w)R_{23}(u,v).$$

Если в равенстве (1.19) заменить $R$-матрицу Янга на другую токовую матрицу $R(u,v)$, мы придем к классу янгианоподобных алгебр. Самый известный пример — так называемый $q$-Янгиан, который отвечает простейшей тригонометрической $R$-матрице, происходящей из квантовой группы (КГ) $U_q(\widehat{sl(m)})$. Далее в тексте все объекты и структуры, связанные с алгебрами $U_q(\widehat{sl(m)})$ или $U_q(sl(m))$ называются стандартными.

Помимо стандартной $R$-матрицы существует большое семейство рациональных и тригонометрических токовых $R$-матриц, которые строятся, соответственно, из инволютивных или Геккевских постоянных $R$-матриц с помощью процедуры бакстеризации (точные определения даны в разделе 2). Соответствующие алгебры с соотношениями (1.19) будем называть Янгианами RTT типа и обозначать символом $\mathbf{Y}_{RRT}(R)$. При этом, в отличие от обычного Янгиана, мы не будем накладывать условие $L[0] = I$.

Другой класс алгебр — брейдинговые Янгианы — был введен в работе [266]. Генерирующая матрица каждой такой алгебры удовлетворяет следующему соотношению

$$R(u,v)L_1(u)RL_1(v) - L_1(v)RL_1(u)R(u,v) = 0,$$

где $R(u,v)$ — упомянутая выше токовая $R$-матрица, полученная процедурой бакстеризации из постоянной инволютивной или Геккевской $R$-матрицы. Генерирующая матрица $L(u)$ также представляет собой формальный ряд, определенный в формуле (1.19), с дополнительным условием $L[0] = I$. Брейдинговый Янгиан будем обозначать символом $\mathbf{Y}(R)$.

Определенные выше янгианоподобные алгебры будем называть обобщенными Янгианами.

Отметим, что свойства обобщенных Янгианов $\mathbf{Y}_{RRT}(R)$ и $\mathbf{Y}(R)$ существенно различаются. В частности, они имеют разную структуру би-алгебры. Связь операций

[1]Отметим, что в литературе часто используется другая форма этой $R$-матрицы: $\mathcal{R}(u,v) = PR(u,v)$.

коумножения и умножения в тензорном квадрате в Янгианах RTT типа обычная, тогда как в брейдинговых Янгианах она более сложная и напоминает ситуацию в супер-алгебрах, только роль супер-транспозиции берут на себя более сложные операторы, строящиеся из определяющей $R$-матрицы. Кроме того, в двух классах обобщенных Янгианов совершенно разные отображения вычисления[1], что приводит к большим различиям в теории представлений этих алгебр.

Отображение вычисления для брейдинговых Янгианов сходно с подобным отображением в классической случае. Образ этого отображения содержится в алгебре уравнения отражений, определяемой исходной $R$-матрицей $R$. Модифицированная алгебра уравнения отражений (отличается от обычной линейным сдвигом некоторых генераторов на единичный элемент) может быть интерпретирована как твистованный аналог алгебры $U(gl(m))$. В частности, категории конечномерных представлений $U(gl(m))$ и модифицированной алгебры уравнения отражений во многом похожи [265]. Отображение вычисления позволяет, таким образом, построить большой набор нетривиальных представлений брейдинговых Янгианов.

В случае Янгианов RTT типа отображение вычисления менее интересно, поскольку его образы лежат в алгебрах, теория представлений которых в общем случае неизвестна. Пример $q$-Янгиана RTT типа, связанного со стандартной тригонометрической $R$-матрицей приведен в монографии [270].

Основная цель настоящей статьи заключается в исследовании деформационных свойств обобщенных Янгианов обоих классов[2]. Мы будем говорить, что ассоциативная алгебра $A_h$, зависящая от некоторого параметра $h$, имеет деформационное свойство, если при $h = 0$ она превращается в коммутативную алгебру $A = A_0$ и в этой коммутативной алгебре можно задать новое произведение $\star_h$, индуцированное алгеброй $A_h$ и гладко зависящее от параметра $h$. Это, в свою очередь, означает, что для значений параметра в общем положении существуют изоморфизмы линейных пространств $\alpha_h : A \to A_h$, гладко зависящие от $h$ и являющиеся тождественными отображениями при нулевом параметре: $\alpha_0 = \mathrm{Id}$. Тогда индуцированное произведение в алгебре $A$ задается правилом:

$$f \star_h g = \alpha_h^{-1}(\alpha_h(f) \circ \alpha_h(g)),$$

где символ $\circ$ обозначает умножение в алгебре $A_h$. Отображения $\alpha_h$ обычно строятся с использованием специального базиса (иногда называемого базисом Пуанкаре-Бирг-

[1] От английского термина “evaluation map” — отображение в некоторую конечнопорожденную алгебру как один из шагов построения представлений Янгиана.

[2] Все алгебры, которые мы рассматриваем, определяются посредством генераторов и соотношениий на них. Параметры, входящие в соотношения не формальны и могут быть специализированы.

хофа-Витта) в алгебре $A_h$. В дальнейшем мы покажем, что каждый обобщенный Янгиан представляет собой деформацию коммутативной аллгебры $\mathrm{Sym}(gl(m)[t^{-1}])$ при дополнительном условии, что $R$ есть деформация оператора транспозиции.

Если алгебра $A_h$ обладает деформационным свойством, тогда произведение $\star_h$ можно разложить в ряд по параметру:

$$f \star_h g = f \cdot g + h\, c_1(f,g) + h^2\, c_2(f,g) + \dots,$$

где $\cdot$ обозначает коммутативное произведение в алгебре $A$. В этом случае на алгебре $A$ существует скобка Пуассона, задаваемая антисимметризацией слагаемого $c_1$:

$$A^{\otimes 2} \ni f \otimes g \mapsto \{f,g\} = \frac{1}{2}(c_1(f,g) - c_1(g,f)) \in A.$$

Второй целью нашей работы является явное вычисление Пуассоновых структур, отвечающих Янгианам обоих классов. Мы выписываем квадратичные скобки Пуассона и их линеаризацию для обоих классов Янгианов.

### 1.19.1 Квантовые матричные алгебры и обобщенные Янгианы

Начнем с рассмотрения квантовых матричных алгебр аналогичных Янгианам обоих классов, но связанных с постоянными $R$-матрицами. Напомним, что оператор $R : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$, где $V$ есть некоторое конечномерное линейное пространство ($\dim V = m$), называется твистом, если он удовлетворяет квановому уравнению Янга-Бакстера (1.19), в котором следует опустить зависимость от параметров. Твист $R$ будем называть Геккевской (соответственно, инволютивной ) симметрией, если он дополнительно подчиняется соотношению:

$$(qI - R)(q^{-1}I + R) = 0,$$

где ненулевой числовой параметр $q$ удовлетворяет условию $q^2 \neq 1$ (соответственно, $q^2 = 1$). Ниже в тексте мы будем полагать, что если $q \neq 1$, то значения $q$ выбираются в общем положении, то есть, $q^n \neq 1$ для любого целого $n$.

Ассоциативная алгебра, порожденная матричными элементами матрицы $L = \|l_i^j\|_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$, которая удовлетворяет матричному соотношению

$$RL_1RL_1 - L_1RL_1R = h(RL_1 - L_1R),$$

называется модифицированной алгеброй уравнения отражений, если $h \neq 0$. В случае $h = 0$ мы будем опускать определение “модифицированная”. Алгебра (1.19.1) будет обозначаться символом $\mathcal{L}(R,h)$ для ненулевых значений параметра, и символом $\mathcal{L}(R)$ при $h = 0$. Как обычно, нижние индексы матриц и операторов (например, $L_i$, $R_{i\,j}$ и так далее) указывает позицию сомножителя (или сомножителей) $V$ в произведении $V^{\otimes n}$, в котором действует данный оператор. Кроме того, для оператора $R_{i\,i+1}$ выберем краткое обозначение $R_i$.

Также введем в рассмотрение так называемую RTT-алгебру, связанную с твистом $R$ и определяемую следующей системой соотношений на матричные элементы генерирующей матрицы:

$$RT_1T_2 - T_1T_2R = 0, \qquad T = \|t_i^j\|_{1\leqslant i,j\leqslant m}.$$

Эту алгебру будем обозначать $\mathcal{T}(R)$.

Алгебры $\mathcal{L}(R)$ и $\mathcal{T}(R)$ представляют собой примеры квантовых матричных алгебр, которые в общем случае задаются парой согласованных твистов [268].

Твист $R$ называется кособратимым, если существует оператор $\Psi : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ такой, что

$$\mathrm{Tr}_2 R_{12}\Psi_{23} = P_{13} \quad \Leftrightarrow \quad R_{ij}^{kl}\Psi_{lp}^{jq} = \delta_i^q\delta_p^k.$$

Все твисты $R$, с которыми мы будем иметь дело в данной работе, предполагаются кособратимыми инволютивными или Геккевскими симметриями.

Для всякого кособратимого твиста $R$ можно определить так называемый $R$-след $\mathrm{Tr}_R A$, где $A$ — произвольная матрица размером $m \times m$. Эта операция обладает рядом полезных свойств и приложений. Например, $R$-след входит в конструкцию квантовых симметрических полиномов в алгебрах $\mathcal{T}(R)$ и $\mathcal{L}(R)$. а также в обобщенных Янгианах обоих классов. Явный вид этой операции будет выписан ниже для обобщенного Янгиана. Отметим, что упомянутые квантовые симметрические полиномы генерируют так называемые характеристические подалгебры $Ch(\mathcal{T}(R))$ и $Ch(\mathcal{L}(R))$ в алгебрах $\mathcal{T}(R)$ и $\mathcal{L}(R)$ соответственно. Свойства подалгебр $Ch(\mathcal{T}(R))$ и $Ch(\mathcal{L}(R))$ сильно отличаются друг от друга: последняя подалгебра центральна в RE алгебре, тогда как подалгебра $Ch(\mathcal{T}(R))$ коммутативна, но не центральна. Более подробное изложение можно найти в работах [268, 267].

Обратимся теперь к обобщенным Янгианам. Для этого нам прежде всего потребуется указать явный вид токовых $R$-матриц, входящих в форммулы (1.19) и (1.19). В статье [266] было доказано следующее утверждение.

Предложение 1. Рассмотрим следующую сумму

$$R(u,v) = R + g(u,v)I,$$

где $R$ представляет собой некоторый твист, $g(u,v) = f(u - v)$, а $f(z)$ — непостоянная мероморфная функция.

Если $R$ — инволютивная симметрия, то матрица $R(u,v)$ является токовой $R$-матрицей в том и только в том случае, если

$$g(u,v) = \frac{a}{u - v}.$$

Если же $R = R_q$ — симметрия Гекке, тогда $R(u,v)$ является токовой $R$-матрицей в том и только в том случае, если

$$g(u,v) = \frac{q - q^{-1}}{b^{u-v} - 1}.$$

Здесь $a$ и $b \neq 1$ — произвольные ненулевые комплексные числа.

Полагая, в частности, $b = q^{-2/a}$, мы получим следующее выражение

$$R(u,v) = R_q - \frac{q^{\frac{u-v}{a}}}{(\frac{u-v}{a})_q} I.$$

В пределе $q \to 1$ эта $R$-матрица стремится к

$$R_1 - \frac{a}{u - v}\, I,$$

при условии, что Геккевская симметрия $R_q$ стремится к инволютивной матрице $R_1$.

