

Правительство Российской Федерации

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

УДК 515.14

№ государственной регистрации 114101370165

Инв. №

УТВЕРЖДАЮ

Проректор НИУ ВШЭ,  
канд. экон. наук, доц.

\_\_\_\_\_ М.М. Юдкевич

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ г.

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ, ИХ  
КВАНТОВЫХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ И ДРУГИХ СОВРЕМЕННЫХ  
ОБОБЩЕНИЙ. РАЗРАБОТКА НОВЫХ МЕТОДОВ И КОНЦЕПЦИЙ В ЭТОЙ ТЕОРИИ,  
ОСНОВАННЫХ НА ИДЕЯХ ТЕОРИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ,  
СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТЕОРИИ ЭКВИВАРИАНТНЫХ КВАНТОВЫХ  
КОГОМОЛОГИЙ КОЛЧАННЫХ МНОГООБРАЗИЙ. РАЗВИТИЕ КОМБИНАТОРНЫХ,  
ГОМОЛОГИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВ  
МОДУЛЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ И ИХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ  
К ПРОБЛЕМАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
ИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЕЙ КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ,  
СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ, ИЗУЧЕНИЕ  
ИНТЕГРИРУЕМЫХ СТРУКТУР, КОНТРОЛИРУЮЩИХ ДИНАМИКУ  
КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ ПОЛЯ КОЛЧАННОГО ТИПА, АНАЛИЗ ИХ  
СООТВЕТСТВИЙ С ДВУМЕРНЫМИ КОНФОРМНЫМИ ТЕОРИЯМИ

(заключительный)

Руководители темы:

научный руководитель Международной  
лаборатории теории представлений  
и математической физики,  
канд. физ.-мат. наук

\_\_\_\_\_ А.Ю. Окуньков  
подпись, дата

зав. Международной лабораторией  
теории представлений и математической  
физики, д-р физ.-мат. наук, проф.

\_\_\_\_\_ Б.Л. Фейгин  
подпись, дата

Москва 2014

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководители		
Научный руководитель лаборатории, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Окуньков А.Ю. общая координация работы
Заведующий лабораторией д.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Фейгин Б.Л. общая координация работы
Заместитель заведующего лабораторией, д.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Забродин А. В. введение, заключение
Заместитель заведующего лабораторией, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Поволоцкий А.М. введение, заключение
Заместитель заведующего лабораторией, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Рыбников Л.Г. введение, заключение
Исполнители		
Главный научный сотрудник, Ph.D.	_____ <small>подпись, дата</small>	Безрукавников Р.В. общая координация работы
Научный сотрудник, к.ф.-м.н.	_____ <small>подпись, дата</small>	Берштейн М.А. раздел 1
Научный сотрудник, к.ф.-м.н.	_____ <small>подпись, дата</small>	Бурман Ю.М. раздел 1
Научный сотрудник, Ph.D.	_____ <small>подпись, дата</small>	Кувабара Т. раздел 1
Научный сотрудник, Ph.D.	_____ <small>подпись, дата</small>	Маршалл Й. раздел 2
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Орлов А.Ю. раздел 2
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Побережный В.А. раздел 1
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Пятов П.Н. раздел 2
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Сапонов П.А. раздел 1
Научный сотрудник, д.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Сергеев А.Н. раздел 1
Научный сотрудник, Ph.D.	_____ <small>подпись, дата</small>	Такаши Т. раздел 1
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Горский Е.А. раздел 2

Научный сотрудник, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Дунин-Барковский П.И. раздел 2
Научный сотрудник, к.ф.-м.н	_____ <small>подпись, дата</small>	Хорошкин А.С. раздел 1
Младший научный , сотрудник	_____ <small>подпись, дата</small>	Гавриленко П.Г. раздел 2
Стажер-исследователь,	_____ <small>подпись, дата</small>	Бычков Б.С. раздел 1
Стажер-исследователь,	_____ <small>подпись, дата</small>	Руденко Д.Г. раздел 2
Стажер-исследователь,	_____ <small>подпись, дата</small>	Буфетов А.И. раздел 2
Стажер-исследователь,	_____ <small>подпись, дата</small>	Махлин И.Ю. раздел 1
Стажер-исследователь,	_____ <small>подпись, дата</small>	Макарова С.В. раздел 2
Стажер-исследователь,	_____ <small>подпись, дата</small>	Ляшик А.Н. раздел 2
Стажер-исследователь,	_____ <small>подпись, дата</small>	Матушко М.Г. раздел 1
Стажер-исследователь,	_____ <small>подпись, дата</small>	Трофимова А.А. раздел 2
Стажер-исследователь,	_____ <small>подпись, дата</small>	Ахмедова В.Э. раздел 2
Стажер-исследователь,	_____ <small>подпись, дата</small>	Гонин Р.Р. раздел 1
Стажер-исследователь,	_____ <small>подпись, дата</small>	Попов П.П. раздел 1
Стажер-исследователь,	_____ <small>подпись, дата</small>	Попов П.П. раздел 2
Стажер-исследователь,	_____ <small>подпись, дата</small>	Шаталова А.В. раздел 1
Стажер-исследователь,	_____ <small>подпись, дата</small>	Абзалов А.Р. раздел 2
Менеджер научного , проекта	_____ <small>подпись, дата</small>	Жингель Е.А. приложения А,Б,В

## РЕФЕРАТ

Отчет на 153 страниц, 2 части, 4 рис., 208 источников.

Перечень ключевых слов: аффинные  $W$ -алгебры, скобки пуассона, симметрические супералгебры Ли, модель Калоджеро Мозера, стохастические процессы, алгебра Вирасоро, диаграммы Юнга, теорема Тома, препотенциалы, инстантонные разложения, конформные блоки, Анзац Бете, уравнение Хироты, интегрируемые модели, модель Годена, иерархия КП, уравнение Левнера, МОЗР, солитоны, преобразование Дарбу

Цели работы: развитие общего подхода к разнообразным вопросам, находящимся на стыке теории интегрируемых систем с теорией представлений квантовых и бесконечномерных групп и алгебр.

Задачи: Основными задачами Международной лаборатории теории представлений и математической физики являются:

- изучение и обобщение отечественного и мирового опыта по направлениям научных исследований, проводимых Лабораторией;
- распространение результатов научных исследований;
- содействие развитию научных исследований в России по направлению исследования;
- содействие участию преподавателей, аспирантов и студентов НИУ ВШЭ в научной деятельности Лаборатории, их контактам с зарубежными исследователями;
- содействие развитию международного научного сотрудничества НИУ ВШЭ.

Объекты научного исследования: квантовые когомологии в теории интегрируемых систем, вопросы зеркальной симметрии, многомерные гипергеометрические функции и геометрическая теория представлений, эллиптические конформные блоки и эллиптические гипергеометрические функции, геометрическое соответствие Ленглендса.

Методы исследований: алгебраический и теоретико-представленческий анализ классических и квантовых теорий поля, статистической физики и случайных процессов, исследование интегрируемых структур стоящих за калибровочными киверными теориями и анализ их соответствия с двумерными конформными теориями поля, развитие комбинаторных, гомологических и геометрических методов в теории пространств модулей различных геометрических и аналитических структур с приложениями к проблемам математической физики.

Полученные результаты:

- Введено понятие асимптотической алгебры киральных дифференциальных операторов. Доказана теорема о локализации для аффинных  $W$ -алгебр на критическом уровне.

— Введена “твистованная алгебра Пуассона”, связанная с инволютивным решением квантового уравнения Янга-Бакстера. Построено обобщение пуассоновой структуры годеповского типа путем замены производной первого порядка по токовому параметру на производную более высокого порядка в локальной форме годеповской пуассоновой структуры. Предложена пуассонова структура, содержащая оба обобщения. Найдены, также, некоторые коммутативные семейства соответствующих твистованных пуассоновых алгебр.

— Изучены интегрируемые обобщения, операторов Калоджеро-Мозера-Сазерленда, которые имеют только частичную симметрию. Выявленная связь с симметрическими суперпространствами применена к изучению сферических функций на симметрическом пространстве

$$X = GL(n, 2m) / OSP(n, 2m).$$

Установлена биекция между конечномерными обобщенными собственными подпространствами алгебры  $\mathfrak{D}_{n,m}$  и проективными накрытиями определенных неприводимых модулей над  $\mathfrak{gl}(n, 2m)$ .

— Предложена гипотеза, связывающая действие кактусной группы на векторах Бете с действием той же группы на тезорном произведении кристаллов как объектов кограничной категории. Получено ее доказательство гипотезу в случае алгебры Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$

— Получено аналитическое выражение для статсуммы стохастического процесса с  $Z_N$  симметрией, которое подтверждено численными наблюдениями.

— Доказано, что порядок на вероятностных мерах, наследуемый с доминантного порядка на диаграммах Юнга, сохраняется при естественном отображении уменьшающем количество клеток в диаграмме на 1. Как следствие получено новое доказательство теоремы Тома о классификации нормированных экстремальных характеров бесконечной симметрической группы.

— Доказан закон больших чисел для всех (гипотетически) эргодических мер на пространстве верхне-треугольных матриц, и показана связь предельных частот возникающей случайной диаграммы Юнга с коэффициентами, участвующими в параметризации.

— Доказаны формулы вычетов для третьих производных обобщённых препотенциалов, которые дают эффективный способ для вычисления их разложений в режиме слабой связи.

— Построена производящая функция интегралов движения для квантовой модели Годена с твистованными граничными условиями (управляющий  $T$ -оператор) и показано, что она удовлетворяет билинейному тождеству и уравнению Хироты для классической иерархии КП.

— На основе преобразования Дарбу развита рекуррентная процедура последовательного построения решения разностного уравнения Хироты.

Организационные результаты:

- подготовка к изданию научных докладов, статей и других публикаций, содержащих результаты научной деятельности Лаборатории;
- организация и проведение школы-конференции, летних школ и научных семинаров
- организация визитов в Лабораторию зарубежных специалистов
- организация курсов лекций

# СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	8
1 Развитие теории представлений полупростых алгебр Ли и их деформаций . . . . .	14
1.1 Локализация аффинных $W$ -алгебр . . . . .	14
1.2 Обобщения пуассоновых структур, связанных с рациональной моделью Годена . . . . .	25
1.3 Кактусная группа и монодромия векторов Бете . . . . .	43
1.4 Симметрические супералгебры Ли и деформированная задача Калоджеро-Мозера . . . . .	47
2 Алгебраический анализ интегрируемых моделей классической и квантовой теории поля, интегрируемые структуры в калибровочных теориях, моделях статистической механики и случайных процессов. . . . .	49
2.1 АГТ, пары Буржа и минимальные модели . . . . .	49
2.2 Стохастические процессы с $Z_N$ симметрией и комплексные представления алгебры Вирасоро; Статсуммы . . . . .	53
2.3 Стохастическая монотонность в графе Юнга и теорема Тома . . . . .	59
2.4 Формулы вычетов для препотенциалов, инстантонные разложения и конформные блоки . . . . .	63
2.5 Анзац Бете, уравнение Хироты и принцип соответствия в интегрируемых моделях . . . . .	95
2.6 Квантовая модель Годена и классическая иерархия КП . . . . .	102
2.7 Бездисперсионная иерархия ДКР и эллиптическое уравнение Левнера . . . . .	112
2.8 Разностное уравнение Хироты: МОЗР, преобразование Дарбу и солитоны . . . . .	125
ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	140
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ . . . . .	142

## ВВЕДЕНИЕ

В течение последних десятилетий развитие математики было во многом мотивировано проблемами, возникающими в теоретической физике: источниками новых идей, понятий и направлений в фундаментальной математике стали квантовая теория поля, теория струн, теория критических явлений и статистическая механика.

Большинство из них концентрируются вокруг теории представлений бесконечномерных групп и алгебр и связаны с идеологией интегрируемости в широком смысле этого слова. В качестве наиболее известных примеров плодотворного взаимодействия математики и физики можно привести теорию квантовых деформаций универсальных обертывающих алгебр Ли (квантовых групп), теорию бесконечномерных групп и алгебр Ли, интегрируемые иерархии нелинейных дифференциальных уравнений, понятие зеркальной симметрии, комплекс идей и понятий, связанных с геометрическим соответствием Ленглендса и др.. Актуальность развития методов теории представлений для алгебраического анализа интегрируемых систем как в классической, так и в квантовой области, ясна из того, что интегрируемость теоретико-полевой модели означает наличие скрытых симметрий, образующих некоторую бесконечномерную алгебру, представления которой играют решающую роль в теории. Основной целью лаборатории является развитие общего подхода к разнообразным вопросам, находящимся на стыке теории интегрируемых систем с теорией представлений квантовых и бесконечномерных групп и алгебр. Конкретные исследования проводятся в нескольких связанных друг с другом направлениях и подразумевают тесное взаимодействие математиков и специалистов по математической физике. Эти направления включают: квантовые когомологии в теории интегрируемых систем, вопросы зеркальной симметрии, многомерные гипергеометрические функции и геометрическая теория представлений, эллиптические конформные блоки и эллиптические гипергеометрические функции, геометрическое соответствие Ленглендса, развитие комбинаторных, гомологических и геометрических методов в теории пространств модулей различных геометрических и аналитических структур с приложениями к проблемам математической физики.

В соответствии с возложенными на неё задачами Лаборатория провела следующие мероприятия:

1. подготовила к изданию 10 статей и обзор, научные доклады и другие публикации, содержащие результаты научной деятельности Лаборатории; ( Приложение В).
2. организовала и провела ( в сотрудничестве с Лабораторией алгебраической геометрии) XIII Международную школу-конференцию по теоретической и математической физике , (г.Дубна), школу-конференция : « Integrability and Isomonodromy in Mathematical Physics» , Центр Лоренца, г. Лейден, Нидерланды, школу-конференция : «Проект RIMS2014 Геометрическая теория представлений», г.Киото, Япония еженедельный семинар по математической физике, семинары в сотрудничестве с ведущими зарубежными специалистами



и другие мероприятия, содействующие активизации научной работы по направлению научных исследований Лаборатории, в частности, ориентированных на молодых учёных, аспирантов и студентов;(Приложение Б).

3. пригласила и приняла ведущих зарубежных специалистов в количестве 11 человек из стран: Франции, Великобритании, США, Нидерланд, Швейцарии. Специалистами были прочитаны курсы лекций, которые позволили сотрудникам Лаборатории познакомиться с последними достижениями в области теории представлений и математической физики, а также связать эти направления со своими исследованиями, привлекли к научной работе и научным мероприятиям Лаборатории работников, аспирантов и студентов НИУ ВШЭ, специализирующихся по направлению научных исследований Лаборатории;(Приложение А).

Наша исследовательская работа была сосредоточена на алгебраическом и теоретико-представленном анализе интегрируемых систем классической и квантовой теорий поля, статистической физики и случайных процессов, исследованиях интегрируемых структур, лежащих в основе колчаных теорий поля. Основные научные результаты включают прогресс в следующих областях: локализация аффинных  $W$ -алгебр, деформированные алгебры Калоджеро-Мозера-Сазерленда и симметрические пространства, интегрируемые иерархии солитонных уравнений, глубокие нетривиальные связи между классическими и квантовыми интегрируемыми системами, модель Годена, алгебраический анализ случайных процессов, алгебраические и интегрируемые структуры колчаных калибровочных теорий.

Первый объект исследования — это локализация  $W$ -алгебр. Пусть  $X$  — схема,  $\mathcal{A}$  — пучок ассоциативных алгебр с единицей над  $X$ , а  $A$  — это ассоциативная алгебра с единицей, такая что  $A = \Gamma(X, \mathcal{A})$ . Тогда  $\mathcal{A}$  называется локализацией  $A$ . Если  $A$  коммутативна, тогда определенная локализация  $\mathcal{A}$  является ключевым понятием для определения схемы  $\text{Spec} A$ . Важный некоммутативный пример был одновременно предложен в статьях Берлинсона-Бернштейна и Брылински-Кашивары. Мы определили асимптотические вертексные алгебры. В частности мы ввели понятие вертексной алгебры киральных дифференциальных операторов (АКДО). Заметим, что если схема  $M$  пуассонова, то струя  $J_\infty M$  — вертексно-пуассонова, т.е.  $\mathcal{O}_{J_\infty M}$  — вертексная алгебра Пуассона. Обычно, АКДО является ее квантованием. Через киральную Гамильтонову редукцию построена асимптотическая алгебра над разрешением пересечения среза Солодового с нильпотентным конусом и вычислено пространство её глобальных сечений. Тем самым доказана теорема о локализации для аффинных  $W$ -алгебр на критическом уровне. Эта конструкция аналогична оригинальному определению Фейгина-Френкеля (которое работает только для нильпотентных элементов, допускающих хорошую четную градуировку) и более интуитивно понятна, чем определение Каца-Роана-Вакимото, хотя и эквивалентно ей.

Также мы изучали операторные алгебры Калоджера-Мозера-Сазерленда (КМС) и их деформированные аналоги. Теория деформированных алгебр КМС применена для изучения сферических функций на симметрических пространствах  $GL(n|2m)/OSP(n|2m)$ . Основные результаты можно сформулировать следующим образом. Установлена биекция между конечномерными обобщенными собственными пространствами алгебры  $D_{n,m}$  коммутирующих интегралов движения обобщенной модели КМС и проективных накрытий определенных неприводимых модулей над  $gl(n|2m)$ . Соответствующие проективные модули можно описать явно в терминах некоторых условий старшего веса. Эти условия являются естественным обобщением условия типичности Каца.

Кактусная группа – это фундаментальная группа вещественной части пространства Делиня-Мамфорда стабильных рациональных кривых. Эта группа естественным образом возникает/появляется как аналог группы кос в кограничных моноидальных категориях. Мы строим действие кактусной группы на множестве векторов Бете модели Годена, связанной с произвольной полупростой алгеброй Ли  $\mathfrak{g}$ . В нашей конструкции кактусная группа появляется как подгруппа группы Галуа уравнений анзаца Бете. Следуя идее П. Этингофа, мы ставим гипотезу, связывающую действие кактусной группы на векторах Бете с действием той же группы на тезорном произведении кристаллов как объектов кограничной категории. Мы доказываем нашу гипотезу в случае алгебры Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$

Другая важная часть наших исследований — изучение бесконечных иерархий солитонных уравнений. Хорошо известные примеры — иерархия Кадомцева-Петвиашвили (КП) и ее “модифицированный” аналог, двумерная решетка Тоды. Также существуют так называемые пфаффовы версии этих иерархий. (Иерархия Пфаффа-КП, также известная как решетка Пфаффа, которая восходит к работам Джимбы и Мивы.) Иерархии типа пфаффовых относительно слабо изучены, и в этой области существует множество нерешенных задач. Наши результаты относятся к бездисперсионному пределу иерархии Пфаффа-КП.

Бездисперсионная иерархия Пфаффа-КП (бездисперсионный предел решетки Пфаффа) был недавно введен Такасаки. Мы показали, что она допускает многообещающую переформулировку через эллиптические функции. В этом виде она выглядит как естественная «эллиптическая деформация» бездисперсионной иерархии КП. Также мы изучили редукцию бездисперсионных иерархий КП к одной переменной и показали, что они описываются эллиптическим аналогом уравнения Левнера. При специальном выборе неоднородности, это уравнение оказывается тесно связанным с уравнением Пенлеве VI со специальным выбором параметров.

В процессе работы над проектом мы получили множество результатов о нетривиальных связях между квантовыми и классическими интегрируемыми системами, выходящих далеко за рамки стандартного принципа соответствия. Известно, что существуют два вида интегрируемых моделей – классические и квантовые. В первом приходится решать уравнения движения, тогда как в последнем основная цель — диагонализация операторов (гамильтониана или оператора эволюции). Обычно классические модели допускают

квантование, сохраняющее интегрируемость, а в квантовых моделях можно перейти к классическому пределу согласно квантово-механическому принципу соответствия .

В то же время, оказывается что существуют более глубокие связи между квантовыми и классическими интегрируемыми моделями, которые не сводятся к квантово-механическому принципу соответствия. А именно, оказывается, что классические интегрируемые уравнения встроены в структуру квантовых моделей даже при  $\hbar \neq 0$ . А также в обратную сторону, некоторые специальные элементы квантовых моделей возникают при решении классических интегрируемых уравнений. У этого неожиданного и не вполне понятного явления есть несколько аспектов Наши новые результаты связаны с отождествлением квантовой трансферматрицы ( $T$ -оператора) с классической  $\tau$ -функцией.

Установлены интересные связи между квантовой моделью Годена и классической иерархией КП. Мы построили производящую функцию интегралов движения квантовой модели Годена (управляющий  $T$ -оператор) и показываем, что она удовлетворяет билинейным соотношениям и уравнениям Хироты для классической иерархии КП. Любое собственное значение управляющего  $T$ -оператора это  $\tau$ -функция классической иерархии КП. Это многочлен по спектральному параметру, играющему роль времени  $t_1$  в иерархии. Из этого следует, что нули собственных значений управляющего  $T$ -оператора по спектральному параметру имеют такую же динамику как частицы в системах Калоджеро-Мозера. В результате мы получаем систему алгебраических уравнений для спектра гамильтонианов Годена. Обобщение этих результатов (в частности бесконечномерных) — это интересная нерешенная задача.

В предыдущей предыдущих работах были получены численные данные о том, что спектр гамильтониана, составленного из генераторов периодической алгебры Темперли-Либя, в термодинамическом пределе может быть описан в терминах представлений алгебры Вирасоро с комплексными старшими весами. Этот гамильтониан задает стохастический процесс с  $Z_N$  симметрией. В настоящей статье мы приводим аналитические выражения для статсуммы модели, которые подтверждают численные наблюдения. При четных значениях  $N$  гамильтониан обладает дополнительной симметрией, отвечающей за двукратное вырождение его спектра и приводящей к появлению двух независимых стохастических процессов. Наличие комплексного спектра приводит к осциллирующему приближению состояний модели к стационарному. Мы разбираем пример такого поведения.

Задача классификации аналогов неприводимых представлений для «больших» групп, таких как бесконечная симметрическая или бесконечномерная унитарная группа, получила пристальное внимание в последние годы. Этот интерес в основном обусловлен богатством взаимосвязей как с классической теорией представлений, так и с теорией вероятности и моделями статистической физики. Мы показываем, что порядок на вероятностных мерах, наследуемый с доминантного порядка на диаграммах Юнга, сохраняется при естественном отображении уменьшающем количество клеток в диаграмме на 1. Как следствие было получено новое доказательство теоремы Тома о классификации нормированных экс-

тремальных характеров бесконечной симметрической группы. В случае «больших» групп именно нормированные экстремальные характеры являются «правильными» аналогами неприводимых конечномерных представлений.

В этой работе также сформулирован ряд гипотез, естественно обобщающих полученные результаты. Теорема Тома тесно связана с классическими симметрическими функциями Шура. В последние 20 лет выяснилось, что деформация многочленов Шура, зависящая от двух параметров, – так называемые многочлены Макдональда, – естественным образом возникает в самых разных задачах теории представлений; кроме того, с помощью формализма многочленов Макдональда в последние 5 лет был достигнут существенный прогресс в ряде задач математической физики, в частности, в моделях ориентированных полимеров. Однако, аналог теоремы Тома для многочленов Макдональда не доказан, и остается известной открытой проблемой, также известной под названием «гипотеза Керова». Есть надежда, что сформулированные гипотезы окажутся важны при дальнейшем изучении этого круга вопросов и, в частности, для решения гипотезы Керова.

Другая результаты относятся к частному случаю многочленов Макдональда – многочленам Холла-Литтлвуда. Оказывается, что для них аналог теоремы Тома имеет другую важную интерпретацию – классификацию инвариантных относительно сопряжения эргодических мер на пространстве верхне-треугольных матриц. Доказан тесно связанный с теоремой Тома результат – а именно, был доказан закон больших чисел для всех (гипотетически) эргодических мер, причем была показана связь предельных частот возникающей случайной диаграммы Юнга с коэффициентами, участвующими в параметризации. Этот результат, по всей видимости, является единственным продвижением в гипотезе Керова для многочленов Холла-Литтлвуда за последние 15 лет.

Далее, исследована алгебраическая структура колчанны калибровочных теорий, которые в данный момент интенсивно изучаются в квантовой теории поля. Мы изучили обобщённые препотенциалы колчанных калибровочных теорий класса S-дуальности, рассматривая их как квазиклассические тау-функции, зависящие от конденсатов калибровочной теории и голых констант связи. Доказаны формулы вычетов для третьих производных обобщённых препотенциалов, которые дают эффективный способ для вычисления их разложений в режиме слабой связи. Также мы рассмотрели дифференциальные уравнения, следующие из формул вычетов, включая уравнения WDVV, относительно которых доказано, что они справедливы для  $SU(2)$  колчанных калибровочных теорий. В качестве частного результата мы рассмотрели конформную колчанную теорию, соответствующую замолотчиковскому конформному блоку по  $4d/2d$  дуальности. В этом случае часть найденных дифференциальных уравнения превращается в нетривиальные соотношения на матрицы периодов гиперэллиптических кривых. Развитие теории представлений полупростых алгебр Ли и их деформаций.

Кроме того, рассмотрены прямая и обратная задачи для разностного уравнения Хироты. Введены решения Йоста и данные рассеяния и описаны их свойства. Показано,

что преобразование Дарбу в частном случае дает эволюцию по отношению к дискретному времени и рекуррентную процедуру для последовательного построения решения Йоста в произвольный момент времени по заданному начальному значению. Изучены некоторые свойства солитонных решений.

Подробное изложение полученных результатов представлено в основной части отчета. Все результаты тематически отнесены к одной из двух частей: «Развитие теории представлений полупростых алгебр Ли и их деформаций» и «Алгебраический анализ интегрируемых моделей классической и квантовой теории поля, интегрируемые структуры в калибровочных теориях, моделях статистической механики и случайных процессов». Каждая часть разделена на разделы, в которых содержится подробное описание полученных результатов. Каждый раздел содержит собственное введение, где определяются основные понятия, вводятся определения и ставится задача, после чего следует подробное описание методов исследования и полученных результатов. Ссылки на литературу собраны в списке использованных источников. Полученные результаты опубликованы в статьях [1]-[10].

# 1 Развитие теории представлений полупростых алгебр Ли и их деформаций

## 1.1 Локализация аффинных W-алгебр

### 1.1.1 Введение

Пусть  $X$  схема,  $\mathcal{A}$  пучок ассоциативных алгебр с единицей на  $X$ ,  $A$  ассоциативная алгебра с единицей такая что  $A = \Gamma(X, \mathcal{A})$ , тогда  $\mathcal{A}$  называется *локализацией*  $A$ .

Важный некоммутативный пример был одновременно представлен в работах Бейленсона и Бернштейна [15, 16] и Брилински и Кашивары [21]. В этом случае  $X$  это многообразие флагов, и  $\mathcal{D}_X$ , алгебра дифференциальных операторов на  $X$ , есть локализация "безцентральной" универсальной обертывающей алгебры,  $U(\mathfrak{g})_0$ , соответствующей простой алгебре Ли  $\mathfrak{g}$ . Введенная для доказательства гипотезы Каждана-Люстига, эта конструкция рассматривается вне своего изначального теоретико-представленческого контекста и служит шаблоном для математического определения конформной теории поля, смотри в неопубликованной, но важной работе [18] и в более недавней [17].

Относительно недавно были рассмотрены другие примеры некоммутативной локализации в работах [29], [33] и затем [23]. Для формулировки части результата [23] рассмотрим нильпотентный конус  $\mathcal{N} \subset \mathfrak{g}$ , срез Солодового  $\mathbb{S} \subset \mathfrak{g}$ , и разрешение Шпрингера

$$\pi : T^*X \rightarrow \mathcal{N}. \quad (1.1.1)$$

Затем рассмотрим  $S := \mathbb{S} \cap \mathcal{N}$  и  $\tilde{S} \subset T^*X$ , прообраз  $S$  при отображение (1.1.1). Додд and Кремницер утверждают, что некоторая (построенная через Гамильтонову редукцию) алгебра асимптотических дифференциальных операторов над  $\tilde{S}$ ,  $\mathcal{D}_{\tilde{S}, \sqrt{\hbar}}$ , оказывается локализацией асимптотической версией бесцентральной конечной W-алгебры; результат для настоящих W-алгебр также выглядит привлекательным:  $\mathcal{W}_0^{fin} = \Gamma(\tilde{S}, \mathcal{D}_{\tilde{S}, \sqrt{\hbar}})^{\mathbb{C}^*}$ .

Мы используем слово 'асимптотическая' и обозначаем через надстрочный индекс  $\mathbb{C}^*$ , действие  $\mathbb{C}^*$ ; это отражает две важные конструкции изобретенные Кашиварой и Рекваером в работе [29] для локализации алгебр Чередника. Для того чтобы использовать эти конструкции в нашем контексте давайте вернемся к ситуации Бейленсона/Бернштейна-Брилински/Кашивары. Теорема Константа утверждает, что хотя (1.1.1) является лишь бирациональным изоморфизмом, это отображение тем не менее определяет изоморфизм колец регулярных функций.

$$\mathbb{C}[\mathcal{N}] \xrightarrow{\sim} \Gamma(T^*X, \mathcal{O}_{T^*X}). \quad (1.1.2)$$

Этот результат ключевой для изоморфизма локализаций  $U(\mathfrak{g})_0 \xrightarrow{\sim} \Gamma(X, \mathcal{D}_X)$ . В котором второе является квантованием первого потому, что, как всем известно, алгебра дифференциальных операторов есть квантование алгебры функций на кокасательном

расслоение. Несмотря на то что все это знают, это утверждение не полностью корректно. Квантование  $\mathcal{O}_{T^*X}$  должно пониматься как пучок над  $T^*X$ , и  $\mathcal{D}_X$ , и будучи некоммутативной мешает локализации вдоль слоев проекции  $T^*X \rightarrow X$ . Поэтому на самом деле  $\mathcal{D}_X$  есть квантование прямого образа  $\mathcal{O}_{T^*X}$  на  $X$ . В случае кокасательного расслоения эти тонкости могут быть проигнорированы, но проблема в том что, не смотря на то, что подпространство  $\tilde{S} \subset T^*X$  является симплектическим, оно может не быть кокасательным расслоением к чему-то. Способы решения проблемы предложены в [29]. Во первых  $\mathcal{D}_X$  должно быть заменено на деформированную квантованную версию. Это означает введение ‘Постоянной планка’  $\hbar$  для того чтобы деформировать локально определенные соотношения следующим способом:  $[\xi, \eta]_{\hbar} = \hbar[\xi, \eta]$ ,  $[\xi, f]_{\hbar} = \hbar\xi(f)$ ,  $\xi, \eta \in \mathcal{T}_X$ ,  $f \in \mathcal{O}_X$ ;

Затем пополнение по положительным степеням  $\hbar$  и разрешение деления на  $\hbar$ . Результатом будет топологическая алгебра того что мы называем асимптотическими дифференциальными операторами. Она локализуется хорошо,<sup>1</sup> но является слишком большой чтобы произвести подходящую ассоциативную алгебру. Для этого используется  $\mathbb{C}^*$ -эквивариантная структура открытая в [29] в случае алгебра Чередника. Додд and Кремницер используют ту же самую терминологию в случае  $W$ -алгебр, при этом  $\mathbb{C}^*$ -эквивариантная структура есть прямое использование хорошо известной фильтрации Каждана. Заметим аналогичный отображению (1.1.2) изоморфизм:

$$\mathbb{C}[S] \xrightarrow{\sim} \Gamma(\tilde{S}, \mathcal{O}_{\tilde{S}}). \quad (1.1.3)$$

В настоящей работе, следуя [29], мы определяем асимптотическую вертексные алгебры, в частности, асимптотические алгебры киральных дифференциальных операторов (ACDO). Заметим что если схема  $M$  пуассонова, тогда джет-схема  $J_{\infty}M$  вертексная пуассонова, т.е.  $\mathcal{O}_{J_{\infty}M}$  является вертексной пуассоновой алгеброй; это доказывается в [11], однако то что скобка на джет-схеме имеет ‘вертексную природу’ был известен специалистам по бесконечным динамическим системам десятилетия, в качестве введения смотри в [17] и далее по ссылкам. В основном ACDO это квантование либо этой либо той  $J_{\infty}M$ . В частности, если дана алгебра киральных дифференциальных операторов (CDO)  $\mathcal{D}_M^{ch}$  над  $M$ , смотри [17, 34, 26], то существует простая конструкция ACDO  $\mathcal{D}_{M, \sqrt{\hbar}}^{ch}$ , которая является пучком над  $J_{\infty}T^*M$ .

Вот почему, если  $X$  это многообразие флагов, существует единственная  $\mathcal{D}_X^{ch}$  [27], и мы строим ACDO  $\mathcal{D}_{X, \sqrt{\hbar}}^{ch}$ , пучок над  $J_{\infty}T^*X$ . Из  $\mathcal{D}_{X, \sqrt{\hbar}}^{ch}$ , используя киральную Гамильтонову редукцию, мы получаем  $\mathcal{D}_{\tilde{S}, \sqrt{\hbar}}^{ch}$ , а некоторую ACDO над  $J_{\infty}\tilde{S}$ .

Похожим образом, если имеется хорошо известная бесцентровая вертексная алгебра  $V_0^{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ , то мы строим асимптотическую вертексную алгебру  $V_0^{-h^\vee}(\mathfrak{g})_{\sqrt{\hbar}}$ , из которой,

---

<sup>1</sup>Этот феномен лучше всего виден с точки зрения, развитой в работе Капранова [28], которая является важным источником для нашего вдохновения

вновь через киральную Гамильтонову редукцию, мы получаем асимптотическую версию бесцентровой аффинной  $W$ -алгебры,  $\mathcal{W}_{0,\sqrt{\hbar}}^{-h^\vee}$ .

Алгебры  $\mathcal{D}_{\tilde{S},\sqrt{\hbar}}^{ch}$  и  $\mathcal{W}_{0,\sqrt{\hbar}}^{-h^\vee}$  имеют  $\mathbb{C}^*$ -действие; в частности,  $(\mathcal{W}_{0,\sqrt{\hbar}}^{-h^\vee})^{\mathbb{C}^*}$  является обычной аффинной  $W$ -алгеброй,  $\mathcal{W}_0^{-h^\vee}$ , как определено в [24] для главного нильпотентного элемента и в [31] для общего случая. Наш основной результат заключается в следующих двух изоморфизмах

$$\Gamma(J_\infty \tilde{S}, \mathcal{D}_{\tilde{S},\sqrt{\hbar}}^{ch}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_{0,\sqrt{\hbar}}^{-h^\vee}, \quad \Gamma(J_\infty \tilde{S}, \mathcal{D}_{\tilde{S},\sqrt{\hbar}}^{ch})^{\mathbb{C}^*} \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_0^{-h^\vee}. \quad (1.1.4)$$

Заметим что есть очевидная джет-схемная версия отображения (1.1.3)

$$\mathbb{C}[J_\infty S] \longrightarrow \Gamma(J_\infty \tilde{S}, \mathcal{O}_{J_\infty \tilde{S}}),$$

но оно не в каком смысле не изоморфизм, что делает (1.1.4) менее очевидным и отражает то, что квантовые объекты лучше подходят для регулеризаций.

### 1.1.2 Основной результат

На CDO  $\mathcal{D}_X^{ch}$  как известно действует аффинная алгебра Ли на критическом уровне, т.е. существует отображение  $V_0^{-h^\vee}(\mathfrak{g}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_X^{ch})$ , [34, 27]. Поэтому, отображение

$$\phi : V_0^{-h^\vee}(\mathfrak{g}) \rightarrow \Gamma(J_\infty T^*X, \mathcal{D}_{X,h}^{ch}). \quad (1.1.5)$$

Заметим что его отображение на  $V(\mathfrak{m}) \subset V^{-h^\vee}(\mathfrak{g})$  совпадает с  $\mu^{ch}$ , по определению. В частности, (1.1.5) дает нам морфизм Ли алгебр

$$sl_2 \rightarrow \text{End}(\mathcal{D}_{X,h}^{ch}), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mapsto a\phi(h)_{(0)} + b\phi(e)_{(0)} + c\phi(f)_{(0)},$$

где  $e, h, f$  это  $sl_2$ -тройка введенная выше.

Из конструкции видно что, это действие поднимается до канонического действия на  $X$ . Вот почему, с помощью него можно получить на  $\mathcal{D}_{X,h}^{ch}$   $SL_2$ -эквивариантную структуру пучка. Пусть отображение

$$SL_2 g \mapsto \gamma(g) : \mathcal{D}_{X,h}^{ch}(g^{-1}U) \rightarrow \mathcal{D}_{X,h}^{ch}(U), \quad \forall U \subset J_\infty T^*X$$

определяющим эту  $SL_2$ -эквивариантную структуру. Мы получаем что  $\mathbb{C}^*$ -эквивариантная структура, полученная через ограничение следующая:

$$\mathbb{C}^* t \mapsto \rho_1(t) = \gamma\left(\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\right).$$

На ACDO  $\mathcal{D}_{X,h}^{ch}$  имеется также другая  $\mathbb{C}^*$ -эквивариантная структура, индуцированная квадратом канонического  $\mathbb{C}^*$ -действия на векторном расслоении  $T^*X \rightarrow X$ , что означает  $t \cdot \xi = t^2 \xi$  для  $t \in \mathbb{C}^*$ ,  $\xi \in \mathcal{T}_X \subset \mathcal{O}_{J_\infty T^*X}$ . Предположим задан атлас на  $X$ , и локально



$\mathcal{D}_{X,\hbar}^{ch}$  порождена функциями и ‘координатными векторными полями’  $\{\widehat{\partial}_i\}$  подставленными в стандартные соотношения, смотри доказательство для явных формул. Теперь определим

$$t \cdot \widehat{\partial}_i = t^2 \widehat{\partial}_i, t \cdot \hbar = t^2 \hbar.$$

Формулы написанные в доказательстве Леммы показывают сразу, что это действие удовлетворяет соотношениям и согласовано с функциями перехода, и потому определяют

$$\mathbb{C}^* t \mapsto \rho_2(t) : \mathcal{D}_{X,\hbar}^{ch}(t^{-1} \cdot U) \rightarrow \mathcal{D}_{X,\hbar}^{ch}(U), \forall U \subset J_\infty T^* X.$$

Ясно что  $\rho_1(t_1) \circ \rho_2(t_2) = \rho_2(t_2) \circ \rho_1(t_1)$ , и мы определяем желаемое  $\mathbb{C}^*$ -действие

$$\mathbb{C}^* t \mapsto \rho(t) \stackrel{\text{def}}{=} \rho_1(t) \circ \rho_2(t).$$

Заметим снова, что  $\rho(t)(\hbar) = t^2 \hbar$ . Удобно также иметь  $\hbar$  порождающую тождественный характер  $\{t \mapsto t\}$  of  $\mathbb{C}^*$ . Для достижения этого, расширим скаляры и определим

$$\mathcal{D}_{X,\sqrt{\hbar}}^{ch} = \mathcal{D}_{X,\hbar}^{ch} \otimes_{\mathbb{C}((\hbar))} \mathbb{C}((\sqrt{\hbar}))$$

требуя чтобы  $\rho(t)(\sqrt{\hbar}) = t\sqrt{\hbar}$ . Эти обозначения определенно двусмысленны, но мы будем использовать их по причине отсутствия других.

Рассмотрим комплекс киральной Гамильтоновой редукции

$$(\mathcal{D}_{X,\sqrt{\hbar}}^{ch} \widehat{\otimes} Cl^{vert}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*)_{\hbar}, (d_X^{ch})_{(0)}),$$

очевидно расширение с тем же дифференциалом. Определим  $\mathbb{C}^*$ -эквивариантную структуру

$$\mathbb{C}^* t \mapsto \rho(t) \otimes t^{-h} : \mathcal{D}_{X,\sqrt{\hbar}}^{ch}(\rho(t^{-1})U) \widehat{\otimes} Cl^{vert}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*)_{\hbar} \rightarrow \mathcal{D}_{X,\sqrt{\hbar}}^{ch}(U) \widehat{\otimes} Cl^{vert}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*)_{\hbar},$$

где  $h$  действует естественным образом на  $Cl^{vert}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*)$ . что делает

$$\Gamma(J_\infty T^* X, \mathcal{D}_{X,\sqrt{\hbar}}^{ch} \widehat{\otimes} Cl^{vert}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*)_{\hbar})$$

$\mathbb{C}^*$ -модулем, и легко показать что дифференциал  $d_X^{ch}$  будет  $\mathbb{C}^*$ -инвариантным. (Заметим так же, что очевидное действие  $\rho \otimes 1$  не делает то что нужно.) Вот почему комплекс  $(\mathcal{D}_{X,\sqrt{\hbar}}^{ch} \widehat{\otimes} Cl^{vert}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*)_{\hbar}, (d_X^{ch})_{(0)})$   $\mathbb{C}^*$ -эквивариантный. Поэтому мы получаем  $\mathbb{C}^*$ -эквивариантную структуру на когомологиях  $\mathcal{H}_{d_X^{ch}}^{\infty/2+\bullet}(\mathcal{D}_{X,\sqrt{\hbar}}^{ch} \widehat{\otimes} Cl^{vert}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*)_{\hbar})$  и на

$$\mathcal{D}_{S,\sqrt{\hbar}}^{ch} \stackrel{\text{def}}{=} p_{\infty*} \mathcal{H}_{d_X^{ch}}^{\infty/2+0}(\mathcal{D}_{X,\sqrt{\hbar}}^{ch} \widehat{\otimes} Cl^{vert}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*)_{\hbar}).$$

Отображение (1.1.5) продолжается до отображения соответствующих асимптотических вертексных алгебр

$$\phi_{\hbar} : V_0^{-h^\vee}(\mathfrak{g})_{\sqrt{\hbar}} \rightarrow \Gamma(J_\infty T^* X, \mathcal{D}_{X,\sqrt{\hbar}}^{ch}).$$

и определяет очевидное отображение комплексов киральной Гамильтоновой редукции

$$V_0^{-h^\vee}(\mathfrak{g})_{\sqrt{\hbar}} \hat{\otimes} Cl^{vert}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*)_h \rightarrow \Gamma(J_\infty T^* X, \mathcal{D}_{X, \sqrt{\hbar}}^{ch} \hat{\otimes} Cl^{vert}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*)_h).$$

Для определения когомологий

$$\mathcal{W}_0^{-h^\vee}(\mathfrak{g}, f)_{\sqrt{\hbar}} \rightarrow H_{d_\chi^{ch}}^{\infty/2+0}(\Gamma(J_\infty T^* X, \mathcal{D}_{X, \sqrt{\hbar}}^{ch} \hat{\otimes} Cl^{vert}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*)_h)),$$

$$\mathcal{W}_0^{-h^\vee}(\mathfrak{g}, f) \rightarrow H_{d_\chi^{ch}}^{\infty/2+0}(\Gamma(J_\infty T^* X, \mathcal{D}_{X, \sqrt{\hbar}}^{ch} \hat{\otimes} Cl^{vert}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*)_h))^{\mathbb{C}^*}.$$

Определение  $\mathcal{D}_{\tilde{S}, \hbar}^{ch}$  как пучка соответствующего предпучку Гамильтоновых киральных редукций влечет отображение

$$H_{d_\chi^{ch}}^{\infty/2+0}(\Gamma(J_\infty T^* X, \mathcal{D}_{X, \sqrt{\hbar}}^{ch} \hat{\otimes} Cl^{vert}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*)_h)) \rightarrow \Gamma(J_\infty \tilde{S}, \mathcal{D}_{\tilde{S}, \sqrt{\hbar}}^{ch}).$$

при композиции с предыдущим получаем

$$\mathcal{W}_0^{-h^\vee}(\mathfrak{g}, f)_{\sqrt{\hbar}} \rightarrow \Gamma(J_\infty \tilde{S}, \mathcal{D}_{\tilde{S}, \sqrt{\hbar}}^{ch}), \quad \mathcal{W}_0^{-h^\vee}(\mathfrak{g}, f) \rightarrow \Gamma(J_\infty \tilde{S}, \mathcal{D}_{\tilde{S}, \sqrt{\hbar}}^{ch})^{\mathbb{C}^*}. \quad (1.1.6)$$

Вот основной результат этого текста

**Теорема 1.** *Отображение (1.1.6) является изоморфизмом.*

### 1.1.2.1 Доказательство.

Рассмотрим естественную композицию проекций  $\pi : J_\infty T^* X \rightarrow T^* X \rightarrow X$  и  $\{U_i\}$ , открытое аффинное покрытие  $X$ . Обозначим за  $\mathfrak{U}$  аффинное покрытие  $\{\pi^{-1}U_i\}$ . Для любого пучка  $\mathcal{A}$  на  $J_\infty X$ , обозначим за  $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{A})$  соответствующий Чеховский комплекс.

Для любого  $V(\mathfrak{m})_h$ -модуля  $M$ , пусть  $C^{\infty/2+\bullet}(\mathfrak{m}, \chi; M)$  обозначает комплекс киральной Гамильтоновой редукции  $(M \hat{\otimes} Cl^{vert}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*)_h, (d_\chi^{ch})_{(0)})$ ; обычный комплекс

$$C^{\infty/2+\bullet}(\mathfrak{m}, \chi; \mathcal{D}_{X, \sqrt{\hbar}}^{ch})$$

будет иметь особенный интерес для нас.

Вот почему мы получаем бикомплекс  $C^\bullet(\mathfrak{U}, C^{\infty/2+\bullet}(\mathfrak{m}, \chi; \mathcal{D}_{X, \sqrt{\hbar}}^{ch}))$ . Обозначим за  $H_{tot}^\bullet(\mathfrak{U}, C^{\infty/2+\bullet}(\mathfrak{m}, \chi; \mathcal{D}_{X, \sqrt{\hbar}}^{ch}))$  его когомологии относительно тотального дифференциала. Обозначим гуперкогомологии как обычно

$$\mathbb{H}^{\infty/2+\bullet}(J_\infty T^* X, C^{\infty/2+\bullet}(\mathfrak{m}, \chi; \mathcal{D}_{X, \sqrt{\hbar}}^{ch})) = \lim_{\mathfrak{U}} H_{tot}^\bullet(\mathfrak{U}, C^{\infty/2+\bullet}(\mathfrak{m}, \chi; \mathcal{D}_{X, \sqrt{\hbar}}^{ch})).$$

**Лемма 1.** *Существуют изоморфизмы*

$$\Gamma(J_\infty \tilde{S}, \mathcal{D}_{\tilde{S}, \sqrt{\hbar}}^{ch}) \xleftarrow{\sim} \mathbb{H}^{\infty/2+0}(J_\infty T^* X, C^{\infty/2+\bullet}(\mathfrak{m}, \chi; \mathcal{D}_{X, \sqrt{\hbar}}^{ch})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_0^{-h^\vee}(\mathfrak{g}, f).$$

доказательство леммы 1. Для каждого  $\mathfrak{U}$ , существуют две спектральные последовательности,  $\{{}'E_r^{pq}\}$  и  $\{E_r^{pq}\}$ , первая начинается с  $(d_X^{ch})_{(0)}$ , вторая с  $d_{\tilde{C}}$ . Обе сходятся к  $H_{tot}^\bullet(\mathfrak{U}, C^{\infty/2+\bullet}(\mathfrak{m}, \chi; \mathcal{D}_{X, \sqrt{\hbar}}^{ch}))$  потому что комплекс конечной длины в Чеховском направлении. Тогда имеем (i)  $'E_1^{pq} = 0$  if  $q < 0$  (мы предполагаем что  $q$  координата в направлении комплекса Гамильтоновой редукции), и (ii)  $'E_2^{00} = \Gamma(J_\infty T^* X, \mathcal{H}_{d_X^{ch}}^{\infty/2+0}(\mathcal{D}_{X, \hbar}^{ch} \hat{\otimes} Cl^{vert}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*)_h))$ . Более того, по определению прямого образа,  $\Gamma(J_\infty T^* X, \mathcal{H}_{d_X^{ch}}^{\infty/2+0}(\mathcal{D}_{X, \hbar}^{ch} \hat{\otimes} Cl^{vert}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*)_h)) = \Gamma(J_\infty \tilde{S}, (p_\infty)_* \mathcal{H}_{d_X^{ch}}^{\infty/2+0}(\mathcal{D}_{X, \hbar}^{ch} \hat{\otimes} Cl^{vert}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*)_h))$ , и потому (ii) становится  $'E_2^{00} = \Gamma(J_\infty \tilde{S}, \mathcal{D}_{\tilde{S}, \hbar}^{ch})$

Предположение (i) влечет, что высшие дифференциалы не трогают  $'E_2^{00}$  и ни какие члены отличные от  $'E_2^{00}$  не вносят вклада в  $\mathbb{H}^{\infty/2+0}(J_\infty T^* X, C^{\infty/2+\bullet}(\mathfrak{m}, \chi; \mathcal{D}_{X, \sqrt{\hbar}}^{ch}))$ , отсюда следуя самый левый изоморфизм леммы.

Теперь рассмотрим  $\{E_r^{pq}\}$ . У нас есть  $E_1^{pq} = C^{\infty/2+q}(\mathfrak{m}, \chi; H^p(J_\infty T^* X, \mathcal{D}_{X, \sqrt{\hbar}}^{ch}))$ . В [13] было доказано, что  $H^0(X, \mathcal{D}_X^{ch}) = V_0^{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ . В нашей ситуации буквально тоже доказательство дает  $H^0(J_\infty T^* X, \mathcal{D}_{X, \sqrt{\hbar}}^{ch}) = V_0^{-h^\vee}(\mathfrak{g})_{\sqrt{\hbar}}$ . Вот почему,  $E_2^{0\bullet} = \mathcal{W}_0^{-h^\vee}(\mathfrak{g}, f)$  находится в когомологической размерности 0. Мы хотим показать, что естественное отображение  $E_2^{0\bullet} \rightarrow \mathbb{H}^{\infty/2+0}(J_\infty T^* X, C^{\infty/2+\bullet}(\mathfrak{m}, \chi; \mathcal{D}_{X, \sqrt{\hbar}}^{ch}))$  изоморфизм. Для этого, нам надо контролировать  $H^p(J_\infty T^* X, \mathcal{D}_{X, \sqrt{\hbar}}^{ch})$ . Похожие когомологии,  $H^p(X, \mathcal{D}_X^{ch})$ , были посчитаны в [14], и нам надо исследовать эффект от введения  $\hbar$ .

Для упрощения обозначение обозначим  $C^\bullet(\mathfrak{U}, C^{\infty/2+\bullet}(\mathfrak{m}, \chi; \mathcal{D}_{X, \sqrt{\hbar}}^{ch}))$  через  $C^\bullet$ . Фильтрация на  $C^{\infty/2+\bullet}(\mathfrak{m}, \chi; \mathcal{D}_{X, \sqrt{\hbar}}^{ch})$  определяет фильтрацию  $\{F_N C^\bullet\}$  и точную последовательность

$$0 \longrightarrow F_N C^\bullet \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow C^\bullet / F_N C^\bullet \longrightarrow 0.$$

Поэтому получаем точную последовательность гиперкогомологий

$$\mathbb{H}^0(F_N C^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^0(C^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^0(C^\bullet / F_N C^\bullet).$$

Каждая из групп гиперкогомологий может быть посчитана через вариацию двух спектральных последовательностей введенных выше для  $C^\bullet$ . Рассмотрим вторую:  $'E_r^{pq}(F_N C^\bullet)$ ,  $'E_r^{pq}(C^\bullet)$ , которая появлялась просто как  $'E_r^{pq}$ , и  $'E_r^{pq}(C^\bullet / F_N C^\bullet)$ . Проекция  $C^\bullet \rightarrow C^\bullet / F_N C^\bullet$  индуцирует набор последовательностей (совместимы с дифференциалом)

$$'E_r^{pq}(F_N C^\bullet) \longrightarrow 'E_r^{pq}(C^\bullet) \longrightarrow 'E_r^{pq}(C^\bullet / F_N C^\bullet).$$

В соответствие с [14],  $H^\bullet(X, \mathcal{D}_X^{ch}) = H^\bullet(\mathfrak{n}, \mathbb{C}) \otimes V_0^{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ . Теперь можно получить аналогию:  $H^\bullet(J_\infty T^* X, \mathcal{D}_{X, \sqrt{\hbar}}^{ch}) = H^\bullet(\mathfrak{n}, \mathbb{C}) \otimes V_0^{-h^\vee}(\mathfrak{g})_{\sqrt{\hbar}}$ , или что эквивалентно,  $'E_1^{pq}(C^\bullet) = C^{\infty/2+q}(\mathfrak{m}, \chi; \oplus V_0^{-h^\vee}(\mathfrak{g})_{\sqrt{\hbar}})$ . Не до конца ясно почему это корректно из за бесконечных рядов  $\hbar$  тут участвующих, но легко видеть правильность обрезанной версии  $C^\bullet / F_N C^\bullet$ :

$$'E_1^{pq}(C^\bullet / F_N C^\bullet) = C^{\infty/2+q}(\mathfrak{m}, \chi; \oplus V_0^{-h^\vee}(\mathfrak{g})_{\sqrt{\hbar}}) / F_N C^{\infty/2+q}(\mathfrak{m}, \chi; \oplus V_0^{-h^\vee}(\mathfrak{g})_{\sqrt{\hbar}}).$$

Для каждого  $N$  спектральная последовательность “ $E_r^{pq}(C^\bullet/F_N C^\bullet)$ ” вырождается: “ $E_2^{pq}(C^\bullet/F_N C^\bullet) = 0$  if  $q \neq 0$ ”. Вот почему

$$\bigoplus_{p \neq 0} “E_\infty^{p,-p}(C^\bullet) \subset \bigcap_N Gr F_N \mathbb{H}^0(C^\bullet).”$$

Но мы уже знаем, что  $\mathbb{H}^0(C^\bullet)$ : по самому левому изоморфизму из леммы 1 доказанной выше,  $\mathbb{H}^0(C^\bullet) = \Gamma(J_\infty \tilde{S}, \mathcal{D}_{\tilde{S}, \sqrt{\hbar}}^{ch})$ ; а значит это подалгебра асимптотических вертексных алгебр, вот почему  $\bigcap_N F_N \mathbb{H}^0(C^\bullet) = 0$ . Поэтому  $\bigoplus_{p \neq 0} “E_\infty^{p,-p}(C^\bullet) = 0$  и  $\mathcal{W}_0^{-h^\vee}(\mathfrak{g}, f) = “E_2^{0\bullet} \rightarrow \mathbb{H}^{\infty/2+0}(J_\infty T^* X, C^{\infty/2+\bullet}(\mathfrak{m}, \chi; \mathcal{D}_{X, \sqrt{\hbar}}^{ch}))$  является по крайней мере сюръекцией. Но  $\mathcal{W}_0^{-h^\vee}(\mathfrak{g}, f)$  есть просто [12] а значит последнее отображение изоморфизм.  $\square$

Ясно, что композиция двух изоморфизмов из леммы 1 (one inverted) в точности (1.1.6). Теорема 1 доказана.  $\square$

**Примечание 1.** Заметим, что

$$\mathbb{C}[J_\infty S] \longrightarrow \Gamma(J_\infty \tilde{S}, \mathcal{O}_{J_\infty \tilde{S}})$$

не изоморфизм, что делает доказательство теоремы 1 еще более зависящим от введение квантовых объектов, таких как  $\mathcal{D}_{\tilde{S}, \sqrt{\hbar}}^{ch}$ .

**Пример 1.**  $\mathcal{W}_3^{(2)}$

Для иллюстрации в этой секции мы явно построим локализацию аффинной  $W$ -алгебры  $\mathcal{W}_3^{(2)}$ .

### 1.1.2.2

Для  $\mathfrak{g} = sl_3$  и  $f = E_{21} \in sl_3$ , аффинная  $W$ -алгебра  $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$  известна как алгебра Бершадского-Полякова  $\mathcal{W}_3^{(2)}$ , смотри [31]. Алгебра Бершадского-Полякова  $\mathcal{W}_3^{(2)}$  на уровне  $k$  есть вертексная алгебра порожденная полями  $J(z)$ ,  $G^\pm(z)$  и  $S(z)$  со следующими OPE's:

$$\begin{aligned} J(z)J(w) &\sim \frac{2k+3}{3(z-w)^2}, & G^\pm(z)G^\pm(w) &\sim 0, \\ J(z)G^\pm(w) &\sim \pm \frac{1}{z-w} G^\pm(w), \\ S(z)S(w) &\sim -\frac{(k+3)(2k+3)(3k+1)}{2(z-w)^4} + \frac{2(k+3)}{(z-w)^2} S(w) + \frac{k+3}{z-w} \partial S(w), \\ S(z)G^\pm(w) &\sim \frac{3(k+3)}{2(z-w)^2} G^\pm(w) + \frac{k+3}{z-w} \partial G^\pm(w), \\ S(z)J(w) &\sim \frac{k+3}{(z-w)^2} J(w) + \frac{k+3}{z-w} \partial J(w), \\ G^+(z)G^-(w) &\sim \frac{(k+1)(2k+3)}{(z-w)^3} + \frac{3(k+1)}{(z-w)^2} J(w) \\ &\quad + \frac{1}{z-w} \left( 3 \circ J(w)^2 \circ + \frac{3(k+1)}{2} \partial J(w) - S(w) \right). \end{aligned}$$

Вертексная алгебра  $\mathcal{W}_3^{(2)}$  была впервые введена М. Бершадским [19] и А. Поляковым [35].

Прямое вычисление показывает, что центр Фейгина-Френкеля  $\mathcal{W}^{-h^\vee}(\mathfrak{g}, f)$  порожден  $S(w)$  и следующими полями

$$S_3(z) = {}^\circ G^-(z)G^+(z)^\circ + {}^\circ S(z)J(z)^\circ - {}^\circ J(z)^3{}^\circ - 3{}^\circ J(z)\partial_z J(z)^\circ - \partial_z^2 J(z).$$

Пусть  $\mathfrak{g} = sl_3$ ,  $f = E_{21} \in sl_3$ . Мы получаем  $sl_2$ -тройку  $\langle f, h, e \rangle$  где  $h = E_{11} - E_{22}$ ,  $e = E_{12}$ . Срез Солодового

$$\mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} f + sl_3^e = \left\{ \begin{pmatrix} \delta & \alpha & \beta \\ 1 & \delta & 0 \\ 0 & \gamma & -2\delta \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} \right\}.$$

Алгебра Ли  $\mathfrak{m}$  может быть выбрана

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u, v \in \mathbb{C} \right\}$$

тем самым соответствующая группа

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u & v \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, u, v \in \mathbb{C} \right\}.$$

Множество уровня отображения моментов,  $(\mu^*)^{-1}(\chi)$ ,  $\chi = (f, \cdot)$ , есть

$$(\mu^*)^{-1}(\chi) = \left\{ \begin{pmatrix} h_1 & x_{12} & x_{13} \\ 1 & h_2 - h_1 & x_{23} \\ 0 & x_{32} & -h_2 \end{pmatrix}, h_{\bullet}, x_{\bullet\bullet} \in \mathbb{C} \right\}.$$

В этом частном случае прямое вычисление доказывает результат Гана-Гинзбурга [25] о том что для каждого элемента  $A \in (\mu^*)^{-1}(\chi)$  существует такой уникальный элемент из  $X \in M$ , что  $XAX^{-1} \in \mathbb{S}$ . Вот почему  $\mathbb{C}[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$  равно  $\mathbb{C}[(\mu^*)^{-1}(\chi)/M]$ , пуассоновому редуцированному многообразию. Похожее вычисление дает явную формулу для  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  как  $M$ -инвариантных функций на  $(\mu^*)^{-1}(\chi)$ . Ответ:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{6}(E_{11} + E_{22} - 2E_{33}) \\ \gamma &= E_{32} \\ \beta &= E_{31} - (E_{11} - E_{33})E_{32}. \end{aligned}$$

(Мы оставляем читателю самому вывести формулу для  $\alpha$  и не будем использовать этот результат.)

Пересечение  $S = \mathbb{S} \cap \mathcal{N}$  задано уравнениями  $P_2(X) = P_3(X) = 0$ , где  $P_i(X) = \text{Tr} X^i$ ,  $X \in \mathbb{S}$ . Быстрое вычисление показывает, что

$$\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[\gamma, \beta, \delta] / \langle 8\delta^3 - \beta\gamma \rangle,$$

что является в свою очередь Клейновской особенностью типа  $A_2$ , частный случай знаменитой теоремы из [22, 37].

Для удобства перескалируем переменные  $h = 2\delta$ ,  $a = \gamma$ ,  $b = \beta$  и получим

$$\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[h, a, b] / \langle h^3 - ab \rangle.$$

Выше приведенные формулы для  $\gamma, \beta, \delta$  случайно дают (не канонически) продолжение эти функций на всю  $sl_3$ , что делает возможным посчитать их пуассонову скобку Кириллова-Константа. При ограничение на  $S$  получается квадратичная скобка

$$\{h, a\} = a, \{h, b\} = -b, \{a, b\} = -3h^2;$$

Это пуассонова редуцированная алгебра.

Докзанный лемма определяет следующую структуру пуассоновой вертексной алгебры на джет-алгебре  $\mathbb{C}[J_\infty S]$ :

$$h_{(0)}a = a, h_{(0)}b = -b, a_{(0)}b = -3h^2, x_{(n)}y = 0 \text{ if } n > 0, x, y = a, b \text{ or } h.$$

Рассмотрим разрешение Шпрингера  $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ . Известно что многообразие Солодового  $\tilde{S}$  совпадает с минимальным разрешением Клейновской особенности  $S$  (смотри [37]). Другая реализация минимального разрешение дается колчанным многообразием, которое изучалось в [30]. В то время как квантование среза Солодового задается конечно  $W$ -алгеброй, квантование колчанного многообразия называется деформированной препроективной алгеброй или иначе рациональной алгеброй Чередника. Более того, известно также что эти два квантования совпадают [36] в случае Клейновской особенности типа  $A$ . Для явной конструкции ACDO на  $\tilde{S}$ , мы используем реализацию минимального разрешения как колчанного многообразия.

Для  $i = 1, 2, 3$ , пусть  $u_i, v_i$  будут неопределенными. Зададим

$$R = \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3] / \langle u_1v_1 = u_2v_2 = u_3v_3 \rangle.$$

Трехмерный тор  $T = \prod_{i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$  действует на  $R$  через  $g \cdot u_i = g_i^{-1} g_{i-1} u_i$ ,  $g \cdot v_i = g_i g_{i-1}^{-1} v_i$  for  $g = (g_j)_{j \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$  и  $i = 1, 2, 3$ . Сами  $u_i$  будут  $T$ -весами  $\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i$  и  $v_i$  будут  $T$ -весами  $\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}$  где  $\{\varepsilon_j\}_{j \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$  есть стандартный базис весовой решетки  $T$ . Зададим  $\theta = 2\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ , вес  $T$ . Пусть  $\tilde{R} = \bigoplus_{n \geq 0} R_{n\theta}^T$  градуированное кольцо, где  $R_{n\theta}^T$  полуинвариантное подпространство соответствующее весу  $n\theta$ . Рассмотрим проективную схему  $\text{Proj} \tilde{R}$  над аффинной схемой  $\text{Spec} R_0^T$ . Легко видеть что  $R_0^T$  порождена  $u_1u_2u_3, v_1v_2v_3$  и  $u_1v_1$  и морфизм  $\mathbb{C}[S] \rightarrow R_0^T$  определенный как  $a \mapsto u_1u_2u_3, b \mapsto v_1v_2v_3$  and  $h \mapsto u_1v_1$  есть изоморфизм алгебр. Вот почему мы имеем  $\text{Spec} R_0^T \simeq S \simeq \mathbb{C}^2 / (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ . Более того, хорошо известно что  $\text{Proj} \tilde{R}$  это его минимальное разрешение, и потому оно изоморфно  $\tilde{S}$ . Отождествим  $\tilde{S}$  с  $\text{Proj} \tilde{R}$  и  $S$  с  $\text{Spec} R_0^T$

Мы можем описать локальную структуру  $\tilde{S}$  градуированной алгебры  $\tilde{R}$ . Во первых это легко проверить что  $\tilde{R}$  порождена элементами  $u_1u_2^2$ ,  $v_2v_3^2$  и  $u_1v_3 \in R_\theta^T$  над  $R_0^T$ . Рассмотрим следующие открытые подмножества  $\tilde{S}$ :

$$U_1 = D_+(v_2v_3^2), \quad U_2 = D_+(u_1v_3), \quad U_3 = D_+(u_1^2u_2).$$

Зададим

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{u_1v_3}{v_2v_3^2}, & x_2 &= \frac{u_1^2u_2}{u_1v_3}, & x_3 &= u_1u_2u_3, \\ \partial_1 &= v_1v_2v_3, & \partial_2 &= \frac{v_2v_3^2}{u_1v_3}, & \partial_3 &= \frac{u_1v_3}{u_1^2u_2}. \end{aligned}$$

Тогда элементы  $x_i$ ,  $\partial_i$  есть локальные сечения  $U_i$ . Ясно что для  $i = 1, 2, 3$ ,  $U_i$  изоморфны  $\mathbb{C}^2$  с координатами  $(x_i, \partial_i)$  и  $\{U_i\}_{i=1,2,3}$  аффинное открытое покрытие  $\tilde{S}$ . Более того, известно что  $(x_i; \partial_i)$  дает симплектические координаты на  $U_i$ ; т.е. симплектическая форма  $\omega$  of  $\tilde{S}$  совпадает с  $dx_i \wedge d\partial_i$  на  $U_i$  с точностью до умножения на скаляры так же ясно, что  $i = 1, 2$ , мы имеем следующее соотношение на  $U_i \cap U_{i+1}$  между локальными координатами:

$$x_i = \partial_{i+1}^{-1}, \quad x_{i+1} = x_i^2 \partial_i, \quad \partial_i = \partial_{i+1}^2 x_{i+1}. \quad (1.1.7)$$

В самом деле, объединение  $U_i \cup U_{i+1}$  изоморфно  $T^*\mathbb{P}^1$  как симплектическое многообразие.

Локализация препроективной алгебры типа  $A$  (или рациональной алгебры Черденника типа  $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ ) было построено в [20]. Квантование локальной структуры согласованной с выше описанным аффинным покрытием изучалось в [32].

Теперь обсудим конструкцию ACDO  $\mathcal{D}_{\tilde{S}, \hbar}^{ch}$  на  $\tilde{S}$  следующим образом. Для начало определим  $\mathcal{D}_{\tilde{S}, \hbar}^{ch}(U_i)$  как  $\beta\gamma$ -систему с образующими  $\{x_i, \hat{\partial}_i\}$  для  $i = 1, 2, 3$ . А именно  $\mathcal{D}_{\tilde{S}, \hbar}^{ch}(U_i)$  это асимптотическая вертексная алгебра которая изоморфна

$$\mathbb{C}((\hbar))[(x_i)_{(-1)}, (\hat{\partial}_i)_{(-1)}, (x_i)_{(-2)}, (\hat{\partial}_i)_{(-2)}, \dots]$$

как векторное пространство с фундаментальным ОРЕ  $\hat{\partial}_i(z)x_i(w) \sim \hbar/(z-w)$ .

Теперь рассмотрим квантованный киральный аналог соотношений (1.1.7). Для  $i = 1, 2$ , мы определим соотношения на  $U_i \cap U_{i+1}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} x_i(z) &= \hat{\partial}_{i+1}(z)^{-1}, \\ x_{i+1}(z) &= \circ x_i(z)^2 \hat{\partial}_i(z) \circ + 2\hbar \partial_z x_i(z), \\ \hat{\partial}_i(z) &= \circ \hat{\partial}_{i+1}(z)^2 x_{i+1}(z) \circ - 2\hbar \partial_z \hat{\partial}_{i+1}(z). \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Заметим что нам нужна аномалия которая такая же для  $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}^{ch}$  в приведенным выше соотношениях. Легко видеть что  $\{\mathcal{D}_{\tilde{S}, \hbar}^{ch}(U_i)\}_{i=1,2,3}$  и соотношения (1.1.8) задают хорошо определенный пучок асимптотических вертексных алгебр  $\mathcal{D}_{\tilde{S}, \hbar}^{ch}$ .

Зададим

$$\begin{aligned} G^+(z) &= -\hbar^{-2} \left\{ \circ x_2(z) \hat{\partial}_2(z)^2 \circ + 2\hbar \partial_z \hat{\partial}_2(z) \right\} (= -\hbar^{-2} \hat{\partial}_1(z)), \\ G^-(z) &= -\hbar^{-1} \left\{ \circ x_2(z)^2 \hat{\partial}_2(z) \circ - 2\hbar \partial_z \hat{\partial}_2(z) \right\} (= -\hbar^{-1} x_3(z)), \\ J(z) &= -\hbar^{-1} \circ x_2(z) \hat{\partial}_2(z) \circ. \end{aligned}$$

Они  $\rho$ -инварианты глобальные сечения  $\mathcal{D}_{S,h}^{ch}$ . Прямое вычисление показывает, что OPEs этих глобальных сечений заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} J(z)J(w) &\sim -\frac{1}{(z-w)^2}, & G^\pm(z)G^\pm(w) &\sim 0, & J(z)G^\pm(w) &\sim \pm \frac{1}{z-w} G^\pm(w), \\ G^+(z)G^-(w) &\sim \frac{6}{(z-w)^3} - \frac{6}{(z-w)^2} J(w) + \frac{1}{(z-w)} \{3 \circ J(w)^2 \circ - 3\partial_w J(w)\}. \end{aligned}$$

Эти OPEs совпадают с (1.1.2.2) на критическом уровне  $k = -h^\vee = -3$ .

Заметим что эти соотношения есть квантования структуры вертексной пуассоновой алгебры (1.1.2.1). Для того чтобы это увидеть можно, например, ввести  $\hat{J} = \hbar J$ ,  $\hat{G}^+ = \hbar^2 G^+$ ,  $\hat{G}^- = \hbar G^-$ , и тогда мы имеем следующее соотношение между этими полями:

$$\circ \hat{J}(z)^3 \circ + \circ \hat{G}^+(z) \hat{G}^-(z) \circ = \frac{3}{2} \hbar \partial_z \circ \hat{J}(z)^2 \circ - \hbar^2 \partial_z \hat{J}(z).$$

Эти соотношения задают квантование определяющих соотношений для вертексной пуассоновой алгебры  $\mathbb{C}[J_\infty S]$  через отождествление  $h = \hat{J}$ ,  $a = \hat{G}^+$ ,  $b = -\hat{G}^-$ .



## 1.2 Обобщения пуассоновых структур, связанных с рациональной моделью Годена

### 1.2.1 Введение

Данная заметка возникла из следующего наблюдения. Скобка Пуассона, определенная в рациональной модели Годена (см. [39, 45]), очень похожа на скобку Пуассона, получающуюся из модифицированной алгебры уравнения отражений (RE). Чтобы сделать сходство более прозрачным, мы переписываем скобку Пуассона (ниже ее будем называть скобкой Годеновского типа) в *локальной* форме<sup>1</sup>. В этой записи рассматриваемая скобка объединяет семейство соотношений между производными всевозможных порядков от матрицы  $L(u)$ . В эти соотношения входит стандартная перестановка  $P$ . Основываясь на упомянутой выше аналогии, мы вводим в рассмотрение твистованные пуассоновы алгебры, пуассонова структура которых задается аналогичными формулами, но с заменой перестановки  $P$  на твист  $R$ .

Термин *твист* употребляется для обозначения решения  $R : V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$  квантового уравнения Янга-Бакстера

$$R_{12}R_{23}R_{12} = R_{23}R_{12}R_{23},$$

где  $V$  есть конечномерное линейное пространство над основным полем  $\mathbb{C}$ ,  $R_{12} = R \otimes I$ ,  $R_{23} = I \otimes R$ , и символ  $I$  обозначает единичный оператор.

Мы будем называть оператор  $R$  *симметрией Гекке*, если он удовлетворяет дополнительному условию

$$(R - qI)(R + q^{-1}I) = 0, \quad q \in \mathbb{C}$$

при  $q \neq 1$  (Геккевский случай). Если параметр  $q$  равен единице, оператор  $R$  будет называться *инволютивной симметрией* (инволютивный случай).

С любым твистом  $R$  можно связать алгебру уравнения отражений (RE), генераторами которой служат матричные элементы матрицы  $L = \|l_i^j\|_{1 \leq i, j \leq n}$  (этот объект будет называться матрицей генераторов алгебры), удовлетворяющие системе перестановочных соотношений

$$R L_1 R L_1 - L_1 R L_1 R = \hbar(R L_1 - L_1 R). \quad (1.2.1)$$

Точнее говоря, термин “алгебра уравнения отражений” будет применяться к алгебре (1.2.1) в случае  $\hbar = 0$ . Если же  $\hbar \neq 0$ , соответствующая алгебра будет называться модифицированной алгеброй уравнения отражений.

---

<sup>1</sup>Это значит, что мы рассматриваем ограничение скобки  $\{f(u), g(v)\}$  на диагональ  $u = v$ , то есть, на одинаковые значения токовых параметров. Аналогичная процедура применяется для производных от функций  $f$  и  $g$  (см. (1.2.5)).

В терминах алгебры RE мы строим *твистованный аналог*<sup>1</sup> пуассоновой структуры, входящей в модель Годена и предъявляем семейство элементов в инволюции в духе классической теории. Важную роль в наших рассуждениях играет так называемый  $R$ -след  $\text{Tr}^R L$ , свойства которого во многом аналогичны свойствам обычного (супер)следа. Гарантией существования  $R$ -следа является косообратимость оператора  $R$  (подробности изложены в разделе 4).

Кроме того, мы вводим другое обобщение модели Годена, которое получается при замене производной первого порядка по токовому параметру  $v$ , входящему в соответствующую скобку Пуассона, на производные высших порядков (раздел 3). Если эти производные второго порядка, мы приводим не только локальную, но и глобальную форму записи Пуассоновой структуры, аналогично стандартной Годеновской скобке Пуассона. Также мы выписываем коммутативное семейство элементов пуассоновой алгебры, порождаемой матричными элементами матрицы  $L(v)$  и ее производными по  $v$ .

В последнем разделе заметки рассматривается структура, сочетающая оба типа обобщений, а именно, твистованная Пуассонова структура со старшими производными в ее локальной форме записи. Это рассмотрение предваряется исследованием *твистованных пуассоновых структур*, связанных с симметриями без параметров (раздел 4). Основной целью раздела является сравнение пуассоновых структур, порождаемых инволютивными и Геккевскими симметриями. Обнаруживается, в частности, что Геккевские структуры существенно сложнее инволютивных и, как следствие, универсальное определение твистованных пуассоновых структур в некотором смысле невозможно. Результаты этого раздела позволяют явно реализовать пуассоновы структуры из разделов 2 и 3 на основе косообратимых инволютивных симметрий. В заключении работы обсуждается возможное обобщение всех конструкций на Геккевский случай.

### 1.2.2 Пуассоновы алгебры, связанные с моделью Годена

В данном разделе мы рассматриваем пуассоновы алгебры, связанные с рациональной моделью Годена. Пусть матричные элементы  $l_i^j(v)$   $n \times n$  матрицы

$$L(v) = \|l_i^j(v)\|_{1 \leq i, j \leq n}$$

являются мероморфными функциями комплексной переменной  $v \in \mathbb{C}$ . Всюду в дальнейшем полагается, что нижний индекс  $i$  (соответственно, верхний индекс  $j$ ) нумерует строки (соответственно, столбцы) матрицы, составленной из  $l_i^j(v)$ .

---

<sup>1</sup>Термин “твистованный” используется в том же смысле, что и в работе [42]. Например, широко известная РТТ алгебра не является твистованной в согласии с определением этой работы.

Определим скобку Пуассона<sup>1</sup> следующим образом

$$\{L_1(u), L_2(v)\} = \left[ L_1(u) + L_2(v), \frac{P}{u-v} \right], \quad (1.2.2)$$

где  $L_1 = L \otimes I$ ,  $L_2 = I \otimes L$ , а  $P$  есть перестановка в  $V^{\otimes 2}$ . Символ  $\{A, B\}$ , где  $A = \|A_i^j\|$  и  $B = \|B_i^j\|$  являются двумя квадратными матрицами одного размера, обозначает квадратную матрицу того же размера, что  $A$  и  $B$ , с матричными элементами  $\sum_k \{A_i^k, B_k^j\}$ . Учитывая, что  $L_2 = P L_1 P$ , мы можем представить правую часть равенства (1.2.2) в следующем виде:

$$\left[ \frac{L_1(u) - L_1(v)}{u-v}, P \right].$$

Переписывая соотношение (1.2.2) в терминах матричных элементов матрицы  $L(u)$ , получаем такую формулу:

$$\{l_i^j(u), l_k^l(v)\} = \frac{(l_i^l(u) - l_i^l(v))\delta_k^j}{u-v} - \frac{(l_k^j(u) - l_k^j(v))\delta_i^l}{u-v}.$$

Выполнение тождества Якоби

$$\{\{L_1(u), L_2(v)\}, L_3(w)\} + \{\{L_3(w), L_1(u)\}, L_2(v)\} + \{\{L_2(v), L_3(w)\}, L_1(u)\} = 0$$

обеспечивается тем фактом, что элемент  $r(u) = \frac{P}{u}$  представляет собой классическую  $r$ -матрицу, то есть, удовлетворяет классическому уравнению Янга-Бакстера

$$[r_{12}(u), r_{23}(v)] + [r_{12}(u), r_{13}(u+v)] + [r_{13}(u+v), r_{23}(v)] = 0. \quad (1.2.3)$$

Если  $f$  (соответственно  $g$ ) является полиномом от генераторов  $l_i^j(u)$  (соответственно  $l_i^j(v)$ ), скобка  $\{f, g\}$  может быть вычислена с помощью правила Лейбница.

Положим теперь  $u = v + h$  и разложим матрицу  $L(v + h)$  в ряд Тейлора по параметру  $h$ :

$$L(v + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^{(k)}(v) h^k}{k!}, \quad (1.2.4)$$

где  $L^{(k)}(v) = \frac{d^k}{dv^k} L(v)$  обозначает производную  $k$ -го порядка от матрицы  $L(v)$ . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $h$ , получаем следующий результат:

$$\{L_1^{(k)}(v), L_2(v)\} = \frac{\left[ L_1^{(k+1)}(v), P \right]}{k+1}.$$

Дифференцирование этого равенства по  $v$  с использованием правила Лейбница для производной  $\frac{d}{dv}$

$$\frac{d}{dv} \{L_1^{(k)}(v), L_2(v)\} = \{L_1^{(k+1)}(v), L_2(v)\} + \{L_1^{(k)}(v), L_2^{(1)}(v)\},$$

---

<sup>1</sup>Это определение отличается знаком от общепринятого. Данный выбор мотивируется нашим желанием иметь более тесное соответствие с определяющими соотношениями (1.2.1) модифицированной алгебры уравнения отражений.

приводит к соотношению

$$\{L_1^{(k)}(v), L_2^{(l)}(v)\} = \frac{[L_1^{(k+l+1)}(v), P]}{(k+1)(k+2)}.$$

Рекуррентно продолжая эту процедуру, мы приходим к следующему равенству:

$$\{L_1^{(k)}(v), L_2^{(l)}(v)\} = [L_1^{(k+l+1)}(v), P] \alpha_1(k, l), \quad (1.2.5)$$

где

$$\alpha_1(k, l) = \frac{k! l!}{(k+l+1)!}, \quad k, l = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.6)$$

и, как обычно, принимается, что  $L^{(0)}(v) = L(v)$ .

Заметим, что коэффициенты  $\alpha_1(k, l)$ , входящие в эту формулу, являются симметрическими функциями значений индексов:  $\alpha_1(k, l) = \alpha_1(l, k)$ . Более того, элементы

$$\beta_1(k, l, m) = \alpha_1(k, l) \alpha_1(k+l+1, m) = \frac{k! l! m!}{(k+l+m+2)!}$$

инвариантны относительно циклических перестановок индексов  $k, l, m$ . Это свойство гарантирует выполнение тождества Якоби для скобки, записанной в локальной форме (1.2.5).

Таким образом, у нас есть семейство соотношений (1.2.5), нумеруемое парой натуральных чисел  $(k, l)$ . Это семейство с  $\alpha_1(k, l)$  определенным в (1.2.6) эквивалентно (1.2.2). Обратный переход к виду (1.2.2) также может быть совершен с помощью суммирования ряда Тейлора (1.2.4).

Локальная форма пуассоновой структуры (1.2.5) определена на алгебре  $\mathcal{A}$  полиномов от матричных элементов матрицы  $L(v)$  и всех их производных. Векторное пространство такой алгебры градуировано: компонента градуировки  $k$  представляет собой линейную оболочку элементов  $\frac{d^k}{dv^k} l_i^j(v)$ . Эта градуировка может быть естественным образом расширена на всю алгебру  $\mathcal{A}$ , если положить по определению  $\deg(ab) = \deg(a) + \deg(b)$ . Таким образом, алгебра  $\mathcal{A}$  становится градуированной. Скобка Пуассона (1.2.5) отображает компоненты степени (градуировки)  $k$  и  $l$  в компоненту степени  $k+l+1$ .

**Примечание 2.** Скобка Пуассона

$$\{L_1(v), L_2(v)\} = [L_1(v), P], \quad (1.2.7)$$

которая совпадает с (1.2.5) при  $k=l=0$  но без производной в правой части, ни что иное, как скобка Пуассона-Ли, отвечающая токовой алгебре Ли  $\widehat{\mathfrak{gl}(n)}$ . В самом деле, равенство (1.2.7) есть матричная форма следующего семейства соотношений:

$$\{l_i^j(v), l_k^l(v)\} = l_i^l(v) \delta_k^j - l_k^j(v) \delta_i^l. \quad (1.2.8)$$

Тем не менее, не существует какого-либо естественного расширения этой скобки на старшие производные  $\{L_1^{(k)}(v), L_2^{(l)}(v)\}$ . Например, такое очевидное, на первый взгляд,

расширение как

$$\{L_1^{(k)}(v), L_2^{(l)}(v)\} = [L_1^{(k+l)}(v), P],$$

не совместимо с процедурой дифференцирования соотношения (1.2.7). Тем не менее, если мы не будем принимать во внимание эту несогласованность и будем считать индексы  $k$  и  $l$  просто независимыми метками, структура алгебры Пуассона (и соответствующей алгебры Ли) будет хорошо определена.

Заметим, что алгебра Ли, задаваемая соотношениями (1.2.5), шире, чем алгебра токов  $\widehat{\mathfrak{gl}(n)}$ . Действительно, эта алгебра определяется градуированным векторным пространством, тогда как пространство токовой алгебры имеет только одну компоненту степени 0. Поскольку последняя алгебра допускает центральное расширение посредством коцикла, что превращает ее в алгебру Швингера, было бы интересно найти аналогичный коцикл для алгебры (1.2.5) (по крайней мере, для ее компоненты степени 0). Однако, такой коцикл, по-видимому, не существует. По нашему мнению, проблема построения квантового аналога алгебры Швингера по образцу работы [44] внутренне противоречива.

Рассмотрим теперь специализацию матрицы  $L(u)$  следующего вида

$$L(v) = C + \sum_{p=1}^N A(p) f_p(v), \quad (1.2.9)$$

где  $A(p)$ ,  $p = 1, 2, \dots, N$  есть матрицы с элементами  $a_i^j(p)$ , удовлетворяющими соотношениям (1.2.8) (где нужно опустить параметр  $v$ ) для любых  $p$ , и, кроме того, такими, что

$$\{a_i^j(p), a_k^l(q)\} = 0, \quad \forall i, j, k, l \quad p \neq q.$$

Здесь  $C$  есть некоторая постоянная матрица и, как следствие, ее матричные элементы имеют нулевые скобки Пуассона с матричными элементами  $A(p)$  для всех  $p$ .

Другими словами, мы имеем скобку Пуассона  $\{, \}_{\mathfrak{G}}$ , где

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{gl}(n) \oplus \dots \oplus \mathfrak{gl}(n) \oplus \mathfrak{gl}(n)_0, \quad (1.2.10)$$

есть прямая сумма алгебр. Всюду в дальнейшем символом  $\{, \}_{\mathfrak{g}}$  мы будем обозначать линейную скобку Пуассона-Ли, отвечающую алгебре Ли  $\mathfrak{g}$ , а символ  $\mathfrak{g}_{\hbar}$  будет обозначать алгебру Ли, которая отличается от алгебры  $\mathfrak{g}$  множителем  $\hbar$  введенным в правую часть скобок Ли алгебры  $\mathfrak{g}$ . Например, алгебра Ли  $\mathfrak{gl}(n)_0$  имеет тривиальные скобки.

Теперь необходимо найти функциональные множители  $f_p(v)$ . Более точно, мы хотим, чтобы анзац (1.2.9) удовлетворял определяющим соотношениям (1.2.2) или, что то же самое, семейству соотношений (1.2.5). Легко видеть, что эти соотношения эквивалентны следующим дифференциальным уравнениям на множители  $f_p(v)$

$$f_p(v)^2 = \frac{d}{dv} f_p(v), \quad \forall p = 1, 2, \dots, N.$$

Общее решение уравнений имеет вид  $f_p(v) = \frac{1}{v_0 - v}$  с произвольным фиксированным значением  $v_0$ . Это решение отличается знаком от множителей обычной модели Годена (см. комментариев в подстрочном замечании 3.)

Следовательно, матрица (1.2.9) с функциональными множителями  $f_p(v) = \frac{1}{v_p - v}$ , где  $v_p, p = 1, 2, \dots$ , есть произвольные фиксированные комплексные числа (полюса), удовлетворяет соотношениям (1.2.5) при условии, что  $\alpha_1$  определяется равенством (1.2.6). Или, что эквивалентно, матрица (1.2.9) удовлетворяет соотношению (1.2.2).

Основное свойство приведенной выше пуассоновой структуры состоит в том, что

$$\{\text{Tr}(L(u))^k, \text{Tr}(L(v))^l\} = 0, \quad \forall k, l = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.11)$$

Пользуясь этим свойством для  $k = l = 2$  и выбирая анзац (1.2.9), можно построить коммутативное семейство гамильтонианов модели Годена. Для этого необходимо взять элементы

$$\text{Tr}L(v)^2 = \sum_{p=0}^N \frac{\text{Tr}A(p)^2}{(v_p - v)^2} + \sum_p \frac{H(p)}{v_p - v},$$

которые и приводят к квадратичным гамильтонианам

$$H(p) = \text{Tr}(CA(p)) + 2 \sum_{j \neq p} \frac{\text{Tr}A(p)A(j)}{v_j - v_p}, \quad 1 \leq p \leq N,$$

коммутирующим друг с другом  $[H(i), H(j)] = 0$  для всех  $1 \leq i, j \leq N$ . Детали этой конструкции изложены в работе ([38, 45]).

### 1.2.3 Обобщение пуассоновых алгебр Годеновского типа на старшие производные по $v$

В данном разделе мы получим некоторые пуассоновы структуры, обобщающие рассмотренные в предыдущей секции. Зафиксируем целое число  $r \geq 2$  и, беря соотношения (1.2.5) в качестве образца, определим скобку Пуассона следующим равенством:

$$\{L_1^{(k)}(v), L_2^{(l)}(v)\} = \left[ L_1^{(k+l+r)}(v), P \right] \alpha_r(k, l), \quad (1.2.12)$$

где

$$\alpha_r(k, l) = \frac{(k+r-1)!(l+r-1)!}{(k+l+2r-1)!(r-1)!}, \quad k, l = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.13)$$

Выполнение тождества Якоби для такой скобки проверяется непосредственными вычислениями. При этом нужно использовать тот факт, что слагаемые

$$\beta_r(k, l, m) = \alpha_r(k, l)\alpha_r(k+l+r, m) = \frac{(k+r-1)!(l+r-1)!(m+r-1)!}{(k+l+m+2r-1)!(r-1)!^2}$$

инвариантны относительно циклической перестановки индексов  $k, l, m$ .

Наш выбор коэффициентов (1.2.13) мотивирован тем, что в этом случае матрица  $L(v)$  допускает анзац вида (1.2.9), но с другими функциональными множителями

$f_p(v) = \frac{1}{(v_p - v)^r}$ . При этом формула (1.2.12) остается согласованной с процедурой дифференцирования по параметру  $v$ .

Введем для скобки Пуассона (1.2.12) обозначение  $\{, \}_r$ . Теперь скобка (1.2.5) может рассматриваться как частный случай (1.2.12) при  $r = 1$ .

Обратимся теперь к следующей проблеме: можно ли представить скобку Пуассона  $\{, \}_r$  в виде, аналогичном скобке (1.2.2)? Другими словами, мы хотим найти скобку  $\{L_1(u), L_2(v)\}$ , которая была бы *глобальной* формой соотношений (1.2.12) (то есть, аналогом стандартной формы скобки (1.2.2)). Мы приведем ответ для случая  $r = 2$ .

**Утверждение 1.** Скобка  $\{, \}_2$  может быть представлена в следующем виде:

$$\{L_1(u), L_2(v)\}_2 = \left[ L_1(u) + L_1(v), \frac{P}{(u-v)^2} \right] - 2 \left[ \int_v^u L_1(t) dt, \frac{P}{(u-v)^3} \right]. \quad (1.2.14)$$

**Доказательство.** Для проверки данного утверждения, положим  $u = v + h$  и разложим матрицы  $L(v+h)$  в ряд Тейлора по параметру  $h$ , воспользовавшись соотношениями (1.2.12).

В результате получим следующее:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \{L_1^{(k)}(v), L_2(v)\} \frac{h^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} [L_1^{(k+2)}(v), P] \alpha(k, 0) \frac{h^k}{k!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [L_1^{(k+2)}(v), P] \frac{(k+1)h^k}{(k+3)!} = \sum_{k=0}^{\infty} [L_1^{(k+2)}(v), P] h^k \left( \frac{1}{(k+2)!} - \frac{2}{(k+3)!} \right) = \\ &= \left[ \frac{L_1(v+h) - L_1(v) - L_1^{(1)}(v)h}{h^2}, P \right] - 2 \left[ \frac{F_1(v+h) - F_1(v) - F_1^{(1)}(v)h - F_1^{(2)}(v)h^2 2^{-1}}{h^3}, P \right], \end{aligned}$$

где  $F(v)$  есть первообразная  $L(v)$ . Нетрудно видеть, что последнее выражение эквивалентно правой части соотношений (1.2.14).

**Примечание 3.** Отметим, что формула (1.2.14) отличается от (1.2.2) — в ней не содержится никакой классической  $r$ -матрицы. Поэтому прямая проверка свойств скобки Пуассона (в частности, тождества Якоби) становится трудной. Однако для локальной формы (1.2.12) этой скобки, проверка всех свойств проводится без затруднений.

Нашей следующей целью является построение семейства элементов в инволюции в пуассоновой алгебре, определяемой скобкой  $\{, \}_r$ . Прежде всего, следует уточнить, что аналогично конструкции предыдущей секции, эта скобка хорошо определена на коммутативной алгебре  $\mathcal{A}$ , порожденной матричными элементами матрицы  $L(v)$  и их производными.

**Утверждение 2.** В пуассоновой алгебре справедливы следующие перестановочные соотношения:

$$\{\text{Tr}(L(v))^k, \text{Tr}(L(v))^l\}_r = 0, \quad \forall k, l.$$

**Доказательство.** Обратим внимание, что скобки Пуассона  $\{, \}_r$  имеют следующую общую форму:

$$\{L_1(v), L_2(v)\}_r = [C_1(v), P], \quad (1.2.15)$$

где матрица  $C(v)$  с точностью до множителя равна  $L^{(r)}(v)$  и, следовательно, ее матричные элементы принадлежат алгебре  $\mathcal{A}$ .

Применяя правило Лейбница к (1.2.15) мы получим такой результат (ниже мы опускаем токовый параметр  $v$  и индекс  $r$ )

$$\{(L_1)^k, (L_2)^l\} = \sum_{i,j} (L_1)^i (L_2)^j (C_1 P - P C_1) (L_1)^{k-i-1} (L_2)^{m-j-1}. \quad (1.2.16)$$

Далее всюду в этом разделе мы полагаем, что все суммы берутся по интервалам индексов суммирования  $0 \leq i \leq k-1$ ,  $0 \leq j \leq l-1$ .

Раскрывая средние скобки в (1.2.16), мы преобразуем первое слагаемое к виду

$$\sum (L_1)^i (L_2)^j C_1 P (L_1)^{k-i-1} (L_2)^{m-j-1} = \sum (L_1)^i C_1 P (L_1)^j (L_1)^{k-i-1} (L_2)^{m-j-1}. \quad (1.2.17)$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $(L_2)^j P = P (L_1)^j$ , а также тем, что матричные элементы матриц  $(L_2)^j$  и  $C_1$  коммутируют друг с другом. Поэтому можно применить утверждение следующей леммы.

**Лемма 2.** Пусть две квадратные матрицы  $A$  и  $B$  одинакового размера имеют коммутирующие матричные элементы. Тогда  $A_1 B_2 = B_2 A_1$  и  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ .

В силу тех же самых причин мы можем представить правую часть формулы (1.2.17) в виде

$$\sum (L_1)^i C_1 (L_1)^{m-j-1} P (L_1)^j (L_1)^{k-i-1}. \quad (1.2.18)$$

Второе слагаемое правой части формулы (1.2.16) преобразуется аналогичным образом

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} (L_1)^i (L_2)^j P C_1 (L_1)^{k-i-1} (L_2)^{m-j-1} &= \sum_{i,j} (L_1)^i P (L_1)^j C_1 (L_1)^{k-i-1} (L_2)^{m-j-1} = \\ &= \sum_{i,j} (L_1)^i (L_1)^{m-j-1} P (L_1)^j C_1 (L_1)^{k-i-1}. \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

Вычислим теперь след по первому и второму пространствам от обеих частей соотношения (1.2.16). Слева мы получим

$$\text{Tr}_{12} \{(L_1(v))^k, (L_2(v))^l\} = \{\text{Tr}_1 (L_1(v))^k, \text{Tr}_2 (L_2(v))^l\} = \{\text{Tr} (L(v))^k, \text{Tr} (L(v))^l\}.$$

След от правой части, с использованием (1.2.18) и (1.2.19) приводит к такому результату

$$\text{Tr}_{12} \sum \left( (L_1)^i C_1 (L_1)^{m-j-1} P (L_1)^j (L_1)^{k-i-1} - (L_1)^i (L_1)^{m-j-1} P (L_1)^j C_1 (L_1)^{k-i-1} \right).$$

Принимая во внимание, что  $\text{Tr}_2 P = I$ , эту формулу можно преобразовать к виду

$$\text{Tr} \sum \left( (L_1)^i C_1 (L_1)^{m-j-1} (L_1)^j (L_1)^{k-i-1} - (L_1)^i (L_1)^{m-j-1} (L_1)^j C_1 (L_1)^{k-i-1} \right). \quad (1.2.20)$$

И, наконец, применяя свойство следа из вышеприведенной леммы, мы получаем, что выражение (1.2.20) зануляется. Это завершает доказательство утверждения.



**Примечание 4.** На первый взгляд кажется, что в нашей схеме рассуждений более сильное тождество (1.2.11) не имеет места. Однако, можно показать (пользуясь методами, аналогичными вышеизложенным), что для любого натурального числа  $m \geq 1$  выполняется следующее перестановочное соотношение

$$\{\mathrm{Tr}(L^{(m)}(v))^k, \mathrm{Tr}(L^{(m)}(v))^l\} = 0, \quad \forall k, l, m = 1, 2, \dots$$

В рамках исходной модели Годена путем  $m$ -кратного дифференцирования по  $u$  (соответственно,  $n$ -кратного дифференцирования по  $v$ ) соотношения (1.2.11) и последующей фиксации  $u = v$ , можно получить более широкое семейство элементов в инволюции, вычисленных при одном и том же значении токового параметра.

#### 1.2.4 Твистованные структуры: сравнение инволютивного и Геккевского случаев

В данном разделе проводится сравнение некоторых структур, связанных с инволютивными и Геккевскими симметриями. Прежде всего, напомним некоторые факты о твистах и симметриях (подробное изложение можно найти в работе [41]).

Рассмотрим косообратимый твист  $R : V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$ , где  $V$  есть конечномерное линейное пространство  $\dim V = n$ . Твист  $R : V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$  называется *косообратимым* если существует оператор  $\Psi : V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$ , такой, что выполнено следующее равенство:

$$\mathrm{Tr}_2 R_{12} \Psi_{23} = \mathrm{Tr}_2 \Psi_{12} R_{23} = P_{13}.$$

Для каждого косообратимого твиста  $R : V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$  можно определить пару операторов  $B, C : V \rightarrow V$ :

$$B = \mathrm{Tr}_1 \Psi, \quad C = \mathrm{Tr}_2 \Psi. \quad (1.2.21)$$

Эти операторы участвуют в построении твистованных аналогов спаривания и следа. Приведем соответствующие определения.

Пусть  $V^*$  является дуальным пространством к  $V$ . Если  $R$  — косообратимый твист, то существует его единственное расширение до твиста

$$V^{\otimes 2} \xrightarrow{R} V^{\otimes 2}, \quad V \otimes V^* \xrightarrow{R} V^* \otimes V, \quad V^* \otimes V \xrightarrow{R} V \otimes V^*, \quad (V^*)^{\otimes 2} \xrightarrow{R} (V^*)^{\otimes 2}, \quad (1.2.22)$$

для которого спаривание

$$\langle , \rangle : V \otimes V^* \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle x_i, x^j \rangle = \delta_i^j \quad (1.2.23)$$

является  $R$ -инвариантным. Здесь  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$  и  $\{x^j\}_{1 \leq j \leq n}$  есть взаимно дуальные базисы в  $V$  и  $V^*$  соответственно<sup>1</sup>.

По определению,  $R$ -инвариантность спаривания означает выполнение следующих свойств:

$$R\langle , \rangle_{12} = \langle , \rangle_{23} R_{12} R_{23} \quad V \otimes V^* \otimes U,$$

<sup>1</sup>Базис  $\{x^j\}$ , удовлетворяющий соотношению (1.2.23) иногда называют *правым дуальным*.

$$R\langle , \rangle_{23} = \langle , \rangle_{12} R_{23} R_{12} \quad U \otimes V \otimes V^*$$

где  $U = V$  или  $U = V^*$ , и, кроме того, считается, что оператор  $R$  действует на пространствах  $U \otimes \mathbb{C}$  и  $\mathbb{C} \otimes U$  как обычная перестановка. В этом же смысле можно говорить об  $R$ -инвариантности других операций.

Если дан оператор  $B$  (1.2.21), мы определяем спаривание  $V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{C}$  (где элементы  $V^*$  расположены слева от элементов  $V$ ) таким соотношением:

$$\langle x^j, x_i \rangle_B = B_i^j,$$

где  $B = \|B_i^j\|$  есть  $n \times n$  матрица оператора  $B$  в базисе  $\{x_i\}$  пространства  $V$ . Спаривание  $\langle , \rangle_B$  является  $R$ -инвариантным. Отметим, что оператор  $B$  является обратимым (см. [41]).

Оператор  $C$  используется в конструкции  $R$ -следа  $\text{Tr}^R A$ , где  $A$  есть произвольная  $n \times n$  матрица с матричными элементами, принадлежащими алгебре  $\mathcal{A}$ . Согласно определению

$$\text{Tr}^R A = \text{Tr}(C \cdot A),$$

где  $C = \|C_i^j\|$  есть  $n \times n$  матрица оператора  $C$  в базисе  $\{x_i\}$ , а символ  $\text{Tr}$  означает взятие обычного следа.

Введем в пространстве  $W = V \otimes V^*$  следующий оператор

$$R_W : W^{\otimes 2} \rightarrow W^{\otimes 2}, \quad R_W = R_{23} R_{12} R_{34} R_{23},$$

где  $R$  есть некоторый твист (1.2.22). Нетрудно видеть, что этот оператор также представляет собой твист. Однако, если исходный твист  $R$  является симметрией Гекке, то оператор  $R_W$  уже не будет ни симметрией Гекке, ни инволютивной симметрией. Если же твист  $R$  — инволютивная симметрия, то это свойство сохранится и для оператора  $R_W$ .

Пусть  $L = \|l_i^j\|_{1 \leq i, j \leq n}$  есть матрица генераторов алгебры уравнения отражений без токового параметра. Пространство  $W$  может быть отождествлено с линейной оболочкой  $\text{span}(l_i^j)$  матричных элементов  $L$  посредством следующего отображения:

$$W \rightarrow \text{span}(l_i^j) : \quad x_i \otimes x^j \mapsto l_i^j. \quad (1.2.24)$$

Таким образом, построенный выше твист  $R_W$  может быть продолжен на пространство  $(\text{span}(l_i^j))^{\otimes 2}$ .

Такое отождествление и спаривание  $\langle , \rangle_B$  дают возможность ввести  $R$ -инвариантное произведение в пространстве  $\text{span}(l_i^j)$ . На базисных элементах это произведение определяется следующим правилом:

$$l_i^j \circ_B l_k^l \stackrel{\text{def}}{=} x_i \otimes \langle x^j, x_k \rangle_B \otimes x^l = x_i \otimes x^l B_k^j = l_i^l B_k^j.$$

Кроме того, вводя  $R$ -инвариантное действие  $l_i^j : V \rightarrow V$

$$l_i^j(x_k) \stackrel{\text{def}}{=} x_i \otimes \langle x^j, x_k \rangle_B = B_k^j x_i,$$

мы отождествляем пространство  $\text{span}(l_i^j)$  с алгеброй  $\text{End}(V)$ .

Определим теперь спаривание  $(\text{span}(l_i^j))^{\otimes 2} \rightarrow \mathbb{C}$  с помощью композиции двух отображений: вышеприведенного произведение  $\circ_B$  и спаривания (1.2.23)

$$\langle l_i^j, l_k^l \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle l_i^j \circ_B l_k^l \rangle = \langle x_i, x^l \rangle B_k^j = \delta_i^l B_k^j.$$

Это спаривание будем обозначать тем же символом  $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$  и оно также является  $R$ -инвариантным.

Далее, обсудим проблему введения твистованного аналога симметрической алгебры  $\text{Sym}(\mathfrak{gl}(n))$ . На первый взгляд, кажется естественным следующее определение твистованного аналога симметрической алгебры пространства  $W$ :

$$T(W)/\langle \text{Im}(I - R_W) \rangle, \quad (1.2.25)$$

где  $T(W)$  есть свободная тензорная алгебра пространства  $W$  и  $\langle I \rangle$  обозначает двусторонний идеал, порожденный подмножеством  $I \subset T(W)$ .

Однако такая алгебра не обладает хорошим *деформационным свойством*. Это означает, что размерности однородных компонент этой алгебры отличаются от классических размерностей  $\dim \text{Sym}^k(\mathfrak{gl}(n))$ , в случае, когда твист  $R$  является симметрией Гекке, представляющей собой деформацию обычной перестановки (то есть, рассматриваемая симметрия Гекке  $R = R(q)$  зависит от параметра  $q$  и превращается в оператор перестановки  $P$  в пределе  $q = 1$ ).

В нашем подходе роль “твистованной симметрической алгебры” будет играть немодифицированная алгебра уравнения отражений (1.2.1) ( $\hbar = 0$ ). (Здесь мы пользуемся введенным выше отождествлением (1.2.24).) В отличие от алгебры (1.2.25), алгебра уравнения отражений обладает хорошим деформационным свойством: при значениях параметра  $q$  в общем положении размерности ее однородных компонент оказываются классическими. Что касается модифицированной алгебры уравнения отражений (1.2.1) ( $\hbar \neq 0$ ), то она трактуется как твистованный аналог обертывающей алгебры  $U(\mathfrak{gl}(n)_\hbar)$ . Эта трактовка мотивирована тем фактом, что если симметрия Гекке  $R$  является деформацией обычной перестановки, то в пределе  $q \rightarrow 1$  соответствующая модифицированная алгебра уравнения отражений переходит в универсальную обертывающую алгебру  $U(\mathfrak{gl}(n)_\hbar)$ . Помимо этого, имеются и другие свойства, аналогичные свойствам алгебры  $U(\mathfrak{gl}(n)_\hbar)$  (см. [41]).

Заметим, что если  $R$  является симметрией Гекке, то немодифицированная алгебра уравнения отражений ( $\hbar = 0$ ) изоморфна соответствующей модифицированной алгебре ( $\hbar \neq 0$ ) при всех  $q^2 \neq 1$ . Данный изоморфизм устанавливается следующим отображением:

$$L \mapsto \hbar I - (q - q^{-1})L, \quad l_i^j \mapsto \hbar \delta_i^j - (q - q^{-1})l_i^j, \quad q \neq \pm 1. \quad (1.2.26)$$

Таким образом, при  $q \neq \pm 1$  “твистованная симметрическая алгебра” и “твистованная универсальная обертывающая алгебра” не отличаются друг от друга.

Тем не менее, факторы этих двух версий алгебры уравнения отражений по идеалу, порожденному элементом  $\text{Tr}^R L$  (который централен в обеих алгебрах), в пределе  $q \rightarrow 1$  друг другу не изоморфны. Один из этих факторов переходит в алгебру  $\text{Sym}(\mathfrak{sl}(n))$ , тогда как другой — в алгебру  $U(\mathfrak{sl}(n)_\hbar)$ .