Сделав замену переменных $b^{-u} \to u$, $b^{-v} \to v$ в (1.19.1), мы придем к следующему виду тригонометрической токовой $R$-матрицы

$$R(u,v) = R - \frac{u(q - q^{-1})}{u - v} I.$$

Очевидно, она зависит только от отношения $x = v/u$.

Далее мы будем рассматривать Янгианы RTT типа $\mathbf{Y}_{RRT}(R)$ и брейдинговые Янгианы $\mathbf{Y}(R)$, определяемые соответственно формулами (1.19) и (1.19), где $R(u,v)$ представляют собой токовые $R$-матрицы (1.19.1) или (1.19.1), тогда как средние множители $R$ в (1.19) являются исходными симметриями.

Как уже отмечалось выше, Янгианы обоих классов обладают структурой биалгебры, но в $\mathbf{Y}(R)$ эта структура твистованная. Подробности можно найти в работе [266].

Рассмотрим теперь отображение вычисления для брейдингового Янгина. Для данного Янгиана $\mathbf{Y}(R)$ отображение вычисления определяется следующей формулой

$$L(u) \mapsto I + \frac{M}{u},$$

где $M$ является генерирующей матририцей целевой алгебры. Конкретная структура этой алгебры зависит от исходной симметрии $R$. А именно, имеет место следующее предложение.

Предложение 2.

1. Если твист $R$ является инволютивной симметрией, то отображение (1.19.1) задает сюръективный морфизм $\mathbf{Y}(R) \to \mathcal{L}(R,1)$. Кроме того, отображение $M \mapsto L[1]$ определяет инъективный морфизм $\mathcal{L}(R,1) \to \mathbf{Y}(R)$.
2. Если твист $R$ является симметрией Гекке, то отображение (1.19.1) задает морфизм $\mathbf{Y}(R) \to \mathcal{L}(R)$.

Таким образом, в первом случае целевой алгеброй является $\mathcal{L}(R,1)$, а во втором — $\mathcal{L}(R)$.

Сформулированное выше предложение позволяет построить категорию конечномерных представлений брейдингового Янгиана. Такая категория была построена для алгебры $\mathcal{L}(R,1)$. Таким образом, если $R$ является инволютивной симметрией, отображение вычисления превращает любой $\mathcal{L}(R,1)$-модуль в модуль над $\mathbf{Y}(R)$. Если же $R$ — симметрия Гекке, тогда вначале мы превращаем данный $\mathcal{L}(R,1)$-модуль в модуль над алгеброй $\mathcal{L}(R)$, а затем реализуем в нем представление Янгиана $\mathbf{Y}(R)$. Это всегда возможно, поскольку алгебры $\mathcal{L}(R)$ и $\mathcal{L}(R,1)$ изоморфны. Их изоморфизм дается следующим отображением:

$$\mathcal{L}(R) \to \mathcal{L}(R,1), \quad L \mapsto L - \frac{1}{q - q^{-1}} I, \quad q^2 \neq 1.$$

Отображение вычисления для Янгианов RTT типа имеет следующий вид:

$$L(u) \mapsto T_0 + \frac{T_1}{u}.$$

Если твист $R$ — симметрия Гекке, тогда отображения (1.19.1) переводит Янгиан в целевую алгебру, которая сходна с квантовой алгеброй $U_q(gl(m))$. Явная форма этой алгебры предъявлена, например, в [270, 263]. Если $R$ — инволютивная симметрия, то целевая алгебра — новый объект и ее свойства не изучены. Заметим, что если наложить условие $T_0 = I$, то возникнет противоречие в перестановочных соотношениях целевой алгебры. Именно по этой причине в Янгианах RTT типа не налагается условие $T[0]=I$ на коэффициенты Лорана генерирующей матрицы.

Приступим теперь к построению квантовых симметрических полиномов в брейдинговых Янгианах. Кроме того, мы выпишем семейство матричных тождеств Гамильтона-Кэли-Ньютона, аналогичных тождествам, найденным в [268] для квантовых матричных алгебр.

С этой целью определим вначале квантовые аналоги матричных степеней генерирующей матрицы. Мы будем работать с тригонометрическми $R$-матрицами (1.19.1), где положим $a=1$. Фомулы для рациональных $R$-матриц (1.19.1) могут быть получены предельным переходом $q\to 1$ в форме (1.19.1).

Определим квантовые косые степени матрицы $L(u)$ следующим образом:

$$L^{\wedge k}(x) = \mathrm{Tr}_{R(2\dots k)}\Big(\mathcal{P}^{(k)}_{12\dots k} L_{\overline{1}}(x) L_{\overline{2}}(x-1)\dots L_{\overline{k}}(x-k+1)\Big), \quad k\geq 2,$$

где

$$\mathcal{P}^{(k+1)}_{12\dots k+1} \;=\; \frac{(-1)^k}{(k+1)_q}\, R_1(1)R_2(2)\dots R_k(k)\,\mathcal{P}^{(k)}_{12\dots k} \tag{1.19.1}$$

есть $q$-антисимметризатор в пространстве $V^{\otimes(k+1)}$, построенный по симметрии Гекке $R$. По определению будем считать $L^{\wedge 1}(x)=L(x)$. Заметим, что если симметрия Гекке $R$ является деформацией обычной транспозиции $P$, тогда $L^{\wedge k}(x)\equiv 0$ для всех $k>m$.

Определим, также, квантовые матричные степени генерирующей матрицы:

$$L^{k}(x) = \mathrm{Tr}_{R(2\dots k)}\Big(R_1R_2\dots R_{k-1} L_{\overline{1}}(x) L_{\overline{2}}(x-1)\dots L_{\overline{k}}(x-k+1)\Big), \quad k\geq 1.$$

Теперь квантовые элементарные симметрические полиномы и квантовые степенные суммы определяются, соответственно, следующими выражениями:

$$e_k(x)=\mathrm{Tr}_R(L^{\wedge k}(x)), \qquad s_k(x)=\mathrm{Tr}_R(L^k(x)).$$

Предложение 3. Квантовые косые степени и матричные степени матрицы $L(u)$ связаны системой тождеств Гамильтона-Кэли-Ньютона

$$(-1)^{k+1}k_q L^{\wedge k}(x) = \sum_{p=1}^{k}(-q)^{k-p}L^p(x)e_{k-p}(x-p), \quad k\geq 1.$$

Если $R$ есть деформация транспозиции $P$, тогда последнее нетривиальное тождество Гамильтона-Кэли-Ньютона превращается в квантовый аналог классического тождества Гамильтона-Кэли. В этом случае старший нетривиальный симметрический полином $e_m(x)$ называется квантовым детерминантом.

Вычисляя $R$-след от соотношения (1.19.1), мы приходим к связи квантовых степенных сумм и элементарных симметрических полиномов.

В Янгианах RTT типа все эти объекты (квантовые матричные степени, косые степени, степенные суммы и элементарные симметрические полиномы) также хорошо определены. Заметим, что элементарные симметрические полиномы и степенные суммы в Янгианах обоих классов порождают коммутативные подалгебры. Но, в отличие от алгебры уравнения отражений, эти коммутативные подалгебры не центральны. Единственный нетривиальный квантовый симметрический полином, который централен в брейдинговом Янгиане $\mathbf{Y}(R)$, это квантовый детерминант. Говоря точнее, все коэффициенты разложения детерминанта в ряд по спектральному параметру являются элементами центра. В Янгиане $\mathbf{Y}_{RRT}(R)$ квантовый детерминант централен тогда и только тогда, когда он централен в соответствующей RTT алгебре. Таким образом, центральность квантового детерминанта полностью определяется свойствами исходного твиста $R$.

### 1.19.2 Деформационные свойства Янгианов и соответсвующие Пуассоновы структуры

Все Янгианы, которые рассматриваются в данной статье, вводятся через генераторы и соотноошения на них. Поэтому необходимо проверить деформационные свойства получающихся алгебр, предполагая, что инволютивный или Геккевский твист $R$ является деформацией оператора транспозиции. Ниже приводятся аргументы в пользу хороших деформационных свойств обобщенных Янгианов. Кроме того, мы выпишем явные формулы для их Пуассоновой структуры.

Но прежде всго, мы сравним деформационные свойства квантовых матричных алгебр $\mathcal{T}(R)$ и $\mathcal{L}(R)$. С этой целью введем следующие обозначения:

$$L_{\overline{1}} = L_1, \qquad L_{\overline{k}} = R_{k-1} L_{\overline{k-1}} R^{-1}_{k-1}, \qquad \forall\, k \geq 2.$$

Для $h = 0$ соотношения (1.19.1) могут быть записаны в форме, аналогичной соотношениям в RTT алгебре:

$$R L_{\overline{1}} L_{\overline{2}} = L_{\overline{1}} L_{\overline{2}} R.$$

Эти обозначения полезны также и для установления некоторых изоморфизмов линейных пространств $\mathcal{T}(R)$ и$\mathcal{L}(R)$. Обозначим символами

$$\mathbf{T} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}(t_i^j) \qquad \mathbf{L} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}(l_i^j)$$

векторные пространства, порождаемые, соответственно, генераторами $t_i^j$ RTT алгебры $\mathcal{T}(R)$ и генераторами $l_i^j$ алгебры уравнения отражений $\mathcal{L}(R)$, связанных с твистом $R$. Для любого положительного целого $k$ рассмотрим линейное отображение $\pi_k : \mathbf{T}^{\otimes k} \to \mathbf{L}^{\otimes k}$ тензорных степеней пространств, которое на базисных элементах задается правилом:

$$\pi_k(T_1 \otimes T_2 \otimes ... \otimes T_k) = L_{\overline{1}} \otimes L_{\overline{2}} \otimes \cdots \otimes L_{\overline{k}}, \quad k \geq 1.$$

Ниже мы будем опускать знак тензорного произведения $\otimes$ для упрощения записи формул.

Предложение 4. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\pi_k(T_1 \dots T_{i-1}(R_i T_i T_{i+1} - T_i T_{i+1} R_i) T_{i+1} \dots T_k) \\ = L_{\overline{1}} \dots L_{\overline{i-1}}(R_i L_{\overline{i}} L_{\overline{i+1}} - L_{\overline{i}} L_{\overline{i+1}} R_i) L_{\overline{i+1}} \dots L_{\overline{k}} \quad (1.19.2)\end{aligned}$$

для всех $k \geqslant 2$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Все матрицы, входящие в эти формулы, имеют размер $m^k \times m^k$.

Однородная компонента $\mathcal{L}(R)^{(k)} \subset \mathcal{L}(R)$ степени $k \geqslant 2$ есть фактор пространства $\mathbf{L}^{\otimes k}$ по идеалу, порожденному правыми частями соотношений (1.19.2) для всех $1 \leqslant i \leqslant k-1$.

Поскольку все отображения $\pi_k$ обратимы, сформулированное предложение позволяет утверждать, что любой базисный набор однородной компоненты $\mathcal{T}(R)^{(k)} \subset \mathcal{T}(R)$ переводится в базисный набор компоненты $\mathcal{L}(R)^{(k)} \subset \mathcal{L}(R)$. Это, в свою очередь, дает возможность выводить деформационные свойства алгебры $\mathcal{L}(R)$ из свойств $\mathcal{T}(R)$.