Отметим, также, что существует оператор  $Q : (\text{span}(l_i^j))^{\otimes 2} \rightarrow (\text{span}(l_i^j))^{\otimes 2}$ , такой, что модифицированная алгебра уравнения отражений (1.2.1) может быть записана в следующем виде

$$l_i^j \otimes l_k^j - Q(l_i^j \otimes l_k^j) = \hbar[l_i^j, l_k^j], \quad (1.2.27)$$

где операция  $[\cdot, \cdot] : (\text{span}(l_i^j))^{\otimes 2} \rightarrow \text{span}(l_i^j)$  представляет собой линейный оператор, который интерпретируется как твистованный аналог скобки Ли. В явном виде эта скобка записывается так:

$$[\cdot, \cdot] = \circ_B(I - Q). \quad (1.2.28)$$

Свойства соответствующей *твистованной алгебры Ли* и ее обертывающей алгебры (1.2.27) изучались в работе [41] (аналогичные алгебры, отвечающие инволютивным симметриям, были введены одним из авторов настоящей статьи в 80-х годах, см. [40]). Ниже мы будем пользоваться этими конструкциями для определения соответствующей твистованной скобки Пуассона.

Рассмотрим теперь случай инволютивной симметрии. Если твист  $R$  является инволютивной симметрией, ситуация упрощается.

**Утверждение 3.** *Если  $R$  представляет собой инволютивную симметрию, то определенные выше операторы  $R_W$  и  $Q$  становятся равными друг другу. При этом немодифицированная алгебра уравнения отражений ( $\hbar = 0$ ) и алгебра (1.2.25) изоморфны.*

Кроме того, исчезает изоморфизм (1.2.26) модифицированной и немодифицированной алгебр уравнения отражений.

При условии, что  $R$  — инволютивная симметрия, можно дать аксиоматическое определение твистованной коммутативной алгебры.

**Определение 1.** *Ассоциативная алгебра  $A$ , на которой определено действие инволютивной симметрии  $R : A^{\otimes 2} \rightarrow A^{\otimes 2}$  называется твистованной коммутативной алгеброй, если справедливо следующее условие*

$$\circ(a \otimes b) = \circ R(a \otimes b), \quad \forall a, b \in A,$$

где символом  $\circ : A^{\otimes 2} \rightarrow A$  обозначено произведение в алгебре, которое должно быть  $R$ -инвариантным. Если, кроме того, в алгебре  $A$  содержится единичный элемент, то предполагается, что  $R(1 \otimes a) = a \otimes 1, \forall a \in A$ .

Также можно дать естественное определение пуассоновой структуры на такого рода алгебре.

**Определение 2.** Пусть  $A$  является твистованной коммутативной алгеброй в смысле Определения 1. Тогда  $R$ -инвариантная операция  $\{, \} : A^{\otimes 2} \rightarrow A$  будет называться твистованной скобкой Пуассона, если для любых  $a, b, c \in A$  выполнены следующие аксиомы:

1.  $\{a, b\} = -\{, \} R(a \otimes b)$  (твистованная кососимметричность),
2.  $\{a, bc\} = \{a, b\}c + \{, \}_{23} R_{12}(a \otimes b \otimes c)$  (твистованное правило Лейбница),
3.  $\{, \} \{, \} \{, \}_{12}(I + R_{12}R_{23} + R_{23}R_{12})(a \otimes b \otimes c) = 0$  (твистованное тождество Якоби).

Приведем два примера подобных структур. Первый пример дается линейной скобкой (1.2.28), расширенной на всю алгебру (которая определена соотношениями (1.2.27) с  $\hbar = 0$ ) посредством твистованного правила Лейбница (второй пункт списка в Определении 2). Второй пример возникает при замене элементов  $l_i^j$  в правой части (1.2.28) на элементы  $\delta_i^j$ . Заметим, что эти скобки согласованы, то есть, любая их линейная комбинация также дает твистованную пуассонову структуру.

Эти два примера можно обобщить на случай симметрии Гекке. Однако в этом случае аксиомы 1-3 в Определении 2 больше не выполняются на всей алгебре. Можно только потребовать их выполнения на генераторах и определить способ расширения скобки с генераторов на произвольные элементы алгебры. Такое расширение обычно определяется с помощью той или иной версии правила Лейбница. Поскольку правило Лейбница связано с коумножением в алгебре, опишем вначале структуру коумножения в модифицированной алгебре уравнения отражений. Полагая  $\hbar = 1$ , действие коумножения на генераторах можно представить следующим правилом<sup>1</sup>:

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1, \quad \Delta(l_i^j) = l_i^j \otimes 1 + 1 \otimes l_i^j - (q - q^{-1}) \sum_k l_i^k \otimes l_k^j. \quad (1.2.29)$$

Для расширения коумножения (1.2.29) на всю модифицированную алгебру уравнения отражений, необходимо использовать твист  $R_W$ . Например,

$$\Delta(l_i^j l_k^l) = \Delta(l_i^j) \Delta(l_k^l) = ((l_i^j)_1 \otimes (l_i^j)_2) ((l_k^l)_1 \otimes (l_k^l)_2) = (l_i^j)_1 \widetilde{(l_k^l)_1} \otimes (l_i^j)_2 \widetilde{(l_k^l)_2}$$

где  $\widetilde{(l_k^l)_1} \otimes \widetilde{(l_i^j)_2} = R_W((l_i^j)_2 \otimes (l_k^l)_1)$  (мы пользуемся компактными обозначениями Свидлера).

Если твист  $R$  — инволютивная симметрия (т.е.  $q = 1$ ), то на генераторах это коумножения принимает широко известный классический вид:  $\Delta(l_i^j) = l_i^j \otimes 1 + 1 \otimes l_i^j$ . Продолжение на всю алгебру производится с помощью твиста  $R_W = Q$  (см. Утверждение 3).

Введем удобные матричные обозначения, которые позволят записать все рассмотренные структуры в компактном виде и сделают прозрачным введение твистованной скобки Пуассона Годеновского типа. Пусть  $R : V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$ ,  $\dim V = n$ , является инволютивной симметрией Гекке и  $L = \|l_i^j\|_{1 \leq i, j \leq n}$  есть некоторая матрица. Мы полагаем

$$L_{\overline{1}} = L_1, \quad L_{\overline{2}} = R_{12} L_1 R_{12}^{-1}, \quad \dots, \quad L_{\overline{i+1}} = R_{i+1} L_i R_{i+1}^{-1}. \quad (1.2.30)$$

<sup>1</sup>Это коумножение было выведено в работе [41] из структуры твистованной биалгебры, открытой в немодифицированной алгебре уравнения отражений Ш.Маджидом [43].

Если симметрия  $R$  инволютивна, можно заменить  $R^{-1}$  на  $R$ .

Кроме того, ниже мы будем пользоваться символом  $A \odot B$  для обозначения произведения двух квадратных матриц одного размера, матричные элементы которого есть тензорное произведение матричных элементов сомножителей:

$$(A \odot B)_i^j = \sum_k A_i^k \otimes B_k^j.$$

В этих обозначениях определяющие соотношения алгебры уравнения отражений переписываются в виде

$$R(L_{\bar{1}} \odot L_{\bar{2}}) - (L_{\bar{1}} \odot L_{\bar{2}})R = \hbar(L_{\bar{2}} - L_{\bar{1}}),$$

или, что эквивалентно, в виде

$$L_{\bar{1}} \odot L_{\bar{2}} - R^{-1}(L_{\bar{1}} \odot L_{\bar{2}})R = \hbar(L_{\bar{1}}R^{-1} - R^{-1}L_{\bar{1}}). \quad (1.2.31)$$

Если  $R$  — инволютивная симметрия, это соотношение, в свою очередь, равносильно следующему:

$$L_{\bar{1}} \odot L_{\bar{2}} - L_{\bar{2}} \odot L_{\bar{1}} = \hbar(L_{\bar{1}} - L_{\bar{2}})R.$$

Если  $R$  — симметрия Гекке, то действие оператора  $R_W$  задается формулой

$$R_W(L_{\bar{1}} \odot L_{\bar{2}}) = L_{\bar{2}} \odot L_{\bar{1}},$$

тогда как для  $Q$  мы получаем

$$Q(L_{\bar{1}} \odot L_{\bar{2}}) = R^{-1}(L_{\bar{1}} \odot L_{\bar{2}})R.$$

Следуя примерам, возникающим из формулы (1.2.31) (где мы полагаем  $\hbar = 1$ ), определим линейную скобку Пуассона на генераторах алгебры следующим правилом:

$$\{L_{\bar{1}}, L_{\bar{2}}\} = L_{\bar{1}}R^{-1} - R^{-1}L_{\bar{1}}. \quad (1.2.32)$$

Обозначение  $\{A, B\}$  введено в разделе 2.

Свойства этой скобки аналогичны свойствам твистованных алгебр Ли, рассматривавшихся в работе [41]. Необходимо, однако, дополнить формулу (1.2.32) правилом, продолжающим скобку на мономы высших порядков от генераторов алгебры. В текущей ситуации правило Лейбница не имеет такого универсального характера, аналогичного тому, что было введено в Определении 2. Для задания способа продолжения скобки воспользуемся коумножением (1.2.29).

Итак, полагаем по определению

$$\{L_{\bar{1}}, L_{\bar{2}} \odot L_{\bar{3}}\} = \{L_{\bar{1}}, L_{\bar{2}}\} \odot L_{\bar{3}} + L_{\bar{2}} \odot \{L_{\bar{1}}, L_{\bar{3}}\} - (q - q^{-1})\{L_{\bar{1}}, L_{\bar{2}}\} \odot \{L_{\bar{1}}, L_{\bar{3}}\}.$$

Отметим, что  $\{L_{\bar{1}}, L_{\bar{3}}\} = \{L_{\bar{1}}, R_{23}L_{\bar{2}}R_{23}^{-1}\} = R_{23}\{L_{\bar{1}}, L_{\bar{2}}\}R_{23}^{-1}$ .

Аналогичным образом можно вычислить следующие скобки

$$\{L_{\bar{1}} \odot L_{\bar{2}}\}, L_{\bar{3}}, \quad \{L_{\bar{1}} \odot L_{\bar{2}}, L_{\bar{3}} \odot L_{\bar{4}}\}.$$

Твистованное тождество Якоби выглядит аналогично соотношению, приведенному в работе [41]

$$\{L_{\bar{1}}, \{L_{\bar{2}}, L_{\bar{3}}\}\} = \{\{L_{\bar{1}}, L_{\bar{2}}\}, L_{\bar{3}}\} + \{L_{\bar{2}}, \{L_{\bar{1}}, L_{\bar{3}}\}\}.$$

Последнее свойство, которое мы хотели бы обсудить — свойство кососимметричности. В случае Гекке оно выражается следующей формулой:

$$\{, \}((q^2 + q^{-2})(L_{\bar{1}} \odot L_{\bar{2}}) + R^{-1}(L_{\bar{1}} \odot L_{\bar{2}})R + R(L_{\bar{1}} \odot L_{\bar{2}})R^{-1}) = 0.$$

Выражение в скобках есть матричная запись образа оператора симметризации, действующего на пространстве  $W^{\otimes 2}$  (см. [41]).

Заметим в заключение, что определение пуассоновой структуры на твистованной алгебре довольно сложная задача. В особенности это относится к виду “твистованного правила Лейбница”, который совершенно не ясен а priori (см. обсуждение в конце следующего раздела). В инволютивном случае это правило (выраженное свойством 2 выше) достаточно простое и, посредством обычной  $R$ -матричной техники (см. [41] и приведенные там ссылки), выражается равенством:

$$\{(L_{\bar{1}})^k, (L_{\bar{2}})^l\} = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{l-1} (L_{\bar{1}})^i \odot (L_{\bar{2}})^j \odot \{L_{\bar{1}}, L_{\bar{2}}\} \odot (L_{\bar{1}})^{k-i-1} \odot (L_{\bar{2}})^{l-j-1}.$$

Это равенство будет использовано в следующем разделе.

### 1.2.5 Твистованные пуассоновы структуры Годеновского типа

Рассмотрим твистованную версию скобок Пуассона Годеновского типа (1.2.2). Заменяем в этой формуле оператор обычной перестановки  $P$  косообратимой инволютивной симметрией  $R$ . Получим такое соотношение

$$\{L_{\bar{1}}(u), L_{\bar{2}}(v)\} = \left[ L_{\bar{1}}(u) + L_{\bar{2}}(v), \frac{R}{u-v} \right]. \quad (1.2.33)$$

Ниже обозначение  $L_{\bar{i}}(u)$  будет применяться для матриц, определенных в соответствии с формулой (1.2.30), где  $R$  является некоторой инволютивной симметрией (без токового параметра). В результате, дифференцирования по параметру и твисты не влияют друг на друга. Нетрудно видеть, что соотношение (1.2.3) выполняется для  $r(u) = \frac{R}{u}$ . При этом инволютивность  $R$  критически важна. Однако, мы предпочитаем иметь дело с соответствующей твистованной пуассоновой структурой, записанной в локальной форме, аналогичной выражениям (1.2.5).

Рассмотрим алгебру  $\mathcal{A}$ , порожденную матричными элементами матрицы  $L(v)$  и их производными, которые подчинены соотношениям

$$L_1^{(k)}(v) \odot L_2^{(l)}(v) = L_2^{(l)}(v) \odot L_1^{(k)}(v), \quad \forall k, l.$$

Данная алгебра аналогична алгебре, введенной в определении 1, и является градуированной алгеброй. Мы будем трактовать ее как *твистованную коммутативную* алгебру. Кроме того, предполагается, что на этой алгебре определена скобка (1.2.33).

Наша следующая цель заключается в установлении локальной формы скобки (1.2.33).

Раскладывая матричные элементы матрицы  $L_1(u) = L_1(v + h)$  в ряд Тейлора по  $h$  (аналогично тому, как это было сделано в разделе 2), получаем, что формула (1.2.33) эквивалентна семейству соотношений

$$\{L_1^{(k)}(v), L_2^{(l)}(v)\} = [L_1^{(k+l+1)}(v), R] \alpha_1(k, l)$$

с коэффициентами  $\alpha_1(k, l)$ , определенными в (1.2.6).

Похожим образом мы можем построить твистованные обобщения пуассоновой структуры, рассмотренной в разделе 3. А именно, положим

$$\{L_1^{(k)}(v), L_2^{(l)}(v)\}_r = [L_1^{(k+l+r)}(v), R] \alpha_r(k, l) \quad (1.2.34)$$

где коэффициенты  $\alpha_r(k, l)$  определены формулой (1.2.13).

Пуассонова структура может быть также представлена в виде, аналогичном формуле (1.2.14). Для  $r = 2$  мы имеем

$$\{L_1(u), L_2(v)\}_2 = \left[ L_1(u) + L_1(v), \frac{R}{(u-v)^2} \right] - 2 \left[ \int_v^u L_2(t) dt, \frac{R}{(u-v)^3} \right].$$

Свойства всех этих твистованных скобок аналогичны свойствам, установленным в определении 2, однако теперь алгебра градуирована и эти скобки согласованы с градуировкой.

Рассмотрим твистованную обертывающую алгебру, которая порождается матричными элементами матриц  $L^{(k)}(v)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , удовлетворяющими перестановочным соотношениям

$$R L_1^{(k)}(v) R L_1^{(l)}(v) - L_1^{(l)}(v) R L_1^{(k)}(v) R = \alpha_r(k, l) (R L_1^{(k+l+r)}(v) - L_1^{(k+l+r)}(v) R)$$

где коэффициенты  $\alpha_r(k, l)$  определены в формуле (1.2.6). При необходимости, также легко можно определить соответствующие скобки Ли.

Данная алгебра становится твистованной би-алгеброй, если в ней ввести коумножение

$$\Delta L^{(k)}(v) = L^{(k)}(v) \otimes 1 + 1 \otimes L^{(k)}(v), \quad (1.2.35)$$



которое расширяется до всей алгебры  $\mathcal{A}$  посредством оператора

$$Q(L_1^{(k)}(v) \odot L_2^{(l)}(v)) = L_2^{(l)}(v) \odot L_1^{(k)}(v).$$

Именно это свойство приводит к надлежащему правилу Лейбница для рассматриваемой твистованной алгебры Пуассона.

Обсудим теперь анзац для матрицы  $L(v)$ , аналогичный подстановке (1.2.9). Пусть  $\mathfrak{gl}(R)$  есть твистованная алгебра Ли, пространством которой является линейная оболочка  $\text{span}(a_i^j)$  с перестановочными соотношениями (1.2.32), где скобка Пуассона должна быть заменена на скобку Ли и вместо матрицы  $L$  должна быть подставлена матрица  $A = \|a_i^j\|$ . Действуя согласно примеру (1.2.10), введем в рассмотрение твистованный аналог прямой суммы (1.2.10), в которой опустим последнюю компоненту

$$\mathfrak{G}(R) = \mathfrak{gl}(R) \oplus_R \dots \oplus_R \mathfrak{gl}(R).$$

Это означает, что перестановочные соотношения в алгебре  $\mathfrak{G}(R)$  имеют вид

$$[A_{\bar{1}}(p), A_{\bar{2}}(q)] := A_{\bar{1}}(p) \odot A_{\bar{2}}(q) - A_{\bar{2}}(p) \odot A_{\bar{1}}(q) = (A_{\bar{1}}R - RA_{\bar{1}})\delta(p, q), \quad (1.2.36)$$

где  $\delta(p, q)$  является символом Кронекера, а  $p$  и  $q$  отмечают компоненты (напомним, что  $R$  — инволютивная симметрия).

**Утверждение 4.** Матрица  $L(v) = \sum_{p=1}^N A(p)f_p(v)$ , где матричные элементы матрицы  $A(p)$  принадлежат твистованной алгебре Ли  $\mathfrak{G}(R)$  (то есть, они подчинены перестановочным соотношениям (1.2.36)), удовлетворяет соотношениям (1.2.33) тогда и только тогда, когда функциональные факторы равны  $f_p(v) = \frac{1}{v_p - v}$ . Если функциональные множители равны  $f_p(v) = \frac{1}{(v_p - v)^r}$ , то матрица  $L(v) = \sum_{p=1}^N A(p)f_p(v)$  удовлетворяет соотношениям (1.2.34).

Можно доказать следующее утверждение, пользуясь теми же методами, как и для классического результата из [45].

**Утверждение 5.** Гамильтонианы  $H(p) = \sum_{j \neq p} \frac{\text{Tr}^R A(p)A(j)}{v_j - v_p}$ ,  $1 \leq p \leq N$ , где матрицы  $A(p)$  подчиняются соотношениям (1.2.36), коммутируют друг с другом относительно твистованной скобки Пуассона  $\{, \}_{\mathfrak{G}(R)}$ .

Кроме того, можно доказать и следующее утверждение.

**Утверждение 6.** Если скобки Пуассона матричных элементов матрицы  $L^{(k)}(v)$  имеют вид (1.2.34), тогда величины  $\text{Tr}^R(L(v))^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  пуассон-коммутиативны относительно скобок (1.2.34), которые следует продолжить на всю алгебру посредством коумножения (1.2.35).

Мы хотели бы указать на несколько принципиальных мест в доказательстве. Во-первых, формула (1.2.16) остается справедливой, если  $L_i(v)$  заменить на  $L_{\bar{i}}(v)$ . Поскольку матрица  $C(v)$  с точностью до множителя совпадает с производной от матрицы  $L(v)$ , то соотношение

$$L_{\bar{1}}(v) \odot C_{\bar{2}}(v) = C_{\bar{2}}(v) \odot L_{\bar{1}}(v)$$

также выполнено.

Чтобы получить твистованный аналог Утверждения 2 достаточно воспользоваться следующей леммой.

**Лемма 3.** *Если две  $n \times n$  матрицы  $A$  и  $B$  удовлетворяют соотношению*

$$A_{\bar{1}}(v) \odot B_{\bar{2}}(v) = B_{\bar{2}}(v) \odot A_{\bar{1}}(v),$$

тогда

$$\mathrm{Tr}^R AB = \mathrm{Tr}^R BA.$$

**Доказательство.** Мы покажем справедливость этой леммы даже для Геккевского случая. Перепишем соотношение выше в виде

$$A_1 R B_1 = R B_1 R A_1 R^{-1}$$

и вычислим  $R$ -след  $\mathrm{Tr}_{12}^R = \mathrm{Tr}_1^R \otimes \mathrm{Tr}_2^R$  от обеих частей этого равенства. Воспользуемся свойством

$$\mathrm{Tr}_{12}^R R X_{12} R^{-1} = \mathrm{Tr}_{12}^R X_{12},$$

где  $X_{12} \in \mathrm{End}(V^{\otimes 2}) \otimes \mathcal{A}$  есть некоторый эндоморфизм пространства  $V^{\otimes 2}$  с коэффициентами из произвольной ассоциативной алгебры  $\mathcal{A}$ . Если теперь положить  $X_{12} = B_1 R A_1$  и воспользоваться свойством  $\mathrm{Tr}_2^R R_{12} = I_1$ , то мы придем к результату Леммы.

В завершение данной заметки обсудим следующую проблему: возможно ли определить аналогичные структуры в Геккевском случае? Пусть  $R$  — некоторая симметрия Гекке. Зафиксируем целое число  $r \geq 1$  и рассмотрим ассоциативную алгебру, порожденную матричными элементами матриц  $L^{(k)}(v)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , удовлетворяющими соотношениям (1.2.5) с выбранной симметрией Гекке  $R$ . Нетрудно определить твистованную скобку Ли (см., например, работу [41]) таким образом, что алгебра (1.2.5) превратится в обертывающую алгебру соответствующей твистованной алгебры Ли. Однако не известно, существует ли коумножение, наделяющее такую алгебру структурой твистованной би-алгебры. Именно по этой причине мы не знаем никакой самосогласованной формы “твистованного правила Лейбница” в соответствующей “твистованной пуассоновой структуре”. Помимо этого, неизвестны также и деформационные свойства этой алгебры. Тем не менее, проблема отыскания тождества Гамильтона-Кэли в данной ассоциативной алгебре представляет несомненный интерес (см., например, работу [45]).

### 1.3 Кактусная группа и монодромия векторов Бете

#### 1.3.1 Алгебры Годена.

Модель Годена была введена в [58] как спиновая модель, связанная с алгеброй  $\mathfrak{sl}_2$ , и обобщена на случай произвольной полупростой алгебры Ли в [59], 13.2.2. Обобщенная модель Годена имеет следующую алгебраическую интерпретацию.

Пусть  $\{x_a\}$ ,  $a = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$  ортонормированный базис алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  относительно стандартного инвариантного скалярного произведения. Для каждого  $x \in U(\mathfrak{g})$  положим  $x^{(i)} = 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes x \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \in U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$  ( $x$  находится на  $i$ -м месте). Пусть  $V_\lambda$  неприводимое представление полупростой (редуктивной) алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  со старшим весом  $\lambda$ . Для любого набора доминантных целочисленных весов  $(\lambda) = \lambda_1, \dots, \lambda_n$  рассмотрим тензорное произведение соответствующих представлений  $\mathbb{V}_\lambda = V_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes V_{\lambda_n}$ . Зафиксируем набор  $\underline{z} := (z_1, z_2, \dots, z_n)$  попарно различных комплексных чисел. Гамильтонианами модели Годена являются следующие коммутирующие операторы в пространстве  $\mathbb{V}_\lambda$ :

$$H_i = \sum_{j \neq i} \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} \frac{x_a^{(i)} x_a^{(j)}}{z_i - z_j}.$$

Операторы  $H_i$  можно рассматривать как элементы универсальной обертывающей алгебры  $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ . В работе [57] была построена большая коммутативная подалгебра  $\mathcal{A}(\underline{z}) = \mathcal{A}(z_1, \dots, z_n) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ , содержащая элементы  $H_i$ . Эта подалгебра инвариантна относительно диагонального действия алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  на  $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$  и на самом деле является максимальной коммутативной подалгеброй в  $[U(\mathfrak{g})^{\otimes n}]^{\mathfrak{g}}$ .

В случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$  подалгебра  $\mathcal{A}(\underline{z}) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$  порождена элементами  $H_i$  и центром универсальной обертывающей алгебры  $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ . В других случаях алгебра  $\mathcal{A}(\underline{z})$  имеет и другие образующие, известные как высшие гамильтонианы Годена. Известно, что эта алгебра является алгеброй многочленов с  $\frac{n-1}{2} \dim \mathfrak{g} + \frac{n+1}{2} \operatorname{rk} \mathfrak{g}$  образующими. Мы будем называть эту алгебру алгеброй Годена.

#### 1.3.2 Анзац Бете.

Основной задачей, связанной с моделью Годена, является проблема диагонализации (высших) гамильтонианов Годена. Из конструкции [57] следует, что все элементы алгебры  $\mathcal{A}(\underline{z}) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$  инвариантны относительно диагонального действия алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , а следовательно, достаточно диагонализировать алгебру  $\mathcal{A}(\underline{z})$  в подпространстве особых векторов относительно диагонального действия алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ . Во многих важных случаях собственные значения гамильтонианов Годена находятся при помощи *алгебраического анзаца Бете*. Этот метод дает явную (хотя и сложную) формулу для собственных векторов  $\mathcal{A}(\underline{z})$  пространстве  $\mathbb{V}_\lambda^{\text{sing}}$ , подробнее см. [57]. Знаменитая Бете-анзац-гипотеза утверждает, что этот метод всегда работает, т.е. дает собственный базис операторов из  $\mathcal{A}(\underline{z})$  в пространстве  $\mathbb{V}_\lambda^{\text{sing}}$ . В частности, гипотеза утверждает, что при общих значениях  $\underline{z}$  алгебра  $\mathcal{A}(\underline{z})$  име-

ет простой спектр в пространстве  $\mathbb{V}_\lambda^{sing}$ . Последнее было доказано в [63] для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_N$ . Более точно, доказано, что пространство  $\mathbb{V}_\lambda^{sing}$  является циклическим  $\mathcal{A}(\underline{z})$ -модулем при любых значениях параметров, поэтому  $\mathcal{A}(\underline{z})$  имеет простой спектр всякий раз, когда действует полупростыми операторами. С другой стороны, при *вещественных* значениях параметров  $z_i$  алгебра  $\mathcal{A}(\underline{z})$  порождена эрмитовыми (а следовательно полупростыми) операторами, а поэтому имеет простой спектр.

Вообще говоря, собственные векторы Бете (и соответствующие собственные значения) не являются рациональными функциями параметров  $z_i$ , поэтому имеется нетривиальное действие группы Галуа на собственных векторах Бете. Первой целью настоящей работы является описание этого действия группы Галуа.

### 1.3.3 Замыкание семейства $\mathcal{A}(\underline{z})$ .

Семейство подалгебр  $\mathcal{A}(\underline{z})$  параметризовано некомпактным алгебраическим многообразием конфигураций попарно различных точек на комплексной прямой. С другой стороны, любая подалгебра является (в подходящем смысле) точкой грассманова многообразия, которое компактно. Поэтому существует семейство коммутативных подалгебр, содержащее семейство  $\mathcal{A}(\underline{z})$  и параметризованное некоторым компактным многообразием. Вторая цель данной работы состоит в описании этой компактификации. Согласно Агирре, Фельдери и Веселову, [54], замыкание семейства квадратичных гамильтонианов Годена параметризуется компактификацией Делиня-Мамфорда  $\overline{M_{0,n+1}}$  пространства модулей стабильных рациональных кривых с  $n + 1$  отмеченной точкой. Мы покажем, что замыкание семейства  $\mathcal{A}(\underline{z})$  также параметризуется многообразием  $\overline{M_{0,n+1}}$  (т.е. нет никаких дополнительных раздутий). Далее, мы докажем, что естественная структура топологической операды на пространствах  $\overline{M_{0,n+1}}$  согласована с операдной структурой на коммутативных подалгебрах  $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ . Это позволит нам явно описать алгебры, соответствующие граничным точкам многообразия  $\overline{M_{0,n+1}}$  и доказать, что такие подалгебры имеют циклический вектор в пространстве  $\mathbb{V}_\lambda^{sing}$ . Отсюда следует, что спектр таких подалгебр, соответствующих вещественным точкам многообразия  $\overline{M_{0,n+1}}$ , прост.

Это позволяет рассматривать (общий) собственный базис операторов из  $\mathcal{A}(\underline{z})$  в пространстве  $\mathbb{V}_\lambda^{sing}$  как *накрытие* пространства  $\overline{M_{0,n+1}}(\mathbb{R})$ . Обозначим слой этого накрытия в точке  $\underline{z} \in \overline{M_{0,n+1}}(\mathbb{R})$  как  $B_\lambda(\underline{z})$ . Фундаментальная группа пространства  $\overline{M_{0,n+1}}(\mathbb{R})$  (называемая *крашеной кактусной группой*  $PJ_n$ ) действует на этом множестве. Это дает гомоморфизм группы  $PJ_n$  в группу Галуа собственных значений алгебры Бете.

**Примечание 5.** Вообще говоря, данная группа Галуа строго больше образа кактусной группы  $PJ_n$ . Простейший пример, когда это проявляется, таков:  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ ,  $n = 3$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ . Поскольку  $\overline{M_{0,4}}(\mathbb{R}) = \mathbb{RP}^1$ , имеем  $PJ_3 = \mathbb{Z}$ , а следовательно, ее гомоморфный образ коммутативен. С другой стороны, сама группа Галуа изоморфна  $S_3$  (это недавно показал Азад Сайфуллин [64]).

### 1.3.4 Кактусная группа.

Группа  $PJ_n := \pi_1(\overline{M_{0,n+1}}(\mathbb{R}))$  имеет следующее явное описание. Пусть  $J_n$  – группа, заданная образующими  $s_{p,q}$ ,  $1 \leq p < q \leq n$  и определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} s_{p,q}^2 &= e; \\ s_{p_1,q_1} s_{p_2,q_2} &= s_{p_2,q_2} s_{p_1,q_1} \text{ if } q_1 < p_2; \\ s_{p_1,q_1} s_{p_2,q_2} s_{p_1,q_1} &= s_{p_1+q_1-q_2,p_1+q_1-p_2} \text{ if } p_1 \leq p_2 < q_2 \leq q_1. \end{aligned}$$

Эпиморфизм  $\pi : J_n \rightarrow S_n$  отображает элемент  $s_{p,q}$  в инволюцию, обращающую отрезок  $\{p, \dots, q\} \subset \{1, \dots, n\}$ . Согласно [56, 55], группа  $J_n$  является орбифолдной фундаментальной группой пространства  $\overline{M_{0,n+1}}(\mathbb{R})/S_n$ , и поэтому  $PJ_n \simeq \text{Ker}\pi$ . В [60] группы  $J_n$  и  $PJ_n$  названы *кактусной группой* и *крашеной кактусной группой* соответственно.

Хенрикес и Камницер обнаружили (см. [60]), что группы  $J_n$  и  $PJ_n$  естественным образом возникают в *кограничных категориях*. Так называют моноидальные категории с функториальным изоморфизмом  $s_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ , называемым коммутатором и удовлетворяющим некоторым естественным соотношениям. Кограничная категория является аналогом косовой категории, где роль группы кос играет кактусная группа. В частности, крашенная кактусная группа  $PJ_n$  действует эндоморфизмами объекта  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  для любого набора объектов кограничной категории.

Основным примером кограничной категории является категория кристаллов алгебры Каца-Мууди  $\mathfrak{g}$ . Грубо говоря,  $\mathfrak{g}$ -кристал – это предел при  $q \rightarrow \infty$  представления квантовой группы  $U_q(\mathfrak{g})$ . В этом пределе  $U_q(\mathfrak{g})$ -модули заменяются на крашенные ориентированные графы, вершины которых изображают базисные векторы, а ребра – действие образующих Шевалле на этих векторах. Имеется корректно определенное тензорное произведение кристаллов, не обладающее свойством симметричности. Коммутор для тензорного произведения кристаллов нетривиален. Он был впервые определен Хенрикесом и Камницером в [60]. Consider the tensor product  $\mathcal{B}_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{\lambda_n}$  of the  $\mathfrak{g}$ -crystals with highest weights  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Коммутор задает действие крашеной кактусной группы на множестве  $\mathcal{B}_{\underline{\lambda}}$  старших элементов этого тензорного произведения. Заметим, что множество  $\mathcal{B}_{\underline{\lambda}}$  имеет такую же мощность, как и множество  $B_{\underline{\lambda}}(\underline{z})$ .

**Гипотеза.** (*Этингоф*) Действия группы  $PJ_n$  на множествах  $B_{\underline{\lambda}}(\underline{z})$  и  $\mathcal{B}_{\underline{\lambda}}$  изоморфны.

Мы доказываем эту гипотезу для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$  двумя различными способами. Первый, предложенный П.Этингофом, состоит в применении теоремы Дринфельда-Коно в пределе  $q \rightarrow \infty$ . Эта предельный случай теоремы сопоставляет модели Годена (на стороне уравнения КЗ) с кристаллом (на стороне квантовой группы). Фактически, все необходимое для этого доказательства содержится в работах Варченко [65] и Камницера-Тингли [62]. Второй способ интерпретирует действие монодромии в терминах реализации категории кристаллов при помощи ульев, см. [61]. Для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$  собственные векторы алгебр  $\mathcal{A}(\underline{z})$  в вершинах (т.е. 0-мерных стратах) пространства  $\overline{M_{0,n+1}}$  нумеруются точками выпуклого многогранника, зависящего от набора старших весов. Перенос вдоль любого 1-мерного

страта дает кусочно-линейное преобразование соответствующих политопов. Мы показываем, что эти преобразования такие же, как в ульевой реализации категории кристаллов. Это дает чисто комбинаторное доказательство гипотезы.

#### 1.4 Симметрические супералгебры Ли и деформированная задача Калоджеро-Мозера

В 1964 Березин с соавторами [46] сделал подстрочное примечание о том, что радиальная часть оператора Лапласа-Бельтрами на симметрическом пространстве  $X = SL(n)/SO(n)$

$$L = \Delta + \sum_{i < j}^n \coth(x_i - x_j)(\partial_i - \partial_j)$$

сопряжена Гамильтониану

$$H = \Delta + \sum_{i < j}^n \frac{1}{2 \sinh^2(x_i - x_j)}$$

описывающему попарно взаимодействующие частицы на прямой.

Это было вероятно первым наблюдением связи между теорией симметрических пространств и теорией, которая позже стала известна как теория интегрируемой модели Калоджеро-Мозера -Сазерленда (CMS). [47]. Олшанецкий и Переломов предложили обобщение систем CMS на случай системы корней простой алгебры Ли и показали что радиальные части операторов Лапласа на непроеходимых симметрических пространствах являются сопряженными к построенными ими операторам [50]. Общие собственные функции соответствующей коммутативной алгебры квантовых интегралов являются зональными сферическими функциями. В В случае  $A_n$  это ведет к важному понятию полонизмов Джека. Эти полином были введены независимо Г. Джеком примерно в то же время [49].

Оказывается, что существуют другие интегрируемые обобщения, которые имеют только частичную симметрию и называются деформированными системами CMS [48]. Их связь с симметрическими суперпространствами была открыта одним из авторов в [51] и привела к общему классу таких операторов связанных с основными классическими супералгебрами Ли [52].

В этой работе мы более подробно исследуем эту связь и применяя теорию деформированных операторов CMS к изучению сферических функций на симметрическом пространстве

$$X = GL(n, 2m)/OSP(n, 2m).$$

Соответствующая радиальная часть оператора Лапласа в экспоненциальный координатах является частным случаем деформированного оператора CMS operator связанного с супералгеброй Ли  $\mathfrak{gl}(n, m)$  [52]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_{i=1}^n \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 + k \sum_{j=1}^m \left( y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right)^2 - k \sum_{i < j}^n \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ & - \sum_{i < j}^m \frac{y_i + y_j}{y_i - y_j} \left( y_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{x_i + y_j}{x_i - y_j} \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - ky_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \end{aligned}$$

соответствующему специальному значению параметра  $k = -\frac{1}{2}$ . Согласно [52] существует бесконечно много дифференциальных операторов коммутирующих с оператором 1.4 и порождающих алгебру квантовых интегралов  $\mathfrak{D}_{n,m}$ .

Мы изучаем действие алгебры  $\mathfrak{D}_{n,r}$  на алгебре  $\mathfrak{A}_{n,m}$  состоящей из  $S_n \times S_m$ -инвариантных Лорановских полиномов

$$f \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}, y_1^{\pm 1}, \dots, y_m^{\pm 1}]^{S_n \times S_m}$$

которые удовлетворяют условию квазиинвариантности

$$x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - k y_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \equiv 0$$

на гиперплоскости  $x_i = y_j$  для всех  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  и  $k = -\frac{1}{2}$ . Оказалось, что обобщенные собственные подпространства в соответствующем спектральном разложении, в общем случае не являются одномерными [53] и естественно возникающий вопрос: Какое объяснение может быть дано этому явлению в терминах теории представлений?

Основной результат настоящей работы заключается в том, что существует биекция между конечномерными обобщенными собственными подпространствами алгебры  $\mathfrak{D}_{n,m}$  и проективными накрытиями определенных неприводимых модулей над  $\mathfrak{gl}(n, 2m)$ . Соответствующий проективный модуль может быть описан явно в терминах некоторых условий на старший вес, которые являются естественным обобщением условий типичности данных В. Кацем.



## 2 Алгебраический анализ интегрируемых моделей классической и квантовой теории поля, интегрируемые структуры в калибровочных теориях, моделях статистической механики и случайных процессов.

### 2.1 АГТ, пары Буржа и минимальные модели

#### 2.1.1 АГТ для общих моделей

Рассмотрим двумерную конформную теорию поля  $\mathcal{M}^{gen, \mathcal{H}} = \mathcal{M}^{gen} \otimes \mathcal{M}^{\mathcal{H}}$ , с алгеброй симметрии  $\mathcal{V}^{gen, \mathcal{H}} = \mathcal{V}^{gen} \oplus \mathcal{H}$ , где  $\mathcal{M}^{gen}$  это общая модель с киральным спектром, который охватывает бесконечно много бесконечномерных неприводимых представлений со старшим весом  $\mathcal{V}^{gen}$ <sup>1</sup>,  $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$  — конформная теория поля свободного бозона, который принимает значения в  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{V}^{gen}$  — алгебра Вирасоро с общим центральным зарядом  $c_{gen}$ <sup>2</sup>, и  $\mathcal{H}$  — алгебра Гейзенберга. Центральные заряды теории  $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$  равен  $c_{\mathcal{H}} = 1$ . АГТ соответствие (Алдай Гайотто Тачикава) [66] отождествляет конформные блоки в  $\mathcal{M}^{gen, \mathcal{H}}$  [67] с инстантнонными стасуммами в четырехмерной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной колчанной калибровочной теории [68]. Предположенное в [66], АГТ соответствием было доказано для  $c_{gen} = 1$  в [69], и для произвольный  $c_{gen}$  в [70] для конформных блоков невырожденных внешних примарных полей

#### 2.1.2 АГТ для минимальных моделей

В этой работе мы рассматриваем АГТ соответствие для моделей  $\mathcal{M}^{p, p', \mathcal{H}} = \mathcal{M}^{p, p'} \otimes \mathcal{M}^{\mathcal{H}}$ , с алгеброй симметрии  $\mathcal{V}^{p, p', \mathcal{H}} = \mathcal{V}^{p, p'} \oplus \mathcal{H}$ , где  $\mathcal{M}^{p, p'}$  — минимальная конформная теория поля с киральным спектром полей который состоит из конечного числа неприводимых представлений алгебры  $\mathcal{V}^{p, p'}$ , где  $\mathcal{V}^{p, p'}$  — алгебра Вирасоро с центральным зарядом  $c_{p, p'}$  занумерованным двумя взаимнопростыми натуральными числами  $\{p, p'\}$ ,  $0 < p < p'$ ,

$$c_{p, p'} = 1 - 6 \left[ \left( \frac{p}{p'} \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \frac{p'}{p} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2$$

Пусть  $\mathcal{B}_n^{p, p', \mathcal{H}}$ ,  $\mathcal{B}_n^{p, p'}$  и  $\mathcal{B}^{\mathcal{H}}$  — конформные блоки с  $n$  внутренними каналами<sup>3</sup>. Мы хотим найти любой конформный блок  $\mathcal{B}_n^{p, p', \mathcal{H}}$  вертексных операторов  $\mathcal{O}_l^{p, p', \mathcal{H}}(z_l) = \mathcal{O}_l^{p, p'}(z_l) \times \mathcal{O}_l^{\mathcal{H}}(z_l)$ ,  $l = 0, \dots, n + 2$ . Так как любой блок  $\mathcal{B}_n^{p, p', \mathcal{H}}$  раскладывается в произведение  $\mathcal{B}_n^{p, p'}$

<sup>1</sup> Только киральный сектор конформной теории поля обсуждается в этой работе, и это подразумевается в дальнейшем. Мы сократим ‘АГТ соответствие’ до ‘АГТ’, и ‘неприводимые представления старшего веса’ до ‘неприводимые представления’, которые в этой работе всегда бесконечномерны.

<sup>2</sup> Под общим центральным зарядом алгебры Вирасоро  $c_{gen}$  мы понимаем  $c_{gen} \neq c_{p, p'}$ , где  $c_{p, p'}$  центральный заряд алгебры Вирасоро минимальной модели  $\mathcal{M}^{p, p'}$ .

<sup>3</sup> Только «линейные» конформные блоки как на Рисунке **3**, рассматриваются в этой работе. В наших обозначениях конформный блок с  $n$  внутренними каналами  $\mathcal{B}_n^{indices}$ , это коррелятор  $(n + 3)$  вертексных операторов  $\mathcal{O}_l^{same\ indices}(z_l)$ ,  $l = 0, \dots, (n + 2)$ , в  $\mathcal{M}^{same\ indices}$  сфере Римана  $\mathcal{S}$ , и  $z_l \in \mathcal{S}$ .

$\times \mathcal{B}_n^{\mathcal{H}}$  и явные выражения для  $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$  множителя  $\mathcal{B}_n^{\mathcal{H}}$  хорошо известный <sup>1</sup>, вычисление  $\mathcal{B}_n^{p,p',\mathcal{H}}$  эквивалентно вычислению его  $\mathcal{M}^{p,p'}$ -множителя  $\mathcal{B}_n^{p,p'}$  которым мы обычно и интересуемся.

### 2.1.3 Нули в знаменателе и деформационный метод

Применение АГТ формул к конформным блокам минимальных моделей без модификаций приводит к неопределенным выражениям, как мы покажем ниже. В частности, специализация параметров, которые появляются в статсуммах Некрасова в значениях минимальных моделей приводит создает нули в знаменателях слагаемых. Следуя [71], можно сделать выражения корректно определенными при помощи деформации параметров. В этом подходе можно увидеть, что если знаменатель равен нулю в пределе из деформированной ситуации в исходную то и, соответствующий числитель также нулю таким образом, что и этот предел хорошо определен. Это согласуется с [72], где было объяснено, что аналитическое продолжение конформного блока по конформным размерностям примарных полей, которые вытекают в каждый канал, единственными особенностями являются полюса и сумма всех вычетов равна нулю. Это подход использовался, хотя и без подробных аргументов, в более ранней работы по АГТ в минимальных моделях [73].

### 2.1.4 Нули в знаменателях и ограничения

В этой работе мы будем использовать подход который отличается от описанного в параграфе **2.1.3**. Наша идея в том, что нули в знаменателях Некрасовских статистических сумма возникают из-за наличия сингулярных векторов которые должны быть исключены. Мы делаем это налагая дополнительные ограничения в суммировании по диаграммам Юнга которые встречаются в Некрасовской статистической сумме. При этом мы делаем слагаемые хорошо определенным потому, что наши ограничения исключают слагаемые с полюсами. После ограничения суммы в Некрасовской инстантонной статистической сумме так чтобы не возникало неопределенных или некорректных выражений, мы находим  $\mathcal{B}_n^{p,p',\mathcal{H}}$ , и следовательно его  $\mathcal{M}^{p,p'}$ -множитель. Для нашего подхода надо описать диаграммы Юнга слагаемые, соответствующие которым входят в  $\mathcal{B}_n^{p,p',\mathcal{H}}$ .

### 2.1.5 Пары разбиений без ограничений

АГТ выражения для «Линейного» конформного блока  $\mathcal{B}_n^{gen,\mathcal{H}}$ , в котором  $n$  последовательных каналов  $\mathcal{H}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , является  $n$ -кратной суммой <sup>2</sup>:

$$\mathcal{B}_n^{gen,\mathcal{H}} = \sum_{\vec{Y}^1, \dots, \vec{Y}^n} \prod_{\iota=1}^{n+1} q_{\iota}^{|\vec{Y}^{\iota}|} Z_{bb}^{\iota} \left( \vec{a}^{\iota-1}, \vec{Y}^{\iota-1} \mid \mu^{\iota} \mid \vec{a}^{\iota}, \vec{Y}^{\iota} \right),$$

<sup>1</sup> См, например уравнение (1.9) в [70].

<sup>2</sup> Пары разбиений  $\vec{Y}^0$  и  $\vec{Y}^{n+1}$  тривиальные, так как они состоят их пустых разбиений и по ним не проводится суммирование.

где суммирование идет по произведению  $n + 1$  множителя  $q_i^{|\vec{Y}^\iota|} Z_{bb}^\iota[\vec{a}^{\iota-1}, \vec{Y}^{\iota-1} \mid \mu^\iota \mid \vec{a}^\iota, \vec{Y}^\iota]$ ,  $\iota = 1, \dots, n + 1$ , которые определены в разделе 2. Каждый множитель  $Z_{bb}^\iota$  — это рациональная функция зависящая от двух пар ‘произвольных’ диаграмм Юнга  $\{Y_1^{\iota-1}, Y_2^{\iota-1}\}$  и  $\{Y_1^\iota, Y_2^\iota\}$ . Другими словами нет никаких условий на эти диаграммы Юнга и все возможные пары допустимы. Знаменатель  $z_{den}^\iota$  выражения  $Z_{bb}^\iota$  является произведением норм состояний который текут в предыдущем канале  $\mathcal{H}i^{\iota-1}$  и следующем канале  $\mathcal{H}i^\iota$ . Так как  $Z_{bb}^\iota$  нумеруется парой разбиений без ограничений и сумма идет по всем таким парам, то состояния который текут в канале принадлежат модулю Верма  $\mathcal{V}^{gen, \mathcal{H}}$ .

Если мы теперь применим ту же формулу для случая  $\mathcal{M}^{p, p', \mathcal{H}}$ , то получится, что мы включим состояния с нулевой нормой в сумму и вообще будем суммировать по состояниям из модуля Верма а не из неприводимого представления из  $\mathcal{V}^{p, p', \mathcal{H}}$ . Поэтому и получаются слагаемые в инстантонной статистической сумме с нулями в знаменателе. Более того, мы покажем, что в тех случаях когда числитель зануляется, то знаменатель тоже зануляется и это приводит к неопределенным выражениям.

### 2.1.6 Пары разбиений с ограничениями

В этой работе мы рассмотрим  $\mathcal{B}_n^{p, p', \mathcal{H}}$  как инстантонную статистическую сумму  $Z_{Nek}$  которая строится из рациональных выражений  $Z_{bb}^\iota$  которые имеют числитель  $z_{num}^\iota$  и знаменатель  $z_{den}^\iota$ ,  $\iota = 1, \dots, n + 1$ .  $Z_{bb}^\iota$  который связывает два канала  $\mathcal{H}i_{\iota-1}$  и  $\mathcal{H}i_\iota$ . Знаменатель  $z^\iota$  выражения  $Z_{bb}^\iota$  является произведением двух множителей  $[z_{norm}^{\iota-1}]^{1/2}$  и  $[z_{norm}^\iota]^{1/2}$  которые равным нормам состояний которые текут в каналах  $\mathcal{H}i_{\iota-1}$  и  $\mathcal{H}i_\iota$ , соответственно. Мы характеризуем нули в знаменателях которые приводят к плохо определенным выражениям для  $\mathcal{B}_n^{p, p', \mathcal{H}}$ . Если канала  $\mathcal{H}i_\iota$ ,  $\iota = 1, \dots, n$ , содержит состояние которое принадлежит неприводимому представлению  $\mathcal{H}_{r_\iota, s_\iota}^{p, p'}$  алгебры Вирасоро, мы отнесем нули в знаменателях нуль векторам которые не принадлежат  $\mathcal{H}_{r_\iota, s_\iota}^{p, p'}$ , и исключим эти нули налагая ограничения на пары разбиений которые встречаются в обычной Некрасовской сумме до пар разбиений  $\{Y_1, Y_2\}$ , которые удовлетворяют условиям:

$$\boxed{Y_{2,R}^\iota - Y_{1,R+s_\iota-1}^\iota \geq 1 - r_\iota, \quad Y_{1,R}^\iota - Y_{2,R+p-s_\iota-1}^\iota \geq 1 - p' + r_\iota}$$

где  $Y_{i,R}^\iota$  это  $i$ -й элемент разбиения  $Y_i^\iota$ . (строка диаграммы  $Y_i^\iota$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ).

### 2.1.7 Пары Буржа

Пары разбиений которые удовлетворяют условиям (2.1.6) были впервые введены в работе [74] и появлялись в более свежих работах [75, 76]. В этой работе мы будем называть такие пары разбиений как *пары Буржа*, и покажем, что если ограничения суммирования со всех пар разбиений на пары Буржа дает приводит к тому, что мы находим АГТ выражения для конформного блока  $\mathcal{B}_n^{p, p', \mathcal{H}}$ . В виде формулы это можно выразить как:

$$\mathcal{B}_n^{p,p',\mathcal{H}} = \sum_{\vec{Y}^1, \dots, \vec{Y}^n} \prod_{\ell=1}^{n+1} q_\ell^{|\vec{Y}^\ell|} Z_{bb}^\ell \left( \vec{a}^{\ell-1}, \vec{Y}^{\ell-1} \mid \mu^\ell \mid \vec{a}^\ell, \vec{Y}^\ell \right)$$

где  $\sum'$  обозначает, что суммирование ведется по парам разбиений которые удовлетворяют условиям Буржа (2.1.6). Мы проверяем эти выражения в двух случаях **1.** любая одноточечная функция  $\mathcal{B}_1^{p,p',\mathcal{H}}$  на торе, в которой вставленный оператор является единичным оператором и **2.** Шеститочечная функция в модели Изинга  $\mathcal{B}_3^{3,4,\mathcal{H}}$ , где все вставленные операторы являются Изинговскими магнитными операторами. Мы также приводим аргументы почему мы ожидаем, что эта формула верна.

## 2.2 Стохастические процессы с $Z_N$ симметрией и комплексные представления алгебры Вирасоро; Статсуммы

Изучая  $Z_N$ -симметричные представления периодической алгебры Темперли-Либа  $PTL_L(x)$  [78, 79, 80, 81], мы рассматриваем линейную комбинацию генераторов этой алгебры в качестве гамильтониана некоторой динамической модели. В случае, когда параметр алгебры  $x = 1$ , этот гамильтониан задает эволюцию одномерного стохастического процесса. Изучая численно поведение спектра гамильтониана в термодинамическом пределе мы обнаружили, что он может быть интерпретирован с привлечением представлений алгебры Вирасоро комплексного старшего веса. Более того оказалось, что вещественная часть комплексных старших весов по величине меньше вещественных старших весов, также присутствующих в спектре, а значит именно комплексные старшие веса определяют поведение модели при больших временах. Это, на первый взгляд весьма неожиданное наблюдение было описано в нашей предыдущей заметке [77]. В настоящей статье мы даем аналитический вывод этого результата и приводим выражения для статсуммы модели. При четных значениях параметра  $N$  модели мы обнаруживаем дополнительную симметрию модели, которая приводит к двукратному вырождению спектра, указывающему на наличие нулевой фермионной моды. Настоящая работа – это продолжение заметки [77], но мы постарались сделать изложение самозамкнутым.

Алгебра  $PTL_L(x)$  порождена набором из  $L$  генераторов  $e_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, L$  удовлетворяющих соотношениям:

$$e_k^2 = x e_k, \quad e_k e_{k\pm 1} e_k = e_k, \quad [e_k, e_\ell] = 0, \quad |k - \ell| > 1, \quad (2.2.1)$$

где  $e_{k+L} = e_k$ . Мы полагаем, что  $L$  четно. Мы рассмотрим две фактор-алгебры  $PTL_L(x)$  по соотношениям:

$$(AB)^N A = A, \quad (2.2.2)$$

где

$$A = \prod_{j=1}^{L/2} e_{2j}, \quad B = \prod_{j=0}^{L/2-1} e_{2j+1},$$

и

$$ABA = \alpha A, \quad (2.2.3)$$

причем  $\alpha = e^{i2\pi r/N}$ ,  $r = 0, 1, \dots, N-1$ . Очевидно, фактор-алгебра (2.2.3) удовлетворяет соотношению (2.2.2), задающему первую фактор-алгебру. Это наблюдение нам потребуется в дальнейшем при построении статсумм.

Для построения  $Z_N$ -симметричных представлений (2.2.1), (2.2.2) мы рассмотрим  $N$  копий одномерной периодической системы на  $L$  сайтах. Каждая копия имеет  $\binom{L}{L/2}$  конфигураций взаимно непересекающихся спариваний на цилиндре и  $n$  нестягиваемых петель

( $n = 0, 1, \dots, N - 1$ ) на том же цилиндре. Конфигурации образуют базис векторного пространства, на котором действуют генераторы алгебры  $PTL_L(x)$ . Размерность пространства равна  $N \times \binom{L}{L/2}$ . На Рис.1 показаны 6 конфигураций случая  $L = 4, n = 2$ .