Эта конструкция близка к отображению трансмутации, введенному в работе [269], а также к формулам статьи [268], использовавшимся для определения квантовым матричных алгебр, связанных с парами согласованных твистов.

Замечание 5. Если исходный твист $R$ инволютивен, то это свойство сохранится и для твистов, действующих в пространствах $\mathbf{T}^{\otimes 2}$ и $\mathbf{L}^{\otimes 2}$:

$$T_1 \otimes T_2 \mapsto R^{-1}\, T_1 \otimes T_2\, R, \qquad L_{\overline{1}} \otimes L_{\overline{2}} \mapsto R^{-1}\, L_{\overline{1}} \otimes L_{\overline{2}}\, R.$$

Опираясь на этот факт, легко построить некоторые симметризаторы (проекторы симметризации) в пространствах $\mathbf{T}^{(k)}$ и $\mathbf{L}^{(k)}$ для любого $k \geq 2$. Заметим, что в этой конструкции используются отображения $\pi_k$. Отсюда следует, что размерности однородных компонент $\mathcal{T}(R)^{(k)}$ и $\mathcal{L}(R)^{(k)}$ для всех $k \geq 2$ равны размерностям соответствующих компонент $\mathrm{Sym}(gl(m))^{(k)}$ коммутативной алгебры $\mathrm{Sym}(gl(m))$. Соответственно, алгебры $\mathcal{T}(R)$ и $\mathcal{L}(R)$ обладают деформационным свойством.

Если твист $R$ Геккевский, то твисты (1.19.2), действующие в пространствах $\mathbf{T}^{\otimes 2}$ и $\mathbf{L}^{\otimes 2}$, имеют три собственных значения и вообще не являются симметриями. Следовательно, метод доказательства деформационного свойства должен быть модифицирван. В работе [265] были построены симметризаторы в компонентах $\mathbf{T}^{(k)}$ и $\mathbf{L}^{(k)}$ для $k = 2{,}3$. С использованием этих симметризаторов удается показать, что размерности однородных компонент $\mathcal{T}(R)^{(k)}$ и $\mathcal{L}(R)^{(k)}$ при $k = 2{,}3$ равны размерностям соответствующих компонент алгебры $\mathrm{Sym}(gl(m))$ если разность $q-1$ достаточно мала. Несмотря на то, что аналогичные симметризаторы в старших компонентах этих квантовых матричных алгебр не построены, использование результатов работы [261] (см., также, [271]) позволяет заключить, что для значений $q$ в общем положении размерности старших компонент $\mathcal{T}(R)^{(k)}$, $\mathcal{L}(R)^{(k)}$ при $k \geq 4$ равны размерностям соответствующих компонент алгебры $\mathrm{Sym}(gl(m))$. Это обеспечивает деформационное свойство квантовых матричных алгебр, связанных с симметриями Гекке.

Перейдем теперь к описанию Пуассоновых структур, отвечающих квантовым матричным алгебрам. Мы будем пользоваться обозначениями $\{L_1, L_2\}$ для $m^2 \times m^2$ матрицы $L_1\,L_2$, где каждый матричный элемент $l_i^j \otimes l_k^l$ заменен выражением $\{l_i^j, l_k^l\}$.

Пусь твист $R$ является деформацией транспозиции $P$. Тогда $\mathcal{R} = PR$ есть деформация единичной матрицы:

$$\mathcal{R} = I + hr + O(h^2),$$

где $h$ — параметр деформации, а $r$ — соответствующая классическая $r$-матрица, решающая классическое уравнения Янга-Бакстера:

$$[r_{12},r_{13}] + [r_{12},r_{23}] + [r_{13},r_{23}] = 0.$$

Если твист $R$ симметрия Гекке, положим дополнительно $q = e^h$.

Если $R$ представляет собой инволютивную или Геккевскую симметрию, тогда $r$, соответственно, удовлетворяет соотношениям:

$$r_{21} = -r_{12} \quad \text{или} \quad r_{12} + r_{21} = 2P.$$

В последнем случае представим $r$ в виде суммы $r = r_- + r_+$, где

$$r_- = \frac{r_{12} - r_{21}}{2}, \qquad r_+ = \frac{r_{12} + r_{21}}{2}$$

есть, соответственно, кососимметрическая и симметрическая компоненты матрицы $r$. Тогда второе соотношение в (1.19.2) означает, что $r_+ = P$. Этот факт хорошо известен для стандартных симметрий Гекке, но он имеет место и для любых других Геккевских твистов.

Пуассонова структура, отвечающая алгебре RTT, задается скобками Пуассона генераторов

$$\{T_1, T_2\} = T_2 T_1\, r - r\, T_1 T_2 = T_1 T_2\, r - r\, T_1 T_2.$$

Отметим, что в этом выражении мы считаем $T_1T_2 = T_2T_1$ (и аналогично для матрицы $L$) поскольку скобка Пуассона определяется в коммутативной алгебре $\mathrm{Sym}(gl(m))$.

Если $r$ проистекает из инволютивной симметрии, то кососимметричность правой части выражения (1.19.2) очевидна. Если же $r$ возникает из Геккевской симметрии, то это свойство также выполнено, если учесть соотношение $r_+ = P$. Более того, матрицу $r$ в скобке (1.19.2) можно заменить на $r_-$.

Представляя классическую $r$-матрицу $r$ как элемент пространства $gl(m)^{\otimes 2}$, мы можем записать скобку (1.19.2) в следующем виде

$$\{f,g\} = \cdot\big(\rho_r(r)^{\otimes 2}(f \otimes g) - \rho_l(r)^{\otimes 2}(g \otimes f)\big).$$

Здесь $\rho_l$ (соответственно, $\rho_r$) есть представление алгебры $\gg$ левыми (соответственно, правыми) векторными полями, действующими на алгебре $\mathrm{Sym}(gl(m))$. Символ $\cdot$ обозначает коммутативное произведение в этой алгебре.

Рассмотрим теперь Пуассонову структуру, возникающую в квазиклассическом пределе алгебры уравнения отражений $\mathcal{L}(R)$, связанной с инволютивной или Геккевской симметрией $R$.

Прежде всего, перепишем определяющие соонтношния в алгебре $\mathcal{L}(R)$ в несколько ином виде (напомним, что $\mathcal{R} = PR$):

$$\mathcal{R}_{12} L_1 \mathcal{R}_{21} L_2 - L_2 \mathcal{R}_{12} L_1 \mathcal{R}_{21} = 0.$$

Производя в левой части разложение (1.19.2), мы получим такие скобки Пуассона:

$$\{L_1, L_2\} = L_1 L_2\, r_{21} - r_{12} L_1 L_2 + L_2\, r_{12} L_1 - L_1 r_{21} L_2.$$

Если $r$ происходит из инволютивной симметрии, эти скобки можно переписать в виде:

$$\{f,g\} = \cdot\rho_{ad}(-r)^{\otimes 2}(f \otimes g), \quad f,g \in \mathrm{Sym}(gl(m)).$$

Здесь $\rho_{ad}$ обозначает присоединенное действие алгебры $gl(m)$, распространенное на всю симметрическую алгебру $\mathrm{Sym}(gl(m))$ с помощью правила Лейбница. Таким образом, $\rho_{ad}^{\otimes 2}(r)$ есть кососимметрическое бивекторное поле.

Если же $r$ возникает из симметрии Гекке, аналогичная формула для скобок приобретает дополнительные слагаемые:

$$\{f,g\} = \cdot((\rho_l \otimes \rho_r - \rho_r \otimes \rho_l)(r_+) - \rho_{ad}^{\otimes 2}(r_-))(f \otimes g).$$

Кососимметричность правой части скобок (1.19.2) очевидна. Однако прямая проверка выполнения тождества Якоби достаточно трудоемка. Тем не менее, справедливость тождества Якоби для этой скобки следует из деформационного свойства алгебры уравнения отражений.

Скобки (1.19.2) совместны с линейными $gl(m)$-скобками Пуассона-Ли, иными словами, эти две скобки образуют Пуассонов пучок. Данное утверждение можно легко проверить с помощью процедуры линеаризации скобок (1.19.2) (см. раздел 4). Подчеркнем, что модифицированная алгебра уравнения отражений $\mathcal{L}(R,h)$ является квантованием данного Пуассонова пучка.

Замечание 6. Пусть простая алгебра Ли $\gg$ принадлежит одной из классических серий алгебр Ли $B_m$, $C_m$ или $D_m$, и $R$ представляет собой твист, связанный с соответствующей квантовой универсальной обертывающей алгеброй $U_q(\gg)$. В этом случае соответствующие RTT и RE алгебры не являются деформациями коммутативной алгебры $\mathrm{Sym}(\gg)$. Обе скобки (1.19.2) и (1.19.2) являются Пуассоновыми только на соответствующих группах Ли $G$ и называются, соответственно, скобками Склянина или Семенова-Тянь-Шанского. Кроме того, они остаются скобками Пуассона на некоторых многообразиях в $\gg^*$. Подробности и явное описание этих многообразий можно найти в работах [262, 259].

Обратимся теперь к случаю Янгианов. Аналогично рассмотренным выше конструкциям введем следующие линейные пространства:

$$\mathbf{T} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}(t_i^j[k]), \qquad \mathbf{L} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}(l_i^j[k])$$

содержащие все конечные линейные комбинациии генераторов $t_i^j[k]$ Янгианов RTT типа, или, соответственно, генераторов $l_i^j[k]$ брейдингового Янгиана, связанных с некоторой $R$-матрицей вида (1.19.1) или (1.19.1). Обозначим символами $\mathbf{T}^{\otimes k}$ и $\mathbf{L}^{\otimes k}$ подпространства, состоящие из всех однородных тензорных полиномов степени $k$ от соответствующих генераторов.

Определим также отображения, аналогичные отображениям (1.19.2):

$$\pi_k(T_1(u_1) \otimes T_2(u_2) \otimes ... \otimes T_k(u_k)) = L_{\overline{1}}(u_1) \otimes L_{\overline{2}}(u_2) \otimes ... \otimes L_{\overline{k}}(u_k),$$

где как и выше мы полагаем

$$L_{\overline{1}}(u) = L_1(u), \qquad L_{\overline{k}}(u) = R_{k-1} L_{\overline{k-1}}(u) R_{k-1}^{-1}, \quad k \geq 2.$$

В приведенных выше формулах отображения $\pi_k$ записаны через токовые матрицы $T(u)$ и $L(u)$. Их запись в терминах коэффициентов $T[s]$ и $L[s]$ имеет тот же вид.

Имеет место утверждение, аналогичное Предложению 4, то есть, отображения (1.19.2) устанавливают измоморфизм линейных пространств между однородными компонентами алгебр $\mathbf{Y}_{RRT}(R)$ и $\mathbf{Y}(R)$. Как следствие, справедливо следующее утверждение.

Предложение 7. Если Янгиан RTT типа обладает деформационным свойством, то таким же свойством обладает и соответствующий брейдинговый Янгиан.

Фактически, упомянутый в Замечании 5 метод статьи [265] позволяет доказать справедливость следующего утверждения.

Предложение 8. Любой обобщенный Янгиан представляет собой деформацию алгебры $\mathrm{Sym}(gl(m)[t^{-1}])$ при условии, что исходный твист $R$ является деформацией оператора транспозиции.

Детальное доказательство этого утверждения будет приведено в наших последующих публикациях. В настоящей работе мы ограничимся представлением некоторых аргументов в пользу его справедливости. В силу Предложения 7 мы можем рассматривать только Янгианы RTT типа.

Заметим прежде всего, что отображение

$$\rho: \, T_1(u) \otimes T_2(v) \mapsto R(u,v)^{-1} T_1(v) \otimes T_2(u) R(u,v)$$

является инволютивным. Действительно, $R(u,v)R(v,u) = \varphi(u,v)I$, где $\varphi(u,v)$ есть рациональная функция, вид которой зависит от исходной инволютивной или Геккевской симметрии $R$.

Дважды применяя отображение $\rho$, мы получим тождественное отображение. Поэтому $\rho$ имеет только два собственных значения: 1 или $-1$. Двусторонний идеал, входящий в определение Янгиана $\mathbf{Y}_{RRT}(R)$, порождается подпространством $I_- = \mathrm{Im}(I-$

$R(u,v))$. Рассмотрим дополнительное пространство $I_+ = \mathrm{Im}(I + R(u,v))$. Определяющие соотношения этого пространства можно записать в таком виде:

$$R(u,v)T_1(u) \otimes T_2(v) = -T_1(u) \otimes T_2(v)R(u,v).$$

Разлагая генерирующую матрицу $T(u)$ в ряд по обратным степеням $u$ и пользуясь соотношением

$$\frac{1}{u-v} = \sum_{k \geqslant 0} v^k u^{-k-1},$$

мы получим явное описание пространства $I_+$ в терминах матричных элементов матриц $T[k]$. Отметим, что это пространство бесконечномерно и порождается всевозможными конечными квадратичными полиномами от счетного набора переменных $t_i^j[r]$.

Рассмотрим зависимость подпространств $I_\pm(h)$ от параметра деформации $h$. При $h = 0$ подпространства $I_\pm(0) \subset \mathbf{T}^{\otimes 2}$ порождаются элементами

$$t_j^c[r]t_i^d[s] \pm t_i^d[s]t_j^c[r].$$

Производящая функция этих элементов имеет следующую матричную форму:

$$T_1(u)\,T_2(v) \pm T_2(v)\,T_1(u).$$

Подпространство $I_+(h)$ генерируется элементами $E_{ij}^{cd}[k,l]$, которые являются коэффициентами при мономе $u^{-k}v^{-l}$ производящего ряда:

$$E_{ij}^{cd}(u,v) = R_{ij}^{ab}(u,v)T_a^c(u)T_b^d(v) + T_i^a(v)T_j^b(u)R_{ab}^{cd}(u,v).$$

Заметим, что при $h = 0$ элементы $E_{ij}^{cd}[k,l]$ совпадают с симметрическими комбинациями генераторов (1.19.2). Подмножество элементов $E_{ij}^{cd}[k,l]$ таких, что тройка чисел $(k,i,c)$ предшествует тройке $(l,j,d)$ относительно лексикографического упорядочения, образуют базис пространства $I_+(0)$. Более того, линейная оболочка элементов $E_{ij}^{cd}[k,l]$ таких, что $k + l \leqslant p$, является конечномерной.

Следовательно, элементы $E_{ij}^{cd}[k,l]$ такие, что $k + l \leqslant p$, линейно независимы в Янгиане $\mathbf{Y}_{RRT}(R)$ если значение $h$ достаточно мало. Поэтому, отображая элементы $E_{ij}^{cd}[k,l] \in I_+(0)$ в их аналоги в $I_+(h)$ мы строим отображение $\alpha_h$ (см. Введение) на квадратичном уровне. Аналогичным методом мы можем построить отображения $\alpha_h$ для высших однородных компонент Янгиана $\mathbf{Y}_{RRT}(R)$ и посредством этого доказать, что этот Янгиан обладает деформационным свойством в случае, когда твист $R$ есть деформация перестановки $P$.

Перейдем теперь к вычислению Пуассоновых струкртур, отвечающих обобщенным Янгианам. Мы начнем с разложения $\mathcal{R}(u,v) = PR(u,v) = I + hr(u,v) + O(h^2)$ в ряд по параметру $h$, где мы полагаем $h = a$ в (1.19.1) и $h = \log q$ в (1.19.1). Это дает следующие выражения для классических токовых $r$-матриц:

$$r(u,v) = r - \frac{1}{u-v}P, \qquad r(u,v) = r - \frac{2u}{u-v}P.$$

Здесь постоянная матрица $r$ в первой формуле соответствует инволютивной симметрии $R$ и является кососимметрической: $r_+ = 0$. Матрица $r$ во второй формуле происходит из симметрии Гекке и, как следствие, $r_+ = P$.

Подчеркнем, что обе токовые матрицы $r(u,v)$ являются кососимметрическими. Проверим это для второй матрицы в (??):

$$r_{12}(u,v) + r_{21}(v,u) = r_{12} + r_{21} - \frac{2u}{u-v}P - \frac{2v}{v-u}P = 2r_+ - 2P = 0.$$

В дальнейшем символ $r_{21}(u,v)$ будет означать, что мы переставили элементы в тензорном квадрате $gl(m)^{\otimes 2}$, оставив без изменения параметры $u$ и $v$.

Скобки, соответствующие Янгианам $\mathbf{Y}(R)$ и $\mathbf{Y}_{RRT}(R)$, имеют вид аналогичный выражениям (1.19.2) и (1.19.2):

$$\{T_1(u), T_2(v)\} = r(u,v)T_1(u)T_2(v) - T_2(v)T_1(u)r(u,v),$$

$$\{L_1(u), L_2(v)\} = r_{12}(u,v)L_1(u)L_2(v) + L_1(u)r_{21}L_2(v) - L_2(v)r_{12}L_1(u) - L_2(v)L_1(u)r_{21}(u,v).$$

Замечание 9. Отметим, что аналогичные скобки в случае алгебр Ли классических серий $B_m$, $C_m$ и $D_m$ являются скобками Пуассона только при ограничении на соответствующую группу.

Все скобки, с которыми мы имели дело, являются локальными, то есть, не имеют сингулярности в пределе $u-v \to 0$. Более точно, если положить $u-v = \nu$ и разложить $L(u) = L(v+\nu)$ в ряд по $\nu$, то вышеупомянутые скобки Пуассона представятся в виде ряда скобок при совпадающих значениях параметров $u = v$. Однако, в выражения для этих скобок войдут, также, производные производящей матрицы. На квантовом уровне эта процедура проведена в работе [266].

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате работы по проекту получены следующие научные результаты:

— Исследовано явное выражение для $\tau$-функции уравнения Пенлеве III$(D_8)$ в виде суммы по конформным блокам алгебры Вирасоро с центральным зарядом 1. Изучена группа Бэклунда второго порядка этого уравнения.

— Доказано, что дуальная статсумма Некрасова на самодуальном омега-фоне (а) дается детерминантом Фредгольма с обобщенным ядром Бесселя и (б) совпадает с тау-функцией, связанной с общим решением уравнения Пенлеве III $(D_8)$.

— Исследованы представления W-алгебр, отвечающие твист-полям, построено обобщение соответствующих вертексных операторов для D- и B-серий. Показано, что вычисление характеров таких представлений приводит к нетривиальным соотношениям, содержащим решеточные тэта-функции.

— Установлено соответствие между уравнениями Книжника-Замолодчикова ассоциированными с $GL(N)$ и $n$-частичной квантовой моделью Калоджеро в случае, когда $n$ не обязательно равно $N$.

— Исследованы разложения многократных интегралов и тау функций иерархии ВКР по характерам ортогональной и симплектической групп. Построены разложения по характерам интегралов по ортогональной и симплектической группам, которые являются примерами тау функции ВКР.

— Исследованы многоматричные модели, которые можно трактовать как интегралы от произведений тау-функций от матричных аргументов. Иногда такие интегралы сами являются тау-функциями. Детально рассмотрены модели, которые генерируют числа Гурвица $H^{E,F}$, где $E$ – эйлерова характеристика базовой поверхности, а $F$ – число точек ветвления.

— Выведены непрерывные симметрии разностного уравнения Хироты, коммутирующие со сдвигами независимых переменных. Представлено действие этих симметрий на зависимые переменные этого уравнения. Даны примеры уравнений и их пар Лакса, возникающих при такой процедуре.

— Найдены бетевские вектора для квантовых интегрируемых систем связанных с суперсимметричными янгианами $Y(\mathfrak{gl}(m|n)$ в терминах генераторов токов дубля янгиана $DY(\mathfrak{gl}(m|n))$.

— Изучены скалярные произведения бетевских векторов в моделях, решаемых иерархическим алгебраическим анзацем Бете и описываемых $\mathfrak{gl}(m|n)$-супералгеброй. С использованием ко-произведенческих свойств бетевских векторов получена формула суммирования для их скалярных произведений.

— Описаны плоские деформации некоторых факторов алгебры многочленов по мономиальным идеалам в классе градуированных коммутативных алгебр.

— Исследован рост размерности неприводимых представлений полупростых алгебр Ли над $\overline{F_p}$ в зависимости от простого $p$.

— Построен пучок Прочези на терминализации симплектической фактор-особенности и показано, что квантования этих терминализаций являются простыми пучками алгебр.

— Доказано, что замыкание пространства параметров подалгебр Бете в янгиане $gl_n$, параметризующее все возможные вырождения, есть компактификация Делиня-Мамфорда пространства модулей стабильных рациональных кривых с $n+2$ отмеченными точками.

— Определена степень бифуркационного множества полиномиального отображения общего положения.

— Изучено новое семейство дискретных детерминантных точечных процессов, связанных с ортогональными полиномами на вещественной оси. Доказано, что q-преобразование Лапласа весовых функций ASEP эквивалентно среднему от простого мультипликативного функционала, определенного на ансамбле Лагерра. Это позволяет получить асимптотики при больших временах для ASEP в трех предельных режимах.

— Исследованы орбиты и полиномиальные инварианты некоторого аффинного действия супергруппоида Вейля супералгебры Ли $gl(n,m)$ в зависимости от параметра действия и показано, что для общих значений параметра все орбиты конечны и различимы с помощью явно заданных инвариантов.

— Рассмотрен квазиклассический предел двух классов обобщенных Янгианов и доказано, что все такие Янгианы являются деформациями (квантованием) коммутативной алгебры $\mathrm{Sym}(gl(m)[t^{-1}])$, если соответствующая $R$-матрица является деформацией матрицы перестановки.

— Предложена конструкция локальных характеристических чисел для наборов голоморфных дифференциальных 1-форм на особых многообразиях с изолированными особенностями.

— Доказана бесконечномерность когомологий графовых комплексов в различных гомологических степенях, как в классическом комплексе Концевича, так и для волосатых граф-комплексов Ароне-Турчина

— Показано что усреднение симметризованного хроматического многочлена Стенли графа $G$ с точностью до перескалирования переменных является формальной $\tau$-функцией интегрируемой системы Кадомцева-Петвиашвили.

— Получено явное решение общей одномерной, ограниченной трёхточечной двумерной и специальной двумерной проблемы Римана-Гильберта на эллиптической кривой.