Иначе можно описать состояния векторного пространства, используя спин-1/2 представление, в котором значки  $+(-)$  подставляются вместо первого(последнего) элемента каждого спаривания. Число нестягиваемых петель обозначается дополнительным индексом. Эти обозначения также приведены на рис.1.

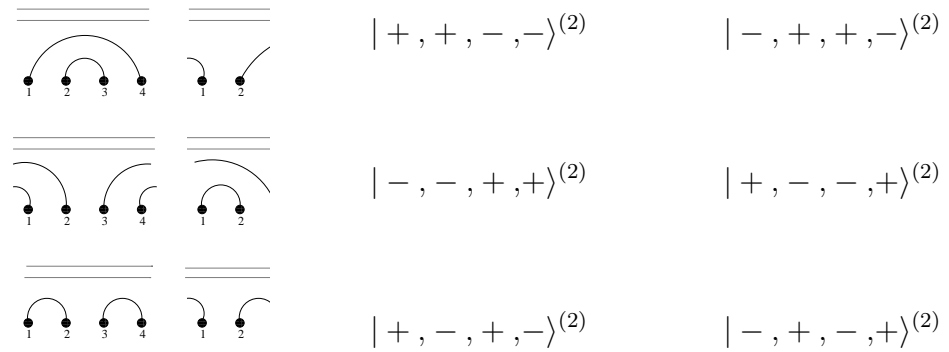


Рисунок 1 — Шесть конфигураций на цилиндре с  $L = 4$  сайтами и двумя нестягиваемыми петлями. Незамкнутые спаривания соединяются между собой на задней стороне цилиндра. Соответствующие спиновые картинки представлены справа.

Действия генераторов  $e_k$  на конфигурациях спариваний внутри одной копии  $n$  совпадают с обычным действием неперiodической алгебры Темперли-Либа [82] за одним исключением: если генератор действует на спаривании размера  $L$  (размер цилиндра), то результатом действия будет конфигурация из копии  $n + 1$  (см. рис..2).

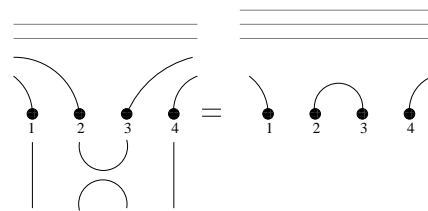


Рисунок 2 — Генератор  $e_2$  действует на сайтах 2 и 3, которые составляют спаривание размера  $L = 4$ . При этом образуется нестягиваемая петля, и поэтому мы переходим от  $n = 2$  копии пространства конфигураций к копии  $n = 3$ .

Чтобы построить  $Z_N$ -симметричное представление алгебры  $PTL_L(x)$ , в котором выполнено соотношение (2.2.2) надо отождествить копии пространств  $n = N$  и  $n = 0$ .

В дальнейшем мы полагаем параметр  $x$  алгебры  $PTL_L(x)$  равным единице. При таком выборе параметра гамильтониан

$$H = \sum_{k=1}^L (1 - e_k) \quad (2.2.4)$$

задает эволюцию стохастического процесса. Отметим, что свойства спектра гамильтониана, которые мы обсуждаем в дальнейшем сохраняются при любом значении  $x$ .

Заметим, что при четных значениях  $N$   $Z_N$ -симметричное представление разлагается в прямую сумму идентичных  $\frac{N}{2} \times \binom{L}{L/2}$ -мерных неприводимых представлений.<sup>1</sup> Чтобы убедиться в этом, рассмотрим пару линейных преобразований пространства  $Z_N$ -симметричного представления.

Представление  $X_1$  диагонально в базисе конфигураций и действует следующим образом. Начнем с конфигураций, в которых нет спариваний, соединяющейся по задней стороне цилиндра (первая и пятая конфигурации на рис.1). Эти конфигурации умножаются на множитель  $(-1)^n$ . Конфигурации, полученные из этих сдвигом на 1 шаг вправо вокруг цилиндра умножаются на множитель  $(-1)^{(n+1)}$  (вторая и шестая конфигурации на рис.1). Полученные сдвигом еще на шаг конфигурации снова умножаются на  $(-1)^n$  и так далее.

Преобразование  $X_2$  переставляет конфигурации следующим образом:

$$|\dots\rangle^{(2k)} \leftrightarrow |\dots\rangle^{(2k+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

Описанные два преобразования образуют алгебру:

$$(X_1)^2 = (X_2)^2 = \text{id}, \quad X_1 X_2 + X_2 X_1 = 0. \quad (2.2.5)$$

Эта алгебра имеет только двумерные представления. Так как  $X_1$  и  $X_2$  коммутируют с действием алгебры  $PTL_L(x)$  на пространстве  $Z_N$  симметричных конфигураций, следует, что для четных  $N$ , спектр  $H$  двукратно вырожден.

В дальнейшем мы будем рассматривать спектр  $H$  в термодинамическом пределе ( $L \rightarrow \infty$ ). Обратим внимание, что для стохастического процесса уровни энергии совпадают со значениями энергетических переходов, так как основной энергетический уровень имеет нулевое значение. Так как  $H$  инвариантен относительно преобразований ( $e_k \mapsto e_{k+1(\text{mod } L)}$ ) и сдвигов по циклу  $Z_N$  ( $|\dots\rangle^{(n)} \mapsto |\dots\rangle^{(n+1(\text{mod } N))}$ ), в спектре  $H$  мы имеем  $N \times L$  секторов нумеруемых индексом  $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , отвечающих значениям импульса  $P = 2\pi p/L$ , и индекса  $r = 0, 1, \dots, N - 1$ , нумерующего неприводимые представления  $Z_N$ . Обозначив  $E_p^r(q)$ , ( $q = 1, 2, \dots$ ) – значения уровней энергии в секторе  $(p, r)$ , для скейлинговых размерностей  $x_p^r(q)$  имеем выражение  $\lim_{L \rightarrow \infty} (E_p^r(q)L) = 2\pi v_s x_p^r(q)$ , где  $v_s = 3\sqrt{3}/2$  – так называемая, "скорость звука".

В [77] мы диагонализовали  $H$  численно для  $N = 3$ . Для значений  $L \leq 30$  были вычислены значения низших возбуждений. В секторе  $r = 0$  мы обнаружили ожидаемое значение  $x_0^0(1) = 0.25$ . Неожиданность ожидала нас в секторе  $r = 1$  где мы нашли комплексные значения:

$$x_0^1(1) = 0.03905 + 0.08753i, \quad x_0^1(2) = 0.14908 - 0.11806i. \quad (2.2.6)$$

<sup>1</sup>Для нечетных  $N$   $Z_N$ -симметричное представление неприводимо.

Для четных  $N$  мы получили  $E_p^r(q) = E_{p+N/2}^{r+N/2}(q)$ , что является проявлением симметрии (2.2.5).

Представим теперь наши новые результаты. Чтобы получить статсумму в каждом секторе  $r$  мы используем тот факт, что  $Z_N$ -симметричное представление фактор-алгебры (2.2.2) может быть разложено в сумму  $N$  представлений фактор-алгебры (2.2.3) [79].

Представление же фактор-алгебры (2.2.3), в векторном пространстве непересекающихся спариваний получается из непериодического представления, действующего на единственной копии, модификацией действия генераторов, когда они действуют на спаривания максимального размера  $L$ , как на рис.2. Взамен добавления нестягиваемой петли надо домножить конфигурацию на множитель  $\alpha = \exp(2\pi ir/N)$ . Как показано в [78], фактор-алгебра (2.2.3) имеет также представление в стандартном базисе спин=1/2 состояния (не путать с базисом, представленным на рис.1) и действие гамильтониана (2.2.4) может быть представлено в этом базисе. Преобразованием подобия этот гамильтониан может быть приведен к стандартному виду гамильтониана квантовой спиновой цепочки XXZ с твистованным условием периодичности:

$$e_k = \sigma_k^+ \sigma_{k+1}^- + \sigma_k^- \sigma_{k+1}^+ + \frac{1}{4}(1 - \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z) + i \frac{\sqrt{3}}{4}(\sigma_{k+1}^z - \sigma_k^z), \quad k = 1, 2, \dots, L-1,$$

$$e_L = e^{i2\pi\phi} \sigma_L^+ \sigma_1^- + e^{-i2\pi\phi} \sigma_L^- \sigma_1^+ + \frac{1}{4}(1 - \sigma_L^z \sigma_1^z) + i \frac{\sqrt{3}}{4}(\sigma_1^z - \sigma_L^z) \quad (2.2.7)$$

Параметр твиста  $\phi$  связан с параметром  $\alpha$  соотношением

$$\alpha^2 = 2 + e^{i2\pi\phi} + e^{-i2\pi\phi}. \quad (2.2.8)$$

Векторное пространство  $\binom{L}{L/2}$  непересекающихся спариваний при этом соответствует сектору  $S^z = \sum_{k=1}^L \sigma_k^z = 0$  в спиновом векторном пространстве.

Гамильтониан (2.2.4), (2.2.7) интегрируем методом Бете-анзаца, и его скейлинговые размерности известны [83]. В секторе  $S^z = 0$  они принимают значения:

$$x = \frac{3}{4}(s + \phi)^2 - \frac{1}{12} + m + m', \quad p = m - m', \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.2.9)$$

Из соотношения (2.2.8) при четных  $N$  следует, что два разных значения параметра  $\alpha$ :  $\alpha = e^{i2\pi r/N}$  и  $\alpha = e^{i2\pi(r+N/2)/N} = -e^{i2\pi r/N}$  дают одно и то же значение твиста  $\phi$ , и следовательно спектр гамильтониана (2.2.4) имеет двукратное вырождение, что согласуется с нашими прежними наблюдениями. Кроме того, для секторов с индексом  $r$  отличным от 0 и  $N/2$  значения  $\phi$ , как следует из (2.2.8), комплексны, что приводит к комплексным значениям скейлинговых размерностей (2.2.9).

В качестве иллюстрации явления рассмотрим случай  $N = 3, r = 1$ . Из (2.2.8) следует

$$\phi = -0.426642 - 0.137279i$$



откуда, используя (2.2.9) и полагая  $s = 0$  и  $1$  имеем

$$x_0^1(1) = 0.03990499 + 0.087853992i; \quad x_0^1(2) = 0.1490874 - 0.11808136i$$

в полном согласии с формулами (2.2.6).

Следует подчеркнуть, что хотя спектр  $Z_N$ -симметричного гамильтониана естественным образом разбивается на  $N$  секторов, стохастический процесс не уважает этого разбиения. Условие позитивности волновых функций, описывающих распределения вероятностей, смешивает сектора. Чтобы проиллюстрировать это наблюдение, рассмотрим случай  $L = 4$ ,  $N = 2$ . В данном случае оператор гамильтониана описывает два независимых стохастических процесса, каждый из которых происходит в шестимерном пространстве. Первый процесс затрагивает состояния  $|++--\rangle^{(0)}$ ,  $|--++\rangle^{(0)}$ ,  $|+-+-\rangle^{(0)}$ ,  $|-++-\rangle^{(1)}$ ,  $|+--+\rangle^{(1)}$  and  $|-+-+\rangle^{(1)}$ , в то время как второй действует на 6 состояниях, отличающихся от вышеприведенных перестановкой индексов секторов 0 и 1.

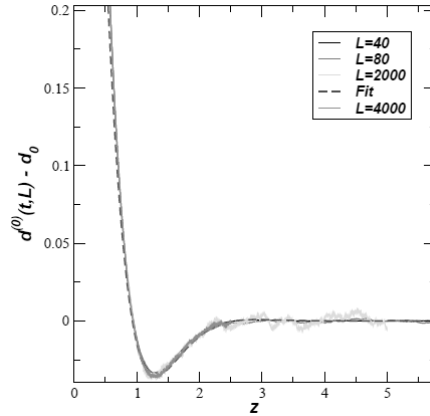


Рисунок 3 — Фит для  $d^{(0)}(z) - d_0$  как функции  $z$  с применением параметризации (??), (??). Здесь были использованы Монте-Карло данные для размеров  $L = 40, 80, 2000, 4000$ .

Результаты фита показаны прерывистой линией.

Наличие комплексных скейлинговых размерностей оказывает влияние на временное поведение корреляционных функций модели, приводя к осцилляционным явлениям, тем более, что вещественная часть комплексных параметров оказывается меньшей чем вещественные скейлинговые размерности сектора  $r = 0$ . Чтобы продемонстрировать это явление, мы рассмотрели поведение плотности "пиков"  $d^{(n)}(t, L)$  для различных копий пространства непересекающихся спариваний. Под пиками мы понимаем пары  $+-$  в спиновой картине, которые соответствуют локальным максимумам в известном представлении спиновых конфигурации посредством путей Дика [84]. Временная зависимость плотности пиков в различных секторах конечно зависит от выбора начальных условий. При больших значениях времени  $t$  и достаточно большом размере кольца  $L$  мы ожидаем, что  $d^{(n)}(t, L)$

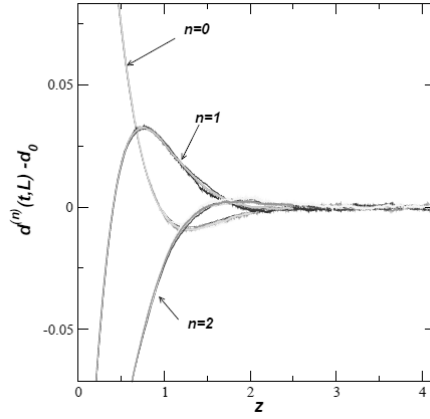


Рисунок 4 — Плотность пиков  $d^{(n)}(z)$  в  $n$ -ой копии, как функция от параметра  $z = 2\pi v_s t/L$  для  $N = 3$  при различных значениях  $L = 40, 80, 160, 500, 1000, 2000$  and  $4000$ . Для наглядности из полученных результатов мы вычли  $d_0$  - значение плотности пиков стационарного распределения.

будет функцией отношения  $t/L$ :

$$d^{(n)}(t, L) = d_0 + \sum_k A_k \cos[\text{Im}(x_0^{(n)}(k))z] e^{-\text{Re}(x_0^{(n)}(k))z}, \quad z = \frac{2\pi v_s t}{L},$$

где  $d_0$  — плотность пиков в стационарном состоянии, которая является одной и той же для любой копии  $n$ , а коэффициенты  $A_k$ 's зависят от начальных условий. Мы вычислили  $d^{(n)}(t, L) - d_0$  с использованием Монте-Карло симуляций при  $N = 3$  для различных размеров  $L$ . В качестве исходного состояния выбиралась конфигурация  $|+, -, +, -, \dots, +, -\rangle^{(0)}$  из копии  $n = 0$ . Результаты вычислений показаны на рис.???. Как и ожидалось, плотности имеют зависимость лишь от параметра  $z$ .

Вдохновленные этим наблюдением мы провели фитирование данных для копии  $n = 0$  (см. рис.3), использовав параметризацию

$$d^{(0)}(z) - d_0 = e^{-az} \frac{\cos b(z - z_0)}{\cos bz_0}$$

и получили значения параметров

$$a = 0.1379, \quad b = 0.1107, \quad z_0 = 0.060.$$

Полученные данные (??), (??) согласуются со значениями  $x_0^1(2)$ , приведенными в (2.2). Насколько нам известно, это первый пример проявления выражений вида (??) в конформно-инвариантных теориях.

В заключение заметки мы хотим отметить, что в статье Салера и Сорнетта [85] предсказывалась возможность появления комплексных критических экспонент в неунитарных конформных теориях. Здесь мы привели пример такого поведения.

## 2.3 Стохастическая монотонность в графе Юнга и теорема Тома

### 2.3.1 Формулировка основных результатов

Для числа  $n = 0, 1, 2, \dots$ , разбиение  $\lambda$  числа  $n$  — это последовательность  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$  такая что  $|\lambda| = n$ , где  $|\lambda| = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ . Мы отождествляем разбиение  $\lambda$  с диаграммой Юнга  $|\lambda|$ , являющейся объединением клеток  $(i, j)$  из следующего множества

$$\{(i, j) \in \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{>0} \mid j \leq \lambda_i\}.$$

Граф Юнга  $\mathbb{Y} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{Y}_n$  — это градуированный граф  $\mathbb{Y}_n$ , вершины которого — это все разбиения числа  $n$ . В частности,  $\mathbb{Y}_0$  содержит лишь пустое разбиение  $\emptyset = (0, 0, \dots)$ . Ребро соединяет вершины  $\lambda \in \mathbb{Y}_n$  и  $\mu \in \mathbb{Y}_{n-1}$ ,  $n \geq 1$  тогда и только тогда, когда  $\lambda$  отличается от  $\mu$  добавлением одной клетки, обозначение  $\mu \nearrow \lambda$ .

Для диаграммы  $\lambda$ , назовем ее *размерностью*<sup>1</sup>, обозначаемой как  $\dim(\lambda)$ , число ориентированных путей в  $\mathbb{Y}$  начинающихся в  $\emptyset$  и заканчивающихся в  $\lambda$ .

Пусть  $M_n$  — это вероятностная мера на  $\mathbb{Y}_n$ . Ее *проекция* на  $\mathbb{Y}_{n-1}$  обозначаемая как  $\pi_{n-1}^n M_n$  определяется с помощью формулы

$$(\pi_{n-1}^n M_n)(\mu) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n: \mu \nearrow \lambda} \frac{\dim(\mu)}{\dim(\lambda)} M_n(\lambda).$$

Это определение немедленно влечет, что  $\pi_{n-1}^n M_n$  является вероятностной мерой. Повторением отображения  $M_n \mapsto \pi_{n-1}^n M_n$  мы аналогично определяем отображение  $M_n$  на  $M_k$ ,  $0 \leq k < n$ , обозначаемое символом  $\pi_k^n M_n$ .

**Определение 3.** *Последовательность мер  $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$  называется когерентной системой на  $\mathbb{Y}$  если любое  $M_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  является вероятностной мерой на  $\mathbb{Y}_n$  и для любого  $0 \leq k < n$  мера  $M_k$  является проекцией  $M_n$  на  $\mathbb{Y}_k$ , то есть  $M_k = \pi_k^n M_n$ .*

За последние 40 лет когерентные системы на  $\mathbb{Y}$  получили много внимание из-за своих взаимосвязей с несколькими темами. Во-первых, можно показать, что они находятся в биекции с характерами бесконечной симметрической группы и тесно связаны с ее сферическими представлениями, см. [106], [97], [102]. Во-вторых, существует связь между этими системами и тотально положительными теплицевыми матрицами, см. [104], [97, Section 2.2], [102]. В третьих, они естественным образом связаны с комбинаторным алгоритмом Робинсона-Шенстеда-Кнута, см. [107]. Наконец, несколько примеров таких систем, например, знаменитое распределение Планшереля имеют чрезвычайно интересное асимптотическое поведение при  $n \rightarrow \infty$  и, в частности, имеют тесные взаимосвязи с теорией случайных матриц, см. [86], [90], [103], [95], [96], [94].

Классификация всех когерентных систем на  $\mathbb{Y}$  (в эквивалентной форме) известна как *теорема Тома*. Ее формулировка требует использования симметрических функций;

<sup>1</sup>такое название дано вследствие того, что  $\dim(\lambda)$  совпадает с размерностью неприводимого представления симметрической группы, параметризованного  $\lambda$ .

мы сейчас их определим. Пусть  $\Lambda$  — это алгебра симметрических функций в переменных  $x_1, x_2, \dots$ , см., например, [101, Глава 1, раздел 2]. Один способ определить  $\Lambda$  — это сказать, что она является алгеброй (над  $\mathbb{R}$ ) порожденной суммами Ньютона — полиномами от  $p_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  вида

$$p_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k + \dots$$

Важный линейный базис в  $\Lambda$  формируется *симметрическими функциями Шура*  $s_\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{Y}$ , и мы ссылаемся на [101, Глава 1, раздел 3] для точного определения и свойств  $s_\lambda$ .

Мы также определяем  $\Omega$  как множество пар последовательностей вида  $(\alpha, \beta) = (\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq 0, \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq 0)$ , таких что  $\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i + \beta_i) \leq 1$ .

**Теорема 2** (Теорема Тома, см. [104], [106], [102], [98], [105]). *Множество всех когерентных систем — это симплекс Шоке, экстремальные точки которого параметризованы  $\Omega$ . Экстремальная система мер  $\{M_n^{(\alpha, \beta)}\}_{n=0}^{\infty}$  параметризованная точкой  $(\alpha, \beta) \in \Omega$  дается формулой*

$$M_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda) = \dim(\lambda) s_\lambda(\alpha, \beta),$$

где  $s_\lambda(\alpha, \beta)$  — это образ  $s_\lambda$  под действием гомоморфизма из  $\Lambda$  в  $\mathbb{R}$  определенного на степенных суммах  $p_k$  по правилу

$$p_1 \mapsto p_1(\alpha, \beta) = 1, \quad p_k \mapsto p_k(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^k + (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Одна из целей данной статьи — дать новое доказательство теоремы 2 основанное на свойстве сохранения порядка доминирования. Наше доказательство теоремы Тома использует только комбинаторные и вероятностные идеи; другие существующие доказательства используют нетривиальные аналитические [104] или алгебраические [106, 98, 102] методы (однако, см. [105]). Мы надеемся, что наш метод доказательства теоремы 2 будет использован в будущем для доказательства обобщения теоремы 2 известной под именем *гипотеза Керова*, см. раздел 2.3.2 для дальнейших деталей.

Снабдим  $\mathbb{Y}_n$  частичным порядком известным под именем *доминирование*. Для  $\lambda, \mu \in \mathbb{Y}_n$  мы пишем  $\lambda \geq \mu$ , если для  $k = 1, 2, \dots$  мы имеем

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k \geq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k.$$

Далее, пусть будем говорить, что мера  $\rho$  на  $\mathbb{Y}_n$  является атомом, если ее носитель состоит из одного элемента и будем обозначать символом  $\text{sup}(\rho)$  этот элемент. Заметим, что мы допускаем меры  $\rho$  с весом не равным 1 в этом определении.

**Определение 4.** *Пусть  $\rho$  и  $\rho'$  — это две меры на  $\mathbb{Y}_n$  одного и того же веса, то есть  $\rho(\mathbb{Y}_n) = \rho'(\mathbb{Y}_n)$ . Мы говорим, что  $\rho$  стохастически доминирует  $\rho'$  и пишем  $\rho \geq \rho'$ , если существуют  $k > 0$  и  $2k$  мер  $\rho_1, \dots, \rho_k, \rho'_1, \dots, \rho'_k$ , таких что  $\rho = \sum_{i=1}^k \rho_i$ ,  $\rho' = \sum_{i=1}^k \rho'_i$ , и, более того,  $\rho_i, \rho'_i$  — атомы той же массы с  $\text{sup}(\rho_i) \geq \text{sup}(\rho'_i)$  для каждого  $i = 1, \dots, k$ .*

Неформально говоря, определение 4 означает, что  $\rho$  может быть получено из  $\rho'$  движением массы “вдоль” нашего частичного упорядочения.

Оказывается, что с помощью стохастического доминирования теорему 2 можно вывести из следующего утверждения.

**Теорема 3.** Пусть  $0 \leq k < n$  и  $\rho$  and  $\rho'$  — это две меры на  $\mathbb{Y}_n$  одного и того же веса. Если  $\rho \geq \rho'$ , то это же доминирование выполняется и для их проекций — мер на  $\mathbb{Y}_k$ , то есть  $\pi_k^n \rho \geq \pi_k^n \rho'$ .

*План доказательства*

Доказательство этого результата может быть получено в несколько шагов. Во-первых, в силу транзитивности достаточно рассматривать только перенос одного атома. Во-вторых, достаточно рассматривать только перенос одной клетки в соседнюю строку или столбец в диаграмме Юнга. Наконец, в такой ситуации необходимые копереходные вероятности и неравенство на них можно получить с помощью явной формулы для размерностей — формулы крюков.

### 2.3.2 $t$ -деформация и гипотеза Керова

Теорема 2 эквивалентна (см. [97]) следующему утверждению.

**Теорема 4.** Множество гомоморфизмов  $\rho : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  нормализованных условием  $\rho(p_1) = 1$  и  $\rho(s_\lambda) \geq 0$  для всех  $\lambda \in \mathbb{Y}$ , биективно соответствует  $\Omega$ . Гомоморфизм, отвечающей точке  $(\alpha, \beta) \in \Omega$  определяется значениями на степенных суммах  $p_k$  по формуле

$$p_1 \mapsto p_1(\alpha, \beta) = 1, \quad p_k \mapsto p_k(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^k + (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^k, k = 1, 2, \dots \quad (2.3.1)$$

Естественный способ обобщить теорему 4 — это заменить функции Шура  $s_\lambda$  на другие классы симметрических функций. 20 лет назад С.В. Керов предсказал, что если заменить  $s_\lambda$  на их  $(q, t)$ -деформацию — многочлены Макдональда  $M_\lambda(\cdot; q, t)$  — то (для  $0 \leq q < 1, 0 \leq t < 1$ ) положительные на многочленах Макдональда гомоморфизмы по-прежнему параметризуются  $\Omega$ . Предполагаемое соответствие устанавливается с помощью формул очень близким к формулам (2.3.1), см. [97, Глава 2, раздел 9]. Полнота списка Керова по-прежнему является открытой задачей (хотя довольно легко доказать, что все такие гомоморфизмы действительно положительные, см., например, [88, Раздел 2.2.1]). Недавно эти гомоморфизмы были использованы для анализа ряда вероятностных проблем, см. [88], [89].

При  $q = 0$  многочлены Макдональда превращаются в классические многочлены Холла-Литтлвуда, см. [101]. В этом случае гипотеза Керова особенно интересна, так как при  $t = p^{-1}$  эта гипотеза эквивалентна классификации всех инвариантных относительно сопряжения эргодических мер на пространстве верхнетреугольных матриц над конечным полем из  $p$  элементов  $\mathbb{F}_p$ , см. [93, Раздел 4].

Недавно для  $t$ -деформации теоремы 2 (эквивалентной гипотезе про матрицы, см. [93, Раздел 4] и [92, Раздел 4.2]) был доказан закон больших чисел для исследуемых мер, см. [91]. Поэтому мы надеемся, что наш подход к доказательству теоремы Тома может быть полностью повторен и в этом случае. Для полного доказательства остается доказать некоторое неравенство на размерности, которое мы формулируем в качестве гипотезы.

Пусть  $U_n$  — это группа уни-верхнетреугольных матриц над конечным полем  $\mathbb{F}_p$ . Заметим, что для каждого  $u \in U_n$  все его собственные значения равны 1 и поэтому мы можем однозначно сопоставить его классу сопряженности диаграмму Юнга  $\mathcal{J}(u) \in \mathbb{Y}_n$  с длинами строк равными размеру блоков жордановой нормальной формы для  $u$ . Мы определяем

$$\dim_t(\lambda) = |\{u \in U_n \mid \mathcal{J}(u) = \lambda\}|.$$

Далее, для любого  $u \in U_n$  мы определяем  $u^{(n-1)} \in U_{n-1}$  как верхний левый угол размера  $(n-1) \times (n-1)$  нашей матрицы, и определим для  $\mu \in \mathbb{Y}_{n-1}$ ,  $\lambda \in \mathbb{Y}_n$  размерность по формуле

$$\dim_t(\mu \nearrow \lambda) = |\{u \in U_n \mid \mathcal{J}(u^{(n-1)}) = \mu, \mathcal{J}(u) = \lambda\}|.$$

Заметим, что [87, Теорема 2.3] (см. также [100]) дает точную формулу для отношения  $\frac{\dim_t(\mu \nearrow \lambda)}{\dim_t(\mu)}$ , что, в частности, влечет, что  $\dim_t(\mu \nearrow \lambda)$  равно 0, если не выполнено  $\mu \nearrow \lambda$ .

**Гипотеза 1.** Пусть  $\lambda, \hat{\lambda} \in \mathbb{Y}_n$  и  $\mu, \hat{\mu} \in \mathbb{Y}_{n-1}$  — это две пары диаграмм Юнга  $\lambda, \hat{\lambda}$  и  $\mu, \hat{\mu}$  отличающихся движением одной клетки из позиции  $(i, j)$  в позицию  $(\hat{i}, \hat{j})$  с  $\hat{i} > i$ . Далее, предположим, что  $\lambda \setminus \mu = \hat{\lambda} \setminus \hat{\mu} = (r, c)$ . Если  $r < i$  то

$$\frac{\dim_t(\hat{\mu} \nearrow \hat{\lambda})}{\dim_t(\hat{\lambda})} \geq \frac{\dim_t(\mu \nearrow \lambda)}{\dim_t(\lambda)}.$$

Если  $r > \hat{i}$ , то

$$\frac{\dim_t(\hat{\mu} \nearrow \hat{\lambda})}{\dim_t(\hat{\lambda})} \leq \frac{\dim_t(\mu \nearrow \lambda)}{\dim_t(\lambda)}.$$

Эта гипотеза также может быть сформулирована в виде некоторых квадратичных неравенств. Компьютерные проверки подтверждают верность этой гипотезы, однако, мы пока не нашли доказательства.

При  $t = 1$  многочлены Холла-Литтлвуда превращаются в мономиальные функции, и гипотеза Керова становится теоремой Кингмана о классификации гомоморфизмов положительных на мономиальных функциях, см. [97, Глава 1]. Оба ингредиента нашего доказательства — неравенство для размерностей и закон больших чисел для экстремальных мер — в этом случае особенно просто и естественно доказываются. Таким образом, повторяя наши рассуждения для теоремы 2 можно получить новое доказательство теоремы Кингмана [99].

## 2.4 Формулы вычетов для препотенциалов, инстантонные разложения и конформные блоки

### 2.4.1 Вступление

Класс S-дуальности суперсимметричных колчанных теорий [108] включает в себя калибровочные теории с материей, заряженной более чем по одной калибровочной группе. В некоторых областях их пространств модулей традиционные методы квантовой теории поля неприменимы, но, несмотря на это, они всё равно могут быть исследованы путём применения геометрического подхода к  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричным калибровочным теориям, который был придуман довольно давно Зейбергом и Виттенем [109]. Особенно интригующим и интересным является то, что эта геометрия может быть рассмотрена независимо как с четырехмерной, так и с двумерной точек зрения [110, 111, 112, 113], позволяя использовать в последнем случае дуальную технику теорий с бесконечномерными алгебрами симметрий. Непосредственное наблюдение такой симметрии в четырёхмерной калибровочной теории остаётся одной из основных задач современной математической физики.

Зайберг-Виттеновский препотенциал в колчанных калибровочных теориях может быть естественным образом обобщён [114] для того, чтобы включить зависимость от голых (ультрафиолетовых) констант связи дополнительно к зависимости от конденсатов калибровочной теории. Таким образом он может быть отождествлён с более общим классом квазиклассических тау-функций [115], которые, как хорошо известно [116], возникают в контексте суперсимметричных калибровочных теорий. Исследованное ранее только для старших возмущений ультрафиолетового препотенциала [117, 118, 110, 119], это расширение обобщается для колчанных теорий и может быть выучено в деталях в рамках подхода, предложенного в [114].

Одним из практических применений геометрической картинки и интегрируемых уравнений в контексте калибровочной теории является то, что они предоставляют дополнительные методы для вычисления препотенциалов, описывающих лёгкие физические состояния в ультрафиолетовой теории. Эти методы одинаково работают как в областях, где теория имеет ультрафиолетовое лагранжево неабелево описание, так и в областях, где возможно только эффективное описание абелевых мод (или даже не известен лагранжиан ([108])). В первом случае в фазе слабой связи в  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной калибровочной теории всё описывается однопетлевой теорией возмущений и инстантонным вычислением [109, 120], в то время как в последнем стандартные методы квантовой теории поля не полностью применимы. Ниже мы собираемся использовать технику квазиклассических интегрируемых систем [115] для изучения разложений препотенциалов колчанных калибровочных теорий в разных областях пространства модулей, которые называются *разложениями в области слабой связи*, так как они совпадают с пертурбативным и инстантонным анализом во всех известных случаях, хотя сами по себе выходят за пределы, в которых такой анализ применим.

В этой работе предложены и применены методы исследования препотенциалов класса S-дуальности колчанных  $SU(2)$  калибровочных теорий, почти всегда с безмассовой материей (нулевые голые массы). Уже в этом случае есть некоторые сложности с анализом слабо связанных фаз с (полу-) трифундаментальными мультиплетами (так называемые сицилийские колчаны), где инстантонные вычисления [120] не могут быть непосредственно применены [121]. Тем не менее, разработанные методы приводя непосредственно к разложению в области слабой связи и в этом случае, и это позволяет надеяться на их применимость для наиболее интересного случая калибровочных теорий старшего ранга, где “сицилийская проблема” возникает в полной мере. Более того, когда одно из трифундаментальных состояний становится безмассовым, такие теории образуют класс четырёхмерных теорий с квадратичными препотенциалами, в которых константы связи перенормируются от своих затравочных значений только за счёт непертурбативных эффектов (пертурбативные бета-функции зануляются и пертурбативная перенормировка является конечной).

К счастью, для этого класса колчанных теорий есть хорошо известное описание на двумерной стороне, предложенное Алексеем Замолодчиковым в терминах конформных блоков в  $c = 1$  модели Ашкина-Теллера или скалярного поля на гиперэллиптической поверхности [123]. В подходе теории Зайберга-Виттена эта риманова поверхность возникает как частный вырожденный случай кривой Зайберга-Виттена для безмассового  $SU(2)$  колчана, где конденсаты калибровочной теории ограничены некоторыми условиями сохранения. Мы демонстрируем прямое отношение геометрического подхода к описанию в терминах двумерной конформной теории поля, что является одним из красивейших примеров  $4d/2d$  соответствия, которое продолжается, строго говоря, даже за пределы концепции АГТ-соответствия [113], так как общие функции Некрасова не известны в этих случаях [121] (см. также [122]).

Мы получаем обобщение замолочиковской ренормализационной формулы [124] (см. также [125, 126, 127, 128, 114]) для этого класса ограниченных калибровочных теорий, получая дифференциальные уравнения первого порядка для эффективных констант связи и их непосредственное решение через формулы Томэ. Кроме того, мы изучаем другой тип нелинейных дифференциальных уравнений для обобщённых препотенциалов – уравнения WDVV [129, 130, 131], которые непосредственно следуют из формул вычета, и доказываем, что они выполняются как в общем безмассовом, так и в ограниченном замолочиковском случаях.

Эта работа организована следующим образом. Раздел 2.4.2 содержит обзор подхода Зайберга-Виттена и его расширения на тау-функции колчанных калибровочных теорий. Мы показываем, что часть формул может быть непосредственно получена с помощью АГТ-соответствия из конформной теории поля и доказываем существование стандартной формулы вычета [115] для третьих производных обобщённых колчанных препотенциалов.

В разделе 2.4.3 мы предлагаем два разных, но непосредственно связанных метода вычисления разложений препотенциалов в области слабой связи, которые основываются



на дифференциальных уравнениях, следующих из формул вычетов, и на разложениях интегралов периодов. Этим способом мы восстанавливаем несколько хорошо известных примеров и изучаем в деталях две колчаных калибровочных теории (включая случай сицилийского колчана в разделе 2.4.3.3) и массивные деформации коноформных калибровочных теорий. Раздел 2.4.4 содержит анализ связи между ограниченными калибровочными теориями и точными замолотчиковскими коноформными блоками в модели Ашкина-Теллера: мы доказываем, что Зайберг-Виттеновское описание совпадает с результатом двумерной СФТ. Раздел 2.4.5 содержит обсуждение нелинейных дифференциальных уравнений для колчаных тау-функций. Мы показываем, что самые простые соотношения для матриц периодов замолотчиковского случая эквивалентны хорошо известным формулам Рауха, которые в нашем случае описывают непertурбативную перенормировку ультрафиолетовых констант связи в коноформных теориях. Этот раздел также содержит доказательство того, что препотенциал решает уравнение WDVV [131] как функция от *всех* переменных: как в полной безмассовой теории, так и в ограниченном случае. Раздел 2.4.6 посвящён короткому обсуждению наших результатов. Некоторые технические подробности содержатся в приложениях.

## 2.4.2 Общие положения

### 2.4.2.1 Интегрируемость

Начнём с определения системы Зайберга-Виттена [109], имея в виду класс S-дуальности колчаных калибровочных теорий [108] с калибровочной группой  $\bigotimes_k SU(N_c^{(k)})$ . Большую часть времени мы уделим суперконформным теориям, которые содержат фундаментальные, бифундаментальные и трифундаментальные мультиплеты материи в такой комбинации, которая обеспечивает зануление  $\beta$ -функций  $\beta_k = 0$  для всех простых компонент калибровочной группы, более того, часто с нулевыми, голыми массами. Класс асимптотически свободных теорий может быть получен из суперконформных с безразмерными голыми константами связи при помощи стандартной динамической трансмутации в пределе, когда (некоторые) голые массы становятся бесконечными и соответствующие мультиплеты отщепляются.

Определения теории включает:

- $g$ -параметрическое семейство кривых  $\Sigma$  рода  $g$ :  $F(x, z; u_1, \dots, u_g) = 0$  з обратим базисом в  $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$  (отмечены  $A$ - и  $B$ -циклы).
- Два мероморфных дифференциала  $dx$  и  $dz$  или 1-форма Зайберга-Виттена  $dS = xdz$ .
- Связность  $\nabla$  на пространстве модулей, такая, что производные  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}} dS$  голоморфны.

Уравнения Зайберга-Виттена имеют вид (общая конструкция содержится в [115], а первое применение для суперсимметричной калибровочной теории – в [109])

$$a_i = \frac{1}{2\pi i} \oint_{A_i} dS, \quad a_i^D = \oint_{B_i} dS = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_i} \quad i = 1, \dots, g \quad (2.4.1)$$

**Теорема 5.** *Существует локально определённая функция  $\mathcal{F}(a_1, \dots, a_g)$ , которая решает эту системы, разница любых двух решений не зависит от  $\mathbf{a}$ .*

**Доказательство:** Обозначим  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial a_i}} = \frac{\partial}{\partial a_i}$  и вычислим производные

$$\delta_{ij} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{A_i} \frac{\partial dS}{\partial a_j} \quad \frac{\partial a_i^D}{\partial a_j} = \oint_{B_i} \frac{\partial dS}{\partial a_j} = \mathcal{T}_{ij}$$

Из первой формулы мы делаем вывод, что  $\frac{\partial dS}{\partial a_i} = d\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, g$  канонически нормированные голоморфные 1-формы, т.е., вторые производные от препотенциала являются матрицей периодов, которая симметрична в силу билинейных соотношений Римана (БСР).

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Sigma} d\omega_i \wedge d\omega_j = \int_{\partial\Sigma_{\text{cut}}} \omega_i d\omega_j = \sum_{k=1}^g \left( \oint_{A_k} d\omega_i \oint_{B_k} d\omega_j - \oint_{A_k} d\omega_j \oint_{B_k} d\omega_i \right) = \\ &= \mathcal{T}_{ij} - \mathcal{T}_{ji} \end{aligned}$$

где мы использовали формулу Стокса для интеграла по границе  $\partial\Sigma_{\text{cut}}$  разрезанной римановой поверхности  $\Sigma$ . Таким образом, мы доказали, что 1-форма на пространстве модулей  $\eta = \sum_{i=1}^g \delta a_i a_i^D = \sum_{i=1}^g \delta \left( \oint_{A_i} dS \right) \cdot \oint_{B_i} dS$  замкнутая, то есть, локально она является дифференциалом некоторой функции  $\mathcal{F}$ . □

Давайте сейчас расширим и уточним наше определение семейства кривых

$$F(x, z; \mathbf{u}, \mathbf{q}) = F(x, z; u_1, \dots, u_g; q_1, \dots, q_n) = \sum_k x^k \phi_k(z) = 0 \quad (2.4.2)$$

накрывающих  $\Sigma \rightarrow \Sigma_0$  некоторую другую кривую  $\Sigma_0$  (её ещё часто называют “ультрафиолетовой” кривой или кривой Гайото), чьё пространство модулей может быть параметризовано с помощью  $\mathbf{q} = \{q_1, \dots, q_n\}$ , в то время как  $\mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_g\}$  параметризуют модули накрытия<sup>1</sup>. На кривой  $\Sigma$  определены два мероморфных дифференциала [115]:  $dz$ ,

<sup>1</sup>В наиболее простом, но важном случае накрытие является гиперэллиптическим, определённым квадратичным уравнением  $x^2 = \phi_2(z)$ , с полюсами в  $n$  отмеченных точках. В этом случае количество вакуумных конденсатов (размерность пространства модулей таких дифференциалов) равно размерности пространства Тейхмюллера  $\Sigma_0$ :  $l(2K + p_1 + \dots + p_n) = 4g_0 - 4 + n - g_0 + 1 = 3g_0 - 3 + n = \dim \text{Teich}_{g_0, n}$ , т.е., количество констант связи равно количеству вакуумных конденсатов (каждая  $SU(2)$  калибровочная группа приходит с константой связи и с вакуумным конденсатом), а полный набор параметров может быть идентифицирован с  $T^*(\text{Teich}_{g_0, n})$ . Род накрытия  $\Sigma$  получается из формулы Римана-Гурвица:

который может быть спроектирован на ультрафиолетовую кривую  $\Sigma_0$ , и  $dx$ , или производящая 1-форма  $dS = xdz$ . Связность  $\nabla = \nabla^z$  может быть определена через проекцию на  $z$ -плоскость:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}} f(z, x(z, \mathbf{u})) dz = \frac{\partial f(z, x(z, \mathbf{u}))}{\partial u_i} dz$$

Для рациональной кривой  $\Sigma_0$  с  $g_0 = 0$  параметры  $\{q_i\}$  являются координатами следующих точек на  $z$ -плоскости (оба варианта возможны):

- Точками ветвления накрытия, в которых  $x = \sum_{z \rightarrow q_i}^{k-1} C_l(z, \mathbf{q}, \vec{u})(z - q_i)^{-\frac{l}{k}}$  (безмассовый случай).
- Множеством регулярных точек накрытия  $\Sigma$ , где  $x dz$  имеет простые полюса с фиксированным вычетами (массивный случай).

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \sum_{p^{-1}(q_i)} \text{Res} \frac{(dS)^2}{dz}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.4.3)$$

Тут количество точек нужно считать с кратностями. Имеет место нетривиальная

**Теорема 6.** Системы (2.4.1) и (2.4.3) согласованы. Они определяют  $\mathcal{F}(\mathbf{a}, \mathbf{q})$ , с точностью до некоторой константы, в то время как (2.4.1) определяют  $\mathcal{F}(\mathbf{a}, \mathbf{q})$  с точностью до некоторой  $q_i$ -независимой функции.

**Доказательство:** В окрестности точек ветвления мы имеем

$$\begin{aligned} dS^{(1)} &= \sum_{z \rightarrow q_i}^{k-1} \frac{C_l(z, \mathbf{q}, \mathbf{a}) dz}{(z - q_i)^{\frac{l}{k}}} \\ dS^{(2)} &= \frac{m_i dz}{z - q_i} + C_0(z, \mathbf{q}, \mathbf{a}) dz \end{aligned}$$

где два возможных варианта обозначены как <sup>(1)</sup> или <sup>(2)</sup> соответственно. Тут  $C_l(z, \mathbf{q}, \mathbf{a}) = C_l + c_{1l}(z - q_i) + c_{2l}(z - q_i)^2 + \dots$  аналитические при  $z \rightarrow q_i$ , таким образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial dS^{(1)}}{\partial q_i} &= \sum_{z \rightarrow q_i}^{k-1} \frac{l}{k} \frac{C_l dz}{(z - q_i)^{\frac{l}{k}+1}} + hol. = -d \sum_{l=1}^k \frac{C_l dz}{(z - q_i)^{\frac{l}{k}}} + hol. \\ \frac{\partial dS^{(2)}}{\partial q_i} &= \frac{m_i dz}{(z - q_i)^2} + hol. = -d \frac{m_i}{z - q_i} + hol. \end{aligned}$$

---

$g = 2g_0 - 1 + \frac{1}{2} \sum (n_i - 1) = 2g_0 - 1 + 2g_0 - 2 + n = g_0 + (3g_0 - 3 + n)$ . К сожалению, этот анализ только частично может быть применён к случаю калибровочных групп старшего ранга, см. [114]. Мы рассмотрим ниже замолотчиковский или ограниченный случай, где количество конденсатов ограничено некоторыми условиями сохранения (или обнуления масс лёгких физических состояний), в то время как количество ультрафиолетовых констант связи остаётся неизменным. Таким образом, род редуцированной кривой  $\tilde{g} < n$  уменьшается.

поскольку вычеты фиксированные, или  $\frac{\partial m_i}{\partial q_i} = 0$ . Обозначим  $\frac{\partial dS}{\partial q_i} = d\Omega_i$ , таким образом в обоих случаях

$$\frac{dS}{dz} \Big|_{z \rightarrow q_i} = -\Omega_i + hol.$$

где  $\Omega_i(P) = \int_{P_0}^P d\Omega_i$  соответствующий абелев интеграл. Для смешанных производных мы получаем из 2.4.3

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_j \partial q_i} = \sum_{p^{-1}(q_i)} \text{Res} \frac{dS}{dz} \frac{\partial dS}{\partial a_j} = \sum_{p^{-1}(q_i)} \text{Res} \frac{dS}{dz} d\omega_j = - \sum \text{Res}(\Omega_i d\omega_j)$$

где можно сделать замену  $\frac{dS}{dz} \Big|_{z \rightarrow q_i} \approx -\Omega_i$ , поскольку  $d\omega_j$  голоморфная. С другой стороны, из 2.4.1 можно получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial q_i \partial a_j} &= \oint_{B_j} \frac{\partial dS}{\partial q_i} = \oint_{B_j} d\Omega_i = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^g \left( \oint_{A_l} d\omega_j \oint_{B_l} d\Omega_i - \oint_{B_l} d\omega_j \oint_{A_l} d\Omega_i \right) = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \Sigma_{\text{cut}}} \Omega_i d\omega_j = - \sum \text{Res}(\Omega_i d\omega_j) \end{aligned}$$

где мы использовали  $0 = \frac{\partial a_k}{\partial q_i} = \oint_{A_k} d\Omega_j$ , и просуммировали по всем полюсам  $\Omega_i$ . Таким образом, мы доказали, что  $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a_j \partial q_i} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial q_i \partial a_j}$ , что означает согласованность уравнений.

Рассмотрим другой набор смешанных производных

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial q_j \partial q_i} = \sum_{p^{-1}(q_i)} \text{Res} \frac{dS}{dz} d\Omega_j = - \sum_{p^{-1}(q_i)} \text{Res}(\Omega_i d\Omega_j) \quad (2.4.4)$$

откуда разность равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial q_j \partial q_i} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial q_i \partial q_j} &= - \sum_{p^{-1}(q_i)} \text{Res}(\Omega_i d\Omega_j) + \sum_{p^{-1}(q_j)} \text{Res}(\Omega_j d\Omega_i) = \\ &= - \sum_{p^{-1}(q_i)} \text{Res} d(\Omega_i \Omega_j) + \sum \text{Res}(\Omega_j d\Omega_i) \end{aligned}$$

Тут первое слагаемое равно 0 по тривиальной причине, а второе – из-за равенства

$$\sum \text{Res}(\Omega_j d\Omega_i) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^g \left( \oint_{A_l} d\Omega_j \oint_{B_l} d\Omega_i - \oint_{B_l} d\Omega_j \oint_{A_l} d\Omega_i \right) = 0$$

Т.е., все смешанные производные равны благодаря БСР.  $\square$

#### 2.4.2.2 Формула вычетов

Третьи производные классических тау-функций имеют красивые выражения в виде формул вычетов [115]. Для того, чтобы доказать это в нашем случае, объединим все переменные в одно множество  $\{X_I\} = \{a_i\} \cup \{q_k\}$ , и сделаем то же самое с дифференциалами:  $\{d\varpi_I\} = \{d\omega_i\} \cup \{d\Omega_k\}$ .

**Теорема 7.** *Имеет место формула вычетов для третьих производных обобщённого пре-потенциала, определённого (2.4.1) и (2.4.3)*

$$\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial X_I \partial X_J \partial X_K} = \sum_{dx=0} \text{Res} \frac{d\varpi_I d\varpi_J d\varpi_K}{dx dz} \quad (2.4.5)$$

**Доказательство:** Рассмотрим наиболее сложный случай третьих производных по  $\mathbf{q}$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k} = \sum_{dx=0} \text{Res} \frac{d\Omega_i d\Omega_j d\Omega_k}{dx dz} \quad (2.4.6)$$

Формулы для третьих производных по  $\mathbf{a}$  (см., например, [132]) и смешанных производных доказываются тем же самым способом.

Начнём с

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial q_j \partial q_i} = \sum_{p^{-1}(q_i)} \text{Res} \frac{dS}{dz} d\Omega_j = \sum_{p^{-1}(q_i)} \text{Res} x d\Omega_j$$

Для дальнейшего взятия производных по  $q$  удобнее использовать связность  $\nabla^x$ , которая определена через проекцию на  $x$ -плоскость:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial q_i}}^x d\Omega_j = \frac{\partial}{\partial q_i} d\Omega_j(x, z(x, \mathbf{u})) = \frac{\partial}{\partial q_i} d\Omega_j \Big|_x$$

так что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial q_j \partial q_i \partial q_k} &= \sum_{p^{-1}(q_i)} \text{Res} x \frac{\partial d\Omega_j}{\partial q_k} \Big|_x = - \sum_{p^{-1}(q_i)} \text{Res} \Omega_i \frac{\partial d\Omega_j}{\partial q_k} \Big|_x = \quad (2.4.7) \\ &= \sum_{p^{-1}(q_i)} \text{Res} d\Omega_i \frac{\partial \Omega_j}{\partial q_k} \Big|_x = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \Sigma_{\text{cut}}} d\Omega_i \frac{\partial \Omega_j}{\partial q_k} \Big|_x - \sum_{dx=0} \text{Res} d\Omega_i \frac{\partial \Omega_j}{\partial q_k} \Big|_x = \\ &= - \sum_{dx=0} \text{Res} d\Omega_i \frac{\partial \Omega_j}{\partial q_k} \Big|_x \end{aligned}$$

где мы использовали тот факт, что сингулярная часть  $d\Omega_j$  возле  $q_i$  пропорциональна  $dx$ , потому производная  $\frac{\partial d\Omega_j}{\partial q_k} \Big|_x$  голоморфная, а дальше преобразовали выражение в сумму по всем точкам ветвления  $dx = 0$ , используя интеграл по границе разрезанной поверхности  $\Sigma$  и нормировку  $\oint_{A_i} d\Omega_j = 0$ .

Теперь суммирование происходит по точкам ветвления проекции на  $x$ -плоскость. Без потери общности можно предположить, что все эти точки являются простыми. В окрестности каждой такой точки с координатами  $(z, x) = (z^*, x^*)$  можно написать (с точностью для членов, не дающих вклада в конечную формулу, что обозначено символом " $\approx$ ")

$$x \approx x^* + a(z - z^*)^2, \quad z \approx z^* + \sqrt{\frac{x - x^*}{a}}, \quad dz \approx \frac{dx}{2\sqrt{a(x - x^*)}}$$

то есть

$$dS \approx x^* dz, \quad d\Omega_k = \left. \frac{\partial dS}{\partial q_k} \right|_z \approx \frac{\partial x^*}{\partial q_k} dz$$

$$\Omega_k \approx \frac{\partial x^*}{\partial q_k} z \approx \frac{\partial x^*}{\partial q_k} \sqrt{\frac{x - x^*}{a}}, \quad \left. \frac{\partial \Omega_j}{\partial q_k} \right|_x \approx -\frac{\frac{\partial x^*}{\partial q_j} \frac{\partial x^*}{\partial q_k}}{2\sqrt{a(x - x^*)}}$$

и потому

$$\frac{\partial x^*}{\partial q_k} \approx \frac{d\Omega_k}{dz}, \quad \left. \frac{\partial \Omega_j}{\partial q_k} \right|_x \approx -\frac{d\Omega_j}{dz} \frac{d\Omega_k}{dz} \frac{dz}{dx} = -\frac{d\Omega_j d\Omega_k}{dx dz}$$

дальше, подставляя в 2.4.7, мы получаем 2.4.6.  $\square$

Отметим, что эта формула была доказана почти в наиболее общем случае, потому ею можно пользоваться во всех случаях, где это будет нужно.

### 2.4.2.3 АГТ-соответствие и формулы вычетов

Спектральная кривая большого класса S-дуальности колчаных калибровочных теорий [108] может быть записана в форме 2.4.2, где  $k$ -дифференциалы  $\{\phi_k\}$  определены на ультрафиолетовой кривой  $\Sigma_0$  - во многих случаях – просто на римановой сфере с отмеченными точками  $\{z_i\} = \{0, 1, \infty, q_1, q_2, q_3, \dots\}$ , в которых им разрешено иметь особенности фиксированного вида. Положения этих особенностей  $\{q_i\}$  параметризуют пространство ультрафиолетовых констант связи теории.