Полученные результаты составили содержание 29 опубликованных и принятых к печати статей и 8 препринтов, а также послужили основой для подготовки более 59 докладов на международных научных конференциях. При участии лаборатории было организовано две международных конференции и три школы-конференции. Кроме того были организованы визиты в лабораторию иностранных ученых, которые прочли четыре курса лекций для студентов и специалистов.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1. L. F. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, Liouville correlation functions from four-dimensional gauge theories, Lett. Math. Phys. 91 (2010) 167—197.

2. A. Belavin, M. Bershtein, B. Feigin, A. Litvinov, G. Tarnopolsky Instanton moduli spaces and bases in coset conformal field theory, Comm. Math. Phys. 319 1, 269–301 (2013).

3. V. Belavin, $\mathcal{N} = 1$ SUSY conformal block recursive relations, Theor. Math. Phys. 152 (2007) 1275.

4. M. Bershtein, A. Shchechkin, Bilinear equations on Painleve tau functions from CFT, Comm. Math. Phys. 339, (2015), 1021–1061.

5. M. Bershtein, A. Shchechkin, $q$-deformed Painlevé tau function and $q$-deformed conformal blocks, J. Phys. A. 50 8 (2017) 085202.

6. G. Bonelli, A. Grassi, A. Tanzini, Seiberg-Witten theory as a Fermi gas, Lett. Math. Phys. 107 1 (2017) 1.

7. C. Crnkovic, R. Paunov, G. Sotkov, M. Stanishkov, Fusions of conformal models, Nucl.Phys. B336 (1990) 637.

8. A. Fokas, A. Its, A. Kapaev, V. Novokshenov, Painlevé transcendents: the Riemann-Hilbert approach, Mathematical Surveys and Monographs 128, AMS, Providence, RI, (2006).

9. O. Gamayun, N. Iorgov, O. Lisovyy, Conformal field theory of Painlevé VI, JHEP 1210, (2012), 38.

10. O. Gamayun, N. Iorgov, O. Lisovyy, How instanton combinatorics solves Painlevé VI,V and III's, J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013) 335203.

11. V. Gromak, Reducibility of the Painlevé equations, Differential Equations 20 (1984), 1191–1198.

12. K. Iohara, Y. Koga, Representation theory of the Virasoro algebra, Springer Monographs in Mathematics, Springer, London, 2011.

13. K. Iohara, Y. Koga, Representation theory of Neveu-Schwarz and Ramond algebras I: Verma modules, Adv. Math., 178 (2003), 1—65.

14. N. Iorgov, O. Lisovyy, J. Teschner, Isomonodromic $\tau$ functions from Liouville conformal blocks, Comm. Math. Phys. 336 2 (2015), 671–694.

15. Y. Ito, Ramond sector of super Liouville theory from instantons on an ALE space, Nuclear Physics B861 3, (2012), 387—402.

16. M. Jimbo, Monodromy problem and the boundary condition for some Painlevé equations, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 18, (1982), 1137—1161.

17. L. Hadasz, Z. Jaskolski, Super-Liouville - Double Liouville correspondence, JHEP 1405 (2014) 124.

18. V. Kac, A. Raina, Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras, Adv. Ser. in Math. Physics Vol. 2, World Scientific, 1987.

19. M. Lashkevich, Superconformal 2-D minimal models and an unusual coset construction, Mod. Phys. Lett. A8 (1993) 851—860.

20. I. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, second edition, Oxford University Press, New York, 1995.

21. B. McCoy, C. Tracy, T. Wu, Painlevé functions of the third kind, J. Math. Phys. 5, 18 (1977), 1058–1092.

22. N. Nekrasov, A. Okounkov, Seiberg-Witten theory and random partitions, Prog. Math. 244 (2006) 525-596.

23. D. Niles, The Riemann-Hilbert-Birkhoff inverse monodromy problem and connection formulae for the third Painlevé transcendents, PhD Thesis, Purdue University, (2009).

24. V. Novokshenov, On the asymptotics of the general real solution of the Painlevé equation of the third kind, Sov. Phys. Dokl., 30 (1985) 666–668.

25. Y. Ohyama, H. Kawamuko, H. Sakai, K. Okamoto, Studies on the Painlevé Equations, V, Third Painlevé Equations of Special Type PIII($D_7$) and PIII($D_8$), J. Math. Sci. Univ. Tokyo 13 (2006), 145-–204.

26. K. Okamoto, The Hamiltonians associated to Painlevé equations, The Painlevé property one century later, Springer, (1999), 735–787.

27. A. Zamolodchikov, Al. Zamolodchikov, Conformal field theory and critical phenomena in two-dimensional systems, Sov. Sci. Rev. Sect. A, Vol. 10, Pt.4, 269-433. London: Harwood (1989).

28. Al. Zamolodchikov, Conformal scalar field on the hyperelliptic curve and critical Ashkin-Teller multipoint correlation functions, Nuclear Physics B285, (1987) 481–503.

29. A. Alexandrov, V. Kazakov, S. Leurent, Z. Tsuboi and A. Zabrodin, Classical tau-function for quantum spin chains, JHEP 09 (2013) 064.

30. A. Alexandrov, S. Leurent, Z. Tsuboi and A. Zabrodin, The master T-operator for the Gaudin model and the KP hierarchy, Nucl. Phys. B B883 (2014) 173-223.

31. M. Beketov, A. Liashyk, A. Zabrodin and A. Zotov, Trigonometric version of quantum-classical duality in integrable systems, Nucl. Phys. B, B903 (2016) 150-163.

32. K. Bulycheva, A. Gorsky, BPS states in the Omega-background and torus knots, JHEP 04 (2014) 164.

33. F. Calogero, Solution of the One-Dimensional N-Body Problems with Quadratic and/or Inversely Quadratic Pair Potentials, J. Math. Phys. 12 (1971) 419-436.

34. I. Cherednik, Integration of quantum many-body problems by affine Knizhnik-Zamolodchikov equations, Advances in Mathematics, 106 (1994) 65-95.

35. G. Felder and A. Veselov, Shift operators for the quantum Calogero-Sutherland problems via Knizhnik-Zamolodchikov equation, Commun. Math. Phys. 160 (1994) 259-273.

36. M. Gaudin, Diagonalisation d'une classe d'hamiltoniens de spin, J. de Phys. 37 (1976), no. 10 1087-1098.

37. A. Gorsky, A. Zabrodin and A. Zotov, Spectrum of Quantum Transfer Matrices via Classical Many-Body Systems, JHEP 01 (2014) 070.

38. V. Knizhnik and A. Zamolodchikov, Current algebra and Wess-Zumino models in two dimensions, Nucl. Phys. B B247 (1984) 83-103.

39. A. Matsuo, Integrable connections related to zonal spherical function, Inventiones Mathematicae, 110 (1992) 95-121.

40. J. Moser, Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations, Adv. Math. 16 (1975) 197-220.

41. E. Mukhin, V. Tarasov and A. Varchenko, KZ Characteristic Variety as the Zero Set of Classical Calogero-Moser Hamiltonians, SIGMA 8 (2012) 072.

42. N. Reshetikhin and A. Varchenko, Quasiclassical asymptotics of solutions to the KZ equations, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology IV, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, 293-322, arXiv: hep-th/9402126.

43. Z. Tsuboi, A. Zabrodin and A. Zotov, Supersymmetric quantum spin chains and classical integrable systems, JHEP 05 (2015) 086.

44. H.Ujino, M. Wadati and K. Hikami, The quantum Calogero-Moser model: algebraic structures, J. Phys. Soc. Japan 62 (1993) 3035-3043.

45. A. Veselov, Calogero quantum problem, Knizhnik-Zamolodchikov equation and Huygens principle, Teor. Mat. Fys. 98:3 (1994) 524-535.

46. A. Zabrodin, Quantum spin chains and integrable many-body systems of classical mechanics, Springer Proceedings in Physics, Volume 163 (2015) 29-48.

47. V. A. Alba, V. A. Fateev, A. V. Litvinov, G. M. Tarnopolsky, On combinatorial expansion of the conformal blocks arising from AGT conjecture, Lett. Math. Phys. 98, (2011), 33–64; arXiv:1012.1312 [hep-th].

48. F. Balogh, Discrete matrix models for partial sums of conformal blocks associated to Painlevé transcendents, Nonlinearity 28, (2014), 43–56; arXiv:1405.1871

[math-ph].

49. M. Bershtein, A. Shchechkin, Bilinear equations on Painlevé tau functions from CFT, Comm. Math. Phys. 339, (2015), 1021–1061; arXiv:1406.3008v5 [math-ph].

50. A. Borodin, G. Olshanski, Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes, Ann. Math. 161, (2005), 1319–1422; math/0109194 [math.RT].

51. A. Borodin, P. Deift, Fredholm determinants, Jimbo-Miwa-Ueno tau-functions, and representation theory, Comm. Pure Appl. Math. 55, (2002), 1160–1230; math-ph/0111007.

52. P. Gavrylenko, Isomonodromic $\tau$-functions and $W_N$ conformal blocks, J. High Energ. Phys. (2015) 2015: 167; arXiv:1505.00259v1 [hep-th].

53. P. Gavrylenko, A. Marshakov, Exact conformal blocks for the W-algebras, twist fields and isomonodromic deformations, J. High Energ. Phys. (2016) 2016: 181; arXiv:1507.08794 [hep-th].

54. P. Gavrylenko, A. Marshakov, Free fermions, W-algebras and isomonodromic deformations, Theor. Math. Phys. 187, (2016), 649–677; arXiv:1605.04554 [hep-th].

55. O. Gamayun, N. Iorgov, O. Lisovyy, Conformal field theory of Painlevé VI, J. High Energ. Phys. (2012) 2012: 38; arXiv:1207.0787 [hep-th].

56. O. Gamayun, N. Iorgov, O. Lisovyy, How instanton combinatorics solves Painlevé VI, V and III's, J. Phys. A46, (2013), 335203; arXiv:1302.1832 [hep-th].

57. J. Harnad, A. R. Its, Integrable Fredholm operators and dual isomonodromic deformations, Comm. Math. Phys. 226, (2002), 497–530; arXiv:solv-int/9706002.

58. N. Iorgov, O. Lisovyy, J. Teschner, Isomonodromic tau-functions from Liouville conformal blocks, Comm. Math. Phys. 336, (2015), 671–694; arXiv:1401.6104 [hep-th].

59. A. R. Its, A. G. Izergin, V. E. Korepin, N. A. Slavnov, Differential equations for quantum correlation functions, Int. J. Mod. Phys. B4, (1990), 1003–1037.

60. A. Its, O. Lisovyy, Yu. Tykhyy, Connection problem for the sine-Gordon/Painlevé III tau function and irregular conformal blocks, Int. Math. Res. Not., (2014), rnu209; arXiv: 1403.1235 [math-ph].

61. K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, From Gauss to Painlevé: A modern theory of special functions, Aspect of Math. E16, Braunschweig: Vieweg, (1991).

62. M. Jimbo, T. Miwa, Y. Môri, M. Sato, Density matrix of an impenetrable Bose gas and the fifth Painlevé transcendent, Physica 1D, (1980), 80–158.

63. M. Jimbo, T. Miwa, K. Ueno, Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. I, Physica D2, (1981), 306–352.

64. B. Malgrange, Sur les déformations isomonodromiques, I. Singularités régulières, in "Mathematics and Physics", (Paris, 1979/1982); Prog. Math. 37, Birkhäuser, Boston, MA, (1983), 401–426.

65. H. Nagoya, Irregular conformal blocks, with an application to the fifth and fourth Painlevé equations, J. Math. Phys. 56, (2015), 123505; arXiv:1505.02398v3 [math-ph].

66. N. A. Nekrasov, Seiberg-Witten prepotential from instanton counting, Adv. Theor. Math. Phys. 7, (2003), 831–864; arXiv:hep-th/0206161.

67. J. Palmer, Determinants of Cauchy-Riemann operators as $\tau$-functions, Acta Appl. Math. 18, (1990), 199–223.

68. J. Palmer, Deformation analysis of matrix models, Physica D78, (1994), 166–185; arXiv:hep-th/9403023v1.

69. J. Palmer, Tau functions for the Dirac operator in the Euclidean plane, Pacific J. Math. 160, (1993), 259–342.

70. M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo,Holonomic quantum fields III–IV, Publ. RIMS Kyoto Univ. 15, (1979), 577–629; 15, (1979), 871–972.

71. C. A. Tracy, H. Widom, Level-spacing distributions and the Airy kernel, Comm. Math. Phys. 159, (1994), 151–174; hep-th/9211141.

72. C. A. Tracy, H. Widom, Fredholm determinants, differential equations and matrix models, Comm. Math. Phys. 163, (1994), 33–72; hep-th/9306042.

73. T. T. Wu, B. M. McCoy, C. A. Tracy, E. Barouch, Spin-spin correlation functions for the two-dimensional Ising model: exact theory in the scaling region, Phys. Rev. B13, (1976), 316–374.

74. R. Hirota, Nonlinear partial difference equations II; Discrete time Toda equations, Journ. Phys. Soc. Japan 43 (1977) 2074–2078.

75. R. Hirota, Discrete analogue of a generalized Toda equation, Journ. Phys. Soc. Japan 50 (1981) 3785–3791.

76. A. Zabrodin, Hirota's difference equations, Theor. Math. Phys. 113:2 (1997) 1347–1392.

77. A. V. Zabrodin, Bäcklund transformations for the difference Hirota equation and the supersymmetric Bethe ansatz, Theor. Math. Phys. 155 (2008) 567–584.

78. S. Saito, Octahedral structure of the Hirota-Miwa equation, Journ. Nonlinear Math. Phys. 10 (2012) 1250032 (12 pages).

79. I. Krichever, P. Wiegmann, A. Zabrodin, Elliptic solutions to difference nonlinear equations and related many-body problems, Commun. Math. Phys. 193 (1998) 373–396.

80. L. V. Bogdanov, B. G. Konopelchenko, Generalized KP hierarchy: Möbius symmetry, symmetry constraints and Calogero–Moser system, Phys. D 152–153 (2001) 85–96.

81. D. Fioravanti, R. I. Nepomechie, An inhomogeneous Lax representation for the Hirota equation, arXiv:1609.06761 [math-ph] (2016).

82. A. K. Pogrebkov, Hirota difference equation and a commutator identity on an associative algebra, St. Petersburg Math. J. 22:3 (2011) 473–483.

83. A. K. Pogrebkov, Hirota difference equation: inverse scattering transform, Darboux transformations, and solitons, Theor. Math. Phys. 181:3 (2014) 1585–1598.

84. A. K. Pogrebkov, Commutator identities on associative algebras, the non-Abelian Hirota difference equation and its reductions, Theor. Math. Phys. 187:3 (2016) 823–834.

85. A. K. Pogrebkov, On time evolutions associated with the nonstationary Schrödinger equation, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 201 (2000) 239–255.

86. B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili, On the stability of solitary waves in weakly dispersive media, Sov. Phys. Dokl. 192 (1970) 539–541.

87. V. E. Zakharov and A. B. Shabat, A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. I, Funct. Anal. Appl. 8:3 (1974) 226–235.

88. P. G. Grinevich and A. Yu. Orlov, Virasoro action on Riemann surfaces, Grassmannians, det$\bar{\partial}_j$, and Segal–Wilson $\tau$-function, in: Problems of Modern Quantum Field Theory (A. A. Belavin, A. U. Klimyk, and A. B. Zamolodchikov, eds.), Springer, Berlin, pp. 86–106 (1989).

89. M. Boiti, F. Pempinelli, and A. K. Pogrebkov, Cauchy–Jost function and hierarchy of the integrable equations, Theor. Math. Phys. 185:2 (2015) 1599–1613.

90. V. S. Dryuma, Analytic solution of the two-dimensional Korteweg–de Vries (KdV) equation, Sov. JETP Lett. 19 (1974) 387–388.

91. A. Yu. Orlov, E. I. Shul'man, Additional symmetries of the nonlinear Schr'odinger equation, Theor. Math. Phys. 64:2 (1984) 862–866.

92. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга, Успехи мат. наук 34:5 (1979) 13–63.

93. Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, Квантовый метод обратной задачи. I., ТМФ 40:2 (1980) 194–220.

94. Н. А. Славнов, Вычисление скалярных произведений волновых функций и формфакторов в алгебраическом анзаце Бете, ТМФ 79:2 (1989) 232–240.

95. V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, and A. G. Izergin, Quantum inverse scattering method and correlation functions, Cambridge Monogr. Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge 1993.

96. Н. А. Славнов, Алгебраический анзац Бете и квантовые интерируемые системы, Успехи мат. наук 62:4 (2007) 91–132.

97. P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, Diagonalization of $GL(N)$ invariant transfer matrices and quantum $N$-wave system (Lee model), J. Phys. A: 16 (1983) L591–L596.

98. П. П. Кулиш, Н. Ю. Решетихин, Обобщенный ферромагнетик Гейзенберга и модель Гросса-Неве, ЖЭТФ, 80 (1981) 214–228.

99. П. П. Кулиш, Н. Ю. Решетихин, О GL(3)-инвариантных решениях уравнения Янга–Бакстера и ассоциированных квантовых системах, Зап. Научн. Сем. ЛОМИ 120 (1982) 92–121.

100. Н. Ю. Решетихин, Вычисление нормы бетевских векторов в моделях с SU(3) симметрией, Зап. Научн. Сем. ЛОМИ 150 (1986) 196–213.

101. В. О. Тарасов, А. Н. Варченко, Джексоновские интегральные представления для решений квантового уравнения Книжника–Замолодчикова, Алгебра и Анализ, 6:2 (1994) 90–137.

102. V. Tarasov, A. Varchenko, Combinatorial formulae for nested Bethe vectors, SIGMA 9 (2013) 048.

103. S. Belliard and E. Ragoucy, The nested Bethe ansatz for 'all' closed spin chains., J. Phys. A 41 (2008) 295202.

104. S. Khoroshkin, S. Pakuliak, A computation of an universal weight function for the quantum affine algebra $U_q(\mathfrak{gl}(N))$, J. of Mathematics of Kyoto University, 48 n.2 (2008) 277–321.

105. А. Ф. Оськин, С. З. Пакуляк, А. В. Силантьев, Об универсальной весовой функции для квантовой аффинной алгебры $U_q(\mathfrak{gl}(N))$, Алгебра и Анализ, 21:4 (2009) 196–240.

106. S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, Bethe vectors of $GL(3)$-invariant integrable models, J. Stat. Mech. 1302 (2013) P02020.

107. S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, Form factors in SU(3)-invariant integrable models, J. Stat. Mech. 1309 (2013) P04033.

108. S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, Bethe vectors of quantum integrable models with $GL(3)$ trigonometric $R$-matrix, SIGMA 9 (2013) 058.

109. A. Hutsalyuk, A. Liashyk, S. Z. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, Form factors of the monodromy matrix entries in $\mathfrak{gl}(2|1)$-invariant integrable models, Nucl. Phys. B 911 (2016) 902-927.

110. A. Hutsalyuk, A. Liashyk, S. Z. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, Scalar products of Bethe vectors in models with $\mathfrak{gl}(2|1)$ symmetry 2. Determinant representation, J. Phys. A to appear, arXiv:1606.03573.

111. A. Hutsalyuk, A. Liashyk, S. Z. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, Multiple Actions of the Monodromy Matrix in $\mathfrak{gl}(2|1)$-Invariant Integrable Models, SIGMA 12 (2016) 099.

112. A. Hutsalyuk, A. Liashyk, S. Z. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, Scalar products of Bethe vectors in models with $\mathfrak{gl}(2|1)$ symmetry 1. Super-analog of Reshetikhin formula, J. Phys. A49 (2016) 454005.

113. V. Chari, A. Pressley. A guide to quantum groups. Cambridge University Press, 1994.

114. В. Г. Дринфельд, Новая реализация янгианов и квантовых аффинных алгебр, ДАН СССР 286:1 (1987), 13–17.

115. J. Ding, I. B. Frenkel, Isomorphism of two realizations of quantum affine algebra $U_q(\mathfrak{gl}(N))$, Commun. Math. Phys. 156 (1993), 277–300.

116. Y.-Zh. Zhang. Super Yangian double and its central extension, Phys. Lett. A234 (1997) 20–26.

117. B. Enriquez, S. Khoroshkin, S. Pakuliak, Weight functions and Drinfeld currents, Comm. Math. Phys. 276 (2007) 691–725.

118. L. Frappat, S. Khoroshkin, S. Pakuliak and E. Ragoucy, Bethe Ansatz for the Universal Weight Function, Ann. Henri Poincaré 10 (2009) 513–548.

119. S. Khoroshkin and S. Pakuliak, Generating series for nested Bethe vectors, SIGMA 4, (2008), 081.

120. А. Г. Изергин, Статистическая сумма шестивершинной модели в конечном объеме, ДАН СССР 297 (1987) 331–333.

121. S. Pakuliak, E. Ragoucy, and N. A. Slavnov, Bethe vectors for models based on the super-Yangian $Y(\mathfrak{gl}(m|n))$, arXiv:1604.02311.

122. Leonardo Aguirre, Giovanni Felder, Alexander P. Veselov Gaudin subalgebras and stable rational curves. Compositio Mathematica, 2011, Vol. 147, 1463–1478.

123. Corrado De Concini, Claudio Procesi, Wonderful models of subspace arrangements. Selecta Math. (N.S.) 1 (1995), no. 3, 459–494.

124. Corrado De Concini, Claudio Procesi, Hyperplane Arrangements And Holonomy Equations. Selecta Math. (N.S.) 1 (1995), no. 3, 495–535.

125. Knop, Friedrich. A Harish-Chandra homomorphism for reductive group actions. Ann. of Math. (2) 140 (1994), no. 2, 253–288.

126. F. Magri, A simple model of the integrable Hamiltonian equation. J.Math.Phys, 19(5): 1156–1162, 1978.

127. A. I. Molev Yangians and their applications. Handbook of Algebra, Vol. 3, 2003, 907–959.

128. A.I.Molev Yangians and classical Lie algebras. Mathematical Surveys and Monographs. Vol.143. Providence, RI: AMS, 2007.

129. A. S. Miscenko, A. T. Fomenko Euler equations on finite-dimensional Lie groups. Mathematics of the USSR-Izvestiya, 12(2):371.

130. Mukhin, E.; Tarasov, V.; Varchenko, A. Bispectral and $(gl_N,gl_M)$ dualities, discrete versus differential. Adv. Math. 218 (2008), no. 1, 216–265.