Эта картинка становится очень простой в случае  $SU(2)$ -теорий, где она имеет понятную интерпретацию в терминах двумерной конформной теории поля (CFT). Уравнение спектральной кривой 2.4.2

$$x^2 = \phi_2(z) = \langle T(z) \rangle = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\Delta_j}{(z - z_j)^2} + \frac{u_j}{z - z_j} \right) \quad (2.4.8)$$

приводит сразу к формуле вычета 2.4.3 для первых производных препотенциала в терминах производящего дифференциала  $dS = x dz$

$$u_i = \text{res}_{z=z_i} x^2 dz = \text{res}_{z=z_i} \frac{dS dS}{dz} = \frac{1}{2} \text{Res}_{P_i^\pm} \frac{dS dS}{dz} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_i}$$

Беря ещё одну производную (при постоянном  $z$ ) мы получаем

$$2x \frac{\partial x}{\partial z_j} = \frac{2\Delta_j}{(z - z_j)^3} + \frac{u_j}{(z - z_j)^2} + \frac{\partial u_j / \partial z_j}{z - z_j} + \sum_{i \neq j} \frac{\partial u_i / \partial z_j}{z - z_i}$$

то есть

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_j^2} = 2 \text{res}_{z=z_j} x \frac{\partial x}{\partial z_j} dz = 2 \text{res}_{z=z_j} \frac{dS d\Omega_j}{dz}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_i \partial z_j} = 2 \text{res}_{z=z_i} x \frac{\partial x}{\partial z_j} dz = 2 \text{res}_{z=z_i} \frac{dS d\Omega_j}{dz}, \quad i \neq j$$

где

$$d\Omega_j = \frac{\partial x}{\partial z_j} dz = \nabla_{\frac{\partial}{\partial z_j}}^z x dz = \nabla_{\frac{\partial}{\partial z_j}}^z dS$$

и производные

$$\frac{\partial u_k}{\partial z_i} = \left. \frac{\partial u_k}{\partial z_i} \right|_{\mathbf{a}}$$

взяты при постоянных  $\mathbf{a}$ -периодах  $\mathbf{a} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{A}} x dz$  дифференциала Зайберга-Виттена.

Следует отметить, что не все из этих формуле независимы из-за связи, приходящей вследствие требования регулярности в точке  $z = \infty$

$$\sum_{j=1}^n u_j = 0, \quad \sum_{j=1}^n (z_j u_j + \Delta_j) = 0, \quad \sum_{j=1}^n (z_j^2 u_j + 2z_j \Delta_j) = 0$$

Рассмотрим параметризацию пространства голых констант связи, которая индуцирована заменой  $z \rightarrow \omega(z)$ . Это можно удобно записать через  $d\omega = dz/f(z)$ . Первые производные деформированного препотенциала  $\mathcal{F}_f$  даются формулами

$$f(z_i) \frac{\partial \mathcal{F}_f}{\partial z_i} = \text{res}_{z=z_i} \frac{dS dS}{dz/f(z)} = \text{res}_{z=z_i} f(z) x^2 dz$$

Считая вычет в правой части и используя 2.4.8 мы находим, что

$$f(z_i) \frac{\partial \mathcal{F}_f}{\partial z_i} = f(z_i) u_i + f'(z_i) \Delta_i$$

и это соответствует преобразованию

$$\mathcal{F}_f = \mathcal{F} + \sum_{i=1}^n \Delta_i \log f(z_i)$$

которое не изменяет производные препотенциала по переменным периодам  $\mathbf{a}$ .

Отметим, что формула вычета выполняется также для произвольного  $d\omega = \frac{dz}{f(z)}$ :

$$\frac{\partial^3 \mathcal{F}_f}{\partial \omega(z_i) \partial \omega(z_j) \partial \omega(z_k)} = \sum_{d(xf(z))=0} \frac{d\Omega_i^f d\Omega_j^f d\Omega_k^f}{d(xf(z)) d\omega}$$

где  $d\Omega_i^f = f(z_i) \left. \frac{\partial dS}{\partial z_i} \right|_z$ . Понятно, что доказательство из части 2.4.2.2 может быть переписано буквально для дифференциала  $dz/f(z)$  и функции  $xf(z)$ .

Аналогично мы можем рассмотреть замену констант связи, которая отвечает

$$(z_1, \dots, z_n) \rightarrow (q_1, \dots, q_{n-3}, 1, 0, \infty)$$

Например, для  $f(z) = \frac{(z-z_n)(z-z_{n-1})}{z_n - z_{n-1}}$  с некоторыми фиксированными  $(z_n, z_{n-1}, z_{n-2})$  можно получить

$$\begin{aligned} z_j \frac{\partial \mathcal{F}_f}{\partial z_j} &= \text{res}_{z_j} \frac{dS}{d\omega} dS = \text{res}_{z_j} \frac{x^2 dz}{d\omega/dz} = \\ &= \frac{2z_j - z_n - z_{n-1}}{z_n - z_{n-1}} \Delta_j + \frac{(z_j - z_n)(z_j - z_{n-1})}{z_n - z_{n-1}} u_j \quad j = 1, \dots, n-3 \end{aligned}$$

где  $d\omega = \frac{dz}{f(z)} = \frac{dz}{z-z_n} - \frac{dz}{z-z_{n-1}}$ . Таким образом мы можем просто восстановить все формулы из статьи [114].

### 2.4.3 Разложения препотенциалов при маленькой константе связи

В этом разделе мы предлагаем методы анализа кочанных калибровочных теорий в области слабой связи, которые основываются на использовании формул вычетов. Для пертурбативных частей препотенциалов вместо вычислений матриц периодов вырожденных кривых достаточно вычислить только вычеты некоторых 1-форм, спускающихся с кривой Зайберга-Виттена  $\Sigma$  на ультрафиолетовую кривую Гайото  $\Sigma_0$ . Это процедура была использована для определения зависимости пертурбативного препотенциала от вакуумных конденсатов в статье [133], мы же расширим её для тау-функций колчанных калибровочных теорий как функций голых констант связи.

Зависимость пертурбативных препотенциалов от ультрафиолетовых констант значительно проще и может быть сравнена с однопетлевым вычислением в соответствующих суперсимметричных квантовых теориях поля. Кроме того, применение наших методов может быть расширено для вычисления полного разложения препотенциала в области слабой связи<sup>1</sup>. Мы можем применить для этого дифференциальные уравнения, которые получаются из формулы вычетов 2.4.6 для третьих производных по  $\mathbf{q}$ , выражая их потом через первые 2.4.3 и вторые 2.4.4 производные того же препотенциала. Кроме того, мы можем вычислять степенные поправки к голому препотенциалу, анализируя разложение по степеням  $\mathbf{q}$  периодов дифференциала Зайберга-Виттена, которые являются постоянными интегрирования наших нелинейных уравнений. Эти степенные поправки в точности отвечают инстантонным разложениям в колчанных калибровочных теориях, но также позволяют продвинуться дальше, где эти разложения пока что не могут быть определены [121]. В качестве примера мы вычислим разложение для случая сицилийского колчана с тремя  $SU(2)$  группами, что дальше будет использоваться для обсуждения ограниченного или замолодчиковского случая.

#### 2.4.3.1 Методы разложения в области слабой связи

Эффективное решение уравнений (2.4.1) обычно очень осложнено сложной геометрией спектральной кривой (см., например, [136]). Но, к счастью, в окрестности некоторых точек в пространстве модулей, где спектральная кривая вырождается, можно найти степенное разложение препотенциала. Мы опишем два разных, но тесно связанных метода этого вычисления.

##### Метод I:

- Параметризуем спектральную кривую с помощью  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i}$ , используя (2.4.3);
- Подставляем разложение  $\mathcal{F} = \mathbf{A} \log \mathbf{q} + \sum_{\mathbf{k} > 0} c_{\mathbf{k}} \mathbf{q}^{\mathbf{k}}$  в первую половину уравнений (2.4.1) и решаем полученные уравнения итеративно;

---

<sup>1</sup>Окрестности вырожденных кривых в пространстве модулей обычно называют областями слабой связи: соответствующие теории имеют лагранжево описание, а полное разложение может быть найдено из инстантонного вычисления.



— Восстанавливаем  $\mathbf{q}$ -независимую часть препотенциала с помощью (2.4.5) для производных по  $\mathbf{a}$ .

### Метод II:

— Получаем нелинейные дифференциальные уравнения для препотенциала как функции от  $\mathbf{q}$ , используя (2.4.5). Они выражают третьи производные препотенциала через первые (коэффициенты в уравнении кривой) и вторые (коэффициенты в разложениях дифференциалов  $d\Omega$ );

— Решаем первое уравнение (2.4.1) в вырожденном пределе и восстанавливаем слабое  $\mathbf{A} \log \mathbf{q}$ ;

— Подставляем разложение  $\mathcal{F} = \mathbf{A} \log \mathbf{q} + \sum_{\mathbf{k}>0} c_{\mathbf{k}} \mathbf{q}^{\mathbf{k}}$  в полученное дифференциальное уравнение и решаем его итеративно;

— Восстанавливаем  $\mathbf{q}$ -независимую часть препотенциала с помощью (2.4.5) для производных по  $\mathbf{a}$ .

Строго говоря, первый метод является просто модификацией второго, так как он использует непосредственно интегралы периодов, играющие роль интегралов движения для дифференциального уравнения, которое используется во втором методе вычисления. Дальше мы будем использовать оба метода в зависимости от конкретной ситуации.

### 2.4.3.2 Тренировочные примеры

#### **Начальная теория Зайберга-Виттена**

Начнём с интегрируемой системы из первой работы Зайберга-Виттена [109]

$$y^2 = (x^2 - \Lambda^4)(x - u), \quad dS = \sqrt{\frac{2(u-x)}{x^2 - \Lambda^4}} dx$$

Введём  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$ , такі що  $\Lambda^2 = \lambda_1 - \lambda_2$  и

$$dS = \sqrt{\frac{2\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + u - x\right)}{(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)}} dx$$

(мы всегда можем положить  $\lambda_c = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$  в конце), тогда из 2.4.3 следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_1} &= \text{Res}_{\lambda_1} \frac{2\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + u - x\right)}{(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 2u}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_2} &= \text{Res}_{\lambda_2} \frac{2\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + u - x\right)}{(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + 2u}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned}$$

Так как  $\frac{\partial}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial}{\partial \Lambda^2} + \frac{\partial}{\partial \lambda_c}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \lambda_2} = -\frac{\partial}{\partial \Lambda^2} + \frac{\partial}{\partial \lambda_c}$ , таки образом, мы находим  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_c} = 1$  и

$$\Lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Lambda} = 4u$$

Подставляя

$$d\Omega = \frac{\partial dS}{\partial \Lambda^2} = \left( \frac{\Lambda^2}{x^2 - \Lambda^4} + \frac{1}{4\Lambda} \frac{\partial u}{\partial \Lambda} \frac{1}{u - x} \right) y dx$$

в формулу вычетов 2.4.5 мы получаем

$$\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{(\partial \Lambda^2)^3} = -2 \sum_{x \in \{\pm \Lambda^2, u\}} \text{Res} \frac{(d\Omega)^3}{dx dy} = \sum_{x \in \{\pm \Lambda^2, u\}} \text{Res} \left( \frac{2\Lambda^2}{x^2 - \Lambda^4} + \frac{1}{2\Lambda} \frac{\partial u}{\partial \Lambda} \frac{1}{u - x} \right)^3 \frac{dx}{(2/y^2)'}$$

и, вычисляя вычет, находим уравнение на препотенциал:

$$\boxed{2\Lambda^2 \left( \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Lambda} \right)^2 - 16\Lambda^2 \right) \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial \Lambda^3} + \left( \Lambda \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Lambda^2} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Lambda} \right)^3 = 0}$$

Оно, конечно же, хорошо известно (см., например, [134]), и даже эквивалентно в этом случае гипергеометрическому, записанному в терминах обратной функции. Единственной важной для нас вещью является то, что оно также получается из формулы вычета и позволяет сразу вычислить разложение препотенциала в области слабой связи. Подставляя анзац  $\mathcal{F} = 2a^2 \log \Lambda + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Lambda^{4k} a^{2-4k}$  и решая алгебраические уравнения на коэффициенты  $c_k$ , мы можем получить известный результат

$$\mathcal{F} = -2a^2 \log a + 2a^2 \log \Lambda + \frac{\Lambda^4}{4a^2} + \frac{5\Lambda^8}{128a^6} + \frac{3\Lambda^{12}}{128a^{10}} + \dots$$

Следует только отметить, что всюду в этом примере использовалась начальная параметризация [109] периода  $a$ , которая отвечает массе  $W$ -бозона.

### Конформная $SU(2)$ теория

Сейчас, снова в иллюстративных целях, рассмотрим  $SU(2)$  теорию с четырьмя безмассовыми мультиплетам, что отвечает сфере с  $n = 4$  отмеченными точками. Уравнение 2.4.8 принимает вид

$$x^2 = \frac{u}{z(z-1)(z-q)} = \frac{q(q-1) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q}}{z(z-1)(z-q)} \quad (2.4.9)$$

так как

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} = \text{res}_{z=q} x^2 dz = \frac{u}{q(q-1)}$$

Формула вычета

$$\left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} \right)^2 \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial q^3} = \frac{1}{2} \text{Res}_q \left( \left( \frac{1}{z-q} + \frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} \right) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial q^2} \right)^3 \frac{q(q-1)(dz)^2}{d(z(z-1)(z-q))}$$

приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial q^3} = \frac{3}{2} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial q^2} \right)^2 + \frac{1-q+q^2}{2q^2(q-1)^2} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} \right)^2$$

которое может быть записано в форме

$$\{\mathcal{F}, q\} = \frac{1 - q + q^2}{2q^2(q - 1)^2} \quad (2.4.10)$$

где  $\{\cdot, \cdot\}$  обозначает производную Шварца. Общее его решение имеет вид

$$\mathcal{F} = \frac{AK(1 - q) + BK(q)}{CK(1 - q) + DK(q)}, \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{C})$$

Это следует из того, что  $K(q) = \int_0^q \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-q)}}$  та  $K(1-q) = \int_q^1 \frac{dz}{\sqrt{-z(z-1)(z-q)}}$  образуют базис в решениях уравнения  $f''(q) + T(q)f(q) = 0$  из  $T(q) = \frac{1-q+q^2}{2q^2(q-1)^2}$ .

Для того, чтобы зафиксировать физическое решение, нам нужно наложить условие  $\mathcal{F} = a^2 \log q + \dots$ , что даёт

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= i\pi a^2 \tau(q) = -\pi a^2 \frac{K(1-q)}{K(q)} = \\ &= a^2 \left( \log q - \log 16 + \frac{q}{2} + \frac{13q^2}{64} + \frac{23q^3}{192} + \frac{2701q^4}{32768} + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Это только один из способов получить непертурбативную перенормировку константы связи в конформной теории поля с нулевой бета-функцией (сравните з [125, 126, 127, 128]).

### 2.4.3.3 Колчаные калибровочные теории и класс S-дуальности

#### $SU(2) \times SU(2)$ линейный колчан

Давайте теперь займёмся колчанными калибровочными теориями и сначала рассмотрим  $SU(2) \times SU(2)$  калибровочную теорию с четырьмя безмассовыми фундаментальными мультиплетами и одним бифундаментальным. Мы будем её рассматривать в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$  после параметризации  $q_1 = \epsilon Q_1$ ,  $q_2 = 1 - \epsilon Q_2$ , где параметр  $\epsilon$  играет роль формального параметра для подсчёта порядка малости, потому мы положим  $\epsilon = 1$  в конечном ответе. Уравнение спектральной кривой 2.4.8 теперь выглядит как

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{q_1(q_1 - 1) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_1}}{z(z-1)(z-q_1)} + \frac{q_2(q_2 - 1) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_2}}{z(z-1)(z-q_2)} = \\ &= \frac{(1-z)F_1(1-\epsilon Q_1) + zF_2(1-\epsilon Q_2) + \epsilon^2 Q_1 Q_2 (F_1 + F_2)}{z(\epsilon Q_1 - z)(z-1)(1-\epsilon Q_2 - z)} \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

где мы параметризовали кривую с помощью  $F_1 = q_1 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_1} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \log Q_1}$ , та  $F_2 = (q_2 - 1) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_2} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \log Q_2}$ .

Теперь мы можем посчитать периоды  $a_i = \frac{1}{2\pi i} \oint_{A_i} x dz$ ,  $i = 1, 2$ , раскладывая эти интегралы в ряд. А именно,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sqrt{F_1}}{\pi} \int_0^{\epsilon Q_1} \sqrt{\frac{(1-z)(1-\epsilon Q_1) + z \frac{F_2}{F_1}(1-\epsilon Q_2) + \epsilon^2 Q_1 Q_2 (1 + \frac{F_2}{F_1})}{(1-z)(1-\epsilon Q_2 - z)}} \frac{dz}{\sqrt{z(\epsilon Q_1 - z)}} \quad (2.4.13) \\ &= \frac{\sqrt{F_1}}{\pi} \int_0^{\epsilon Q_1} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_{1,k} z^k \right) \frac{dz}{\sqrt{z(\epsilon Q_1 - z)}} = \\ &= \sqrt{F_1} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k Q_1^k \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} f_{1,k}(\epsilon Q_1, \epsilon Q_2, F_2/F_1) \right) \end{aligned}$$

где интегралы были вычислены с использованием формулы

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\epsilon Q_1} \frac{z^n dz}{\sqrt{z(\epsilon Q_1 - z)}} = \epsilon^n Q_1^n \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(n + 1)} = \epsilon^n Q_1^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \quad (2.4.14)$$

То же самое нужно сделать с  $A_2$ -периодом

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\sqrt{F_2}}{\pi} \int_{1-\epsilon Q_2}^1 \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2,k}(\epsilon Q_1, \epsilon Q_2, F_1/F_2)(z-1)^k \right) \frac{dz}{\sqrt{(1-z)(z-1+\epsilon Q_2)}} \quad (2.4.15) \\ &= \sqrt{F_2} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \epsilon^k Q_2^k \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} f_{2,k}(\epsilon Q_1, \epsilon Q_2, F_1/F_2) \right) \end{aligned}$$

Непосредственно для разложений 2.4.13 и 2.4.15 выходит

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{F_1} - \frac{Q_1(F_1 + F_2)}{4\sqrt{F_1}} \epsilon - \frac{Q_1^2(7F_1^2 + 14F_1F_2 + 3F_2^2)}{64F_1^{3/2}} \epsilon^2 - \\ &- \frac{Q_1^2(17F_1^3Q_1 + 51F_1^2F_2Q_1 + 23F_1F_2^2Q_1 + 5F_2^3Q_1 + 16F_1^2F_2Q_2)}{256F_1^{5/2}} \epsilon^3 + \dots \\ a_2 &= \sqrt{F_2} - \frac{Q_2(F_1 + F_2)}{4\sqrt{F_2}} \epsilon - \frac{Q_2^2(7F_2^2 + 14F_2F_1 + 3F_1^2)}{64F_2^{3/2}} \epsilon^2 - \\ &- \frac{Q_2^2(17F_2^3Q_2 + 51F_2^2F_1Q_2 + 23F_2F_1^2Q_2 + 5F_1^3Q_2 + 16F_2^2F_1Q_1)}{256F_2^{5/2}} \epsilon^3 + \dots \end{aligned}$$

Подставляя сюда  $F_1 = a_1^2 + \sum_{k=1}^{\infty} F_{1,k} \epsilon^k$ ,  $F_2 = a_2^2 + \sum_{k=1}^{\infty} F_{2,k} \epsilon^k$  и обращая эти уравнения, можно получить, например, что  $Q_1 \frac{\partial F_2}{\partial Q_1} = Q_2 \frac{\partial F_1}{\partial Q_2}$ , и получить конечные выражения для препотен-

циала. Он имеет вид (после подстановки  $\epsilon = 1$ )

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathbf{a}, \mathbf{q}) = & \mathcal{F}_{\text{pert}}(\mathbf{a}) + a_1^2 \log Q_1 + a_2^2 \log Q_2 + \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} (Q_1 + Q_2) + (2.4.16) \\
& + \frac{13a_1^4 + 18a_1^2 a_2^2 + a_2^4}{64a_1^2} Q_1^2 + \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} Q_1 Q_2 + \frac{13a_2^4 + 18a_1^2 a_2^2 + a_1^4}{64a_2^2} Q_2^2 + \\
& + \frac{23a_1^4 + 18a_1^2 a_2^2 + a_2^4}{64a_1^2} Q_1^3 + \frac{13a_1^4 + 18a_1^2 a_2^2 + a_2^4}{64a_1^2} Q_1^2 Q_2 + \\
& + \frac{13a_2^4 + 18a_1^2 a_2^2 + a_1^4}{64a_2^2} Q_1 Q_2^2 + \frac{23a_2^4 + 18a_1^2 a_2^2 + a_1^4}{64a_2^2} Q_2^3 + \\
& + \frac{2701a_1^8 + 5028a_1^6 a_2^2 + 470a_1^4 a_2^4 - 12a_1^2 a_2^6 + 5a_2^8}{32768a_1^6} Q_1^4 + \frac{23a_1^4 + 28a_1^2 a_2^2 + 3a_2^4}{128a_1^2} Q_1^3 Q_2 + \\
& + \frac{17a_1^6 + 343a_1^4 a_2^2 + 343a_1^2 a_2^4 + 17a_2^6}{1024a_1^2 a_2^2} Q_1^2 Q_2^2 + \dots
\end{aligned}$$

Отметим, что коэффициенты  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{13}{64}$ ,  $\frac{23}{192}$ ,  $\frac{2701}{32768}$  у 2.4.16 являются коэффициентами разложения  $-\pi \frac{K(1-q)}{K(q)}$ , или препотенциала 2.4.11 для единственной калибровочной группы  $SU(2)$ .

Для того, чтобы зафиксировать пертурбативную часть, мы можем применить формулу вычета 2.4.5 для производных по  $\mathbf{a}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \mathcal{F}_{\text{pert}}}{\partial a_1^3} &= -2 \sum_{dz=0} \text{res} \left( \frac{\partial \log x}{\partial a_1} \right)^3 x^2 \frac{dz}{(\log x)'} = \\
&= -2 \sum_{dz=0} \text{res} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial a_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial a_1} \frac{1}{z-v} \right)^3 \frac{2\alpha(z-v)dz}{\prod(z-z_i) \left( \frac{1}{z-v} - \sum \frac{1}{z-z_i} \right)} = \\
&= -2 \text{res}_{z=v} \frac{dz}{z-v} \left( \frac{1}{2} (z-v) \frac{\partial \alpha}{\partial a_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial a_1} \right)^3 \frac{2\alpha}{\prod(z-z_i) \left( 1 - \sum \frac{z-v}{z-z_i} \right)} = \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial a_1} \right)^3 \frac{\alpha}{\prod(v-z_i)}
\end{aligned}$$

на вырожденной кривой (2.4.12)

$$x^2 = \frac{(1-z)a_1^2 + za_2^2}{z(z-\epsilon Q_1)(z-1)(z-1+\epsilon Q_2)} = \frac{\alpha(z-v)}{\prod(z-z_i)}$$

где мы подставили  $\epsilon \rightarrow 0$  в числителе, т.е.,  $F_1 = a_1^2$ ,  $F_2 = a_2^2$ . В этом пределе  $\epsilon \rightarrow 0$ :  $v = \frac{a_1^2}{a_1^2 - a_2^2}$ ,  $\alpha = a_2^2 - a_1^2$ , то есть,

$$\frac{\partial v}{\partial a_1} = -\frac{2a_1 a_2^2}{(a_1^2 - a_2^2)^2}, \quad \prod(v-z_i) = \frac{a_1^4 a_2^4}{(a_1^2 - a_2^2)^4}$$

и мы положили

$$\frac{\partial^3 \mathcal{F}_{\text{pert}}}{\partial a_1^3} = \frac{2}{a_1 - a_2} + \frac{2}{a_1 + a_2} - \frac{4}{a_1}$$

что даёт выражение для  $\mathbf{q}$ -независимой части

$$\mathcal{F}_{\text{pert}} = (a_1 - a_2)^2 \log(a_1 - a_2) + (a_1 + a_2)^2 \log(a_1 + a_2) - 2a_1^2 \log a_1 - 2a_2^2 \log a_2$$

## $SU(2) \times SU(2) \times SU(2)$ сицилийский колчан

Для теории с группой  $SU(2) \times SU(2) \times SU(2)$  кривая 2.4.8 параметризуется как

$$x^2 = \frac{Q_1(\epsilon Q_1 - 1) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Q_1}}{z(z - \epsilon Q_1)(z - 1)} + \frac{(1 - \epsilon Q_2) Q_2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Q_2}}{z(z - 1 + \epsilon Q_2)(z - 1)} + \frac{(1 - \frac{1}{\epsilon Q_3}) Q_3 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Q_3}}{z(z - 1)(z - \frac{1}{\epsilon Q_3})} \quad (2.4.17)$$

Мы выбрали параметризацию  $q_1 = \epsilon Q_1$ ,  $q_2 = 1 - \epsilon Q_2$ ,  $q_3 = \frac{1}{\epsilon Q_3}$  в пространстве ультрафиолетовых констант связи таким образом, что бы сделать удобным вычисление в слабо связанной фазе сицилийского колчана с безмассовыми фундаментальными (полу-) трифундаментальными мультиплетами. Эта параметризация приспособлена для вырождения кривой таким образом, что она имеет одну центральную компоненту (которая отвечает трифундаменталу), присоединённую к трём другим компонентам (каждая из которых соответствует паре фундаменталов)<sup>1</sup>.

Снова обозначим  $F_i = Q_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Q_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , и решим уравнения для  $A$ -периодов того же типа, как 2.4.13, 2.4.15. Сейчас нам нужно вычислить ещё один интеграл  $\int_{\frac{1}{\epsilon Q_3}}^{\infty} \frac{z^{-k-1} dz}{\sqrt{\epsilon Q_3 z - 1}}$ , который отвечает третьему  $A$ -периоду, который точно так же считается с помощью формулы, подобной 2.4.14. Такая же процедура, как и для случая двух калибровочных групп, приводит непосредственно к ответу

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & a_1^2 \log Q_1 + a_2^2 \log Q_2 + a_3^2 \log Q_3 - 2a_1^2 \log a_1 - 2a_2^2 \log a_2 - 2a_3^2 \log a_3 + \quad (2.4.18) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\epsilon, \epsilon' = \pm} (a_1 + \epsilon a_2 + \epsilon' a_3)^2 \log(a_1 + \epsilon a_2 + \epsilon' a_3) + \\ & + \frac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}{2} Q_1 + \frac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}{2} Q_2 + \frac{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} Q_3 + \\ & + \frac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}{4} Q_1 Q_2 + \frac{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}{4} Q_2 Q_3 + \frac{a_1^2 - a_2^2 + a_3^2}{4} Q_1 Q_3 + \\ & + \frac{13a_1^4 + 18a_1^2 a_2^2 - 14a_1^2 a_3^2 + a_2^4 - 2a_2^2 a_3^2 + a_3^4}{64a_1^2} Q_1^2 + \\ & + \frac{a_1^4 + 13a_2^4 - 14a_2^2 a_3^2 + a_3^4 + 18a_1^2 a_2^2 - 2a_1^2 a_3^2}{64a_2^2} Q_2^2 + \\ & + \frac{a_1^4 + a_2^4 + 18a_2^2 a_3^2 + 13a_3^4 - 2a_1^2 a_2^2 - 14a_1^2 a_3^2}{64a_3^2} Q_3^2 + \dots \end{aligned}$$

Стоит отметить, что результат в этом случае, где стандартные методы [120] инстантонных вычислений не могут быть применены непосредственно [121], получается из анализа тау-функций калибровочной теории точно таким же образом, как и для теорий где разложение в области слабой связи получается из инстантонных конфигураций. Это даёт надежду на непосредственное применение наших методов для класса S-дуальности общих

<sup>1</sup> Отметим, что эта параметризация существенно отличается от параметризации  $q_1 = \epsilon^3 Q_1 Q_2 Q_3$ ,  $q_2 = \epsilon^2 Q_2 Q_3$ ,  $q_3 = \epsilon Q_3$ , удобной для вычислений с линейным колчаном. Легко проверить, например, что для этих двух выборов параметризации предел  $\epsilon \rightarrow 0$  согласован с выбором базиса в гомологиях кривой, который отвечает конкретной пертурбативной фазе калбировочной теории, которая в свою очередь определяется особенностями матрицы периодов ты разложений пертурбативного препотенциала.

$SU(N)$  колчаных теорий, что может пролить свет на физические свойства суперсимметричных теорий, которые даже не имеют лагранжевой формулировки.

#### 2.4.3.4 Массивная теория и квазиклассический конформный блок

Для  $n = 4$  безмассовой  $SU(2)$  теории препотенциал даётся квадратичным выражением 2.4.11. Рассмотрим теперь самую простую её деформацию, когда два мультиплетта получают противоположные массы, например,  $\Delta_0 = m^2$ ,  $\Delta_1 = \Delta_q = \Delta_\infty = 0$ . Кривая 2.4.8 для этого случая

$$x^2 = \frac{zq(q-1)\mathcal{F}' - (z-q)m^2}{z^2(z-1)(z-q)}$$

где  $\mathcal{F}' = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q}$ . Формула вычета 2.4.6 даёт дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}''' + (2.4.19) \\ & + \frac{m^2 \mathcal{F}' [3q(2-3q)\mathcal{F}'' + 2(1-3q)\mathcal{F}'] - [3q^4(q-1)^2 \mathcal{F}'^2 \mathcal{F}''^2 + q^2(q^2-q+1)\mathcal{F}'^4]}{2q^2(q-1)\mathcal{F}' [q^2(q-1)\mathcal{F}'^2 + m^2q(q-2)\mathcal{F}' - m^4]} - \\ & - \frac{m^4 [(q-1)^2 q^2 \mathcal{F}''^3 + 6q(q-1)^2 \mathcal{F}' \mathcal{F}''^2 + 3(q^2+q-1)\mathcal{F}'' \mathcal{F}'^2 + (3+2q)\mathcal{F}'^3]}{2(q-1)\mathcal{F}' [q^2(q-1)\mathcal{F}'^2 + m^2q(q-2)\mathcal{F}' - m^4]} = 0 \end{aligned}$$

которое может быть решено с помощью анзаца  $\mathcal{F} = (a^2 - m^2) \log q + \sum_{k=1}^{\infty} c_k q^k$ , который приводит к разложению

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \mathcal{F}_{\text{pert}}(a; m) + (a^2 - m^2) \log q + \frac{a^2 - m^2}{2} q + \\ & + \frac{13a^4 - 14a^2 m^2 + m^4}{64a^2} q^2 + \frac{23a^4 - 26a^2 m^2 + 3m^4}{192a^2} q^3 + \\ & + \frac{2701a^8 - 3164a^6 m^2 + 470a^4 m^4 - 12a^2 m^2 + 5m^8}{32768a^6} q^4 + \dots \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

Отметим, что этот препотенциал непосредственно связан с соответствующим разложением 2.4.16 в безмассовой  $SU(2) \times SU(2)$  теории (мы сравниваем  $\mathcal{F}(a, m, q)$  для одного массивного фундаментала с безмассовым препотенциалом  $\mathcal{F}(a_1, a_2, q_1, 1 - Q_2)$  для случая двух калибровочных групп 2.4.16 в пределе  $Q_2 = 0$ ,  $a_2 = m$ ). Их разница

$$[\mathcal{F}(a, \tilde{a}, q, 1 - Q)|_{\tilde{a}=m} - m^2 \log Q]_{Q=0} - \mathcal{F}(a, m, q) = -m^2 \log(1 - q)$$

это просто  $U(1)$ -фактор, который часто возникает в контексте АГТ-соответствия [113].  $q$ -независимая часть в 2.4.20

$$\mathcal{F}_{\text{pert}}(a; m) = (a - m)^2 \log(a - m) + (a + m)^2 \log(a + m) - 2a^2 \log a \quad (2.4.21)$$

восстанавливается стандартным способом из формулы вычетов на вырожденной кривой, и зануляется в пределе  $m \rightarrow 0$ .

Теперь давайте добавим больше массивных деформаций для одной  $SU(2)$  и рассмотрим общую четырёхточечную функцию

$$x^2 = \frac{(q-1)q\mathcal{F}'}{z(z-q)(z-1)} + \frac{\Delta_0}{z^2} + \frac{\Delta_1}{(z-1)^2} + \frac{\Delta_q}{(z-q)^2} - \frac{\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_q - \Delta_\infty}{z(z-1)} = \quad (2.4.22)$$

$$= \frac{Q_4(z)}{z^2(z-1)^2(z-q)^2} = \phi_2(z)$$

где четыре  $\Delta = \Delta(\mathbf{m})$  являются квадратичными функциями только от фундаментальных масс. Позначим  $q\mathcal{F}'|_{q=0} = A$  та спершу подивимось на розв'язок в області слабкого зв'язку  $q \rightarrow 0$ . Имеем

$$Q_4^{(0)}(z) = Q_4(z)|_{q=0} = z^2 (\Delta_\infty z^2 + (-A - \Delta_0 + \Delta_1 - \Delta_q - \Delta_\infty)z + (A + \Delta_0 + \Delta_q))$$

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{1}{2\sqrt{Q_4(z)}} \frac{\partial Q(z)}{\partial a} \frac{1}{z(z-1)(z-q)} \underset{q \rightarrow 0}{\approx} -\frac{\frac{\partial A}{\partial a}}{2\sqrt{Q_4^{(0)}(z)}}$$

из нормирования голоморфного дифференциала следует, что

$$1 \approx -\frac{1}{4\pi i} \frac{\partial A}{\partial a} \oint_A \frac{dz}{\sqrt{Q_4^{(0)}(z)}} \approx -\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial a} \frac{1}{\sqrt{A + \Delta_0 + \Delta_q}}$$

что даёт нам  $A = a^2 - \Delta_0 - \Delta_q$ , т.е., лидирующее слагаемое в разложении  $q \rightarrow 0$  конформного блока на сфере.

Дифференциальное уравнения получается аналогично 2.4.19, хотя в случае общей массовой деформации нужны дополнительные усилия – необходимо вычислить сумму

$$\mathcal{F}''' = -\text{res}_{z=q, Q_4(z)=0} \frac{(\phi_2')^3 dz}{2\phi_2 \frac{d\phi_2}{dz}} = -\text{res}_{z=q, Q_4(z)=0} \frac{T(z)dz}{Q_4(z)S(z)}$$

по неизвестным корням полинома  $Q_4(z)$  из уравнения 2.4.22, кроме известного полюса четвёртого порядка  $S(z) \underset{z \rightarrow q}{\sim} (z-q)^4$ . Вычисляя сумму по нулям полинома  $Q_k(z) = \prod_{i=1}^k (z - \lambda_i)$

$$\sum_{i=1}^k \frac{T(\lambda_i)}{S(\lambda_i)Q'(\lambda_i)} = \frac{\sum_{i=1}^k T(\lambda_i) \prod_{j \neq i} (Q'(\lambda_j)S(\lambda_j))}{\prod_{i=1}^k S(\lambda_i)Q'(\lambda_i)} = \frac{\sum_{i=1}^k T(\lambda_i) \prod_{j \neq i} (Q'(\lambda_j)S(\lambda_j))}{R\{S, Q\}D\{Q\}}$$

где  $R\{S, Q\}$  это результат, а  $D\{Q\}$  – дискриминант, мы получаем рациональную симметрическую функцию от корней  $Q_4(z)$ .

Когда уже дифференциальное уравнения получено, мы подставляем пертурбативное разложение



$\mathcal{F} = A \log q + \sum_{i=1}^{\infty} c_i q^i$  и получаем ответ для препотенциала (тут представлен результат для  $\Delta_0 = \Delta_q = 0$  и произвольных  $\Delta_1 = m_1^2$  и  $\Delta_\infty = m_\infty^2$ <sup>1</sup>):

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & a^2 \log q + \frac{1}{2} \sum_{\epsilon, \epsilon'} (a + \epsilon m_1 + \epsilon' m_\infty)^2 \log(a + \epsilon m_1 + \epsilon' m_\infty) - 2a^2 \log a + \\ & + \frac{a^2 + m_1^2 - m_\infty^2}{2} q + \frac{13a^4 + 18a^2 m_1^2 - 14a^2 m_\infty^2 + m_1^4 + m_\infty^4 - 2m_1^2 m_\infty^2}{64a^2} q^2 + \\ & + \frac{207a^6 + a^4(334m_1^2 - 226m_\infty^2) + a^2(43m_1^4 - 54m_1^2 m_\infty^2 + 11m_\infty^4) - 8(m_1^2 - m_\infty^2)^3}{1728a^4} q^3 + \\ & + O(q^4). \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

Полезно сравнить этот результат с разложением для квазиклассического конформного блока из статьи [135], который зависит от промежуточной размерности  $\Delta = a^2$  и от внешних размерностей. Для двух ненулевых внешних размерностей, как у 2.4.23, формула для квазиклассического конформного блока даёт

$$\begin{aligned} f(q) = & a^2 \log q + \frac{a^2 + m_1^2 - m_\infty^2}{2} q + \left( \frac{a^2 + m_1^2 - m_\infty^2}{4} + \right. \\ & \left. + \frac{a^4 + 2a^2(m_1^2 + m_\infty^2) - 3(m_1^2 - m_\infty^2)^2}{64(a^2 + \frac{3}{4})} - \frac{a^4 - (m_1^2 - m_\infty^2)^2}{16a^2} \right) q^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

а случай с одной деформацией легко восстанавливается при  $m_\infty \mapsto m \neq 0$ ,  $m_1 \mapsto 0$ . Легко видеть, что выражения (2.4.23) и (2.4.24) буквально совпадают в Зайберг-Виттеневском пределе для конформных блоков, когда все размерности  $\Delta \rightarrow \infty$  одновременно, включая промежуточную. Тогда почти все слагаемые остаются неизменными, кроме  $\frac{3}{4\Delta} \rightarrow 0$ , и потому поправка к знаменателю из обратной формы Шаповалова исчезает.

В удобной для двумерной конформной теории параметризации  $\epsilon_1 = bg$ ,  $\epsilon_2 = \frac{g}{b}$ , центральный заряд равен  $c = 1 + 6 \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2}{\epsilon_1 \epsilon_2} = 1 + 6(b + \frac{1}{b})^2$ , а конформные размерности можно записать как  $\Delta(\alpha) = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2}{4\epsilon_1 \epsilon_2} - \frac{\alpha^2}{\epsilon_1 \epsilon_2} = \frac{1}{4}(b + \frac{1}{b})^2 - \frac{\alpha^2}{g^2}$ . Квазиклассический предел соответствует  $b = g \rightarrow 0$ , что означает  $\epsilon_2 = 1, \epsilon_1 \rightarrow 0$ . Зайберг-Виттеневский предел отвечает  $c \ll \Delta$ , т.е., мы должны положить  $\frac{b}{g} \mathbf{g} 1$  и  $g \ll 1$ , т.е., в этом пределе оба  $\epsilon_1 \rightarrow 0$ ,  $\epsilon_2 \rightarrow 0$ . При этом наш препотенциал приобретает  $U(1)_{\mathcal{R}}$  симметрию, которая была нарушена некоторыми целыми числами в двумерной конформной теории. Остаётся нетривиальный вопрос о пределе уравнения Пенлеве VI в этом случае, мы надеемся к нему когда-то вернуться.

#### 2.4.4 Замолодчиковский конформный блок

АГТ-гипотеза [113] позволяет нам применять технику четырёхмерных суперсимметричных калибровочных теорий для того, чтобы отвечать на некоторые сложные во-

<sup>1</sup> З фізичної точки зору, як і в 2.4.21, пертурбативна частина є результатом часткового скорочення

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{pert}} = & \frac{1}{2} \sum_{\epsilon, \epsilon'} [(a + \epsilon m_0 + \epsilon' m_q)^2 \log(a + \epsilon m_0 + \epsilon' m_q) + (a + \epsilon m_1 + \epsilon' m_\infty)^2 \log(a + \epsilon m_1 + \epsilon' m_\infty)] - \\ & - 4a^2 \log a \end{aligned}$$

між внесками безмасових фундаментальних та векторного мультиплетів при  $m_0 = m_q = 0$ .

просы о двумерной конформной теории (см., например, [141]), и наоборот. В Зайберг-Витеновском пределе  $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$  мы можем идентифицировать обобщённый препотенциал с некоторым типом  $c = 1$  конформных блоков, при этом, если на двумерной стороне конформные размерности фиксированы, то это будет отвечать нулевым массам внешних мультиплетов. Зайберг-Витеновское описание у таком пределе, когда  $\Sigma_0$  является сферой с проколами, приводит к набору дифференциальных уравнений на конформные блоки, которые описываются геометрией  $g$ -параметрического семейства кривых рода  $g$ .

Интересно сравнить это описание для  $SU(2)$ -колчаных теорий с другим хорошо известным случаем, который был предложен Алексеем Замолодчиковым для конформных блоков в  $c = 1$  модели Ашкина-Теллера [123], и описывается в очень похожих терминах. Замолодчиковский результат для  $2g + 2$ -точечного конформного блока спиновых полей с внешними размерностями  $\frac{1}{16}$  представляется в терминах *единственной* кривой рода  $g$ , и требует дополнительного условия сохранения заряда во внутренних вершинах блока. Решая уравнение  $2g + 2 = g + 3$ , мы получаем  $g = 1$ , что соответствует четырёхточечному конформному блоку и конформной  $SU(2)$  суперсимметричной КХД 2.4.9, 2.4.11, где эти две конструкции с необходимостью совпадают. В общей ситуации существует разница, которая заключается в условии зануления некоторых (полк-) трифундаментальных масс в тройных вершинах. Для замолодчиковского конформного блока это просто сохранение заряда в  $c = 1$  конформной теории, которое, очевидно, отсутствует в общей  $SU(2)$  колчанной теории на стороне калибровочной теории. Таким образом, в Зайберг-Витеновском подходе это эквивалентно дополнительным соотношениям между конденсатами для трёх калибровочных групп, которые взаимодействуют с одним трифундаментальным мультиплетом материи. Первым примером теории, в которой эта связь может быть наложена, является случай сицилийского колчана с кривой 2.4.17 и тау-функцией 2.4.18. Замолодчиковская связь является сингулярной с точки зрения четырёхмерной физики (зануление массы одного из мультиплетов, который уже был отинтегрирован для получения эффективного действия), но препотенциал 2.4.18 в этом пределе регулярен и стаёт просто квадратичной функцией конденсатов в соответствии с [123].

Другой причиной для обсуждения этого случая, который точнорешаемый даже на стороне СФТ, является существование связи между изомонодромными деформациями и СФТ [138, 139], где известно точное решение для  $2g + 2$ -точечной *изомонодромной* тау-функции специального вида [140], связанное с замолодчиковским конформным блоком. То есть, ограниченный случай сицилийского колчана и другие калибровочные теории с безмассовыми фундаменталами и частично безмассовыми трифундаменталами оказываются точнорешаемыми в трёх разных подходах. Отметим также, что на стороне калибровочной теории это самый простой пример класс S-дуальности, в котором не удаётся применить стандартные методы инстантонных вычислений [121], потому связь между четырёхмерными и двумерными теориями идёт, на самом деле, *далее* стандартной формулировки [113] АГТ-соответствия.

Общий замолотчиковский случай отвечает случаю  $n = g + 3$  точечного конформного блока с  $V = |\mathcal{V}| = \frac{1}{2}n - 2$  тройными вершинами  $\{\mathcal{V}_i \in \mathcal{V}\}$  или полутрифундаментальными мультиплетами ( $n$  должно быть чётным в этом случае). В каждой вершине  $c = 1$  конформная теория даёт одно условие сохранения, потому род падает до

$$\tilde{g} = g - V = n - 3 - \left(\frac{1}{2}n - 2\right) = \frac{1}{2}n - 1 \quad (2.4.25)$$

и полное число точек равно  $n = 2\tilde{g} + 2$ <sup>1</sup>. Другая форма

$$\tilde{g} - 1 = \frac{g - 1}{2}$$

того самого соотношения 2.4.25 означает, что эйлерова характеристика  $\chi(\tilde{\Sigma}) = \frac{1}{2}\chi(\Sigma)$  уменьшается в два раза после вырождения.

Теперь мы собираемся дать непосредственное доказательство того, что в таком пределе Зайберг-Виттенский препотенциал 2.4.1, 2.4.3 стаёт квадратичной формой

$$\mathcal{F}(\mathbf{a}, \mathbf{q})|_{\cup_{\mathcal{V}} \sum_{i \in \mathcal{V}_i} a_i = 0} = i\pi \sum_{\alpha, \beta=1}^{\tilde{g}} a_{\alpha} \mathcal{T}_{\alpha\beta}(\mathbf{q}) a_{\beta} \quad (2.4.26)$$

с матрицей периодов  $\mathcal{T} = \|\mathcal{T}_{\alpha\beta}\|$  гиперэллиптической кривой  $\tilde{\Sigma}$  рода  $\tilde{g}$ , которая не зависит от конденсатов (пространство модулей гиперэллиптических кривых параметризовано набором ультрафиолетовых констант связи).

Рассмотрим теперь безмассовую  $SU(2)$  колчанную теорию с генерирующим дифференциалом

$$\begin{aligned} dS = xdz &= \sqrt{\alpha} \frac{\sqrt{\prod_{k=1}^{g-1} (z - v_k)} dz}{\sqrt{\prod_{j=1}^{g+3} (z - z_j)}} \xrightarrow{(z_1, \dots, z_{g+3}) \rightarrow (q_1, \dots, q_g, 1, \infty, 0)} \\ &\rightarrow \sqrt{\alpha} \frac{\sqrt{\prod_{k=1}^{g-1} (z - v_k)} dz}{\sqrt{z(z-1) \prod_{j=1}^g (z - q_j)}} \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

на гиперэллиптической кривой 2.4.8 рода  $g$ , с полным количеством точек ветвления (от числителя и от знаменателя)  $\#B.P. = 2g + 2$ . Наложим теперь

$$\frac{g-1}{2} = \frac{1}{2}n - 2 = V$$

связей на коэффициенты  $\{v_j\}$ ,  $j = 1, \dots, g-1$  в числителе 2.4.27 для того, чтобы получить полный квадрат, то есть,

$$dS = xdz \rightarrow \frac{\mathcal{Q}_{\tilde{g}-1}(z) dz}{y} \quad (2.4.28)$$

<sup>1</sup>С этого момента мы будем обозначать  $\tilde{g}$  род гиперэллиптической кривой в ограниченном случае. Благодаря условию сохранения количество независимых конденсатов в ограниченной теории  $\tilde{g}$  всегда должно быть меньше количества  $n - 3 = 2\tilde{g} - 1$  ультрафиолетовых констант связи.

с некоторым полиномом  $\mathcal{Q}_{\tilde{g}-1}(z)$  степени  $\tilde{g} - 1$ , который может рассматриваться как голоморфный дифференциал на “редуцированной” гиперэллиптической кривой  $\tilde{\Sigma}$ :

$$\begin{aligned} y^2 &= \prod_{j=1}^{g+3} (z - z_j) \xrightarrow{(z_1, \dots, z_{g+3}) \rightarrow (q_1, \dots, q_g, 1, \infty, 0)} \\ \rightarrow y^2 &= z(z-1) \prod_{k=1}^g (z - q_k) = z(z-1) \prod_{k=1}^{2\tilde{g}-1} (z - q_k) \end{aligned} \quad (2.4.29)$$

теперь уже рода 2.4.25. Дифференциал 2.4.28 может быть разложен

$$dS = \frac{\mathcal{Q}_{\tilde{g}-1}(z)dz}{y} = \sum_{\alpha=1}^{\tilde{g}} a_{\alpha} \frac{R_{\alpha}(z)dz}{y} = \sum_{\alpha=1}^{\tilde{g}} a_{\alpha} d\omega_{\alpha} \quad (2.4.30)$$

в линейную комбинацию нормированных голоморфных дифференциалов на 2.4.29, так что система линейных уравнений

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{A_{\alpha}} \frac{\mathcal{Q}_{\tilde{g}-1}(z)dz}{y} = a_{\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, \tilde{g} \quad (2.4.31)$$

может быть решена относительно  $\tilde{g}$  коэффициентов полинома  $\mathcal{Q}_{\tilde{g}-1}(z)$ . Аналогично, система уравнений

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{A_{\alpha}} \frac{R_{\beta}(z)dz}{y} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, \tilde{g} \quad (2.4.32)$$

фиксирует все  $\tilde{g}^2$  коэффициенты полиномов  $\{R_{\alpha}(z)\}$  степени  $\tilde{g} - 1$ , определяя нормированные голоморфные дифференциалы

$$d\omega_{\alpha} = \frac{R_{\alpha}(z)dz}{y}, \quad \alpha = 1, \dots, \tilde{g} \quad (2.4.33)$$

в 2.4.30. Решение уравнений для дуальных периодов

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_{\alpha}} = \oint_{B_{\alpha}} \frac{\mathcal{Q}_{\tilde{g}-1}(z)dz}{y} = 2\pi i \sum_{\beta=1}^{\tilde{g}} a_{\beta} \oint_{B_{\alpha}} d\omega_{\beta} = 2\pi i \sum_{j=1}^{\tilde{g}} \mathcal{T}_{\alpha\beta}(\mathbf{a}) a_{\beta} \quad (2.4.34)$$

непосредственно даёт формулу 2.4.26 с матрицей периодов кривой 2.4.29 с точностью до независимой от  $\mathbf{a}$  константы. Соотношения, которые выражают зависимость препотенциала от положения точек ветвления 2.4.3, а именно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i} &= \text{res}_{q_i} \frac{(dS)^2}{dz} = \frac{\mathcal{Q}_{\tilde{g}-1}^2(q_i)}{q_i(q_i-1) \prod_{j \neq i} (q_i - q_j)} = \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^{\tilde{g}} a_{\alpha} a_{\beta} \frac{R_{\alpha}(q_i) R_{\beta}(q_i)}{q_i(q_i-1) \prod_{j \neq i} (q_i - q_j)}, \quad i = 1, \dots, 2\tilde{g} - 1 \end{aligned} \quad (2.4.35)$$

непосредственно следуют из 2.4.30 и полностью фиксируют 2.4.26 с точностью до константы. Это в точности совпадает с уравнением Замолодчикова [123] для лидирующего куска коррелятора  $e^{\mathcal{F}} = \langle \sigma_0(z_1) \dots \sigma_0(z_n) \rangle$  спиновых полей в модели Ашкина-Теллера, см.

Приложение 2.4.7. Ниже мы также используем их для того, чтобы доказать нелинейные уравнения, которые получаются из теории Зайберга-Виттена для производных матричных элементов матрицы периодов гиперэллиптических кривых.

Результаты этого раздела находятся в полном соответствии с проведённым выше анализом разложений тау-функций колчаных калибровочных теорий в режиме слабой связи. Уже из пертурбативной части 2.4.18 мы видим, что в замолодчиковском пределе  $SU(2) \times SU(2) \times SU(2)$  теории выражение для матрицы периодов  $\Sigma$  становится сингулярным, поскольку  $a_1 \pm a_2 \pm a_3 = 0$  (зануление массы одного из состояний (полу-) трифундаментального мультиплета). Это означает, что кривая  $\Sigma$  действительно вырождается в  $\tilde{\Sigma}$ , при этом легко видеть, что все знаменатели в 2.4.18 в таком пределе исчезают и препотенциал оказывается квадратичным выражением от всіх періодів, которые остались.

Замолодчиковский случай обобщает пример  $SU(2)$  конформной теории с эллиптической кривой 2.4.9 до подсемейства колчаных калибровочных теорий, константы взаимодействия которых не перенормируются в рамках теории возмущений, а именно, имеют нулевые бета-функции <sup>1</sup>, но настоящие инфракрасные константы перенормируются за счёт непертурбативных эффектов. Мы покажем в следующем разделе, что уравнения 2.4.35 переписываются в виде дифференциальных уравнений для эффективных констант связи (производные берутся по голым константам связи, поскольку других параметров теории нету), которые принимают форму соотношений Рауха и могут быть непосредственно решены с помощью формул Томэ [142, 143] (см. также [144]).

#### 2.4.5 Нелинейные уравнения в колчанной калибровочной теории

В разделе 2.4.3 мы уже использовали дифференциальные уравнения, которые приходят из соотношений на квазиклассические тау-функции [115, 114], для получения разложений в области слабой связи для суперсимметричных калибровочных теорий. Частные примеры таких уравнений (см., например 2.4.10), и прямое отношение этих уравнений к квазиклассическим разложениям конформных блоков (и, таким образом, к уравнению Пенлеве VI) показывают, что они, на самом деле, имеют некоторое глубокое геометрическое происхождение. Ниже в этом разделе мы собираемся изучать дифференциальные уравнения, которые возникают из Зайберг-Виттеновского подхода к колчаным калибровочным теориям, в более общем контексте.