131. Maxim Nazarov, Grigori Olshanski Bethe Subalgebras in Twisted Yangians. Comm. Math. Phys. 178 (1996), 483–506.

132. G. I. Olshanski, Extension of the algebra $U(\mathfrak{g})$ for infinite-dimensional classical Lie algebras $\mathfrak{g}$, and the Yangians $Y(gl(m))$. Soviet Math. Dokl. 36 (1988), 569—573.

133. L. G. Rybnikov Centralizers of certain quadratic elements in Poisson-Lie algebras and the method of translation of invariants. Russian Mathematical Surveys, 2005, 60:2, 367–369.

134. L. Rybnikov Cactus group and monodromy of Bethe vectors. International Mathematics Research Notices 2016;doi: 10.1093/imrn/rnw259. arXiv:1409.0131 [math.QA]

135. L. Rybnikov Argument Shift Method and Gaudin Model. Func. Anal. Appl. 40 (2006), No 3, pp. 30–43.

136. V. V. Shuvalov On Limits of Mishchenko–Fomenko Subalgebras in Poisson Algebras of Semisimple Lie Algebras. Functional Analysis and Its Applications, 2002, 36:4, 298-305.

137. Takhtajan L.A., Faddeev L.D., Quantum inverse scattering method and the Heisenberg $XYZ$-model. Russian Math. Surv. 34 (1979), no. 5, 11-68.

138. A. A. Tarasov The maximality of certain commutative subalgebras in the Poisson algebra of a semisimple Lie algebra. Russian Mathematical Surveys, 2002, 57:5, 1013–1014.

139. A. A. Tarasov Uniqueness of liftings of maximal commutative subalgebras of the Poisson-Lie algebra to the enveloping algebra. Sbornik: Mathematics, 2003, 194:7, 1105—1111.

140. Tarasov V., Structure of quantum $L$-operators for the $R$-matrix of the $XXZ$-model. Theor. Math. Phys. 61 (1984), 1065–1071.

141. E.B. Vinberg On certain commutative subalgebras of universal enveloping algebra. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 54:1 (1990), 3–25.

142. G. Bellamy, Counting resolutions of symplectic quotient singularities. Compos. Math. 152 (2016), no. 1, 99-114.

143. R. Bezrukavnikov, D. Kaledin. McKay equivalence for symplectic quotient singularities. Proc. of the Steklov Inst. of Math. 246 (2004), 13-33.

144. R. Bezrukavnikov, I. Losev, Etingof conjecture for quantized quiver varieties. http://www.northeastern.edu/iloseu/bezpaper.pdf

145. T. Braden, N. Proudfoot, B. Webster, Quantizations of conical symplectic resolutions I: local and global structure. arXiv:1208.3863.

146. P. Etingof, V. Ginzburg. Symplectic reflection algebras, Calogero-Moser space, and deformed Harish-Chandra homomorphism. Invent. Math. 147 (2002), N2, 243-348.

147. P. Etingof and V. Ginzburg, Open problems, available at the Workshop on Cherednik Algebras website http://www.icms.org.uk/workshops/cheralg.

148. I. Gordon, I. Losev, On category $\mathcal{O}$ for cyclotomic rational Cherednik algebras. J. Eur. Math. Soc. 16 (2014), 1017-1079.

149. D. Kaledin, Symplectic singularities from the Poisson point of view. J. Reine Angew. Math. 600 (2006), 135-156.

150. I. Losev, Completions of symplectic reflection algebras. Selecta Math., 18(2012), N1, 179-251.

151. I. Losev, Isomorphisms of quantizations via quantization of resolutions. Adv. Math. 231(2012), 1216-1270.

152. I. Losev, On Procesi bundles. Math. Ann. 359(2014), N3, 729-744.

153. I. Losev. Derived equivalences for Rational Cherednik algebras. Duke Math J. 166(2017), N1, 27-73.

154. I. Losev. Bernstein inequality and holonomic modules (with a joint appendix by I. Losev and P. Etingof). Adv. Math. 308 (2017), 941-963.

155. I. Losev. On categories $\mathcal{O}$ for quantized symplectic resolutions. arXiv:1502.00595.

156. I. Losev. Wall-crossing functors for quantized symplectic resolutions: perversity and partial Ringel dualities. arXiv:1604.06678.

157. I. Losev. Deformations of symplectic singularities and Orbit method for semisimple Lie algebras. arXiv:1605.00592.

158. Y. Namikawa, Poisson deformations of affine symplectic varieties. Duke Math. J. 156 (2011), no. 1, 51-85.

159. Y. Namikawa, Poisson deformations of affine symplectic varieties, II. Kyoto J. Math. 50 (2010), no. 4, 727-752.

160. Y. Namikawa, Fundamental groups of symplectic singularities. arXiv.1301.1008.

161. Y. Namikawa. Poisson deformations and birational geometry, arXiv:1305.1698.

162. N. Proudfoot, T. Schedler, Poisson-de Rham homology of hypertoric varieties and nilpotent cones, Selecta Math. 23 (2017), 179-202.

163. V. Vologodsky, an appendix to: R. Bezrukavnikov, M. Finkelberg, Wreath Macdonald polynomials and categorical McKay correspondence. arXiv:1208.3696.

164. M. Jimbo and T. Miwa, Soliton equations and infinite dimensional Lie algebras, Publ. RIMS, Kyoto University 19 (1983) 943-1001.

165. R. Hirota and Y. Ohta, Hierarchies of coupled soliton equations I, J. Phys. Soc. Japan 60 (1991) 798-809.

166. M. Adler, E. Horozov and P. van Moerbeke, The Pfaff lattice and skew-orthogonal polynomials, Int. Math. Res. Notices 1999 (1999), no 11, 569-588.

167. M. Adler, T. Shiota and P. van Moerbeke, Pfaff $\tau$-functions, Math. Ann. 322 (2002) 423-476.

168. S. Kakei, Orthogonal and symplectic matrix integrals and coupled KP hierarchy, J. Phys. Soc. Japan 99 (1999) 2875-2877.

169. S. Isojima, R. Willox and J. Satsuma, On various solutions of the coupled KP equation, J. Phys. A: Math. Gen. 35 (2002) 6893-6909.

170. R. Willox, On a generalized Tzitzeica equation, Glasgow Math. J. 47A (2005) 221-231.

171. Y. Kodama and K.-I. Maruno, $N$-soliton solutions to the DKP hierarchy and the Weyl group actions, J. Phys. A: Math. Gen. 39 (2006) 4063-4086.

172. Y. Kodama and V. Pierce, Combinatorics of dispersionless integrable systems and universality in random matrix theory, Commun. Math. Phys. 292 (2009) 529-568.

173. M. Adler, V. Kuznetsov and P. van Moerbeke, Rational solutions to the Pfaff lattice and Jack polynomials, Ergodic Theory Dynam. Systems 22 (2002) 1365-1405.

174. J. van de Leur, Matrix integrals and the geometry of spinors, J. Nonlinear Math. Phys. 8 (2001) 288-310.

175. A. Orlov, Deformed Ginibre ensembles and integrable systems, Phys. Lett. A 378 (2014) 319-328. arXiv:1210.1123

176. K. Takasaki, Differential Fay identities and auxiliary linear problem of integrable hiearchies, Advanced Studies in Pure Mathematics 61 (2011) 387-441. arXiv:0710.5356

177. K. Takasaki, Auxiliary linear problem, difference Fay identities and dispersionless limit of Pfaff-Toda hierarchy, SIGMA 5 (2009) 109. arXiv:0908.3569

178. K. Takasaki and T. Takebe, Integrable hierarchies and dispersionless limit, Rev. Math. Phys. 7 (1995) 743-808. arXiv:hep-th/9405096

179. T. Takebe, Lectures on Dispersionless Integrable Hierarchies, Rikkyo Center of Mathematical Physics Lecture Note 2 (2014), http://id.nii.ac.jp/1062/00009024.

180. V. Akhmedova and A. Zabrodin, Dispersionless DKP hierarchy and elliptic Löwner equation, J. Phys. A: Math. Theor. 47 (2014) 392001. arXiv:1404.5135

181. V. Akhmedova and A. Zabrodin, Elliptic parametrization of Pfaff integrable hierarchies in the zero dispersion limit, Theor. Math. Phys. 185 (2015) 410-422. arXiv:1412.8435

182. I. Krichever, The method of averaging for two dimensional integrable equations, Funct. Anal. Appl. 22 (1989) 200-213.

183. I. Krichever, A. Marshakov and A. Zabrodin, Integrable Structure of the Dirichlet Boundary Problem in Multiply-Connected Domains, Commun. Math. Phys. 259 (2005) 1-44.

184. C. Pommerenke, Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

185. G. Goluzin, On parametric representation of functions univalent in an annulus, Matem. Sbornik 29 (1951) 469-476 (in Russian).

186. Y. Komatu, Untersuchungen über konforme Abbildung von zweifach zusammenhängenden Gebieten, Proc. of the Physico-Mathematical Society of Japan 25 (1943) 1-42 (Avaliable via J-Stage: https://www.jstage.jst.go.jp).

187. I. A. Alexandrov, Parametric Continuations in the Theory of Univalent Functions, Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).

188. M. D. Contreras, S. Diaz-Madrigal and P. Gumenyuk, Loewner Theory in annulus I: evolution families and differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 365 (2013) .

189. M. D. Contreras, S. Diaz-Madrigal and P. Gumenyuk, Loewner Theory in annulus II: Loewner chains, Anal. Math. Phys. 1 (2011) 351-385.

190. F. Bracci, M. D. Contreras, S. Diaz-Madrigal and A. Vasil'ev, Classical and stochastic Löwner-Kufarev equations, Harmonic and Complex Analysis and Applications, Birkhäuser-Verlag, 2013, pp. 39-134.

191. J. Gibbons and S. Tsarev, Reductions of the Benney equations, Phys. Lett. A211 (1996) 19-24.

192. J. Gibbons and S. Tsarev, Conformal maps and reductions of the Benney equations, Phys. Lett. A258 (1999) 263-271.

193. M. Mañas, L. Martínez-Alonso, E. Medina, Reductions and hodograph solutions of the dispersionless KP hierarchy , J. Phys. A: Math. Gen. 35 (2002) 401-417.

194. M. Mañas, $S$-functions, reductions and hodograph solutions of the $r$th dispersionless modified KP and Dym hierarchies, J. Phys. A: Math. Gen. 37 (2004) 11191-11221.

195. K. Takasaki and T. Takebe, Radial Löwner equation and dispersionless cmKP hierarchy. arXiv:nlin.SI/0601063

196. T. Takebe, L.-P. Teo and A. Zabrodin, Löwner equation and dispersionless hierarchies, J. Phys. A: Math. Gen. 39 (2006) 11479-11501. arXiv:math/0605161

197. T. Takebe, Dispersionless BKP hierarchy and quadrant Löwner equation, SIGMA 10 (2014) 023 (13 pp.). arXiv:1308.4584

198. S.P. Tsarëv, The geometry of Hamiltonian systems of hydrodynamic type. The generalized hodograph method, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 54 (1990) 1048-1068 (in Russian); Math. USSR-Izv. 37 (1991) 397-419 (English translation).

199. B.A. Dubrovin and S.P. Novikov, Hydrodynamics of weakly deformed soliton lattices. Differential geometry and Hamiltonian theory, Russian Math. Surveys 44, no. 6 (1989) 35-124.

200. M. Pavlov, Algebro-geometric approach in the theory of integrable hydrodynamic-type systems, Comm. Math. Phys. 272 (2007) 469-505. arXiv:nlin/0603054

201. E. Ferapontov and K. Khusnutdinova, On integrability of (2+1)-dimensional quasilinear systems, Comm. Math. Phys. 248 (2004) 187-206. arXiv:nlin/0305044

202. K. Takasaki, Painlevé-Calogero correspondence revisited, J. Math. Phys. 42 (2001) 1443-1473. arXiv:math/0004118

203. A. Zabrodin and A. Zotov, Quantum Painlevé-Calogero correspondence for Painleve VI, J. Math. Phys. 53 (2012) 073508.

204. A. Odesskii and V. Sokolov, Systems of Gibbons-Tsarev type and integrable 3-dimensional models. arXiv:nlin/0906.3509

205. A. Odesskii and V. Sokolov, Integrable (2 + 1)-dimensional systems of hydrodynamic type, Theor. Math. Phys. 163 (2010) 549-586. arXiv:nlin/1009.2778

206. A. Odesskii and V. Sokolov, Integrable elliptic pseudopotentials, Theor. Math. Phys., 161 (2009) . arXiv:0810.3879

207. M. Sato and Y. Sato, Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifold, Lecture Notes in Num. Appl. Anal. 5 (1982) 259-271.

208. T. Takebe, Toda lattice hierarchy and conservation laws, Commun. Math. Phys. 129 (1990) 281-318.

209. S. Kharchev and A. Zabrodin, Theta vocabulary I, Journal of Geometry and Physics, 94 (2015) 19-31. arXiv:1502.04603

210. D. Mumford, Tata Lectures on Theta I, Birkhäuser (1982).

211. R. Anno, R. Bezrukavnikov, I. Mirkovic, Stability conditions for Slodowy slices and real variations of stability, Mosc. Math. J. 15 (2015), no. 2, 187-203, 403.

212. R. Bezrukavnikov, M. Finkelberg, V. Ostrik, Character D-modules via Drinfeld center of Harish-Chandra bimodules. Invent. Math. 188 (2012), no. 3, 589-620.

213. R. Bezrukavnikov, I. Losev, Etingof conjecture for quantized quiver varieties. http://www.northeastern.edu/iloseu/bezpaper.pdf

214. R. Bezrukavnikov, I. Mirkovic. Representations of semisimple Lie algebras in prime characteristic and noncommutative Springer resolution. Ann. Math. 178 (2013), n.3, 835-919.

215. R. Bezrukavnikov, I. Mirkovic, D. Rumynin. Singular localization and intertwining functors for reductive Lie algebras in prime characteristic. Nagoya Math. J. 184 (2006), 1–55.

216. R. Bezrukavnikov, I. Mirkovic, D. Rumynin. Localization of modules for a semisimple Lie algebra in prime characteristic (with an appendix by R. Bezrukavnikov and S. Riche), Ann. of Math. (2) 167 (2008), no. 3, 945-991.

217. R. Bezrukavnikov, S. Riche, Affine braid group actions on derived categories of Springer resolutions. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 45 (2012), no. 4, 535-599 (2013).

218. R. Bezrukavnikov, Z. Yun, On Koszul duality for Kac-Moody groups, Represent. Theory 17 (2013), 1-98.

219. D. Collingwood, W. McGovern. Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras. Chapman and Hall, London, 1993.

220. C. Dodd. Injectivity of a certain cycle map for finite dimensional W-algebras. Int. Math. Res. Not. 2014, no. 19, 5398–5436.

221. W.L. Gan, V. Ginzburg. Quantization of Slodowy slices. IMRN, 5(2002), 243-255.

222. J.C. Jantzen. Einhüllende Algebren halbeinfacher Lie-Algebren. Ergebnisse der Math., Vol. 3, Springer, New York, Tokio etc., 1983.

223. A. Joseph. On the associated variety of a primitive ideal. J. Algebra, 93 (1985), no. 2, 509-523.

224. A. Joseph. On the cyclicity of vectors associated with Duflo involutions. in Lecture Notes in Mathematics, vol. 1243, 144-188, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

225. I. Losev, Finite W-algebras. Proceedings of the International Congress of Mathematicians Hyderabad, India, 2010, p. 1281-1307.

226. I.V. Losev. Finite dimensional representations of W-algebras. Duke Math J. 159(2011), n.1, 99-143.

227. I. Losev. Derived equivalences for Rational Cherednik algebras. Duke Math J. 166(2017), N1, 27-73.

228. I. Losev. Bernstein inequality and holonomic modules (with a joint appendix by I. Losev and P. Etingof). Adv. Math. 308 (2017), 941-963.

229. I. Losev. Cacti and cells. arXiv:1506.04400. Accepted by J. Eur. Math. Soc.

230. I. Losev. Wall-crossing functors for quantized symplectic resolutions: perversity and partial Ringel dualities. arXiv:1604.06678.

231. I. Losev, V. Ostrik, Classification of finite dimensional irreducible modules over W-algebras. Compos. Math. 150(2014), N6, 1024-1076.

232. G. Lusztig. Characters of reductive groups over a finite field, Ann. Math. Studies 107, Princeton University Press (1984).

233. G. Lusztig. Equivariant K-theory and representations of Hecke algebras. Proc. Amer. Math. Soc. 94 (1985), no. 2, 337-342.

234. G. Lusztig. Leading coefficients of character values of Hecke algebras, Proc.Symp.Pure Math.47(2), Amer.Math.Soc. 1987, 235-262.

235. G. Lusztig. Cells in affine Weyl groups, IV. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math. 36 (1989), 297-328.

236. D. Milicic. Localization and Representation Theory of Reductive Lie Groups, available at http://www.math.utah.edu/∼milicic.

237. A. Premet. Special transverse slices and their enveloping algebras. Adv. Math. 170(2002), 1-55.

238. A. Premet. Enveloping algebras of Slodowy slices and the Joseph ideal. J. Eur. Math. Soc, 9(2007), N3, 487-543.

239. A. Premet. Primitive ideals, non-restricted representations and finite W-algebras. Mosc. Math. J., 7 (2007) N 4, 743–762.

240. A. Premet, Commutative quotients of finite W-algebras. Adv. Math. 225 (2010), N1, 269-306.

241. S. Riche, Geometric braid group action on derived categories of coherent sheaves. Represent. Theory 12 (2008) 131-169. With appendix by R. Bezrukavnikov and S. Riche.

242. L. Topley, A Morita theorem for modular finite W-algebras. Math. Z. 285 (2017), N 3-4, 685-705.

243. G. Arone, V. Turchin, On the rational homology of high-dimensional analogues of spaces of long knots, Geom. Topol. 18 (2014), no. 3, 1261–1322.

244. V. Drinfeld, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Mathematical Journal, 1991, 2:4, 829–860

245. B. Fresse, Homotopy of Operads and Grothendieck-Teichmüller Groups, [math.univ-lille1.fr]http://math.univ-lille1.fr/˜ fresse/OperadHomotopyBook/

246. T. Goodwillie, M. Weiss, Embeddings from the point of view of immersion theory, II. Geom. Topol. 3 (1999), 103–118

247. A. Khoroshkin, T. Willwacher, M.Živković, Differentials on graph complexes, Advances in Mathematics 307 (2017): 1184-1214

248. A. Khoroshkin, T. Willwacher, M. Živković, Differentials on graph complexes II — hairy graphs, Letters in Mathematical Physics (2017): 1-17. Letters of Mathematical Physics 66, (2003) pp. 157–216.

249. M. Kontsevich, Feynman diagrams and low-dimensional topology, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 97–121 Conférence Moshé Flato 1999, Vol. I (Dijon), 255–307, Vol. 230. No. 1079. American Mathematical Society, 2014.

250. C. Rossi, T. Willwacher,P. Etingof's conjecture about Drinfeld associators, arXiv:math/1404.2047 Lett. Math. Phys. 66 (2003), no. 1-2, 65–72.

251. D. Tamarkin, Action of the Grothendieck-Teichmueller group on the operad of Gerstenhaber algebras, math.arXiv:0202039

252. T. Willwacher, Kontsevich graph complex Grothendieck-Teichmüller and Batalin-Vilkovisky, Inventiones mathematicae 200.3 (2015): 671-760.

253. М. Э. Казарян, С. К. Ландо К теории пересечений на пространствах Гурвица, Изв. Ран.,Сер. Матем., Т.68, №5, С.91-122 (2004)

254. M. Kazarian, S. Lando, D. Zvonkine Topological recursion for the genus zero descendant Hurwitz potential, preprint (2017)

255. С. К. Ландо Разветвленные накрытия двумерной сферы и теория пересечений в пространствах мероморфных функций на алгебраических кривых, УМН, Т.57, №3, С.463-533 (2002)

256. В. Фултон Теория пересечений, М.: Мир (1994)
257. T. Ekedahl, S. K. Lando, M. Shapiro, A.Vainshtein Hurwitz numbers and intersections on moduli spaces of curves, Invent. Math., V.146, P.297-327 (2001)
258. J.Ding, P.Etingof, The center of a quantum affine algebra at the critical level, Math. Res. Lett. 1 (1994), no. 4, 469–480.
259. J.Donin Double quantization on coadjoint representations of semisimple Lie groups and their orbits, arXiv:math/9909160.
260. V.Drinfeld, Quantum Groups, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 798–820, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
261. V.Drinfeld On quadratic quasi-commutational relations in quasi-classical limit, English translation in: Selecta Math. Sovietica 11, no. 4, (1992) 317–326
262. J.Donin, D.Gurevich, S.Shider Double quantization on some orbits in the coadjoint representations of simple Lie groups Comm. Math. Phys. 204 (1999), no. 1, 39?60.
263. L.Frappat, N.Jing, A.Molev, E.Ragoucy, Higher Sugawara operators for the quantum affine algebras of type $A$, arXiv:1505.03667.
264. Gurevich D. Algebraic aspects of quantum Yang-Baxter equation, Leningrad Math. Journal 2:4 (1990), 119–148.
265. D. Gurevich, P. Pyatov, P. Saponov, Representation theory of (modified) Reflection Equation Algebra of the $GL(m|n)$ type, Algebra and Analysis, 20 (2008), 70–133.
266. D. Gurevich, P. Saponov, Braided Yangians, arXiv:1612.05929.
267. A.Isaev, P.Pyatov, Spectral extension of the quantum group cotangent bundle, Comm. Math. Phys. 288 (2009), no. 3, 1137?1179.
268. A.Isaev, O.Ogievetsky, P.Pyatov, On quantum matrix algebras satisfying the Cayley-Hamilton-Newton identities, J. Phys. A 32 (1999), no. 9, L115–L121.
269. Sh.Majid, Foundations of quantum group theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
270. A.Molev, Yangians and classical Lie algebras, Mathematical Surveys and Monographs, 143. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
271. A.Polishchuk, L.Positselski Quadratic Algebras, University Lecture Series, 37, AMS, Providence, RI.
272. D.Talalaev Quantum Gaudin system, Func. Anal. Appl. 40 (2006), no 1, 73-77.