В ограниченном замолодчиковском случае все уравнения на препотенциал могут быть записаны как соотношения на матрицы периодов гиперэллиптических кривых. Мы собираемся показать, что все такие соотношения для первых производных являются, на самом деле, следствиями формул Рауха. Они дают *некоторую параметризацию* в про-

---

<sup>1</sup>Более строго, пертурбативные вычисления приводят только к *конечным* перенормировкам констант связи.

странстве первых производных, которая дальше может быть изучена в терминах алгебраической геометрии.

Другим природным желанием было бы ожидать, что обобщённый препотенциал колчанной калибровочной теории удовлетворяет уравнениям типа WDVV [131]. Мы действительно доказываем, что такие уравнения решаются колчанной тау-функцией в безмассовом случае как функцией от полного набора всех переменных: всех Зайберг-Витте-новских периодов и голых констант связи.

Достаточно интересно, что доказательство, базирующееся на формуле вычета 2.4.5 и на простом счётном аргументе [137], справедливо для обоих случаев, обычного и ограниченного замолотчиковского, даёт в последнем случае соотношения, которые содержат третьи производные матриц периодов.

### 2.4.5.1 Соотношения на матрицы периодов

Рассмотрим сначала самый простой пример нашей системы Зайберга-Виттена – замолотчиковский случай из раздела 2.4.4, представленный гиперэллиптической кривой 2.4.29, параметризованной только константами связи  $\mathbf{q}$ , с голоморфным дифференциалом Зайберга-Виттена 2.4.30. Уравнения Зайберга-Виттена 2.4.1 решаются тривиально, но формула (2.4.3) всё ещё нетривиальна (см. 2.4.34, 2.4.26 и 2.4.35).

Сравнивая коэффициенты квадратичных форм с обеих сторон равенства в 2.4.35, получаем для наших первых производных матрицы периодов гиперэллиптической кривой 2.4.29 уравнение

$$\frac{\partial \mathcal{T}_{\alpha\beta}(\mathbf{q})}{\partial q_k} = \text{res}_{q_k} \frac{d\omega_\alpha d\omega_\beta}{dz} = \frac{R_\alpha(q_k)R_\beta(q_k)}{q_k(q_k - 1) \prod_{l \neq k} (q_k - q_l)}, \quad k = 1, \dots, 2\tilde{g} - 1 \quad (2.4.36)$$

в терминах числителей голоморфных дифференциалов 2.4.33: это оказывается одной из хорошо известных формул Рауха [142]. Их решения могут быть найдены через формулы Томэ [142, 143], которые для кривой 2.4.29 могут быть записаны в форме

$$q_k^2 = \pm \frac{\theta[\eta_1](\mathcal{T})^4 \theta[\eta_2](\mathcal{T})^4}{\theta[\eta_3](\mathcal{T})^4 \theta[\eta_4](\mathcal{T})^4}, \quad k = 1, \dots, 2\tilde{g} - 1 \quad (2.4.37)$$

для множества четырёх тета-характеристик, выбранных следующим образом: разделим точки ветвления как

$$\{z_1, \dots, z_n\} = \{0, 1, \infty, k\} \sqcup S' \sqcup S''$$

где  $S' \supset \{q_{j'}\}$  та  $S'' \supset \{q_{j''}\}$  будут двумя довільними множинами, що не перетинаються, кожна з яких містить  $\tilde{g} - 1$  точек ветвления с  $j' \neq k$ ,  $j'' \neq k$  та  $j' \neq j''$ . Значит

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \{S' \oplus k \oplus \infty\} \sqcup \{S'' \oplus 0 \oplus 1\} \\ \eta_2 &= \{S' \oplus 0 \oplus 1\} \sqcup \{S'' \oplus k \oplus \infty\} \\ \eta_3 &= \{S' \oplus 0 \oplus k\} \sqcup \{S'' \oplus 1 \oplus \infty\} \\ \eta_4 &= \{S' \oplus 1 \oplus \infty\} \sqcup \{S'' \oplus 0 \oplus k\} \end{aligned}$$

будут возможными выборами чётных тета-характеристик в 2.4.37 в терминах разделения точек ветвления. Доказательство этого факта может быть найдено, например, в [142, 144].

В качестве примера рассмотрим первый нетривиальный замолотчиковский случай с  $\tilde{g} = 2$ , т.е.,

$$x^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{q_i(q_i - 1)}{z(z-1)(z-q_i)} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i} = \frac{\alpha(z-z_0)^2}{z(z-1)(z-q_1)(z-q_2)(z-q_3)} \quad (2.4.38)$$

Выражение в правой части означает, что должно быть одно соотношение на производные по  $\mathbf{q}$  от препотенциала. Оно может быть получено путём взятия дискриминанта и оказывается алгебраическим уравнением

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - 2\xi_1\xi_2 - 2\xi_2\xi_3 - 2\xi_1\xi_3 = 0 \quad (2.4.39)$$

для переменных

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (q_2 - q_3)q_1(q_1 - 1) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_1}, & \xi_2 &= (q_3 - q_1)q_2(q_2 - 1) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_2} \\ \xi_3 &= (q_1 - q_2)q_3(q_3 - 1) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_3} \end{aligned}$$

которое превращается в тождество после применения формулы Рауха, или просто подстановки

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{q_2 - q_3}{(q_1 - q_2)(q_2 - q_3)} \mathcal{Q}(q_1)^2, & \xi_2 &= \frac{q_3 - q_1}{(q_2 - q_1)(q_2 - q_3)} \mathcal{Q}(q_2)^2 \\ \xi_3 &= \frac{q_1 - q_2}{(q_3 - q_1)(q_3 - q_2)} \mathcal{Q}(q_3)^2 \end{aligned}$$

для любого линейного  $\mathcal{Q}_{\tilde{g}-1} = \mathcal{Q}(z)$ . Уравнение 2.4.38 также выражает

$$\alpha = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_1} q_1(q_1 - 1) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_2} q_2(q_2 - 1) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_3} q_3(q_3 - 1) = K_\alpha(a_1, a_2)$$

и

$$\begin{aligned} z_0 &= -\frac{1}{2} \frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_1} q_1(q_1 - 1)(q_2 + q_3) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_2} q_2(q_2 - 1)(q_1 + q_3) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_3} q_3(q_3 - 1)(q_1 + q_2)}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_1} q_1(q_1 - 1) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_2} q_2(q_2 - 1) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_3} q_3(q_3 - 1)} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{K_z(a_1, a_2)}{K_\alpha(a_1, a_2)} \end{aligned}$$

в терминах квадратичных форм от Заберг-Виттеновских периодов с коэффициентами

$$\begin{aligned} K_\alpha^{ij} &= \sum_{k=1}^3 q_k(q_k - 1) \frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial q_k} = \sum_{k=1}^3 q_k(q_k - 1) \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial q_k \partial a_i \partial a_j} \\ K_z^{ij} &= (q_1 + q_2 + q_3) K_\alpha^{ij} - \sum_{k=1}^3 q_k^2(q_k - 1) \frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial q_k} = \\ &= (q_1 + q_2 + q_3) K_\alpha^{ij} - \sum_{k=1}^3 q_k^2(q_k - 1) \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial q_k \partial a_i \partial a_j} \end{aligned} \quad (2.4.40)$$

В то время как выражение Зайберг-Виттеновского дифференциала 2.4.30 для кривой 2.4.38

$$dS = \frac{\sqrt{\alpha}(z - z_0)}{\sqrt{z(z-1)(z-q_1)(z-q_2)(z-q_3)}} = a_1 d\omega_1 + a_2 d\omega_2$$

требует, чтобы  $\sqrt{\alpha}$  и  $z_0\sqrt{\alpha}$  должны быть линейными функциями от  $a_1$  и  $a_2$ , что приводит к уравнениям

$$\det K_\alpha = 0, \quad \text{tr} K_\alpha K_z^{-1} = 0 \quad (2.4.41)$$

для 2.4.40. Эти уравнения, если рассматривать их как связи между производными матричных элементов матрицы периодов  $\partial_k \mathcal{T}_{\alpha\beta}$ , должны рассматриваться независимо от 2.4.39 (см. Приложение 2.4.8). Вообще, все такие соотношения следуют из представления

$$x^2 = \sum_{i=1}^{2\tilde{g}-1} \frac{q_i(q_i-1)}{z(z-1)(z-q_i)} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i} \stackrel{2.4.35}{=} \frac{1}{z(z-1) \prod_{j=1}^{2\tilde{g}-1} (z-q_j)} \sum_{k=1}^{2\tilde{g}-1} \mathcal{Q}_{\tilde{g}-1}^2(q_k) \prod_{i \neq k} \frac{z-q_i}{q_k-q_i}$$

где сумма в правой части это просто интерполяционная формула Лагранжа для полинома  $\mathcal{Q}_{\tilde{g}-1}^2(z)$  с нулевым дискриминантом.

#### 2.4.5.2 Уравнение WDVV из формулы вычета

Давайте теперь покажем, что препотенциалы колчаных  $SU(2)$  теорий удовлетворяют уравнениям WDVV [129] как функции полного набора переменных  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{a}, \mathbf{q})$ . Мы уже видели, что в случае  $SU(2)$  колчаных калибровочных теорий формула вычетов спускается на базу накрытия кривой  $\Sigma_0$  Зайберг-Виттеновской кривой  $\Sigma$ , и, приспособивая к этому случаю, мы переформулируем утверждение [137] следующим образом:

**Теорема 8.** *Предположим, что мы имеем формулу*

$$\mathcal{F}_{IJK} = \sum_{f(z)=0} \text{res} \frac{r_I(z)r_J(z)r_K(z)}{f(z)} R(z) dz \quad (2.4.42)$$

где  $f(z)$  невырожденный полином,  $\deg f$  равна количеству индексов,  $R(z)$  и  $r_I(z)$  голоморфные в нулях  $f(z)$ . Тогда существует соотношение [131] на матрицы

$$(\mathcal{F}_I)_{JK} = \mathcal{F}_{IJK}$$

$$\mathcal{F}_I \mathcal{F}_J^{-1} \mathcal{F}_K = \mathcal{F}_K \mathcal{F}_J^{-1} \mathcal{F}_I \quad (2.4.43)$$

которое называется уравнением WDVV.

**Доказательство:** Определим дополнительную алгебру  $H_S$  функций на  $N$  нулях  $f(z) = \prod_{i=1}^N (z - \lambda_i)$  (которая с очевидностью изоморфна  $\mathbb{C}^N$ ) с помощью соотношения

$$(r_I *_{S} r_J)(\lambda_i) = S(\lambda_i) r_I(\lambda_i) r_J(\lambda_i) \quad (2.4.44)$$



и гомоморфизма  $l_S : H_S \rightarrow \mathbb{C}$  где

$$l_S(r) = \sum_{i=1}^N \frac{R(\lambda_i)}{f'(\lambda_i)S(\lambda_i)^2} r(\lambda_i)$$

Вычислим вычет 2.4.42 непосредственно, подставляя  $f(z) = \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)$

$$\mathcal{F}_{IJK} = \sum_{i=1}^N \frac{R(\lambda_i)}{f'(\lambda_i)} r_I(\lambda_i) r_J(\lambda_i) r_K(\lambda_i) = l_S(r_I *_S r_J *_S r_K)$$

Алгебра  $H_S$  коммутативная и ассоциативная, и мы можем определить её структурные константы как

$$r_I *_S r_J = \sum_K C_{IJ}^K r_K$$

или операторы домножения на  $r_I$  как  $(C_I)_J^K = C_{IJ}^K$ . Благодаря коммутативности и ассоциативности мы имеем для этих матриц соотношение

$$C_I \cdot C_J = C_J \cdot C_I$$

определим теперь билинейную форму

$$\eta_{IJ} = l_S(r_I *_S r_J)$$

которая с очевидностью связана с  $(\mathcal{F}_I)_{JK} = \mathcal{F}_{IJK}$  с помощью соотношения

$$\mathcal{F}_I = \eta \cdot C_I$$

таким образом

$$\mathcal{F}_I \eta^{-1} \mathcal{F}_K = \mathcal{F}_K \eta^{-1} \mathcal{F}_J \quad (2.4.45)$$

Используя возможность выбрать функцию  $S(\lambda)$  произвольным образом, мы можем зафиксировать её таким образом, чтобы сделать  $r_J = 1$  для некоторого фиксированного  $J$  (мы просто положим  $S(\lambda_i) = \frac{1}{r_I(\lambda)}$  и посмотрим на (2.4.44)), после этого  $\eta = \mathcal{F}_J$ , и 2.4.45 превращаются в 2.4.43.  $\square$

**Замечание:** Наша алгебра  $H_S$  изоморфна алгебре функций на  $N$  точках, потому она обязательно содержит единичный оператор. А именно, возьмём комбинацию базисных элементов  $e_\alpha = \sum_I \alpha_I r_I$  и посмотрим на домножение на элемент:

$$(e_\alpha *_S r_J)(\lambda_i) = \sum_I \alpha_I r_I(\lambda_i) S(\lambda_i) r_J(\lambda_i) = r_J(\lambda_i)$$

Для того, чтобы убедиться в последнем равенстве, мы должны только решить систему  $N$  линейных уравнений:

$$\frac{1}{S(\lambda_i)} = \sum_{I=1}^N \alpha_I r_I(\lambda_i), \quad \lambda_i = 1, \dots, N$$

для  $N$  переменных  $\alpha_I$ , только с одним требованием  $\det_{I_i} \|r_I(\lambda_i)\| \neq 0$ . Соответствующую

$$\eta_\alpha = \sum_I \alpha_I \mathcal{F}_I$$

естественно рассматривать как билинейную форму, которая отвечает единичному оператору, но нету утверждения о том, что она не зависит от динамических переменных.

### 2.4.5.3 Доказательство для колчанной калибровочной теории

Как было отмечено, есть два важных случая колчанной калибровочной теории: обычный и ограниченный. Всё рассмотрение будет очень похожим, потому мы введём следующую сокращённую запись:  $(z - v_i)^{(1|2)}$  которая означает, что мы должны читать  $(z - v_i)^1$  в обычном случае и  $(z - v_i)^2$  в замолотчиковском.

Применим теперь формулу вычета (2.4.5) к частному случаю безмассовой колчанной  $SU(2)$  калибровочной теории (2.4.8), переписав её сначала для нулевых  $\{\Delta_i\}$  в форме

$$x^2 = \frac{\alpha \prod_{s=1}^{(g-1|\frac{g-1}{2})} (z - v_s(q_i, a_i))^{(1|2)}}{z(z-1) \prod_{k=1}^g (z - q_k)}$$

Выразим соответствующие производные по  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{a}$  от  $dS = xdz$  как:

$$d\Omega_k = \frac{\partial}{\partial q_k} xdz = \left( \frac{1}{2} \frac{1}{z - q_k} + \sum_{s=1}^{(g-1|\frac{g-1}{2})} \frac{c_s}{z - v_s} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log \alpha}{\partial q_k} \right) xdz = \mathfrak{R}_k(z) xdz$$

$$d\omega_i = \frac{\partial}{\partial a_i} xdz = \left( \sum_{s=1}^{(g-1|\frac{g-1}{2})} \frac{b_s}{z - v_s} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log \alpha}{\partial a_i} \right) xdz = \mathfrak{r}_i(z) xdz$$

где  $i = 1, \dots, (g|\frac{g+1}{2})$ ,  $k = 1, \dots, g$ , и объединим все переменные в одно множество  $\{X_I\} = \{a_i\} \cup \{q_k\}$ ,  $\{d\varpi_I\} = \{d\omega_i\} \cup \{d\Omega_k\}$ ,  $\{r_I\} = \{\mathfrak{r}_i\} \cup \{\mathfrak{R}_k\}$ , где  $I = 1, \dots, (2g|\frac{3g+1}{2})$ . Формула вычета 2.4.5 приводит к

$$\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial X_I \partial X_J \partial X_K} = 2 \sum_{dx=0} \text{res} \frac{d\varpi_I d\varpi_J d\varpi_K}{dx dz} = -2 \sum_{dz=0} \text{res} \frac{\frac{\partial \log x}{\partial X_I} \frac{\partial \log x}{\partial X_J} \frac{\partial \log x}{\partial X_K}}{\frac{1}{x^2} \frac{d \log x}{dz}} dz$$

где в знаменателе правой части мы непосредственно получаем

$$\frac{1}{x^2} \frac{d \log x}{dz} = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} - \sum_{i=1}^g \frac{1}{z - q_i} + \sum_{s=1}^{(g-1|\frac{g-1}{2})} \frac{(1|2)}{z - v_s} \right) \frac{z(z-1) \prod_{i=1}^g (z - q_i)}{\alpha \prod_{s=1}^{(g-1|\frac{g-1}{2})} (z - v_s)^{(1|2)}} =$$

$$= -\frac{2f_{(2g|\frac{3g+1}{2})}(z)}{\prod_{s=1}^{(g-1|\frac{g-1}{2})} (z - v_s)^{(2|3)}}$$

где  $f_{(2g|\frac{3g+1}{2})}(z)$  является полиномом степени  $(2g|\frac{3g+1}{2})$ . То есть,

$$\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial X_I \partial X_J \partial X_K} = \sum_{f_{(\bullet)}(z)=0} \text{res} \frac{r_I(z) r_J(z) r_K(z)}{f_{(2g|\frac{3g+1}{2})}(z)} \prod_{s=1}^{(g-1|\frac{g-1}{2})} (z - v_s)^{(2|3)} dz$$

потому поскольку  $r_I(z)$  голоморфны в нулях  $f_{(2g|\frac{3g+1}{2})}(z)$ , а полное количество переменных  $(2g|\frac{3g+1}{2})$ , мы можем сразу применить **Теорему 4**. Это означает, что мы доказали, что уравнение WDVV выполняется для тау-функции Зайберга-Виттена как функции периодів и констант связи, в обоих случаях: ограниченном и неограниченном на равных правах.

#### 2.4.6 Выводы

В этой работе мы исследовали в деталях свойства  $SU(2)$  колчаных калибровочных теорий в соответствии с принципами, предложенными в [114]. Мы получили и доказали формулу вычета для третьих производных и использовали её для дальнейших исследований.

Мы показали, что формулы вычетов дают эффективный способ для вычислений разложения препотенциалов колчанной калибровочной теории в области слабой связи. Эти формулы могут быть использованы как дифференциальные уравнения, которые дальше можно решать рекурсивно, и это будет эквивалентным разложению Зайберг-Виттеновских периодов – интегралов движения для этих дифференциальных уравнений. Другим применением формулы вычета является то, что она приводит непосредственно к уравнениям WDVV для обобщённого препотенциала, поскольку количество критических точек равно количеству деформаций. Мы проверили выше, что это условие выполняется в обоих случаях: полной колчанной теории и её ограниченного замолотчиковского случая.

Замолотчиковский случай привлёк к себе особое внимание. Мы полностью описали его в рамках Зайберг-Виттеновского подхода к колчаным калибровочным теориям, показав, что он возникает после наложения связей, связанных с возникновением безмассовых состояний трифундаментальной материи. При этом препотенциал оказывается квадратичным выражением от Зайберг-Виттеновских периодов, характеризуя новый класс конформных калибровочных теорий, в которых голые ультрафиолетовый константы перенормируются только непертурбативно. Эта перенормировка может быть описана в терминах формул Томэ для точек ветвления гиперэллиптических кривых, которые естественным образом обобщают замолотчиковскую перенормировку для конформной теории с единственной  $SU(2)$  группой.

Для калибровочных групп старших рангов ситуация выглядит значительно более сложной, но кажется, что она может быть исследована с помощью методов, предложенных в этой работе. Обобщение на теории старшего ранга можно начать с обобщения замолотчиковского случая, чья Зайберг-Виттеновская формулировка является одним из основных результатов этой работы. Полный анализ случая старшего ранга требует также изучения старших пространств Тейхмюллера и соответствующих деформаций ультрафиолетовой калибровочной теории, но аналоги старших рангов для замолотчиковского случая должны быть понятны в терминах теории Зайберга-Виттена, так как на стороне СФТ они описы-

ваются в терминах системы нескольких скалярных полей на римановой поверхности. Мы собираемся вернуться к этой задаче позже.

#### 2.4.7 Конформный блок в модели Ашкина-Теллера

Тут мы представляем самый простой вывод точного конформного блока в  $c = 1$  модели Ашкина-Теллера в терминах, удобных для установления соответствия с теорией Зайберга-Виттена. Начальной точкой в [123] является операторная алгебра модели Ашкина-Теллера, которая включает в себя:

- $U(1)$ -ток  $I(z)$ , сугаваровский тензор энергии-импульса  $T(z) =: I(z)^2$  ;;
- Примарное относительно алгебры Вирасоро спиновое поле  $\sigma_0(z)$  и его первый потомок в токовом модуле  $\sigma_1(z)$ , которые являются  $\mathbb{Z}_2$  твист-полями в терминах  $I(z)$  (не имеют определённого  $U(1)$  заряда).

Рассмотрим конформный или “токовый блок” твист-полей  $\langle \sigma_0(z_1) \dots \sigma_0(z_n) \rangle$ , где заряды в промежуточном канале зафиксированы условием

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{A_\alpha} I(z) dz = a_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \tilde{g} = \frac{n}{2} - 1 \quad (2.4.46)$$

где  $A$ -циклы окружают каждую пару твист-полей и интерпретируются как канонические на гиперэллиптической кривой

$$y^2 = \prod_{i=1}^{2\tilde{g}+2} (z - z_i) \quad (2.4.47)$$

которая была введена для того, чтобы сделать коррелятор спин-полей однозначной функцией на этом двулистном накрытии начальной сферы  $\Sigma_0$ . Операторные разложения [123]

$$\begin{aligned} I(z)\sigma_0(0) &= \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\sigma_1(0) + \dots \\ I(z)\sigma_1(0) &= \frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\sigma_0(0) + 2z^{-\frac{1}{2}}\partial\sigma_0(0) + \dots \end{aligned} \quad (2.4.48)$$

дают для отношения корреляционных функций

$$F_0(z|\{z_i\}) = \frac{\langle I(z)\sigma_0(z_1) \dots \sigma_0(z_{2\tilde{g}+2}) \rangle}{\langle \sigma_0(z_1) \dots \sigma_0(z_{2\tilde{g}+2}) \rangle} = \frac{\mathcal{Q}_{g-1}(z)}{y} \quad (2.4.49)$$

где правая часть записывается из (2.4.48) и содержит  $g$ -параметрический полином, полностью зафиксированный интегралами периодов 2.4.31, которые приходят из 2.4.46. Для отношения немного других корреляционных функций из 2.4.48 и из аналитических свойств следует, что

$$F_1(z|\{z_i\}) = \frac{\langle I(z)\sigma_1(z_1)\sigma_0(z_2) \dots \sigma_0(z_{2\tilde{g}+2}) \rangle}{\langle \sigma_1(z_1)\sigma_0(z_2) \dots \sigma_0(z_{2\tilde{g}+2}) \rangle} = \frac{\mathcal{Q}_{g-1}(z)}{y} + \frac{d\Omega_1}{dz} \quad (2.4.50)$$

где

$$d\Omega_1 = \frac{C_1 dz}{y} \left( \frac{1}{z - z_1} + O_{g-1}(z) \right), \quad \oint_{A_i} d\Omega_1 = 0$$

это нормированный абелев дифференциал на 2.4.47. Операторное разложение, (2.4.48) получающееся в 2.4.49, в пределе  $z \rightarrow z_1$  приводит к соотношению

$$\frac{\mathcal{Q}_{g-1}(z_1)}{\sqrt{\prod_{j \neq 1} (z_1 - z_j)}} \langle \sigma_0(z_1) \sigma_0(z_2) \dots \sigma_0(z_{2\tilde{g}+2}) \rangle = \frac{1}{2} \langle \sigma_1(z_1) \sigma_0(z_2) \dots \sigma_0(z_{2\tilde{g}+2}) \rangle$$

тогда вставка в (2.4.50) даёт

$$\frac{\langle \sigma_0(z_1) \sigma_0(z_2) \dots \sigma_0(z_{2\tilde{g}+2}) \rangle}{\langle \sigma_1(z_1) \sigma_0(z_2) \dots \sigma_0(z_{2\tilde{g}+2}) \rangle} = \frac{2C_1}{\sqrt{\prod_{j \neq 1} (z_1 - z_j)}}$$

то есть  $4C_1 \mathcal{Q}_{g-1}(z_1) = \prod_{j \neq 1} (z_1 - z_j)$ , и

$$2 \frac{\partial_{z_1} \langle \sigma_0(z_1) \sigma_0(z_2) \dots \sigma_0(z_{2\tilde{g}+2}) \rangle}{\langle \sigma_1(z_1) \sigma_0(z_2) \dots \sigma_0(z_{2\tilde{g}+2}) \rangle} = \frac{\mathcal{Q}_{g-1}(z_1) + C_1 O_{g-1}(z_1)}{\sqrt{\prod_{j \neq 1} (z_1 - z_j)}} - \frac{C_1}{2} \sum_{j \neq 1} \frac{1}{(z_1 - z_j)^{3/2}}$$

Эти две формулы вместе дают

$$\left( 2\partial_{z_1} - \frac{2\mathcal{Q}_{g-1}^2(z_1)}{\prod_{j \neq 1} (z_1 - z_j)} + \frac{1}{4} \sum_{j \neq 1} \frac{1}{z_1 - z_j} + \frac{1}{2} O_{g-1}(z_1) \right) \langle \sigma_0(z_1) \sigma_0(z_2) \dots \sigma_0(z_{2\tilde{g}+2}) \rangle \quad (2.4.51)$$

Подставляя анзац  $\langle \sigma_0(z_1) \sigma_0(z_2) \dots \sigma_0(z_{2\tilde{g}+2}) \rangle = e^{\mathcal{F}(\mathbf{a}, \mathbf{z})} \cdot G(\mathbf{z})$ , где только функция в экспоненте зависит от  $\mathbf{a}$ , можно получить из 2.4.51 равенство

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_i} = \frac{\mathcal{Q}_{g-1}^2(z_i)}{\prod_{j \neq i} (z_i - z_j)}$$

которое в точности совпадает с 2.4.35. Также понятно, что формулы 2.4.46, 2.4.31 оказываются первой половиной периодов дифференциала Зайберга-Виттена. Т.е., экспоненциальный  $\mathbf{a}$ -зависимый вклад в решение 2.4.51 может быть получен с помощью методов, представленных в основном тексте работы и задаётся формулой 2.4.26, где квадратичная форма уже идентифицирована с матрицей периодов 2.4.47, в то время как в оригинальной статье [123] это утверждалось только на основании разных дополнительных аргументов.

## 2.4.8 Ещё о производных от матриц периодов

Тут мы представляем некоторый анализ уравнений 2.4.39 и 2.4.41, которые следуют из формул Рауха 2.4.36. Забывая об условиях нормирования 2.4.32, можно рассматривать уравнения 2.4.36 как параметризацию некоторого подмногообразия в пространстве  $\mathbb{A}^{\frac{1}{2}\tilde{g}(\tilde{g}+1)(2\tilde{g}-1)}$  производных нашей матрицы периодов, котором мы можем ввести координаты

$$T_{\alpha\beta}^k = \prod_{l \neq k} (q_k - q_l) \frac{\partial \mathcal{T}_{\alpha\beta}}{\partial q_k}$$

в терминах  $\tilde{g}^2$  коэффициентов  $\{R_{\alpha\beta}\}$  полиномов  $R_\alpha(z)$ . С этой точки зрения формулы 2.4.36 определяют отображение  $\mathbb{A}^{\tilde{g}^2} \mapsto \mathbb{A}^{\frac{1}{2}\tilde{g}(\tilde{g}+1)(2\tilde{g}-1)}$ , заданное квадратичными функциями

$$T_{\alpha\beta}^k = R_\alpha(q_k)R_\beta(q_k)$$

то есть, оно может быть рассмотрено как отображение  $\mathbb{P}^{\tilde{g}^2-1} \mapsto \mathbb{P}^{\frac{1}{2}\tilde{g}(\tilde{g}+1)(2\tilde{g}-1)-1}$ .

Вопросом, который позволяет лучше понять происхождение уравнений 2.4.39, 2.4.41, является вопрос о том, как описать образ этого отображения. В случае  $\tilde{g} = 2$ , где мы имеем  $\mathbb{P}^3 \mapsto \mathbb{P}^8$ , коразмерность образа равна 5 и нам нужно как минимум 5 уравнений в  $\mathbb{P}^8$ . Отметим, что у нас уже есть 5 независимых уравнений в 2.4.39, но 2.4.41 даёт ещё 2 дополнительных.

Параметризуя наши  $\tilde{g} = 2$  полиномы непосредственно

$$R_1(z) = az + b, \quad R_2(z) = cz + d$$

где  $(a : b : c : d)$  однородные координаты на  $\mathbb{P}^3$ , можно написать

$$T_{11}^i = (aq_i + b)^2, \quad T_{12}^i = (aq_i + b)(cq_i + d), \quad T_{22}^i = (cq_i + d)^2, \quad i = 1, 2, 3$$

Поскольку все уравнения квадратичные относительно  $a, b, c, d$ , то пересечение с общей плоскостью коразмерности 3 содержит  $2^3 = 8$  точки, потому степень отображения равна 8.

Теперь предположим, что образ является полным пересечением в  $\mathbb{P}^8$ , тогда он должен быть задан пятью полиномами  $P_{d_1}, \dots, P_{d_5}$ , такими что  $d_1 \cdot \dots \cdot d_5 = 8$ . Это возможно только если как минимум две степени  $d_i = 1$ , т.е., образ лежит в гиперплоскости. Но это оказывается невозможным, поскольку в таком случае мы получим линейное уравнение вида

$$\sum_{\alpha, \beta, k} C_{\alpha\beta}^k T_{\alpha\beta}^k = 0$$

которое может быть переписано как

$$C_{aa}a^2 + C_{ab}ab + \dots + C_{dd}d^2 = 0$$

и выполняется для всех  $\forall(a, b, c, d)$ , но это невозможно если  $C_{IJ} \neq 0$ . Т.е., мы пришли к противоречию и наша поверхность не лежит в гиперплоскости. Например, это означает, что уравнения 2.4.41 не являются следствием 2.4.39, а должны рассматриваться независимо.

## 2.5 Анзац Бете, уравнение Хироты и принцип соответствия в интегрируемых моделях

### 2.5.1 Введение

Одним из главных позитивных сдвигов в теории фундаментальных взаимодействий, происшедших за последнее время, стало осознание того факта, что на квантовом уровне симметрии могут не только нарушаться, но и восстанавливаться. Сейчас имеются ясные указания на то, что КХД и другие 4-мерные калибровочные теории обладают неочевидными симметриями, которые существуют только на квантовом уровне и отсутствуют в классическом лагранжиане. Эти симметрии проявляются как наличие скрытых *интегрируемых структур* – как квантовых, так и классических. Их выявление и изучение является сейчас одной из центральных задач теоретической физики высоких энергий. Именно с ними связаны надежды на адекватное описание режима сильной связи.

Модели, имеющие точное решение, не только доставляют нетривиальные примеры непертурбативных эффектов, которые могут быть рассчитаны до конца, но начинают входить в качестве структурных элементов в саму теорию фундаментальных взаимодействий. Так, классические интегрируемые системы описывают вакуумную структуру суперсимметричных калибровочных теорий, а законы квантовой интегрируемости определяют смешивание составных операторов при перенормировке. Спиновые цепочки и техника анзаца Бете стали эффективным инструментом в КХД и 4-мерных суперсимметричных теориях Янга-Миллса. Явление интегрируемости обычно ограничивается моделями в  $1+1$  измерениях, но в данном случае позволяет решить настоящую 4-мерную калибровочную теорию благодаря тому, что интегрируемая динамика в этой последней проявляется не в физическом пространстве-времени, а в пространстве ее внутренних симметрий. Локальные операторы в калибровочной теории соответствуют состояниям квантовой спиновой цепочки.

В практическом плане интегрируемость часто (но не всегда) означает решаемость в явном виде, и потому полезна, т.к. с ее помощью можно находить величины, которые обычно нельзя вычислить ни по теории возмущений, ни каким-либо иным способом. Если верить в то, что мир познаваем в том смысле, что по-настоящему фундаментальная теория должна быть способна давать количественные предсказания без использования суперкомпьютеров, обращение к интегрируемым системам дает единственный шанс.

Понимание этого заставляет относиться к наличию интегрируемых структур как к обязательному свойству теорий, претендующих на роль фундаментальных, и делает очевидной важность изучения этих структур как таковых.

Интегрируемые модели существуют в двух вариантах – классическом и квантовом. И те, и другие одинаково востребованы в современной теории. Большинство классических моделей допускают квантование, сохраняющее интегрируемость, но это только одна сторона дела. Оказывается, между ними имеются и другие, более глубокие связи,

не вытекающие из обычного принципа соответствия. А именно, классические уравнения присутствуют в квантовых задачах как точные соотношения даже при  $\hbar \neq 0$ . И наоборот, специфически квантовые интегрируемые структуры возникают при решении чисто классических уравнений. Это удивительное и еще не понятое до конца явление имеет несколько аспектов. Мы коснемся только одного – отождествления квантовой матрицы перехода (трансфер-матрицы) с классической  $\tau$ -функцией.

### 2.5.2 Интегрируемые модели классической теории поля

Хорошо известные примеры интегрируемых моделей классической теории поля в  $1 + 1$  измерениях – модели синус-Гордон, главное киральное поле, сигма-модели, двумеризованная цепочка Тоды. Имеется также большое количество нерелятивистских моделей, таких, как уравнения Кортевега-де Фриза, Бенджамина-Оно, Кадомцева-Петвиашвили, нелинейное уравнение Шредингера и многие другие. Иногда их называют солитонными уравнениями, поскольку у них, как правило, существуют точные решения солитонного типа. Интегрируемость, т.е. наличие бесконечного числа интегралов движения в инволюции, означает, что с каждым таким уравнением можно связать целую бесконечную *иерархию* совместных с ним уравнений – каждый интеграл движения порождает свою эволюцию во времени.

Центральный объект в теории – так называемая  $\tau$ -функция. Коротко говоря, она дает общее решение сразу всей иерархии интегрируемых уравнений, порождаемой бесконечным набором гамильтонианов в инволюции. В общем случае  $\tau$ -функция зависит от бесконечного числа переменных  $\mathbf{t} = \{t_0, t_1, t_2, t_3, \dots\}$  и удовлетворяет бесконечному количеству уравнений, которые можно закодировать в одном функциональном соотношении

$$\begin{aligned} & \tau(\mathbf{t} + [\lambda_1])\tau(\mathbf{t} + [\lambda_2] + [\lambda_3]) \\ & + \tau(\mathbf{t} + [\lambda_2])\tau(\mathbf{t} + [\lambda_1] + [\lambda_3]) \\ & + \tau(\mathbf{t} + [\lambda_3])\tau(\mathbf{t} + [\lambda_1] + [\lambda_2]) = 0 \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – произвольные параметры, и для краткости использовано обозначение  $\mathbf{t} + [\lambda] \equiv \{t_0 + 1, t_1 + \lambda, t_2 + \frac{1}{2}\lambda^2, t_3 + \frac{1}{3}\lambda^3, \dots\}$ . При разложении по степеням  $\lambda_i$  получаются дифференциальные уравнения, которые и образуют иерархию. Наряду с  $t_i$  используются также переменные  $u_\lambda$ , нумеруемые непрерывным “индексом”  $\lambda$  и связанные с  $t_i$  соотношениями

$$t_0 = u_0, \quad t_k = \frac{1}{k} \sum_{\lambda} u_{\lambda} \lambda^{-k}, \quad k \geq 1. \tag{2.5.2}$$

Переменные  $t_i$  и  $u_\lambda$  доставляют дополнительные друг к другу описания одной и той же системы, и переход от одних к другим в каком-то смысле аналогичен преобразованию Фурье.



В переменных  $u_\lambda$  соотношение (2.5.1) принимает вид разностного уравнения на 3-мерной решетке для любой тройки переменных  $u_{\lambda_i} = u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned} & \tau(u_1, u_2 + 1, u_3 + 1)\tau(u_1 + 1, u_2, u_3) \\ & + \tau(u_1 + 1, u_2, u_3 + 1)\tau(u_1, u_2 + 1, u_3) \\ & + \tau(u_1 + 1, u_2 + 1, u_3)\tau(u_1, u_2, u_3 + 1) = 0 \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Параметры  $\lambda_i$ , играют роль постоянных решетки. Аналогичные уравнения можно написать для четырех и более переменных  $u_i$ , но все они, как оказывается, следуют из уравнений (2.5.3), написанных для каждой тройки переменных.

“В природе”  $\tau$ -функциями часто оказываются разного рода корреляторы, их производящие функции, эффективные действия как функции констант связи.

Все многообразие нелинейных интегрируемых уравнений в частных производных свидится к *одному* универсальному разностному уравнению для  $\tau$ -функции (2.5.3). Оно, как и эквивалентное ему уравнение (2.5.1), называется уравнением Хироты и играет фундаментальную роль в теории классических (и, как мы скоро увидим, и квантовых) интегрируемых систем. Все известные интегрируемые уравнения получаются из него в результате разнообразных простых, но, возможно, технически изощренных манипуляций, как то: взятие непрерывного предела (разложение по степеням  $\lambda_i$  и переход к переменным  $t_k$ ), наложение разнообразных редукций, выбор зависимых и независимых переменных и т. п.

Отметим еще, что уравнение Хироты в форме (2.5.1) и (2.5.3) отражает глубокую взаимосвязь непрерывных и дискретных солитонных уравнений: они принадлежат одной иерархии и переходят друг в друга в результате замены (2.5.2) независимых переменных, произведенной одновременно во всей иерархии.

Недавно уравнение Хироты и тесно связанное с ним уравнение, называемое  $Y$ -системой, было использовано для нахождения спектра аномальных размерностей операторов в  $N = 4$  суперсимметричной 4-мерной теории Янга-Миллса в планарном пределе.

### 2.5.3 Квантовые интегрируемые системы

История квантовых интегрируемых систем началась в 1931 году, когда Г.Бете удалось построить точные собственные функции гамильтониана спиновой цепочки Гейзенберга

$$H = J \sum_{n=1}^L (\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z)$$

с помощью специальной подстановки, с тех пор ставшей знаменитой и носящей теперь его имя (анзац Бете). В том или ином виде этот метод оказался применим ко многим другим системам, в том числе к релятивистски-инвариантным моделям квантовой теории поля в  $1 + 1$  измерениях. Типичная форма, в которой пишется ответ для спектра гамильтониана

такова:

$$E = \sum_k \varepsilon(v_k)$$

Здесь  $\varepsilon(v)$  – некоторая известная функция (в случае спиновой цепочки Гейзенберга равная  $\varepsilon(v) = -8J/(v^2 + 1)$ ), а числа  $v_k$ , которые можно интерпретировать как импульсы квазичастиц, находятся из системы алгебраических уравнений (уравнений Бете)

$$\left( \frac{v_k - i}{v_k + i} \right)^L = - \prod_l \frac{v_k - v_l - 2i}{v_k - v_l + 2i}$$

В физически интересных случаях, когда основное состояние в термодинамическом пределе строится путем заполнения ложного вакуума, и число бетевских квазичастиц с импульсами  $v_k$  стремится к бесконечности вместе с длиной цепочки  $L$ , эта система превращается к интегральное уравнение на функцию плотности распределения импульсов, которое может быть решено явно.

В случае обобщенных спиновых цепочек, у которых “спины” преобразуются по представлениям группы  $SU(N)$ , диагонализация гамильтониана проводится с помощью последовательного применения анзаца Бете  $N - 1$  раз. Соответственно, имеется несколько сортов квазичастиц с импульсами  $v_k^{(t)}$ ,  $t = 1, 2, \dots, N - 1$ , а уравнения Бете принимают вид

$$\prod_l \frac{v_k^{(t)} - v_l^{(t-1)} + i}{v_k^{(t)} - v_l^{(t-1)} - i} \frac{v_k^{(t)} - v_l^{(t)} - 2i}{v_k^{(t)} - v_l^{(t)} + 2i} \frac{v_k^{(t)} - v_l^{(t+1)} + i}{v_k^{(t)} - v_l^{(t+1)} - i} = -1$$

Хотя за прошедшие годы была предложена масса различных обобщений и вариантов метода Бете (один из них – совсем недавно в контексте  $N = 4$  суперсимметричных калибровочных теорий), его секрет не раскрыт до сих пор. Ниже приведены некоторые соображения, которые, возможно, объяснят удивительную эффективность и вездесущность анзаца Бете.

#### 2.5.4 На пути к синтезу классической и квантовой интегрируемости

В этом разделе под квантовой интегрируемой системой понимается неоднородная спиновая цепочка, локальные наблюдаемые которой преобразуются по представлениям алгебры  $su(N)$  или ее  $q$ -деформаций. Это достаточно представительный пример, поскольку большинство точно решаемых моделей в квантовой области, в том числе модели квантовой теории поля, можно, по крайней мере формально, трактовать как его предельные случаи.

Поскольку система имеет бесконечное количество коммутирующих интегралов движения  $H_{\{J\}}$ , где  $\{J\}$  – некоторый мультииндекс, диагонализировать их лучше все сразу, а не какой-то отдельно взятый гамильтониан из этого семейства. Еще лучше составить из них производящую функцию и диагонализировать ее. Схематически она выглядит следующим образом:

$$T(t_0, t_1, \dots) = \sum_{\{J\}} \left( \prod_j t_j^{J_j} \right) H_{\{J\}} \quad (2.5.4)$$

и зависит от, вообще говоря, бесконечного количества вспомогательных переменных  $t_i$ . Такая производящая функция называется  $T$ -оператором или оператором (матрицей) перехода и имеет смысл оператора временной эволюции системы за время, определяемое параметрами  $t_i$ .  $T$ -оператор – гораздо более информативный и содержательный объект, чем какой-либо коммутирующий с ним гамильтониан, поскольку важная динамическая информация оказывается закодированной в его аналитических свойствах по переменным  $t_i$ .

Явное выражение для  $T$ -оператора через исходные динамические переменные модели, как правило, не известно в замкнутом виде, но это не мешает вывести общие функциональные соотношения для него, которые, вместе с аналитическими свойствами, позволяют полностью решить задачу нахождения его спектра, а, значит, и спектра исходного гамильтониана. Эти функциональные соотношения имеют долгую историю и были известны в разных формах. В каком-то смысле они представляют собой вершину теории квантовых интегрируемых систем. Замечательно, что в этом месте она смыкается с классической теорией.

Ключевой факт, позволяющий говорить о возможности синтеза классической и квантовой интегрируемости, и дополняющий традиционный принцип соответствия, состоит в том, что наиболее общая и универсальная форма функциональных соотношений для  $T$ -оператора представляет собой классическое уравнение Хироты (2.5.1) в переменных  $t_i$  на  $T$ -оператор (2.5.4). (Подчеркнем, что поскольку  $T$ -операторы коммутируют при всех значениях  $t_i$ , проблемы упорядочения не возникает, и уравнению Хироты удовлетворяет любое из собственных значений  $T$ -оператора.) При этом постоянная Планка  $\hbar$ , присутствующая изначально в квантовой задаче, в это уравнение не входит, а появляется только в его решениях.

Чтобы сделать более точное утверждение, нам нужны некоторые подробности про  $T$ -оператор. Среди переменных  $t_i$  имеется одна выделенная, которая обычно называется спектральным параметром. Будем считать, что это  $t_0$ , и чтобы подчеркнуть ее выделенность, примем для нее специальное обозначение  $u = t_0$ . Рассмотрим  $T$ -оператор как функцию  $u$ , параметрически зависящую от всех остальных времен  $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \dots\}$ :  $T = T(u, \mathbf{t})$ . Для определенности можно иметь в виду любое из собственных значений  $T$ -оператора. Пусть  $T_\lambda(u)$  – множество коммутирующих квантовых трансфер-матриц. Они являются функциями от  $u$  и зависят также от диаграммы Юнга  $\lambda$  как от дискретного (многокомпонентного) параметра.  $T$ -оператор можно представить в виде следующего производящего ряда:

$$T(u, \mathbf{t}) = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{t}) T_{\lambda}(u), \quad (2.5.5)$$

что является точной версией схематической формулы (2.5.4). Сумма берется по всем диаграммам Юнга включая пустую диаграмму  $\emptyset$ , а  $s_{\lambda}(\mathbf{t})$  – стандартные функции Шура, опре-

деленные формулами

$$s_\lambda(\mathbf{t}) = \det_{i,j=1,\dots,\ell(\lambda)} h_{\lambda_i-i+j}(\mathbf{t}), \quad \exp\left(\sum_{k \geq 1} t_k z^k\right) = \sum_{n \geq 0} h_n(\mathbf{t}) z^n$$

(здесь  $\lambda_i$  – длина  $i$ -й строки диаграммы  $\lambda$ , а  $\ell(\lambda)$  – число ненулевых строк), причем  $s_\emptyset(\mathbf{t}) = 1$ . Отметим, что  $h_n(\mathbf{t})$  – это функции Шура для диаграмм  $\lambda = (n)$ , состоящих из одной строки длины  $n$ :  $h_n(\mathbf{t}) = s_{(n)}(\mathbf{t})$ . Обычно функции Шура рассматривают как симметрические функции переменных  $x_i$  таких, что  $t_k = \frac{1}{k} \sum_i x_i^k$ . Из известных функциональных соотношений для  $T_\lambda(u)$  в детерминантной форме, которые имеют вид

$$T_\lambda(u) = \left( \prod_{k=1}^{\ell(\lambda)-1} T_\emptyset(u-k) \right)^{-1} \det_{i,j=1,\dots,\ell(\lambda)} T_{(\lambda_i-i+j)}(u-j+1),$$

следует, что  $T$ -оператор (2.5.5) удовлетворяет классической иерархии мКП и, в частности, уравнению Хироты. Подчеркнем, что поскольку  $T$ -операторы коммутируют при всех значениях  $t_i$ , проблемы упорядочения не возникает, и уравнению Хироты удовлетворяет любое из собственных значений  $T$ -оператора.

Метод вложенных анзацев Бете в контексте классического уравнения Хироты выглядит как цепочка преобразований Бэклунда, последовательно “раздевающих” исходную задачу до тривиальной.  $T$ -операторы, возникающие на промежуточных уровнях в методе вложенных анзацев Бете, можно рассматривать как зависящие от параметров  $t_i$  обобщения  $Q$ -операторов Бакстера.

Сказанное выше почти дословно переносится на квантовые суперсимметричные модели. Уравнение Хироты для  $T$ -оператора остается в силе, меняется только класс допустимых решений.

### 2.5.5 Связь с многочастичными системами типа Калоджеро

Наконец, следует упомянуть о том, что динамика нулей  $T$ -оператора по одной из переменных  $t_i$  в зависимости от остальных переменных совпадает с динамикой многочастичных интегрируемых систем типа Калоджеро. Это следует из анонсированной в предыдущем разделе связи с  $\tau$ -функцией и аналитических свойств  $T$ -оператора.

Чтобы сформулировать более точное утверждение, остановимся подробнее на аналитических свойствах  $T$ -оператора. Среди переменных  $t_i$  имеется одна выделенная, которая обычно называется спектральным параметром. Будем считать, что это  $t_0$ , и чтобы подчеркнуть ее выделенность, примем для нее специальное обозначение  $u = t_0$ . Рассмотрим  $T$ -оператор как функцию  $u$ , параметрически зависящую от всех остальных  $\mathbf{t} = \{t_i\}$ :  $T = T(u, \mathbf{t})$  (для определенности можно иметь в виду любое из его собственных значений). Аналитические свойства  $T$ -оператора по спектральному параметру – одна из важнейших характеристик модели. В простейшем случае, к которому относятся конечные спиновые

цепочки,  $T$ -оператор должен быть полиномом от  $u$  степени, равной числу узлов цепочки:

$$T(u, \mathbf{t}) = C \prod_{j=1}^L (u - u_j(\mathbf{t}))$$

Тогда из отождествления  $T(u, \mathbf{t})$  с  $\tau$ -функцией следует, что динамика его нулей  $u_j(\mathbf{t})$  описывается релятивистским обобщением системы Калоджеро (системой Руйсенарса), причем  $i$ -й гамильтониан генерирует эволюцию по  $t_i$ . Например, уравнение движения по  $t_1$  имеет вид

$$\ddot{u}_i = \sum_{k \neq i} \frac{2\dot{u}_i \dot{u}_k}{(u_i - u_k)^2 - 1}, \quad \dot{u}_i = \partial_{t_1} u_i$$

В заключение отметим, что уравнения Бете (2.5.3) можно понимать как систему Руйсенарса в дискретном времени  $t$ .

### 2.5.6 Заключение

Мы видим, что наиболее общие и универсальные соотношения для классических и квантовых интегрируемых систем фактически совпадают и сводятся к уравнению Хироты. Подытожив сказанное, можно сформулировать дополнение к квантовомеханическому принципу соответствия: с каждой квантовой интегрируемой моделью связана классическая интегрируемая динамика в пространстве ее (коммутирующих) интегралов движения, содержащая полную информацию о спектральных свойствах исходной квантовой модели.

На этом мы завершим краткий рассказ о взаимосвязи классической и квантовой интегрируемости, сделанный “на словесном уровне”. На наш взгляд, сам факт того, что высшая точка науки о квантовых интегрируемых системах смыкается с вершиной соответствующей (но по форме и содержанию сильно отличной от нее) науки о классических системах, совершенно замечателен и требует более глубокого осмысления.

## 2.6 Квантовая модель Годена и классическая иерархия КП

### 2.6.1 Введение

В [145] было опубликовано замечательное соответствие между квантовой моделью Годена и классической иерархией Кадомцева-Петвиашвили (КП). Это предельный случай соответствия между квантовыми спиновыми цепочками с янгианной алгеброй симметрий  $Y(gl(N))$  и классической модифицированной иерархией КП (мКП), основанного на построении управляющего  $T$ -оператора [146, 147]. Управляющий  $T$ -оператор был введен в [146] (в предварительном виде он ранее появился в [148]). Это специального вида производящая функция для коммутирующих интегралов движения в квантовой модели. В случае модели Годена любое собственное значение управляющего  $T$ -оператора является тау-функцией иерархии КП с полиномиальной зависимостью от спектрального параметра. Хорошо известна история о динамике полюсов рациональных решений солитонных уравнений [149, 150, 151], в которой раскрывается связь между квантовой моделью Годена [152] и классической системой частиц Калоджеро-Мозера (КМ) [153]. Эту связь также наблюдали ранее в [154], используя другие аргументы.

Используя операцию матричной производной, мы построили коммутирующие интегралы движения для  $gl(N)$  модели Годена с твистованными граничными условиями и векторными представлениями в отмеченных точках квантового пространства, которые отвечают произвольному представлению во вспомогательном пространстве. Управляющий  $T$ -оператор – это их производящая функция. Она зависит от бесконечного числа вспомогательных “времен”  $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3, \dots\}$ , где  $t_1$  можно отождествить со спектральным параметром  $x$ . Управляющий  $T$ -оператор удовлетворяет билинейному тождеству для классической иерархии КП и, как следствие, любое его собственное значение является тау-функцией иерархии КП [157, 158]. Это развитие ранних исследований [159, 160, 161], поясняющих роль билинейного тождества Хироты в квантовых интегрируемых системах.

Кроме того, все собственные значения управляющего  $T$ -оператора – тау-функции, *полиномиальные* по переменной  $x = t_1$ . Поэтому, в соответствии с [150, 151], динамика их корней по  $t_i$  с  $i > 1$  подчиняется уравнениям движения классической системы частиц КМ. Отмеченные точки  $x_i$  в модели Годена (неоднородности в узлах на языке спиновых цепочек) могут быть отождествлены с начальными координатами частиц модели КМ, где собственные значения годеновских гамильтонианов пропорциональны их начальным импульсам. Собственные значения матрицы Лакса для модели КМ совпадают с собственными значениями матрицы твиста (с некоторыми кратностями). Таким образом, при фиксированных интегралах движения в модели КМ, которые определяются инвариантами матрицы твиста, есть конечное количество решений для значений начальных импульсов, которые отвечают разным собственным состояниям модели Годена. Другими словами, собственные вектора годеновских гамильтонианов находятся в соответствии с (конечным количеством) точек пересечения двух лагранжевых подмногообразий в фазовом простран-

стве классической модели КМ. Это “квантово-классическое соответствие” также обсуждалось в [155, 156] в контексте суперсимметричных калибровочных теорий и бран.

Здесь мы рассматриваем модель Годена с формальной константой Планка  $\hbar$ . В этом случае управляющий оператор  $T$ -оператор – это тау-функция  $\hbar$ -зависимой версии иерархии КП [162], и константа связи модели КМ становится пропорциональной  $\hbar^2$ .

## 2.6.2 Квантовая модель Годена

Пусть  $e_{ab}^{\hbar}$  – это генераторы “ $\hbar$ -зависимой версии” универсальной обертывающей алгебры  $U(\mathfrak{gl}(N))$  с коммутационными соотношениями  $[e_{ab}^{\hbar}, e_{a'b'}^{\hbar}] = \hbar(\delta_{a'b}e_{ab'}^{\hbar} - \delta_{ab'}e_{a'b}^{\hbar})$ . Параметр  $\hbar$  будет играть роль константы Планка. Пусть  $\pi_{\lambda}$  конечномерное неприводимое представление  $U(\mathfrak{gl}(N))$  со старшим весом  $\lambda$ . Мы отождествим  $\lambda$  с диаграммой Юнга  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\ell})$ , где  $\ell = \ell(\lambda)$  количество ненулевых строк, а  $\lambda_i \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{\ell} > 0$ . Например,  $\pi_{(1)}$  – это  $N$ -мерное векторное представление, соответствующее 1-клеточной диаграмме  $\lambda = (1)$ . Мы имеем  $\pi_{(1)}(e_{ab}^{\hbar}) = \hbar e_{ab}$ , где  $e_{ab}$  – это стандартный базис в пространстве  $N \times N$  матриц: матрица  $e_{ab}$  имеет только один ненулевой элемент (равный 1) на месте  $ab$ :  $(e_{ab})_{a'b'} = \delta_{aa'}\delta_{bb'}$ . Отметим, что  $I = \sum_a e_{aa}$  – это единичный оператор, а  $P = \sum_{ab} e_{ab} \otimes e_{ba}$  – это оператор перестановки, действующий на пространстве  $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N$ .

В тензорном произведении  $U(\mathfrak{gl}(N))^{\otimes n}$  генераторы  $e_{ab}^{\hbar}$  могут быть реализованы как  $e_{ab}^{\hbar(i)} := \text{id}^{\otimes(i-1)} \otimes e_{ab}^{\hbar} \otimes \text{id}^{\otimes(n-i)}$ . Очевидно, что они коммутируют при любых  $i \neq j$  и любых  $a, b$  потому что они действуют нетривиально в разных пространствах. Аналогично, для любой матрицы  $g \in \text{End}(\mathbb{C}^N)$  мы определим  $g^{(i)}$  – действие в тензорном произведении  $\mathcal{V} = (\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$ :  $g^{(i)} = I^{\otimes(i-1)} \otimes g \otimes I^{\otimes(n-i)} \in \text{End}(\mathcal{V})$ . В этих обозначениях,  $P_{ij} := \sum_{a,b} e_{ab}^{(i)} e_{ba}^{(j)}$  – это оператор перестановки  $i$ -того и  $j$ -того тензорных множителей в  $\mathcal{V} = \mathbb{C}^N \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^N$ .

Зафиксируем  $n$  разных чисел  $x_i \in \mathbb{C}$  и диагональную  $N \times N$  матрицу  $g_0 = \text{diag}(k_1, \dots, k_N)$ . (Предположим, что все  $k_i$  разные и ненулевые.) Мы назовем  $g_0$  матрицей твиста. Коммутирующие годеновские гамильтонианы имеют вид:

$$H_i = \sum_{a=1}^N k_a e_{aa}^{\hbar(i)} + \sum_{j \neq i} \sum_{a,b=1}^N \frac{e_{ab}^{\hbar(i)} e_{ba}^{\hbar(j)}}{x_i - x_j}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.6.1)$$

Гамильтонианы квантовой модели Годена [152] с гильбертовым пространством  $\mathcal{V} = (\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$  – это ограничение операторов (2.6.1) на  $N$ -мерное векторное представление:

$$H_i = \hbar \sum_{a=1}^N k_a e_{aa}^{(i)} + \hbar^2 \sum_{j \neq i} \sum_{a,b=1}^N \frac{e_{ab}^{(i)} e_{ba}^{(j)}}{x_i - x_j} = \hbar g_0^{(i)} + \hbar^2 \sum_{j \neq i} \frac{P_{ij}}{x_i - x_j}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.6.2)$$

Легко проверить, что операторы

$$M_a = \sum_{l=1}^n e_{aa}^{(l)} \quad (2.6.3)$$

коммутируют с годеновскими гамильтонианами:  $[H_i, M_a] = 0$ . Поэтому собственные состояния гамильтонианов могут быть классифицированы соответственно собственным значениям операторов  $M_a$ . Пусть

$$\mathcal{V} = \bigotimes_{i=1}^n V_i = \bigoplus_{m_1, \dots, m_N} \mathcal{V}(\{m_a\})$$

это разложение гильбертового пространства модели Годена  $\mathcal{V}$  в прямую сумму собственных подпространств операторов  $M_a$  с собственными значениями  $m_a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $a = 1, \dots, N$ . Тогда собственные состояния  $H_i$  находятся в пространствах  $\mathcal{V}(\{m_a\})$ . Очевидно,  $\sum_a M_a = nI^{\otimes n}$ , и следовательно  $\sum_{a=1}^N m_a = n$ . Отметим также, что  $\sum_{i=1}^n H_i = \sum_{a=1}^N k_a M_a$ .

Более общее семейство коммутирующих гамильтонианов модели Годена обсуждается в [163, 164, 165]. В [145] было показано, что  $gl(N)$  модель Годена с векторным представлением в узлах допускает очень простую конструкцию высших коммутирующих гамильтонианов, одна из версий которой была предложена в [166] для цепочки спинов ХХХ-типа. Основным техническим инструментом является матричная производная.

Пусть  $g$  – это элемент алгебры Ли  $gl(N)$ , а  $f$  – произвольная функция от  $g \in \text{End}(L)$ , где  $L$  – это пространство любого представления  $gl(N)$ . Матричная производная определяется следующим образом:

$$df(g) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \sum_{ab} e_{ab} \otimes f(g + \varepsilon e_{ba}) \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Правая сторона принадлежит  $\text{End}(\mathbb{C}^N \otimes L)$ . Например:

$$d(\text{tr } g)^k = k(\text{tr } g)^{k-1} I, \quad d \text{tr } g^k = k g^{k-1}, \quad dg^k = P \sum_{i=0}^{k-1} g^i \otimes g^{k-i-1} \quad \text{for } k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

Когда количество тензорных множителей больше двух, более удобны другие обозначения. Пусть  $V_i \cong \mathbb{C}^N$  будут копиями  $\mathbb{C}^N$ , а  $\mathcal{V} = V_1 \otimes \dots \otimes V_n$  как раньше. Тогда, применяя матричную производную к скалярной функции  $f$  несколько раз, мы можем вложить результат в  $\text{End}(\mathcal{V})$  согласно формулам

$$d_i f(g) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \sum_{ab} e_{ab}^{(i)} f(g + \varepsilon e_{ba}) \Big|_{\varepsilon=0},$$

$$d_{i_2} d_{i_1} f(g) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} \sum_{a_2 b_2} e_{a_2 b_2}^{(i_2)} e_{a_1 b_1}^{(i_1)} f(g + \varepsilon_1 e_{b_1 a_1} + \varepsilon_2 e_{b_2 a_2}) \Big|_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0}$$

и так далее. Нижние индексы в  $d$  показывают, в каких тензорных множителях результат действия оператора нетривиальный.

Пусть  $\chi_\lambda(g) = \text{tr}_{\pi_\lambda} g$  – это характер представления  $\pi_\lambda$  вычисленный для матрицы  $g$ . Его можно записать в терминах полиномов Шура  $s_\lambda(\mathbf{y})$  по переменным  $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots\}$ ,  $y_k = \frac{1}{k} \text{tr } g^k$ :

$$\chi_\lambda(g) = s_\lambda(\mathbf{y}) = \det_{i,j=1, \dots, \ell(\lambda)} h_{\lambda_i - i + j}(\mathbf{y})$$



(формула Якоби-Труди), с полными симметрическими полиномами  $h_k(\mathbf{y}) = s_{(k)}(\mathbf{y})$ , которые определяются

$$\exp(\xi(\mathbf{y}, z)) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(\mathbf{y}) z^k,$$

где  $\xi(\mathbf{y}, z) := \sum_{k \geq 1} y_k z^k$ . Например,  $\chi_{(1)}(g) = \text{tr } g$ . Для удобства положим  $h_k = 0$  при  $k < 0$ . Пусть  $p_1, \dots, p_N$  - это собственные значения  $g$ , реализованного в качестве элемента  $\text{End}(\mathbb{C}^N)$ . Тогда  $y_k = \frac{1}{k} (p_1^k + \dots + p_N^k)$  и  $\chi_\lambda(g) = \frac{\det_{1 \leq i, j \leq N} (p_j^{\lambda_i + N - i})}{\det_{1 \leq i, j \leq N} (p_j^{N - i})}$  (см. [167]). Эта формула подразумевает, что  $\chi_\emptyset(g) = s_\emptyset(\mathbf{y}) = 1$ . Характеры представляют собой специальный класс скалярных функций на пространстве  $N \times N$  матриц, который особенно важен для нас.

Теперь мы готовы построить семейство коммутирующих операторов для модели Годена:

$$\mathbb{T}_\lambda^G(x) = \left(1 + \frac{\hbar \mathbf{d}_n}{x - x_n}\right) \dots \left(1 + \frac{\hbar \mathbf{d}_1}{x - x_1}\right) \chi_\lambda(g_0)$$

По аналогии со спиновыми цепочками, мы назовем их трансфер-матрицами модели Годена. Первые несколько из них:  $\mathbb{T}_\emptyset^G(x) = 1$ ,  $\mathbb{T}_{(1)}^G(x) = \text{tr } g_0 + \sum_i \frac{\hbar}{x - x_i}$  и

$$\mathbb{T}_{(1^2)}^G(x) = \chi_{(1^2)}(g_0) + \text{tr } g_0 \sum_i \frac{\hbar}{x - x_i} + \sum_{i < j} \frac{\hbar^2}{(x - x_i)(x - x_j)} - \sum_i \frac{H_i}{x - x_i}, \quad (2.6.4)$$

В последней формуле мы видим, что годеновы гамильтонианы  $H_i$  принадлежат этому семейству. Для диаграмм с одним столбцом эта конструкция согласуется с прескрипцией Талалаева [165]. Для  $n = 0$  трансфер-матрица – это просто характер:  $\mathbb{T}_\lambda^{G(n=0)}(x) = \chi_\lambda(g_0)$ .

В дальнейшем нормировка когда любая трансфер-матрица модели Годена – это полином по  $x$ , будет более удобной. В полиномиальной нормировке трансфер-матрицы модели Годена представлены формулой

$$T_\lambda^G(x) = (x - x_n + \hbar \mathbf{d}_n) \dots (x - x_1 + \hbar \mathbf{d}_1) \chi_\lambda(g_0).$$

Все эти операторы коммутируют при любых  $x$  и  $\lambda$ .

### 2.6.3 Управляющий $T$ -оператор и иерархия КП

Пусть  $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \dots\}$  – это бесконечное множество “времен”. Управляющий  $T$ -оператор для модели Годена – это производящая функция для трансфер-матриц  $T_\lambda^G(x)$ :

$$T^G(x, \mathbf{t}) = \sum_\lambda T_\lambda^G(x) s_\lambda(\mathbf{t}/\hbar). \quad (2.6.5)$$

Эти операторы коммутируют при различных значениях параметров:  $[T^G(x, \mathbf{t}), T^G(x', \mathbf{t}')] = 0$ . Учитывая  $\sum_\lambda \chi_\lambda(g_0) s_\lambda(\mathbf{t}/\hbar) = \exp\left(\frac{1}{\hbar} \sum_{k \geq 1} t_k \text{tr } g_0^k\right)$  (тождество Коши-Литтлвуда, см. [167]), мы можем определить управляющий  $T$ -оператор более детально так

$$T^G(x, \mathbf{t}) = (x - x_n + \hbar \mathbf{d}_n) \dots (x - x_1 + \hbar \mathbf{d}_1) \exp\left(\frac{1}{\hbar} \sum_{k \geq 1} t_k \text{tr } g_0^k\right). \quad (2.6.6)$$

Следует отметить, что поскольку  $e^{-t \operatorname{tr} g} \mathbf{d} e^{t \operatorname{tr} g} = t$ , роль переменной  $t_1$  - это сдвиг  $x \rightarrow x + t_1$ , поэтому  $e^{\frac{1}{\hbar} x \operatorname{tr} g_0} T^G(x, \mathbf{t})$  зависит от  $x, t_1$  только как от их суммы  $x + t_1$ .

Управляющий  $T$ -оператор содержит полную информацию о спектре всех трансфер-матриц. Трансфер-матрицы могут быть восстановлены из него с помощью следующей формулы:

$$T_\lambda^G(x) = s_\lambda(\hbar \tilde{\partial}) T^G(x, \mathbf{t}) \Big|_{\mathbf{t}=0}, \quad (2.6.7)$$

где  $\tilde{\partial} = \{\partial_{t_1}, \frac{1}{2} \partial_{t_2}, \frac{1}{3} \partial_{t_3}, \dots\}$ . В частности,

$$T_{(1)}^G(x) = \hbar \partial_{t_1} T^G(x, \mathbf{t}) \Big|_{\mathbf{t}=0}, \quad T_{(12)}^G(x) = \frac{1}{2} (\hbar^2 \partial_{t_1}^2 - \hbar \partial_{t_2}) T^G(x, \mathbf{t}) \Big|_{\mathbf{t}=0}. \quad (2.6.8)$$

Для любого  $z \in \mathbb{C}$  мы положим  $\mathbf{t} \pm \hbar[z^{-1}] := \{t_1 \pm \hbar z^{-1}, t_2 \pm \frac{\hbar}{2} z^{-2}, t_3 \pm \frac{\hbar}{3} z^{-3}, \dots\}$ . Как мы увидим ниже,  $T^G(x, \mathbf{t} \pm \hbar[z^{-1}])$ , рассмотренный как функция от  $z$  с постоянными  $\mathbf{t}$ , играет важную роль. Здесь мы лишь отметим, что уравнение (2.6.7) означает, что  $T^G(x, 0 \pm \hbar[z^{-1}])$  - это производящий ряд для  $T$ -оператора, который соответствует диаграммам с одной строкой или одним столбцом:

$$T^G(x, \hbar[z^{-1}]) = \sum_{s \geq 0} z^{-s} T_{(s)}^G(x), \quad T^G(x, -\hbar[z^{-1}]) = \sum_{a=0}^N (-z)^{-a} T_{(1^a)}^G(x).$$

Следующая теорема - это наш главный результат.

**Теорема 9.** *Управляющий  $T$ -оператор (2.6.6) удовлетворяет билинейному тождеству для  $\hbar$ -зависимой иерархии КП [157, 158, 162]:*

$$\oint_{\infty} e^{\frac{1}{\hbar} \xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}', z)} T^G(x, \mathbf{t} - \hbar[z^{-1}]) T^G(x, \mathbf{t}' + \hbar[z^{-1}]) dz = 0 \quad \text{для всех } \mathbf{t}, \mathbf{t}'. \quad (2.6.9)$$

Контур интегрирования выбран так, что внутри все особенности, приходящие от  $T^G$ , и ни одной из приходящих от  $e^{\frac{1}{\hbar} \xi(\mathbf{t}-\mathbf{t}', z)}$ .

Это значит, что каждое собственное значение управляющего  $T$ -оператора - это тау-функция иерархии КП. Вообще, билинейное тождество (2.6.9) подразумевает много билинейных функциональных соотношений для управляющего  $T$ -оператора (уравнения Хироты). Некоторые из них выписаны явно в [145]. Уравнение (2.6.5) - это разложение тау-функции в ряд по полиномам Шура [157, 168, 169].

Так как модель Годена связана с иерархией КП, интересно проследить роль других стандартных ингредиентов теории КП. Мы будем, в основном, интересоваться функцией Бейкера-Ахиезера (БА). В соответствии с общей схемой, функция БА, отвечающая тау-функции (2.6.6), дается формулой

$$\psi(x, \mathbf{t}; z) = e^{\frac{1}{\hbar}(xz + \xi(\mathbf{t}, z))} (T^G(x, \mathbf{t}))^{-1} T^G(x, \mathbf{t} - \hbar[z^{-1}])$$

и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\hbar \partial_{t_2} \psi(x, \mathbf{t}; z) = \hbar^2 \partial_x^2 \psi(x, \mathbf{t}; z) + 2u(x, \mathbf{t}) \psi(x, \mathbf{t}; z), \quad (2.6.10)$$

где  $u(x, \mathbf{t}) = \hbar^2 \partial_x^2 \log T^G(x, \mathbf{t})$ . Используя определение (2.6.6), мы имеем:

$$\psi(x, \mathbf{t}; z) = z^{-N} e^{\frac{1}{\hbar}(xz + \xi(\mathbf{t}, z))} (T^G(x, \mathbf{t}))^{-1} \prod_{i=1}^{\overleftarrow{n}} (x - x_i + \hbar \mathbf{d}_i) \left[ \det(zI - g_0) \exp\left(\frac{1}{\hbar} \sum_{k \geq 1} t_k \operatorname{tr} h^k\right) \right] \quad (2.6.11)$$

(здесь и далее  $\prod_{i=1}^{\overleftarrow{n}} A_i = A_n \dots A_2 A_1$ ).

С помощью этой формулы мы видим, что  $e^{-\frac{1}{\hbar}(xz + \xi(\mathbf{t}, z))} \psi(x, \mathbf{t}; z)$  – это полином по  $z^{-1}$  степени  $N$ . Относительно  $x$  это рациональная функция с  $n$  нулями и  $n$  полюсами, простыми в точках общего положения. Из (2.6.6), (2.6.11) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( e^{-\frac{1}{\hbar}(xz + \xi(\mathbf{t}, z))} \psi(x, \mathbf{t}; z) \right) = z^{-N} \det(zI - g_0).$$

Мы также отметим формулу для *стационарной* функции БА  $\psi(x, z) := \psi(x, 0; z)$ , которая прямо следует из (2.6.11):

$$\psi(x, z) = z^{-N} e^{\frac{1}{\hbar} x z} \prod_{i=1}^{\overleftarrow{n}} \left( 1 + \frac{\hbar \mathbf{d}_i}{x - x_i} \right) \det(zI - g_0). \quad (2.6.12)$$

#### 2.6.4 Связь с классической моделью Колоджеро-Мозера

Интегрируемость модели Годена значит, что собственные значения управляющего  $T$ -оператора в полиномиальной нормировке – это полиномы по спектральному параметру  $x$  степени  $n$ :

$$T^G(x, \mathbf{t}) = e^{\frac{1}{\hbar} t_1 \operatorname{tr} g_0 + \frac{1}{\hbar} t_2 \operatorname{tr} g_0^2 + \dots} \prod_{k=1}^n (x + t_1 - x_k(t_2, t_3, \dots)). \quad (2.6.13)$$

Корни каждого собственного значения имеют свою динамику по временам  $t_k$ . Эта динамика известна [150, 151] и описывается рациональной моделью КМ [153]. Параметры  $x_i$  модели Годена играют роль координат частиц системы КМ при  $t_i = 0$ :  $x_j = x_j(0)$ . В частности, мы имеем  $T^G(x, 0) = T_\emptyset^G(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k)$ .

Используя (2.6.8), мы легко получаем формулу для  $\Gamma_{(1)}^G(x) = T_{(1)}^G(x) / T_\emptyset^G(x)$ , которая приведена в (2.6.4). Для  $\Gamma_{(1^2)}^G(x)$  из второго уравнения в (2.6.8) имеем

$$\Gamma_{(1^2)}^G(x) = \chi_{(1^2)}(g_0) + \operatorname{tr} g_0 \sum_i \frac{\hbar}{x - x_i} + \sum_{i < j} \frac{\hbar^2}{(x - x_i)(x - x_j)} + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\hbar \dot{x}_i}{x - x_i},$$

где  $\dot{x}_i = \partial_{t_2} x_i(t_2) \Big|_{t_2=0}$ . Сравнивая с третьим уравнением в (2.6.4), мы заключаем, что начальные скорости пропорциональны собственным значениям гамильтонианов модели Годена:

$$\hbar \dot{x}_i = -2H_i.$$

Эта неожиданная связь между квантовой моделью Годена и классической моделью КМ была обнаружена также в [154] с использованием других аргументов.

Следуя [150], можно вывести уравнения движения по времени  $t_k$  для  $x_i$  выполнив разложение по полюсам в линейной задаче (2.6.10) для функции БА  $\psi$ . Удобно обозначить  $t_2 = t$  и положить все остальные времена равными 0, потому что все они не важны в этом выводе. Полусной анзац для функции БА имеет следующий вид:

$$\psi = e^{\frac{1}{\hbar}(xz+tz^2)} \left( c_0(z) + \sum_{i=1}^n \frac{c_i(z,t)}{x - x_i(t)} \right),$$

где  $c_0(z) = \det(I - z^{-1}g_0)$ . Следует подставить его в линейное уравнение (2.6.10) с

$$u = - \sum_{i=1}^n \frac{\hbar^2}{(x - x_i)^2}$$

и устранить все полюса в точках  $x_i$ . Это приводит к переопределенной системе уравнений на коэффициенты  $c_i$ . Их совместность влечет за собой Лаксово представление для модели КМ:

$$\dot{Y} = [Y, T], \quad (2.6.14)$$

где  $n \times n$  матрицы  $Y, T$  даются выражениями

$$Y_{ik} = -p_i \delta_{ik} - \hbar \frac{1 - \delta_{ik}}{x_i - x_k}, \quad p_i := \frac{1}{2} \dot{x}_i, \quad (2.6.15)$$

$$T_{ik} = -\delta_{ik} \sum_{j \neq i} \frac{2\hbar}{(x_i - x_j)^2} + \frac{2\hbar(1 - \delta_{ik})}{(x_i - x_k)^2}.$$

Уравнения движения:

$$\ddot{x}_i = -8 \sum_{j \neq i} \frac{\hbar^2}{(x_i - x_j)^3}. \quad (2.6.16)$$

Положим  $X = X(\mathbf{t}) = \text{diag}(x_1(\mathbf{t}), \dots, x_n(\mathbf{t}))$ . Для функции  $\psi$  тогда имеем:

$$\psi = \det(I - z^{-1}g_0) e^{\frac{1}{\hbar}(xz+tz^2+t_3z^3+\dots)} \left( 1 - \hbar \mathbf{1}^t (xI - X)^{-1} (zI - Y)^{-1} \mathbf{1} \right), \quad (2.6.17)$$

где  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^t$  - это  $n$ -компонентный вектор. Как хорошо известно (и это легко проверить), матрицы  $X, Y$  удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[X, Y] = \hbar(I - \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}^t) \quad (2.6.18)$$

(здесь  $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}^t$  -  $n \times n$  матрица ранга 1, все элементы которой равны 1).

Матрица  $Y$  - это матрица Лакса для модели КМ. Как видно из (2.6.14), временная эволюция сохраняет ее спектр. Это значит, что коэффициенты  $\mathcal{J}_k$  характеристического полинома

$$\det(zI - Y(t)) = \sum_{k=0}^n \mathcal{J}_k z^{n-k} \quad (2.6.19)$$

это интегралы движения. Старший интеграл  $\mathcal{J}_n$  был найден в [170], где также приведена рекуррентная процедура нахождения всех других интегралов движения. На самом деле эта процедура эквивалентна следующему выражению для характеристического полинома:

$$\det(zI - Y(t)) = \exp\left(\sum_{i<j} \frac{\hbar^2 \partial_{p_i} \partial_{p_j}}{(x_i - x_j)^2}\right) \prod_{l=1}^n (z + p_l). \quad (2.6.20)$$

Отметим, что это выражение хорошо определено, потому что сумма, полученная после разложения экспоненциальной функции в правой стороне, содержит конечное число ненулевых членов.

Можно увидеть, что собственные значения матрицы Лакса  $Y$  совпадают с собственными значениями матрицы твиста  $g_0$  (с учетом кратностей). Действительно, сравним разложения (2.6.12) и (2.6.17) при больших  $x$ . Из (2.6.12) имеем:

$$\psi(x, z) = \det(I - z^{-1}g_0) e^{\frac{1}{\hbar}xz} \left(1 - \frac{\hbar}{x} \sum_i \sum_a \frac{e_{aa}^{(i)}}{z - k_a} + O(x^{-2})\right).$$

Используя коммутационное соотношение (2.6.18) легко проверить, что для любого  $k \geq 0$  выполнено  $\mathbf{1}^t Y^k \mathbf{1} = \text{tr } Y^k$ . Учитывая вышесказанное, мы можем разложить (2.6.17) возле  $\mathbf{t} = 0$ :

$$\psi(x, z) = \det(I - z^{-1}g_0) e^{\frac{1}{\hbar}xz} \left(1 - \frac{\hbar}{x} \text{tr} \frac{1}{z - Y_0} + O(x^{-2})\right),$$

где  $Y_0 := Y(0)$ . Таким образом, мы получаем, что  $\text{tr} \frac{1}{zI - Y_0} = \sum_i \sum_a \frac{e_{aa}^{(i)}}{z - k_a}$  и, учитывая  $\text{tr} (zI - Y_0)^{-1} = \partial_z \log \det(zI - Y_0)$ , имеем

$$\det(zI - Y_0) = \prod_{a=1}^N (z - k_a)^{\sum_{i=1}^n e_{aa}^{(i)}} = \prod_{a=1}^N (z - k_a)^{M_a},$$

где  $M_a$  – это оператор (2.6.3). Таким образом, мы видим что  $M_a$  – это “оператор кратности” собственного значения  $k_a$ . В секторе  $\mathcal{V}(\{m_a\})$  кратность становится равной  $m_a$ . Этот аргумент позволяет доказать следующее важное утверждение:

**Теорема 10.** *Собственные значения матрицы Лакса  $Y$  модели КМ – это числа из множества  $\{k_1, k_2, \dots, k_N\}$  (собственные значения матрицы твиста) с кратностями  $m_a \geq 0$  такими, что  $m_1 + \dots + m_N = n$ , где  $m_a$  – собственные значения оператора  $M_a$ .*

Гамильтонова форма уравнений движения (2.6.16)  $\begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{p}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{p_i} \mathcal{H}_2 \\ -\partial_{x_i} \mathcal{H}_2 \end{pmatrix}$  с гамильтонианом

$$\mathcal{H}_2 = \text{tr } Y^2 = \sum_i p_i^2 - \sum_{i<j} \frac{2\hbar^2}{(x_i - x_j)^2}.$$

Этот результат может быть распространен на всю иерархию [151]:

$$\begin{pmatrix} \partial_{t_k} x_i \\ \partial_{t_k} p_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{p_i} \mathcal{H}_k \\ -\partial_{x_i} \mathcal{H}_k \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_k = \text{tr } Y^k.$$

$\mathcal{H}_k$  – это старшие интегралы движения для модели КМ. Они, как известно, находятся в инволюции [170, 171, 172]. Это согласуется с коммутативностью потоков иерархии КП. Интегралы  $\mathcal{H}_k$  связаны с интегралами  $\mathcal{J}_k$ , введенными в (2.6.19), с помощью формулы Ньютона [167]  $\sum_{k=0}^n \mathcal{J}_{n-k} \mathcal{H}_k = 0$  (мы положили  $\mathcal{H}_0 = \text{tr} Y^0 = n$ ).

Из результатов [151] следует явное детерминантное представление тау-функции. Легко написать его и для управляющего  $T$ -оператора  $T^G(x, \mathbf{t})$  (2.6.13). Пусть  $X_0 = X(0)$  – это диагональная матрица  $X_0 = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $x_i = x_i(0)$  и  $Y_0$  – матрица Лакса (2.6.15) при  $\mathbf{t} = 0$ , с диагональными элементами, пропорциональными годеновским гамильтонианам  $H_i = -\hbar p_i(0)$ :

$$Y_0 = \begin{pmatrix} \frac{H_1}{\hbar} & \frac{\hbar}{x_2 - x_1} & \frac{\hbar}{x_3 - x_1} & \cdots & \frac{\hbar}{x_n - x_1} \\ \frac{\hbar}{x_1 - x_2} & \frac{H_2}{\hbar} & \frac{\hbar}{x_3 - x_2} & \cdots & \frac{\hbar}{x_n - x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\hbar}{x_1 - x_n} & \frac{\hbar}{x_2 - x_n} & \frac{\hbar}{x_3 - x_n} & \cdots & \frac{H_n}{\hbar} \end{pmatrix}.$$

**Теорема 11.** *Управляющий  $T$ -оператор для модели Годена дается выражением*

$$T^G(x, \mathbf{t}) = e^{\frac{1}{\hbar} \sum_{k \geq 1} t_k \text{tr} h^k} \det \left( xI - X_0 + \sum_{k \geq 1} k t_k Y_0^{k-1} \right).$$

Из вышеприведенных аргументов следует, что собственные значения годеновских гамильтонианов  $H_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  (2.6.2), могут быть найдены в рамках классической системы КМ с  $n$  частицами. А именно, спектр  $H_i$  в пространстве  $\mathcal{V}(\{m_a\})$  определяется условием

$$\text{tr} Y_0^j = \sum_{a=1}^N m_a k_a^j \quad \text{для всех } j \geq 1,$$

то есть, используя начальные координаты  $x_i$  и переменные действия  $\mathcal{H}_j = \text{tr} Y_0^j$ , можно выразить значения начальных импульсов  $p_i = -H_i/\hbar$ . Принимая во внимание уравнения (2.6.19) и (2.6.20), мы можем представить уравнения для  $H_i$  в форме равенства

$$\exp \left( \hbar^4 \sum_{i < j} x_{ij}^{-2} \partial_{H_i} \partial_{H_j} \right) \prod_{l=1}^n (z - \hbar^{-1} H_l) = \prod_{a=1}^N (z - k_a)^{m_a}, \quad x_{ij} \equiv x_i - x_j$$

которое должно удовлетворяться тождественно по  $z$ . Это тождество эквивалентно  $n$  алгебраическим уравнениям на  $n$  величин  $H_1, \dots, H_n$ .

Мы видим, что собственные значения гамильтонианов модели Годена соответствуют точкам пересечения двух лагранжевых подмногообразий: одно получено путем выбора

$x_i$ , а второе получено путем фиксирования  $\mathcal{H}_i$ , где значения последних определяются собственными значениями матрицы твиста. Эта чисто классическая прескрипция является эквивалентной решению анзацем Бете и решает спектральную проблему для квантовых гамильтонианов модели Годена.

**Пример.** Рассмотрим вектор  $\mathbf{v}_a \in \mathbb{C}^N$  с компонентами  $(\mathbf{v}_a)_b = \delta_{ab}$ . Так как  $P_{ij}(\mathbf{v}_a)^{\otimes n} = (\mathbf{v}_a)^{\otimes n}$ , вектор  $(\mathbf{v}_a)^{\otimes n}$  – это собственное состояние для годеновских гамильтонианов  $H_i$  с собственными значениями  $k_a + \sum_{j \neq i} \frac{\hbar}{x_i - x_j}$ . Это также собственный вектор для операторов  $M_b$  с собственными значениями  $m_b = n\delta_{ab}$ . Матрица (2.6.4) в этом случае представляет собой жорданову клетку  $n \times n$ , у которой есть только один собственный вектор  $\mathbf{1}$  с собственным значением  $k_a$  и  $\text{tr } Y_0^j = nk_a^j$ .

## 2.7 Бездисперсионная иерархия ДКР и эллиптическое уравнение Левнера

### 2.7.1 Введение

Иерархия ДКР – это одна из интегрируемых иерархий с  $D_\infty$ -симметрией, введенных в работах Джимбо и Мива в 1983 году [173]. Впоследствии она несколько раз переоткрывалась. Она известна также как спаренная иерархия КР [174] и решетка Пфаффа [175, 176]. Это последнее название мотивировано тем, что некоторое семейство решений этой иерархии выражается через пфаффианы. Относительно связи с моделями случайных матриц см. [175, 176, 177]. Иерархия ДКР в каких-то отношениях похожа на иерархии КР и Тоды, но вместе с тем существенно отлична от них и слабее изучена.

Бездисперсионная версия иерархии ДКР (так называемая dDKP иерархия) была предложена в [178, 179]. Это бесконечная система дифференциальных уравнений

$$e^{D(z)D(\zeta)F} \left( 1 - \frac{1}{z^2\zeta^2} e^{2\partial_{t_0}(2\partial_{t_0}+D(z)+D(\zeta))F} \right) = 1 - \frac{\partial_{t_1}D(z)F - \partial_{t_1}D(\zeta)F}{z - \zeta} \quad (2.7.1)$$

$$e^{-D(z)D(\zeta)F} \frac{z^2 e^{-2\partial_{t_0}D(z)F} - \zeta^2 e^{-2\partial_{t_0}D(\zeta)F}}{z - \zeta} = z + \zeta - \partial_{t_1}(2\partial_{t_0} + D(z) + D(\zeta))F \quad (2.7.2)$$

на функцию  $F = F(\mathbf{t})$  бесконечного числа (действительных) “времен”  $\mathbf{t} = \{t_0, t_1, t_2, \dots\}$ , где

$$D(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{z^{-k}}{k} \partial_{t_k}.$$

Дифференциальные уравнения получаются из (2.7.1), (2.7.2) сравнением коэффициентов перед степенями  $z, \zeta$ . Например, первые два уравнения иерархии имеют вид

$$\begin{cases} 6F_{11}^2 + 3F_{22} - 4F_{13} = 12e^{4F_{00}} \\ 2F_{03} + 4F_{01}^3 + 6F_{01}F_{11} - 6F_{01}F_{02} = 3F_{12}. \end{cases}$$

Для краткости мы будем использовать обозначения  $F_{mn} \equiv \partial_{t_m} \partial_{t_n} F$ . Нужно заметить, что первое уравнение с нулем в правой части, т.е.,  $6F_{11}^2 + 3F_{22} - 4F_{13} = 0$ , есть не что иное, как бездисперсионное уравнение КР (известное также как уравнение Хохлова-Заболотской), написанное в форме Хироты.

В этой части работы мы изучаем иерархию dDKP. Это будет сделано в два этапа.

Во-первых, мы покажем, что уравнения (2.7.1), (2.7.2), записанные в эллиптической параметризации с помощью тэта-функций  $\theta_a(u|\tau)$ , выглядят гораздо красивее и представляются естественным эллиптическим аналогом бездисперсионной иерархии КР (dKP):

$$(z^{-1} - \zeta^{-1}) e^{(\partial_{t_0}+D(z))(\partial_{t_0}+D(\zeta))F} = \frac{\theta_1(u(z)-u(\zeta)|\tau)}{\theta_4(u(z)-u(\zeta)|\tau)}.$$

Функция  $u(z)$  определена здесь как

$$e^{\partial_{t_0}(\partial_{t_0}+D(z))F} = z \frac{\theta_1(u(z)|\tau)}{\theta_4(u(z)|\tau)}.$$



Модулярный параметр  $\tau$  является динамической переменной:  $\tau = \tau(\mathbf{t})$ . Это свойство указывает на сходство с уравнениями Уизема для рода 1 [180] и интегрируемыми структурами, стоящими за граничными задачами в плоских двусвязных областях [181].

Во-вторых, мы исследуем однокомпонентную редукцию иерархии dDKP, считая, что все динамические переменные зависят от времен  $\mathbf{t}$  через одну-единственную переменную, в качестве которой без ограничения общности можно выбрать модулярный параметр  $\tau$ . Основным новым результатом состоит в том, что такие редукции классифицируются решениями дифференциального уравнения, которое является эллиптическим аналогом уравнения Левнера (см. например, [182, Chapter 6]). В комплексном анализе это “эллиптическое уравнение Левнера” известно как уравнение Голузина-Комату [183, 184], см. также [185]:

$$4\pi i \partial_\tau u(z, \tau) = -E^{(1)}\left(u(z, \tau) + \xi(\tau) \mid \frac{\tau}{2}\right) + E^{(1)}\left(\xi(\tau) \mid \frac{\tau}{2}\right),$$

где  $E^{(1)}(u, \tau) := \partial_u \log \theta_1(u|\tau)$  и  $\xi(\tau)$  произвольная (непрерывная) функция  $\tau$  (так называемая “управляющая функция”). Это уравнение является основным элементом теории параметрических конформных отображений двусвязных областей с разрезом на кольцо. На протяжении последних десяти лет интерес к этой теме возрос в связи с эволюцией Шрамма-Левнера (SLE). Как уже отмечалось выше, подобная связь между хордовым уравнением Левнера и однокомпонентными редукциями иерархии dKP была известна из работ Гиббонса и Царева [186, 187]. Дальнейшее развитие обсуждается в [188, 189, 190].

## 2.7.2 Бездисперсионная иерархия DKP

### 2.7.2.1 Алгебраическая формулировка

Мы будем использовать дифференциальный оператор

$$\nabla(z) = \partial_{t_0} + D(z).$$

В данном случае он удобнее, чем  $D(z)$ . Введем функции

$$p(z) = z - \partial_{t_1} \nabla(z)F, \quad w(z) = z^2 e^{-2\partial_{t_0} \nabla(z)F},$$

с их помощью уравнения (2.7.1), (2.7.2) запишутся в более компактной форме

$$e^{D(z)D(\zeta)F} \left(1 - \frac{1}{w(z)w(\zeta)}\right) = \frac{p(z) - p(\zeta)}{z - \zeta}, \quad (2.7.3)$$

$$e^{-D(z)D(\zeta)F + 2\partial_{t_0}^2 F} \frac{w(z) - w(\zeta)}{z - \zeta} = p(z) + p(\zeta). \quad (2.7.4)$$

Перемножив эти уравнения, получим соотношение

$$p^2(z) - e^{2F_{00}} \left(w(z) + w^{-1}(z)\right) = p^2(\zeta) - e^{2F_{00}} \left(w(\zeta) + w^{-1}(\zeta)\right),$$

откуда легко увидеть, что  $p^2(z) - e^{2F_{00}}(w(z) + w^{-1}(z))$  не зависит от  $z$ . Устремив  $z$  к бесконечности, найдем, что это выражение становится равным  $F_{02} - 2F_{11} - F_{01}^2$ . Таким образом, мы получили, что  $p(z)$  и  $w(z)$  удовлетворяют алгебраическому уравнению [179]

$$p^2(z) = R^2(w(z) + w^{-1}(z)) + V, \quad (2.7.5)$$

где

$$R = e^{F_{00}}, \quad V = F_{02} - 2F_{11} - F_{01}^2.$$

Это уравнение задает эллиптическую кривую, а  $w, p$  – рациональные функции на этой кривой. Функции  $w$  и  $p$  имеют, соответственно, двойной и простой полюсы на бесконечности.

### 2.7.2.2 Эллиптическая параметризация

Теперь кажется естественным продолжить исследование иерархии с помощью эллиптической параметризации. Мы будем использовать стандартные обозначения для тэта-функций Якоби  $\theta_a(u) = \theta_a(u|\tau)$  ( $a = 1, 2, 3, 4$ ). Их определения и основные свойства описаны в приложении. Эллиптическая параметризация (2.7.5) имеет вид

$$w(z) = \frac{\theta_4^2(u(z))}{\theta_1^2(u(z))}, \quad p(z) = \gamma \theta_4^2(0) \frac{\theta_2(u(z)) \theta_3(u(z))}{\theta_1(u(z)) \theta_4(u(z))},$$

где  $u(z) = u(z, \mathbf{t})$  – некоторая функция от  $z$ ,  $\gamma$  не зависит от  $z$ , и

$$R = \gamma \theta_2(0) \theta_3(0), \quad V = -\gamma^2 (\theta_2^4(0) + \theta_3^4(0)). \quad (2.7.6)$$

На данном этапе  $\gamma$  – произвольный параметр, но при этом его нельзя положить равным фиксированному числу (например, единице), поскольку он является динамической переменной, так же как модулярный параметр  $\tau$ :  $\gamma = \gamma(\mathbf{t})$ ,  $\tau = \tau(\mathbf{t})$ . В такой параметризации уравнение, задающее кривую, записывается следующим образом:

$$\theta_4^4(0) \frac{\theta_2^2(u) \theta_3^2(u)}{\theta_1^2(u) \theta_4^2(u)} = \theta_2^2(0) \theta_3^2(0) \left( \frac{\theta_4^2(u)}{\theta_1^2(u)} + \frac{\theta_2^2(u)}{\theta_4^2(u)} \right) - (\theta_2^4(0) + \theta_3^4(0)).$$

(Т.е. мы просто подставили явный вид для  $p$  и  $w$  в уравнение эллиптической кривой и сократили  $\gamma^2$  с обеих сторон.) Это есть тождество, которое можно доказать, используя известные тождества для тэта-функций, или сравнением аналитических свойств обеих сторон.

Мы нормируем  $u(z)$  условием  $u(\infty) = 0$ , тогда разложение около  $\infty$  будет

$$u(z, \mathbf{t}) = \frac{c_1(\mathbf{t})}{z} + \frac{c_2(\mathbf{t})}{z^2} + \dots \quad (2.7.7)$$

Нетрудно проверить, что выполняется соотношение

$$\frac{w(z_1) - w(z_2)}{p(z_1) + p(z_2)} = -\frac{1}{\gamma \theta_2(0) \theta_3(0)} \frac{\theta_4(u_1) \theta_4(u_2)}{\theta_1(u_1) \theta_1(u_2)} \frac{\theta_1(u_1 - u_2)}{\theta_4(u_1 - u_2)},$$

где  $u_i \equiv u(z_i)$ . В эллиптической параметризации уравнения нашей системы (2.7.3), (2.7.4) становятся эквивалентными, и их можно записать как одно:

$$(z_1^{-1} - z_2^{-1}) e^{\nabla(z_1)\nabla(z_2)F} = \frac{\theta_1(u(z_1) - u(z_2))}{\theta_4(u(z_1) - u(z_2))}. \quad (2.7.8)$$

Заметим, что если устремить  $z_2 \rightarrow \infty$  в (2.7.8), получим определение функции  $u(z)$ :

$$e^{\partial_{t_0}\nabla(z)F} = z \frac{\theta_1(u(z))}{\theta_4(u(z))}. \quad (2.7.9)$$

Более того, из (2.7.6) видно, что

$$-\frac{V}{R^2} = e^{-2F_{00}}(2F_{11} + F_{01}^2 - F_{02}) = \frac{\theta_2^2(0|\tau)}{\theta_3^2(0|\tau)} + \frac{\theta_3^2(0|\tau)}{\theta_2^2(0|\tau)}.$$

Предел  $z \rightarrow \infty$  в уравнении (2.7.9) дает:

$$e^{F_{00}} = R = \pi c_1 \theta_2(0)\theta_3(0),$$

откуда

$$c_1(\mathbf{t}) = \frac{\gamma(\mathbf{t})}{\pi}.$$

Введем функцию

$$S(u|\tau) := \log \frac{\theta_1(u|\tau)}{\theta_4(u|\tau)},$$

которая обладает следующими квазипериодическими свойствами:

$$S(u+1|\tau) = S(u|\tau) + i\pi, \quad S(u+\tau|\tau) = S(u|\tau). \quad (2.7.10)$$

Прологарифмируем уравнение (2.7.8),

$$\log(z_1^{-1} - z_2^{-1}) + \nabla(z_1)\nabla(z_2)F = \log \frac{\theta_1(u(z_1) - u(z_2))}{\theta_4(u(z_1) - u(z_2))},$$

возьмем производную по  $\partial_{t_0}$  от обеих сторон,

$$\partial_{t_0} \log(z_1^{-1} - z_2^{-1}) + \partial_{t_0} \nabla(z_1)\nabla(z_2)F = \partial_{t_0} \log \frac{\theta_1(u(z_1) - u(z_2))}{\theta_4(u(z_1) - u(z_2))},$$

и учтем, что  $\partial_{t_0} \log(z_1^{-1} - z_2^{-1}) = \partial_{t_0} \log z = 0$ , тогда наше уравнение переписется в виде

$$\nabla(z_1)S(u(z_2)|\tau) = \partial_{t_0}S(u(z_1) - u(z_2)|\tau). \quad (2.7.11)$$

Левая часть симметрична при перестановке  $z_1 \leftrightarrow z_2$ :

$$\nabla(z_1)S(u(z_2)|\tau) = \nabla(z_2)S(u(z_1)|\tau),$$

что указывает на интегрируемость. Если устремить  $z_2 \rightarrow \infty$ , уравнение (2.7.11) даст:

$$\nabla(z)\partial_{t_0}^2 F = \partial_{t_0}S(u(z)|\tau), \quad \nabla(z) \log R = \partial_{t_0}S(u(z)|\tau). \quad (2.7.12)$$

Теперь обсудим связь с алгебраической формулировкой. Мы имеем:

$$S(u(z)|\tau) = -\frac{1}{2} \log w(z), \quad c_1 S'(u(z)|\tau) = p(z),$$

где  $S'(u|\tau) \equiv \partial_u S(u|\tau)$ . Первая формула следует непосредственно из определений. Чтобы вывести вторую, нужно воспользоаться уравнением (2.7.34) из приложения.

### 2.7.3 Однокомпонентная редукция

Потребуем, чтобы  $u(z, \mathbf{t})$  и  $\tau(\mathbf{t})$  зависели от времен через переменную  $\lambda = \lambda(\mathbf{t})$ :  $u(z, \mathbf{t}) = u(z, \lambda(\mathbf{t}))$ ,  $\tau(\mathbf{t}) = \tau(\lambda(\mathbf{t}))$ . Такие решения будут называться однокомпонентной редукцией. Функция  $u(z, \lambda)$  не может быть произвольной. Наша следующая цель – охарактеризовать класс функций  $u(z, \lambda)$ ,  $\tau(\lambda)$ , согласованных со структурой иерархии.

#### 2.7.3.1 Условие согласованности для однокомпонентной редукции

Применяя правило дифференцирования сложной функции к  $S(u(z, \mathbf{t})|\tau(\mathbf{t})) = S(u(z, \lambda(\mathbf{t}))|\tau(\lambda(\mathbf{t})))$ , получим:

$$\nabla(z_1)S(u(z_2)) = [\nabla(z_1)\lambda] \left( \partial_\lambda u(z_2)S'(u(z_2)) + \partial_\lambda \tau \dot{S}(u(z_2)) \right).$$

Далее для упрощения записи будем писать  $u(z) := u(z, \lambda)$ ,  $S(u) := S(u|\tau)$  и  $S'(u) = \partial_u S(u|\tau)$ ,  $\dot{S}(u) = \partial_\tau S(u|\tau)$ . Затем воспользуемся (2.7.12):

$$\begin{aligned} \nabla(z_1)\lambda &= \frac{d\lambda}{d \log R} \nabla(z_1) \log R = \frac{d\lambda}{d \log R} \partial_{t_0} S(u(z_1)) \\ &= \frac{d\lambda}{d \log R} \partial_{t_0} \lambda \left( \partial_\lambda u(z_1)S'(u(z_1)) + \partial_\lambda \tau \dot{S}(u(z_1)) \right). \end{aligned}$$

Аналогично получим:

$$\partial_{t_0} S(u(z_1) - u(z_2)) = \partial_{t_0} \lambda \left[ \left( \partial_\lambda u(z_1) - \partial_\lambda u(z_2) \right) S'(u(z_1) - u(z_2)) + \partial_\lambda \tau \dot{S}(u(z_1) - u(z_2)) \right].$$

Формулы упростятся, если выбрать  $\lambda = \tau$ . В этом случае

$$\begin{aligned} \nabla(z_1)S(u(z_2)) &= [\nabla(z_1)\tau] \left( \partial_\tau u(z_2)S'(u(z_2)) + \dot{S}(u(z_2)) \right) \\ &= \frac{d\tau}{d \log R} \partial_{t_0} \tau \left( \partial_\tau u(z_1)S'(u(z_1)) + \dot{S}(u(z_1)) \right) \left( \partial_\tau u(z_2)S'(u(z_2)) + \dot{S}(u(z_2)) \right), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &\frac{d\tau}{d \log R} \partial_{t_0} \tau \left( \partial_\tau u(z_1)S'(u(z_1)) + \dot{S}(u(z_1)) \right) \left( \partial_\tau u(z_2)S'(u(z_2)) + \dot{S}(u(z_2)) \right) \\ &= \partial_{t_0} \tau \left[ \left( \partial_\tau u(z_1) - \partial_\tau u(z_2) \right) S'(u(z_1) - u(z_2)) + \dot{S}(u(z_1) - u(z_2)) \right]. \end{aligned}$$

Предположив, что  $\partial_{t_0} \tau$  не есть тождественный нуль, имеем:

$$\begin{aligned} &\left[ \partial_\tau u(z_1)S'(u(z_1)) + \dot{S}(u(z_1)) \right] \left[ \partial_\tau u(z_2)S'(u(z_2)) + \dot{S}(u(z_2)) \right] \\ &= \frac{d \log R}{d\tau} \left[ \left( \partial_\tau u(z_1) - \partial_\tau u(z_2) \right) S'(u(z_1) - u(z_2)) + \dot{S}(u(z_1) - u(z_2)) \right]. \end{aligned} \tag{2.7.13}$$

Это отношение может быть записано в более компактной форме:

$$\frac{dS(u(z_1))}{d\tau} \frac{dS(u(z_2))}{d\tau} = \frac{d \log R}{d\tau} \frac{dS(u(z_1) - u(z_2))}{d\tau}, \quad (2.7.14)$$

где  $d/d\tau$  – полная производная по  $\tau$ .

Чтобы двигаться дальше, нужно знать, чему равно  $\dot{S}(u)$ . Эта величина определяется формулой

$$2\pi i \dot{S}(u) = S'(u) E^{(2)}(u) + \frac{\pi^2}{2} \theta_4^4(0), \quad (2.7.15)$$

которая доказывается в приложении к этому разделу. Мы будем использовать обозначение

$$E^{(a)}(u) = E^{(a)}(u|\tau) = \partial_u \log \theta_a(u|\tau).$$

Все необходимые свойства этих функций можно найти в приложении (см. (2.7.29), (2.7.30)).

Умножим обе части на  $(4\pi i)^2$ , воспользуемся (2.7.15) и перепишем (2.7.13) в виде

$$\begin{aligned} & S'(u_1) \left[ 4\pi i \partial_\tau u_1 + 2E^{(2)}(u_1) + \frac{\pi^2 \theta_4^4(0)}{S'(u_1)} \right] S'(u_2) \left[ 4\pi i \partial_\tau u_2 + 2E^{(2)}(u_2) + \frac{\pi^2 \theta_4^4(0)}{S'(u_2)} \right] \\ &= 4\pi i \frac{d \log R}{d\tau} S'(u_1 - u_2) \left[ 4\pi i (\partial_\tau u_1 - \partial_\tau u_2) + 2E^{(2)}(u_1 - u_2) + \frac{\pi^2 \theta_4^4(0)}{S'(u_1 - u_2)} \right], \end{aligned} \quad (2.7.16)$$

где для краткости положено  $u_j \equiv u(z_j)$ . Теперь можно увидеть, что подстановка

$$\begin{cases} 4\pi i \partial_\tau u = -E^{(1)}(u + \xi) - E^{(4)}(u + \xi) + E^{(1)}(\xi) + E^{(4)}(\xi), \\ 4\pi i \partial_\tau \log R = (S'(\xi))^2, \end{cases} \quad (2.7.17)$$

(где  $\xi$  – произвольный параметр) в (2.7.16) обращает это соотношение в тождество. Подробности даны в приложении к этому разделу. Из этого следует, что функция  $u(z, \tau)$  совместна с бесконечной иерархией, если она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$4\pi i \partial_\tau u(z) = -E^{(1)}(u(z) + \xi(\tau)|\tau) - E^{(4)}(u(z) + \xi(\tau)|\tau) + E^{(1)}(\xi(\tau)|\tau) + E^{(4)}(\xi(\tau)|\tau), \quad (2.7.18)$$

где  $\xi(\tau)$  является произвольной функцией от  $\tau$ . С помощью тождества

$$E^{(1)}(u|\tau) + E^{(4)}(u|\tau) = E^{(1)}\left(u \middle| \frac{\tau}{2}\right)$$

уравнение можно переписать в более компактной форме:

$$4\pi i \partial_\tau u(z) = -E^{(1)}\left(u(z) + \xi(\tau) \middle| \frac{\tau}{2}\right) + E^{(1)}\left(\xi(\tau) \middle| \frac{\tau}{2}\right). \quad (2.7.19)$$

Это эллиптический аналог уравнения Левнера, известного также как уравнение Голузина-Комату [183, 184]. Также можно увидеть, что

$$4\pi i \partial_\tau \log R = (S'(\xi(\tau)))^2 \quad (2.7.20)$$

получается в пределе из (2.7.18), когда  $z \rightarrow \infty$ . Функция  $\xi(\tau)$  называется “управляющей функцией”, определяющей форму разреза в теории Левнера. В нашем случае она определяет редукцию.

Сделаем некоторые замечания.

а) С помощью формул, доказанных в приложении, можно показать, что полная производная  $S(u(z))$  по  $\tau$  дается формулой

$$4\pi i \frac{dS(u(z))}{d\tau} = S'(\xi(\tau)) S'(u(z) + \xi(\tau)). \quad (2.7.21)$$

б) Выбором нормировки можно избавиться от второго члена в правой части уравнения (2.7.19) (не содержащего от  $u(z)$ ). Действительно, рассмотрим  $\tilde{u}(z) = u(z) + c_0(\tau)$ , т. е.

$$\tilde{u}(z) = c_0(\tau) + \frac{c_1(\tau)}{z} + \frac{c_2(\tau)}{z^2} + \dots \quad \text{с} \quad c_0(\tau) = -\frac{1}{4\pi i} \int_{\tau_0}^{\tau} E^{(1)}\left(\xi(\tau') \middle| \frac{\tau'}{2}\right) d\tau'$$

и положим  $\tilde{\xi} = \xi - c_0$ . Тогда эллиптическое уравнение Левнера (2.7.19) примет вид

$$4\pi i \partial_{\tau} \tilde{u}(z) = -E^{(1)}\left(\tilde{u}(z) + \tilde{\xi}(\tau) \middle| \frac{\tau}{2}\right). \quad (2.7.22)$$

#### 2.7.4 Система уравнений гидродинамического типа и ее решение

Чтобы описание однокомпонентной редукции было полным, мы должны вывести уравнение, которому удовлетворяет  $\tau(\mathbf{t})$  и найти его решения. Используя тот же метод, что был использован в (2.7.14), запишем:

$$\nabla(z)_{\tau} = \frac{\partial_{\tau} u(z) S'(u(z)) + \dot{S}(u(z))}{d \log R / d\tau} \partial_{t_0} \tau = \frac{dS(u(z))/d\tau}{d \log R / d\tau} \partial_{t_0} \tau.$$

Подставляя (2.7.20) и (2.7.21), получим:

$$\nabla(z)_{\tau} = \frac{S'(u(z) + \xi(\tau))}{S'(\xi(\tau))} \partial_{t_0} \tau.$$

Это производящее уравнение для иерархии уравнений гидродинамического типа. Чтобы записать их, воспользуемся выражением

$$S'(u(z) + u) = S'(u) + \sum_{k \geq 1} \frac{z^{-k}}{k} B'_k(u),$$

которое определяет функции  $B'_k(u) = B'_k(u|\tau)$ . В терминах этих функций уравнения иерархии после редукции выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t_k} = \phi_k(\xi(\tau)|\tau) \frac{\partial \tau}{\partial t_0}, \quad \phi_k(\xi(\tau)|\tau) := \frac{B'_k(\xi(\tau)|\tau)}{S'(\xi(\tau)|\tau)}, \quad k \geq 1.$$

Общее решение этих уравнений записывается в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k \phi_k(\xi(\tau)|\tau) = \Phi(\tau), \quad (2.7.23)$$

где  $\Phi(\tau)$  – произвольная функция от  $\tau$ . В самом простом случае, когда  $\Phi(\tau) = 0$ , мы заключаем из (2.7.23), что  $\sum_{k \geq 1} t_k \frac{\partial \tau}{\partial t_k} = 0$ , т.е.  $\tau(\mathbf{t})$  – однородная функция от времен степени 0.

#### 2.7.4.1 Связь с уравнением Пенлеве VI

Здесь мы будем работать с эллиптическим уравнением Левнера в нормировке (2.7.22), опуская тильду и заменив  $\tau \rightarrow 2\tau$ :

$$2\pi i \partial_\tau u(z) = -E^{(1)}\left(u(z) + \xi \middle| \tau\right). \quad (2.7.24)$$

В качестве примера рассмотрим простейший случай, когда  $\xi$  не зависит от  $\tau$ :  $\xi = \text{const}$  (в случае dKP такой выбор управляющей функции означает редукцию к бездисперсионной иерархии КдФ). Пусть  $u(z) = u(z, \tau)$  удовлетворяет этому уравнению. Несложное вычисление с использованием (2.7.32) показывает, что функция  $f(\xi, \tau) := E^{(1)}\left(u(z, \tau) + \xi \middle| \tau\right)$  удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$4\pi i \partial_\tau f(\xi, \tau) = \partial_\xi^2 f(\xi, \tau). \quad (2.7.25)$$

Поддействовав на обе части уравнения (2.7.24) дифференциальным оператором  $\partial_\tau$ , мы получаем, используя (2.7.25):

$$(2\pi i)^2 \partial_\tau^2 u = \frac{1}{2} \wp'(u + \xi),$$

где  $\wp(u) = -\partial_u E^{(1)}(u) + \text{const}$  –  $\wp$ -функция Вейерштрасса с периодами 1 и  $\tau$ . При  $\xi = 0$  или  $\xi = \frac{1}{2}$  это уравнение Пенлеве VI со специальным выбором параметров, записанное в эллиптической форме [191].

#### 2.7.5 Заключительные замечания

Итак, нами была изучена связь уравнений Левнера с бездисперсионной иерархией dKP (бездисперсионной версией пфаффовой решетки). Мы показали, что данная иерархия может быть естественным образом переформулирована как “эллиптическая деформация” обычной иерархии dKP. Это результат кажется весьма неожиданным и загадочным. Что может связывать пфаффианы и эллиптические функции?

В эллиптической параметризации данное нами описание однокомпонентных редукций иерархии dKP выглядит вполне естественным, если вспомнить соответствующий результат Гиббонса и Царева для случая dKP. А именно, однокомпонентные редукции, т.е. редукции с единственной независимой функцией, получаются из решений эллиптического аналога уравнения Левнера (Голузина–Комату), хорошо известного в теории конформных отображений двусвязных областей с разрезом. Следует отметить, что мы нашли только достаточные условия для однокомпонентных редукций. Для того чтобы найти необходимые условия и дать их полное описание, нужно найти все решения функциональной связи

(2.7.14), которая является условием согласованности для редукций. Это задача на будущее.

Более сложная задача состоит в описании многокомпонентных редукций. Здесь можно ожидать, что эллиптический аналог системы уравнений Гиббонса-Царева будет играть роль условий согласования.

Еще раз обратим внимание, что в случае дКР наиболее простому выбору управляющей функции (равной нулю) соответствует наиболее изученная и наименее сложная бездисперсионная иерархия КдФ. Это один из тех немногих случаев, когда хордовое уравнение Левнера может быть решено явно. Было бы очень интересно найти такие разрешимые случаи для эллиптической версии этого уравнения.

### 2.7.5.1 Тэта-функции

Тэта-функции Якоби  $\theta_a(u) = \theta_a(u|\tau)$ ,  $a = 1, 2, 3, 4$ , определяются формулами

$$\begin{aligned}\theta_1(u) &= -\sum_{k \in F} \exp\left(\pi i \tau \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\pi i \left(u + \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{2}\right)\right), \\ \theta_2(u) &= \sum_{k \in F} \exp\left(\pi i \tau \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\pi i u \left(k + \frac{1}{2}\right)\right), \\ \theta_3(u) &= \sum_{k \in F} \exp\left(\pi i \tau k^2 + 2\pi i u k\right), \\ \theta_4(u) &= \sum_{k \in F} \exp\left(\pi i \tau k^2 + 2\pi i \left(u + \frac{1}{2}\right) k\right),\end{aligned}$$

где  $\tau$  является комплексным параметром (модулярным параметром) таким, что  $\text{Im } \tau > 0$ . Функция  $\theta_1(u)$  является нечетной, остальные три – четные. Отметим соотношение

$$\theta_1'(0) = \pi \theta_2(0) \theta_3(0) \theta_4(0). \quad (2.7.26)$$

Индекс  $a$  понимается по модулю 4, т. е. будем отождествлять  $\theta_a(z) \equiv \theta_{a+4}(z)$ . Положим  $\omega_0 = 0$ ,  $\omega_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\omega_2 = \frac{1+\tau}{2}$ ,  $\omega_3 = \frac{\tau}{2}$ , тогда функция  $\theta_a(u)$  имеет простые нули в точках решетки  $\omega_{a-1} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ .

Тэта-функции обладают следующими свойствами квазипериодичности при сдвигах на 1 и  $\tau$ :

$$\begin{aligned}\theta_a(u+1) &= e^{\pi i(1+2\partial_\tau \omega_{a-1})} \theta_a(u) \\ \theta_a(u+\tau) &= e^{\pi i(a+2\partial_\tau \omega_{a-1})} e^{-\pi i \tau - 2\pi i u} \theta_a(u).\end{aligned} \quad (2.7.27)$$

Сдвиги на полупериоды связывают различные тэта-функции:

$$\begin{aligned}\theta_1\left(u + \frac{1}{2}\right) &= \theta_2(u), \quad \theta_2\left(u + \frac{1}{2}\right) = -\theta_1(u), \\ \theta_3\left(u + \frac{1}{2}\right) &= \theta_4(u), \quad \theta_4\left(u + \frac{1}{2}\right) = \theta_3(u).\end{aligned} \quad (2.7.28)$$

В основном тексте мы используем специальные обозначения для функций типа Эйзенштейна:

$$E^{(a)}(u) = E^{(a)}(u|\tau) = \partial_u \log \theta_a(u|\tau).$$



Используя (2.7.27), (2.7.28), легко доказать следующие свойства функций  $E^{(a)}(u)$ :

$$E^{(a)}(u+1) = E^{(a)}(u), \quad E^{(a)}(u+\tau) = E^{(a)}(u) - 2\pi i \quad (2.7.29)$$

и

$$\begin{aligned} E^{(1)}\left(u + \frac{\tau}{2}\right) &= E^{(4)}(u) - \pi i, \\ E^{(4)}\left(u + \frac{\tau}{2}\right) &= E^{(1)}(u) - \pi i. \end{aligned} \quad (2.7.30)$$

Для вычислений нам также понадобятся

$$E^{(2)}(0) = E^{(3)}(0) = E^{(4)}(0) = 0, \quad E^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right) = -\pi i.$$

Все формулы для производных эллиптических функций по модулярному параметру следуют из “уравнения теплопроводности”, которому удовлетворяют тэта-функции:

$$4\pi i \partial_\tau \theta_a(u) = \partial_u^2 \theta_a(u). \quad (2.7.31)$$

В частности, производная по  $\tau$  от функции Эйзенштейна  $E^{(1)}(u|\tau)$  дается формулой

$$4\pi i \partial_\tau E^{(1)}(u|\tau) = 2E^{(1)}(u|\tau)E^{(1)'}(u|\tau) + E^{(1)''}(u|\tau) \quad (2.7.32)$$

(см., например, [193]).

### Доказательство уравнения (2.7.15)

Докажем формулу (2.7.15) для производной по  $\tau$  от функции  $S(u|\tau) = \log \frac{\theta_1(u|\tau)}{\theta_4(u|\tau)}$ :

$$2\pi i \partial_\tau S(u|\tau) = \partial_u S(u|\tau) E^{(2)}(u|\tau) + \frac{\pi^2}{2} \theta_4^4(0|\tau). \quad (2.7.33)$$

Похожая формула была доказана в [192, 193] в контексте соответствия Пенлеве-Калоджеро.

Мы начнем с такого представления  $S'(u)$ :

$$S'(u) = E^{(1)}(u) - E^{(4)}(u) = \pi \theta_4^2(0) \frac{\theta_2(u) \theta_3(u)}{\theta_1(u) \theta_4(u)}, \quad (2.7.34)$$

которое легко доказывается с помощью уравнения (2.7.26) сравнением аналитических свойств обеих сторон равенства. Нам понадобится также частный случай этого равенства, для получения которого нужно подставить  $u + \frac{1}{2}$ ,

$$E^{(1)}\left(u + \frac{1}{2}\right) - E^{(4)}\left(u + \frac{1}{2}\right) = E^{(2)}(u) - E^{(3)}(u),$$

и взять производную по  $u$ :

$$\begin{aligned} (E^{(2)}(u) - E^{(3)}(u))' &= \left( \frac{\theta_2(u)'}{\theta_2(u)} - \frac{\theta_3(u)'}{\theta_3(u)} \right)' \\ &= \frac{\theta_2(u)''}{\theta_2(u)} - \left( \frac{\theta_2(u)'}{\theta_2(u)} \right)^2 - \frac{\theta_3(u)''}{\theta_3(u)} + \left( \frac{\theta_3(u)'}{\theta_3(u)} \right)^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{\theta_2(u)''}{\theta_2(u)} - \frac{\theta_3(u)''}{\theta_3(u)} + \left( \frac{\theta_3(u)'}{\theta_3(u)} \right)^2 - \left( \frac{\theta_2(u)'}{\theta_2(u)} \right)^2.$$

Устремив  $u$  к нулю, получаем

$$\frac{\theta_3''(0)}{\theta_3(0)} - \frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)} = \pi^2 \theta_4^4(0).$$

Из (2.7.10) мы видим, что  $\dot{S}(u+1) = \dot{S}(u)$ ,  $\dot{S}(u+\tau) = \dot{S}(u) - S'(u)$  (точкой обозначена производная по  $\tau$ ), следовательно, обе стороны уравнения (2.7.33) периодичны относительно сдвигов  $u \rightarrow u+1$ , получают аддитивный вклад  $-2\pi i S'(u)$  при сдвиге  $u \rightarrow u+\tau$  (см. (2.7.29)). Таким образом, функция

$$g(u) := 4\pi i \dot{S}(u) - 2S'(u)E^{(2)}(u) - \pi^2 \theta_4^4(0)$$

двойкопериодическая с периодами 1,  $\tau$ . Используя уравнение теплопроводности (2.7.31), имеем:

$$g(u) = \frac{\theta_1''(u)}{\theta_1(u)} - \frac{\theta_4''(u)}{\theta_4(u)} - 2\pi \theta_4^2(0) \frac{\theta_3(u)\theta_2'(u)}{\theta_1(u)\theta_4(u)} - \pi^2 \theta_4^4(0).$$

Для того, чтобы доказать, что  $g(u) \equiv 0$ , достаточно показать, что она регулярна в  $u=0$ ,  $u = \frac{\tau}{2}$  (нули знаменателей) и  $g(u_0) = 0$  в какой-то точке  $u_0$  (удобно выбрать  $u_0 = \frac{1+\tau}{2}$ ). Регулярность в  $u=0$  очевидна, так как  $\theta_1''(u)$  и  $\theta_2'(u)$  имеют простые нули в  $u=0$ , которые сокращают нули в знаменателе. Регулярность в  $u = \frac{\tau}{2}$  менее очевидна, но может быть доказана стандартными рассуждениями. Наконец, покажем, что  $g(\frac{1+\tau}{2})$  равняется нулю. Подставим

$$\begin{aligned} \frac{\theta_1''(u + \frac{1+\tau}{2})}{\theta_1(u + \frac{1+\tau}{2})} &= -\pi^2 - 2i\pi E^{(3)}(u) + \frac{\theta_3''(u)}{\theta_3(u)}, \\ \frac{\theta_4''(u + \frac{\tau}{2})}{\theta_4(u + \frac{\tau}{2})} &= -\pi^2 - 2i\pi E^{(2)}(u) + \frac{\theta_2''(u)}{\theta_2(u)} \end{aligned}$$

в выражение для  $g$ :

$$\begin{aligned} g\left(u + \frac{1+\tau}{2}\right) &= \frac{\theta_1''(u + \frac{1+\tau}{2})}{\theta_1(u + \frac{1+\tau}{2})} - \frac{\theta_4''(u + \frac{1+\tau}{2})}{\theta_4(u + \frac{1+\tau}{2})} - \pi^2 \theta_4^4(0) \\ &= 2i\pi(E^{(2)}(u) - E^{(3)}(u)) + \frac{\theta_3''(u)}{\theta_3(u)} - \frac{\theta_2''(u)}{\theta_2(u)} - \pi^2 \theta_4^4(0). \end{aligned}$$

Теперь положим  $u=0$ :

$$g\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = 2i\pi(E^{(2)}(0) - E^{(3)}(0)) + \pi^2 \theta_4^4(0) - \pi^2 \theta_4^4(0) = 0.$$

Получили, что  $g(u) \equiv 0$  эквивалентно (2.7.33).

### Доказательство основного тождества

Сейчас мы докажем основное тождество, которое позволяет вывести эллиптическое уравнение Левнера из (2.7.16). Положим

$$\varphi(x_1, x_2) := -E^{(1)}(x_1) - E^{(4)}(x_1) + E^{(1)}(x_2) + E^{(4)}(x_2) + 2E^{(2)}(x_1 - x_2).$$

Рассмотрим выражение

$$S'(x_1 - x_2)\varphi(x_1, x_2) + \pi^2\theta_4^4(0) = S'(x_1)S'(x_2). \quad (2.7.35)$$

Чтобы доказать его, заметим, что  $\varphi(x_1, x_2)$  допускает факторизованное представление:

$$\varphi(x_1, x_2) = \pi\theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4^2(0) \frac{\theta_1(x_1 - x_2)\theta_4(x_1 - x_2)\theta_2(x_1 + x_2)}{\theta_1(x_1)\theta_4(x_1)\theta_1(x_2)\theta_4(x_2)\theta_2(x_1 - x_2)}.$$

Используем стандартный метод доказательства в теории эллиптических функций. Мы должны проверить, что:

- а) Обе части двойкопериодичны как функции  $x_1$  с периодами 1 и  $\tau$ .
- б) Обе части имеют одинаковые нули и полюсы.

Теперь можно подставить явный вид  $S'(x)$  (2.7.34) в левую часть равенства (2.7.35) и доказать его прямым вычислением.

### Вывод эллиптического уравнения Левнера из (2.7.16)

Мы должны показать, что подстановка (2.7.17),

$$\begin{cases} 4\pi i \partial_\tau u = -E^{(1)}(u + \xi) - E^{(4)}(u + \xi) + E^{(1)}(\xi) + E^{(4)}(\xi), \\ 4\pi i \partial_\tau \log R = (S'(\xi))^2, \end{cases}$$

переводит (2.7.16) в тождество. Действительно, после подстановки уравнение (2.7.16) приобретает вид

$$\begin{aligned} S'(u_1) \left[ \varphi(u_1 + \xi, \xi) + \frac{\pi^2\theta_4^4(0)}{S'(u_1)} \right] S'(u_2) \left[ \varphi(u_2 + \xi, \xi) + \frac{\pi^2\theta_4^4(0)}{S'(u_2)} \right] \\ = (S'(\xi))^2 S'(u_1 - u_2) \left[ \varphi(u_1 + \xi, u_2 + \xi) + \frac{\pi^2\theta_4^4(0)}{S'(u_1 - u_2)} \right]. \end{aligned}$$

Остается применить тождество (2.7.35) для  $(x_1, x_2) = (u_1 + \xi, \xi)$ ,  $(x_1, x_2) = (u_2 + \xi, \xi)$  и  $(x_1, x_2) = (u_1 + \xi, u_2 + \xi)$ .

Далее мы должны проверить, что уравнение (2.7.20),

$$4\pi i \partial_\tau \log R = (S'(\xi(\tau)))^2,$$

является предельным случаем (2.7.18) при  $z \rightarrow \infty$ . При стремлении  $z$  к бесконечности,  $u$  стремится к нулю. Разделим обе части на  $u$ ,

$$4\pi i \frac{\partial_\tau u}{u} = -\frac{E^{(1)}(u + \xi) - E^{(1)}(\xi)}{u} - \frac{E^{(4)}(u + \xi) - E^{(4)}(\xi)}{u},$$

подставим (2.7.7) и сравним лидирующие члены. Мы получим:

$$4\pi i \partial_\tau \log c_1 = -E^{(1)'(\xi(\tau))} - E^{(4)'(\xi(\tau))},$$

где  $E^{(a)'}(u) = \partial_u E^{(a)}(u)$ . Напомним, что  $\log R = \log(\pi c_1) + \log(\theta_2(0)\theta_3(0))$  (см. (2.7.6), (2.7.2.2)), тогда

$$4\pi i \partial_\tau \log R = -E^{(1)' }(\xi) - E^{(4)' }(\xi) + 4\pi i \partial_\tau \log(\theta_2(0)\theta_3(0)).$$

Последний член можно преобразовать с помощью уравнения теплопроводности (2.7.31) для тэта-функций. А именно:

$$4\pi i \frac{\partial_\tau \theta_a(u)}{\theta_a(u)} = \frac{\partial_u^2 \theta_a(u)}{\theta_a(u)}.$$

Так как

$$\partial_u \left( \frac{\partial_u \theta_a(u)}{\theta_a(u)} \right) = \frac{\partial_u^2 \theta_a(u)}{\theta_a(u)} - \left( \frac{\partial_u \theta_a(u)}{\theta_a(u)} \right)^2,$$

перепишем

$$4\pi i \partial_\tau \log \theta_a(u) = \partial_u \left( \frac{\partial_u \theta_a(u)}{\theta_a(u)} \right) + \left( \frac{\partial_u \theta_a(u)}{\theta_a(u)} \right)^2.$$

Учитывая, что  $\theta_2'(0) = \theta_3'(0) = 0$ , имеем:

$$\begin{aligned} 4\pi i \partial_\tau \log R &= -\partial_x^2 \log(\theta_1(x|\tau)\theta_4(x|\tau)) \Big|_{x=\xi} + \partial_x^2 \log(\theta_2(x|\tau)\theta_3(x|\tau)) \Big|_{x=0} \\ &= -\partial_x^2 \log \theta_1(x|\frac{\tau}{2}) \Big|_{x=\xi} + \partial_x^2 \log \theta_1(x|\frac{\tau}{2}) \Big|_{x=\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

где были использованы хорошо известные тождества

$$2\theta_1(u|\tau)\theta_4(u|\tau) = \theta_2(0|\frac{\tau}{2})\theta_1(u|\frac{\tau}{2}),$$

$$2\theta_2(u|\tau)\theta_3(u|\tau) = \theta_2(0|\frac{\tau}{2})\theta_2(u|\frac{\tau}{2}).$$

Видим, что равенство, которое мы собираемся доказать, т.е.,

$$4\pi i \partial_\tau \log R = (S'(\xi))^2 = \pi^2 \theta_4^4(0|\tau) \frac{\theta_2^2(\xi|\frac{\tau}{2})}{\theta_1^2(\xi|\frac{\tau}{2})},$$

эквивалентно равенству

$$-\partial_x^2 \log \theta_1(x|\frac{\tau}{2}) + \partial_x^2 \log \theta_1(x|\frac{\tau}{2}) \Big|_{x=\frac{1}{2}} = \pi^2 \theta_4^4(0|\tau) \frac{\theta_2^2(x|\frac{\tau}{2})}{\theta_1^2(x|\frac{\tau}{2})}.$$

Последнее доказывается стандартными рассуждениями, которые уже много раз использовались в данном разделе. Обе части являются эллиптическими функциями с периодами 1 и  $\frac{\tau}{2}$  и полюсом второго порядка в  $x = 0$  вида  $x^{-2} + O(1)$  (чтобы убедиться в этом, следует использовать тождества (2.7.26) и  $\theta_4^2(0|\tau) = \theta_3(0|\frac{\tau}{2})\theta_4(0|\frac{\tau}{2})$ ). Таким образом, их разность является константой. Подставляя  $x = \frac{1}{2}$  в обе части, получаем, что константа равна 0.

## 2.8 Разностное уравнение Хироты: МОЗР, преобразование Дарбу и солитоны

### 2.8.1 Введение

Билинейное разностное уравнение Хироты (уравнение БРХ) было введено как уравнение на  $\tau$ -функцию в [194, 195]. В нескольких отгичных обозначениях мы записываем его здесь в виде:

$$\tau^{(1)}(m)\tau^{(2,3)}(m) + \tau^{(2)}(m)\tau^{(3,1)}(m) + \tau^{(3)}(m)\tau^{(1,2)}(m) = 0, \quad (2.8.1)$$

где  $\tau(m) = \tau(m_1, m_2, m_3)$  – функция трех целых чисел (независимых переменных)  $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$ . Здесь и далее верхние индексы 1, 2, и 3 в скобках означают единичный сдвиг

$$\tau^{(1)}(m) = \tau(m_1 + 1, m_2, m_3), \quad \tau^{(2,3)}(m) = \tau(m_1, m_2 + 1, m_3 + 1) \dots, \quad (2.8.2)$$

переменной с соответствующим номером. После работ [195, 196] это уравнение известно как прождающее, посредством специальных предельных процедур, многие дискретные и непрерывные интегрируемые уравнения, такие как КП, мКП, двумеризованная цепочка Тода, sine-Гордон, Бенджамин–Оно и т.д. В силу этого уравнение БРХ часто рассматривается как фундаментальная интегрируемая система. В [201] билинейное разностное уравнение Хироты названо “обобщенной КП-иерархией”. Это уравнение возникает также как модельно-независимое функциональное соотношение для собственных значений квантовой трансфер-матрицы. Подробный обзор результатов, относящихся к этому уравнению, дан в [197, 198], см. также цитированную там литературу. Октаэдральная структура уравнения БРХ исследована в [200]. Его эллиптические решения рассматривались в [199].

Следуя [198], мы вводим функцию  $v(m) = v(m_1, m_2, m_3)$  посредством равенств

$$v_1(m) - v_3(m) = \frac{\tau^{(1,3)}(m)\tau(m)}{\tau^{(1)}(m)\tau^{(3)}(m)}, \quad (2.8.3)$$

$$v_2(m) - v_1(m) = \frac{\tau^{(1,2)}(m)\tau(m)}{\tau^{(2)}(m)\tau^{(1)}(m)}. \quad (2.8.4)$$

Здесь и далее помимо обозначений (2.8.2) мы используем обозначение типа

$$\begin{aligned} v_1(m) &= v(m_1 + 1, m_2, m_3) - v(m) \equiv v^{(1)}(m) - v(m), \\ v_2(m) &= v(m_1, m_2 + 1, m_3) - v(m) \equiv v^{(2)}(m) - v(m), \dots \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

для первых конечных разностей. Понятно, что (2.8.4) следует из (2.8.3) при циклической перестановке индексов  $\{1, 2, 3\}$ . Далее, третье уравнение

$$v_3(m) - v_2(m) = \frac{\tau^{(2,3)}(m)\tau(m)}{\tau^{(2)}(m)\tau^{(3)}(m)}, \quad (2.8.6)$$

получаемое циклической перестановкой, в силу (2.8.3) и (2.8.4) эквивалентно (2.8.1). Легко проверить, что функция  $v(m)$  удовлетворяет следующему нелинейному уравнению:

$$(v_1 - v_2)v_{1,2} + (v_2 - v_3)v_{2,3} + (v_3 - v_1)v_{3,1} = 0, \quad (2.8.7)$$

где введено обозначение вида

$$v_{1,2}(m) = (v_1)_2(m) = (v_2)_1(m)$$

для вторых разностей. Соотношения (2.8.3)–(2.8.6), как известно, допускают калибровочную инвариантность:

$$\tau(m) \rightarrow f_1(m_1)f_2(m_2)f_3(m_3)\tau(m).$$

Уравнение (2.8.7) имеет лаксово представление (см., скажем, [197]) с парой Лакса, которая дается любыми двумя из следующих трех уравнений:

$$\varphi_2(m,k) = \varphi_1(m,k) + (v_2(m) - v_1(m))\varphi(m,k), \quad (2.8.8)$$

$$\varphi_3(m,k) = \varphi_1(m,k) + (v_3(m) - v_1(m))\varphi(m,k),$$

$$\varphi_3(m,k) = \varphi_2(m,k) + (v_3(m) - v_2(m))\varphi(m,k), \quad (2.8.9)$$

где  $k \in \mathbb{C}$  – спектральный параметр. Уравнение (2.8.7) можно рассматривать как эволюционное уравнение, где, скажем,  $m_1$  и  $m_2$  играют роль пространственных переменных, а  $m_3$  – временной. Естественно рассмотреть задачу Коши для (2.8.7) с начальным данным

$$v(m_1, m_2, 0) = v_0(m_1, m_2).$$

Однако в данной формулировке эта задача поставлена некорректно. Действительно, легко видеть, что она имеет два тривиальных решения:  $v(m) = v_0(m_1 + m_3, m_2)$  и  $v(m) = v_0(m_1, m_2 + m_3)$ . С другой стороны, представление (2.8.3) в терминах  $\tau$ -функции не допускает решения с  $v_i = v_j$ ,  $i \neq j$ . Таким образом уравнения (2.8.1) и (2.8.7) не эквивалентны и должны быть наложены некоторые дополнительные условия на класс решений этой задачи Коши. Следует отметить, что эволюционная форма (2.8.7) разностного уравнения Хироты также билинейна, подобна уравнению БРХ (2.8.1).

В [204] разностное уравнение Хироты возникло как результат одевания некоторого коммутаторного тождества. Пусть дана ассоциативная алгебра с единицей  $I$  над  $\mathbb{C}$ . Выберем произвольный элемент  $A$  этой алгебры такой, что в ней существуют  $(A - a_1 I)^{-1}$ ,  $(A - a_2 I)^{-1}$ , и  $(A - a_3 I)^{-1}$ , где  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  – некоторые комплексные параметры. Для любого  $B$  введем операции (коммутаторы в смысле групп)

$$\delta_{a_j}(B) = (A - a_j)B(A - a_j)^{-1} - B \quad (2.8.10)$$

на алгебре (здесь и далее мы опускаем единичные множители  $a_j$ ). Произведение операций (2.8.10) будет пониматься как композиция:  $(\delta_{a_1}\delta_{a_2})(B) \equiv \delta_{a_1}(\delta_{a_2}(B))$ , и т.д. Тогда, в качестве тривиального следствия ассоциативности, получаем тождество

$$(a_1 - a_2)\delta_{a_1}\delta_{a_2} + (a_2 - a_3)\delta_{a_2}\delta_{a_3} + (a_3 - a_1)\delta_{a_3}\delta_{a_1} = 0, \quad (2.8.11)$$

Теперь, учитывая коммутативность операций (2.8.10), введем зависимость от дискретных "времен"  $m_n \in \mathbb{Z}$ ,  $n = 1, 2, 3$  посредством

$$B(m_1, m_2, m_3) = \left( \prod_{n=1}^3 (A - a_n)^{m_n} \right) B \left( \prod_{n=1}^3 (A - a_n)^{m_n} \right)^{-1}.$$

В силу (2.8.11) эта функция трех переменных удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению:

$$(a_1 - a_2)B_{1,2}(m) + (a_2 - a_3)B_{2,3}(m) + (a_3 - a_1)B_{1,3}(m) = 0. \quad (2.8.12)$$

Следуя методу расширенной резольвенты (см. [205]–[206]) и [202, 203], мы ввели в [204] версию процедуры одевания для (2.8.12), которая привела нас к нелинейному уравнению

$$[a_1 - a_2 - u_1 + u_2]u_{1,2} + [a_2 - a_3 - u_2 + u_3]u_{2,3} + [a_3 - a_1 - u_3 + u_1]u_{3,1} = 0 \quad (2.8.13)$$

на функцию  $u(m_1, m_2, m_3)$  трех дискретных переменных, быстро спадающую с ростом любого  $m_i$ . Это уравнение является "делинеаризацией" уравнения (2.8.12), и ниже мы рассматриваем задачу Коши

$$u(m_1, m_2, 0) = u_0(m_1, m_2), \quad (2.8.14)$$

для вещественного достаточно быстро спадающего начального данного  $u_0$ .

Понятно, что в случае  $a_1 = a_2 = a_3$  Eq. (2.8.12) становится бессмысленным. С другой стороны в этом случае уравнения (2.8.7) и (2.8.13) совпадают и мы сталкиваемся с отмеченной выше некорректностью постановки задачи Коши. Более того, если скажем,  $a_3 = a_1 \neq a_2$  мы получаем два очевидных решения задачи Коши (2.8.13) и (2.8.14):  $u(m) = u_0(m_1 + m_3, m_2)$  и  $u(m) = u_0(m_1, m_2 + m_3) + (a_1 - a_2)m_3$ , так что и эта задача Коши некорректно поставлена. Чтобы исключить такие случаи, мы накладываем далее условие

$$a_i \neq a_j, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.8.15)$$

Посредством метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) мы показываем далее, что это условие также достаточно для разрешимости задачи Коши в классе быстро убывающих  $u(m)$ . Принимая во внимание, что уравнение (2.8.13) посредством подстановки

$$v(m) = u(m) - a_1 m_1 - a_2 m_2 - a_3 m_3 \quad (2.8.16)$$

сводится к (2.8.7), видим что  $v(m)$  растет линейно и

$$v_j(m) \rightarrow -a_j, \quad m \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, 3.$$

Таким образом условие (2.8.15) исключает возможность любого из равенств  $v_i = v_j$  при любых  $i \neq j$ . Учитывая (2.8.16), мы далее оба уравнения, (2.8.7) и (2.8.13), называем разностным уравнением Хироты. Здесь мы рассматриваем вещественные решения этого

уравнения, так что в дальнейшем мы накладываем условие вещественности на все константы  $a_j$  (см. [204]):

$$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}. \quad (2.8.17)$$

В силу (2.8.16) соотношения (2.8.3)–(2.8.6) записываются в виде

$$\begin{aligned} u_1 - u_3 &= a_1 - a_3 + \frac{\tau^{(1,3)}\tau}{\tau^{(1)}\tau^{(3)}}, \\ u_2 - u_1 &= a_2 - a_1 + \frac{\tau^{(1,2)}\tau}{\tau^{(2)}\tau^{(1)}}, \\ u_3 - u_2 &= a_3 - a_2 + \frac{\tau^{(2,3)}\tau}{\tau^{(2)}\tau^{(3)}}, \end{aligned}$$

и при той же подстановке уравнения (2.8.8)–(2.8.9) суть

$$\varphi_2(m, k) = \varphi_1(m, k) + (u_2(m) - u_1(m) + a_1 - a_2)\varphi(m, k), \quad (2.8.18)$$

$$\varphi_3(m, k) = \varphi_1(m, k) + (u_3(m) - u_1(m) + a_1 - a_3)\varphi(m, k), \quad (2.8.19)$$

$$\varphi_3(m, k) = \varphi_2(m, k) + (u_3(m) - u_2(m) + a_2 - a_3)\varphi(m, k). \quad (2.8.20)$$

Мы выбираем первые два уравнения в качестве пары Лакса для разностного уравнения Хироты (2.8.13).

## 2.8.2 Прямая и обратная задачи

### 2.8.2.1 Функция Грина и решения Йоста

Решение Йоста  $\varphi(m, k)$  уравнения (2.8.18) задается в виде

$$\varphi(m, k) = E(m, k)\chi(m, k), \quad k \in \mathbb{C}, \quad (2.8.21)$$

где

$$E(m, k) = (k - a_1)^{m_1}(k - a_2)^{m_2}(k - a_3)^{m_3}, \quad (2.8.22)$$

а функция  $\chi(m, k)$  удовлетворяет нормировке

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \chi(m, k) = 1. \quad (2.8.23)$$

В терминах функции  $\chi(m, k)$  уравнения (2.8.18) и (2.8.19) пары Лакса принимают вид

$$(k - a_2)\chi_2(m, k) = (k - a_1)\chi_1(m, k) + (u_2(m) - u_1(m))\chi(m, k), \quad (2.8.24)$$

$$(k - a_3)\chi_3(m, k) = (k - a_1)\chi_1(m, k) + (u_3(m) - u_1(m))\chi(m, k), \quad (2.8.25)$$

а (2.8.20)

$$(k - a_3)\chi_3(m, k) = (k - a_2)\chi_2(m, k) + (u_3(m) - u_2(m))\chi(m, k), \quad (2.8.26)$$

сохраняя инвариантность по отношению к циклической перестановке индексов  $\{1, 2, 3\}$ .



“Интегральное” уравнение на  $\chi(m,k)$ , определяющее решение уравнения (2.8.24), удовлетворяющее (2.8.23), было выведено в [203]. Здесь мы записываем его в следующем виде

$$\chi(m,k) = 1 + \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} G(m-n, k)(u_2(n) - u_1(n))\chi(n, k), \quad k \in \mathbb{C}, \quad (2.8.27)$$

где функция Грина равна

$$G(m, k) = \oint_{|\zeta_1|=1} \frac{d\zeta_1}{2\pi i} \oint_{|\zeta_2|=1} \frac{d\zeta_2}{2\pi i} \frac{\zeta_1^{m_1-1} \zeta_2^{m_2-1}}{(k-a_2)\zeta_2 - (k-a_1)\zeta_1 + a_2 - a_1}. \quad (2.8.28)$$

Знаменатель в правой части этого равенства имеет нули только в двух случаях:

$$\zeta_1 = \zeta_2 = 1, \quad \text{или} \quad \zeta_1 = \frac{\bar{k} - a_1}{k - a_1}, \quad \zeta_2 = \frac{\bar{k} - a_2}{k - a_2},$$

так что интеграл сходится и определяет  $G(m, k)$  как обобщенную функцию  $k$ . Интегрируя по  $\zeta_1$ , или  $\zeta_2$ , мы получаем два представления

$$\begin{aligned} G(m, k) &= \frac{1}{k-a_1} \oint_{|\xi|=1} \frac{d\xi}{2\pi i} \left( \frac{(k-a_2)\xi + a_2 - a_1}{k-a_1} \right)^{m_1-1} \xi^{m_2-1} \times \\ &\quad \times [\theta(m_1 \leq 0)\theta(|(k-a_2)\xi + a_2 - a_1| - |k-a_1|) - \\ &\quad - \theta(m_1 \geq 1)\theta(|k-a_1| - |(k-a_2)\xi + a_2 - a_1|)] \equiv \end{aligned} \quad (2.8.29)$$

$$\begin{aligned} &\equiv \frac{1}{k-a_2} \oint_{|\xi|=1} \frac{d\xi}{2\pi i} \xi^{m_1-1} \left( \frac{(k-a_1)\xi + a_1 - a_2}{k-a_2} \right)^{m_2-1} \times \\ &\quad \times [-\theta(m_2 \leq 0)\theta(|(k-a_1)\xi + a_1 - a_2| - |k-a_2|) + \\ &\quad + \theta(m_2 \geq 1)\theta(|k-a_2| - |(k-a_1)\xi + a_1 - a_2|)], \end{aligned} \quad (2.8.30)$$

где  $\theta$  от непрерывного аргумента означает стандартную функцию Хэвисайда, а для дискретных переменных это – характеристическая функция соответствующего интервала:

$$\theta(m_1 \leq 0) = \begin{cases} 0, & m_1 \geq 1, \\ 1, & m_1 \leq 0, \end{cases}, \quad \theta(m_1 \geq 1) = \begin{cases} 1, & m_1 \geq 1, \\ 0, & m_1 \leq 0, \end{cases}, \quad \text{и т.д.}$$

Каждое из этих представлений показывает, что в силу (2.8.17) функция Грина обладает свойствами сопряжения

$$\overline{G(m, k)} = G(m, \bar{k}) = \left( \frac{k-a_1}{\bar{k}-a_1} \right)^{m_1} \left( \frac{k-a_2}{\bar{k}-a_2} \right)^{m_2} G(m, k) \quad (2.8.31)$$

и антисимметрии

$$G(m_1, m_2, k) = -G(m_2, m_1, k) \Big|_{a_1 \leftrightarrow a_2}.$$

Асимптотическое поведение функции Грина следует из (2.8.28)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} kG(m, k) = \delta_{m_1+m_2, 1} \left[ -\theta(m_2 \leq 0)\theta(2k_{\Re} - a_1 - a_2) + \theta(m_2 \geq 1)\theta(a_1 + a_2 - 2k_{\Re}) \right], \quad (2.8.32)$$

так что она убывает на бесконечности по  $k$ , причем асимптотика зависит от полуплоскости где  $k \rightarrow \infty$ . Легко видеть также, что эта функция убывает с ростом  $m$ :

$$\lim_{|m_1|+|m_2| \rightarrow \infty} G(m, k) = 0. \quad (2.8.33)$$

Правая часть равенства (2.8.28) определяет функцию, непрерывно зависящую от спектрального параметра  $k$  везде на комплексной плоскости, за исключением точек  $k = a_1$  и  $k = a_2$ . Для того, чтобы выделить разрывы в этих точках, удобно использовать представления (2.8.29) или (2.8.30):

$$G(m, k) = \frac{\delta_{m_1, 0}\theta(m_2 \leq 0)}{a_2 - a_1} + \frac{\operatorname{sgnk}_{\Im}}{2\pi i(a_2 - a_1)m_1} \left( \left( \frac{\bar{k} - a_1}{k - a_1} \right)^{m_1} - 1 \right) + o(1), \quad k \sim a_1, \quad (2.8.34)$$

$$G(m, k) = -\frac{\theta(m_1 \geq 1)\delta_{m_2, 0}}{a_2 - a_1} - \frac{\operatorname{sgnk}_{\Im}}{2\pi i(a_2 - a_1)m_2} \left( \left( \frac{\bar{k} - a_2}{k - a_2} \right)^{m_2} - 1 \right) + o(1), \quad k \sim a_2, \quad (2.8.35)$$

где значения при  $m_1 = 0$  и  $m_2 = 0$  даются предельной процедурой при условии, что  $-\pi < \arg(k - a_j) \leq \pi$ . Мы видим, что предельные значения функции  $G(m, k)$  в точках  $k = a_1, a_2$  конечны, но зависят от пути на комплексной плоскости. Уместно отметить, что это свойство аналогично свойству функции Грина для уравнения теплопроводности на солитонном фоне, см., например, [207]. Мы можем фиксировать способ стремления к точкам особенностей, например, как

$$G(m, a_j) = \lim_{k_{\Re} \rightarrow a_j} \lim_{k_{\Im} \rightarrow 0} G(m, k), \quad j = 1, 2, \quad (2.8.36)$$

так что по (2.8.34) и (2.8.35)

$$G(m, a_1) = \frac{\delta_{m_1, 0}\theta(m_2 \leq 0)}{a_2 - a_1}, \quad G(m, a_2) = -\frac{\theta(m_1 \geq 1)\delta_{m_2, 0}}{a_2 - a_1}.$$

Указанные выше разрывы функции Грина ведут к сингулярностям ее  $\bar{\partial}$ -производной. Действительно, в смысле обобщенных функций имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \bar{k}} \frac{1}{(k - a_2)(\zeta_2 - 1) - (k - a_1)(\zeta_1 - 1)} = \\ & = -\frac{\operatorname{sgnk}_{\Im}}{2\pi i(\bar{k} - a_1)(\bar{k} - a_2)} \delta \left( \zeta_1 \frac{k - a_1}{\bar{k} - a_1} \right) \delta \left( \zeta_2 \frac{k - a_2}{\bar{k} - a_2} \right), \end{aligned}$$

где  $\delta(\zeta)$  означает  $\delta$ -функцию на единичном контуре,

$$\delta(\zeta_j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_j^n, \quad |\zeta_j| = 1.$$

Таким образом, по (2.8.28)

$$\frac{\partial G(m, k)}{\partial \bar{k}} = -\frac{\text{sgnk}_{\mathfrak{S}}}{2\pi i (\bar{k} - a_1)(\bar{k} - a_2)} \left( \frac{\bar{k} - a_1}{k - a_1} \right)^{m_1} \left( \frac{\bar{k} - a_2}{k - a_2} \right)^{m_2}. \quad (2.8.37)$$

Рассмотрим, наконец, “интегральную” форму разностного уравнения (2.8.18) на само решение Йоста. Как следует из (2.8.21), оно может быть записано в виде

$$\varphi(m, k) = E(m, k) + \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \mathcal{G}(m - n, k) (u_2(n) - u_1(n)) \varphi(n, k),$$

где теперь соответствующая функция Грина равняется

$$\mathcal{G}(m, k) = (k - a_1)^{m_1} (k - a_2)^{m_2} G(m, k), \quad (2.8.38)$$

так что по (2.8.28)

$$\mathcal{G}(m, k) = \oint_{|\zeta_1|=|k-a_1|} \frac{d\zeta_1}{2\pi i} \oint_{|\zeta_2|=|k-a_2|} \frac{d\zeta_2}{2\pi i} \frac{\zeta_1^{m_1-1} \zeta_2^{m_2-1}}{\zeta_2 - \zeta_1 + a_2 - a_1}.$$

Это доказывает, что  $\mathcal{G}(k)$  – вещественно-значная функция  $k$ , четная по  $k_{\mathfrak{S}}$ :

$$\overline{\mathcal{G}(m, k)} = \mathcal{G}(m, \bar{k}) = \mathcal{G}(m, k),$$

как следует из (2.8.31), (2.8.38) и данных выше свойств  $G(m, k)$ . Необходимо отметить, что если  $G(m, k)$  имеет только разрывы в точках  $k = a_1, a_2$ , то функция  $\mathcal{G}(m, k)$  в этих точках сингулярна при отрицательных  $m_1$  или  $m_2$ . Это наблюдение показывает существенное отличие дискретного случая от непрерывного и оно также справедливо и для самих решений Йоста, см. (2.8.21). Ввиду этого мы работаем здесь, в основном, с функциями  $\chi(m, k)$  и  $G(m, k)$ , которые свободны от таких проблем.

### 2.8.2.2 Свойства решений Йоста

Здесь мы изучаем свойства решения Йоста, точнее, функции  $\chi(m, k)$ , определенной посредством уравнения (2.8.27), причем ниже мы предполагаем однозначную разрешимость этого уравнения. В силу (2.8.17) и (2.8.31) вещественность потенциала  $u(m)$  эквивалентна условию

$$\overline{\chi(m, k)} = \chi(m, \bar{k}), \quad (2.8.39)$$

в то время как второе равенство в (2.8.31) показывает, что функция

$$\tilde{\chi}(m, k) = \left( \frac{\bar{k} - a_1}{k - a_1} \right)^{m_1} \left( \frac{\bar{k} - a_2}{k - a_2} \right)^{m_2} \chi(m, \bar{k}), \quad (2.8.40)$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}(m,k) &= \left(\frac{\bar{k} - a_1}{k - a_1}\right)^{m_1} \left(\frac{\bar{k} - a_2}{k - a_2}\right)^{m_2} + \\ &+ \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} G(m - n, k)(u_2(n) - u_1(n))\tilde{\chi}(n, k),\end{aligned}\quad (2.8.41)$$

т.е. уравнению с тем же ядром, что и в (2.8.27).

Асимптотическое поведение  $\chi(m, k)$  следует благодаря (2.8.27), (2.8.32) и (2.8.33):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \chi(m, k) = 1, \quad \lim_{|m_1| + |m_2| \rightarrow \infty} \chi(m, k) = 1, \quad (2.8.42)$$

и для второго члена разложения по  $1/k$  мы получаем по (2.8.32)

$$\begin{aligned}k(\chi(m, k) - 1) &\rightarrow \\ &\rightarrow -\theta(2k_{\mathbb{R}} - a_1 - a_2) \sum_{n=m_2}^{\infty} (u(m_1 + m_2 - n - 1, n + 1) - u(m_1 + m_2 - n, n)) + \\ &+ \theta(a_1 + a_2 - 2k_{\mathbb{R}}) \sum_{n=-\infty}^{m_2-1} (u(m_1 + m_2 - n - 1, n + 1) - u(m_1 + m_2 - n, n)),\end{aligned}$$

что в рассматриваемом случае  $u(m)$  быстро убывающего при  $m \rightarrow \infty$  дает

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k(\chi(m, k) - 1) = u(m). \quad (2.8.43)$$

В отличие от (2.8.32) это предельное значение что не зависит от полуплоскости  $k$ . Следует отметить, что из разностного уравнения (2.8.24) мы получаем асимптотическое поведение лишь в виде  $k(\chi_2(m, k) - \chi_1(m, k)) \rightarrow u_2(m) - u_1(m)$ . На самом деле оно эквивалентно (2.8.28) благодаря асимптотическому убыванию потенциала и второму равенству в (2.8.42).

Понятно, что разрывы функции Грина в точках  $k = a_1$  и  $a_2$  наследуются функцией  $\chi(m, k)$  и по аналогии с (2.8.36) мы обозначаем

$$\chi(m, a_j) = \lim_{k_{\mathbb{R}} \rightarrow a_j} \lim_{k_{\mathbb{I}} \rightarrow 0} \chi(m, k), \quad j = 1, 2. \quad (2.8.44)$$

### 2.8.2.3 Временная эволюция и обратная задача

Временная эволюция, т.е. зависимость  $\chi(m, k)$  от  $m_3$  вводится посредством (2.8.25), а для самого решения Йоста она следует из (2.8.21). Введем данные рассеяния и найдем их эволюцию. Дефект аналитичности функции  $\chi(m, k)$  дается посредством  $\bar{\partial}$ -дифференцирования уравнения (2.8.27). В силу (2.8.37) имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \chi(m, k)}{\partial \bar{k}} &= \left(\frac{\bar{k} - a_1}{k - a_1}\right)^{m_1} \left(\frac{\bar{k} - a_2}{k - a_2}\right)^{m_2} r(k, m_3) + \\ &+ \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} G(m, n, k)(u_2(n) - u_1(n)) \frac{\partial \chi(n, k)}{\partial \bar{k}}.\end{aligned}\quad (2.8.45)$$

Здесь мы ввели данные рассеяния  $r(k, m_3)$ , определенные равенством

$$r(m_3, k) = -\frac{\operatorname{sgnk}_{\mathfrak{S}}}{2\pi i(\bar{k} - a_1)(\bar{k} - a_2)} \times \\ \times \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} \left(\frac{k - a_1}{\bar{k} - a_1}\right)^{m_1} \left(\frac{k - a_2}{\bar{k} - a_2}\right)^{m_2} (u_2(m) - u_1(m))\chi(m, k). \quad (2.8.46)$$

В силу (2.8.39) (т.е. в силу вещественности потенциала  $u(m)$ ) имеем, что  $r(k, m_3)$  удовлетворяет

$$\overline{r(m_3, k)} = r(m_3, \bar{k}). \quad (2.8.47)$$

При условии однозначной разрешимости задачи (2.8.41), мы получаем по (2.8.45), что  $\partial\chi(m, k)/\partial\bar{k} = r(k, m_3)\tilde{\chi}(m, k)$ , или, благодаря (2.8.40), что

$$\frac{\partial\chi(m, k)}{\partial\bar{k}} = \left(\frac{\bar{k} - a_1}{k - a_1}\right)^{m_1} \left(\frac{\bar{k} - a_2}{k - a_2}\right)^{m_2} r(m_3, k)\chi(m, \bar{k}).$$

Временная эволюция спектральных данных, т.е. зависимость от  $m_3$ , тривиально вытекает из  $\bar{\partial}$ -дифференцирования второго уравнения пары Лакса, (2.8.25) и равенства (2.8.45):

$$r(m_3, k) = \left(\frac{\bar{k} - a_3}{k - a_3}\right)^{m_3} r(k), \quad (2.8.48)$$

где функция  $r(k)$  не зависит от  $m_3$  и однозначно определена по (2.8.46) начальными данными (2.8.14). Равенство (2.8.46) показывает, что спектральные данные имеют интегрируемые особенности в точках  $k = a_1, a_2$ .

Суммируя, мы видим, что обратная задача для определения  $\chi(m, k)$  дается уравнением

$$\frac{\partial\chi(m, k)}{\partial\bar{k}} = R(m, k)\chi(m, \bar{k}), \quad (2.8.49)$$

и условием нормировки (2.8.23). Здесь мы обозначили

$$R(m, k) = \left(\frac{\bar{k} - a_1}{k - a_1}\right)^{m_1} \left(\frac{\bar{k} - a_2}{k - a_2}\right)^{m_2} \left(\frac{\bar{k} - a_3}{k - a_3}\right)^{m_3} r(k), \quad k \in \mathbb{C}. \quad (2.8.50)$$

При любом  $r(k)$  эта функция удовлетворяет (2.8.12), т.е. линейризованной версии разностного уравнения Хироты (2.8.13). Отметим также, что в силу (2.8.48)

$$|R(m, k)| = |r(k, m_3)| = |r(k)|, \quad (2.8.51)$$

т.е. не зависит от  $m_3$ .

#### 2.8.2.4 Интегралы движения

Введем функцию

$$\rho(k) = \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} (u_2(m) - u_1(m))\chi(m, k).$$

В силу асимптотического убывания потенциала  $u(m)$  и ограниченности функции  $\chi(m, k)$  по  $m$  эти ряды сходятся и функция  $\rho(k)$  убывает при  $k \rightarrow \infty$ . Она удовлетворяет свойству сопряжения

$$\overline{\rho(\bar{k})} = \rho(k),$$

ввиду вещественности потенциала. Для  $\bar{\partial}$ -производной этой функции по (2.8.46)–(2.8.50) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(k)}{\partial \bar{k}} &= r(k) \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \left( \frac{\bar{k} - a_1}{k - a_1} \right)^{m_1} \left( \frac{\bar{k} - a_2}{k - a_2} \right)^{m_2} (u_2(m) - u_1(m)) \chi(m, \bar{k}) = \\ &= -4\pi i (k - a_1)(k - a_2) \operatorname{sgn}((a_1 - a_2)k_{\Im}) |\Gamma(k)|^2, \end{aligned}$$

Теперь, принимая во внимание (2.8.23), мы находим, что в терминах данных рассеяния функция  $\rho(k)$  дается равенством

$$\rho(k) = -4i \int d^2 k' \frac{(k' - a_1)(k' - a_2)}{k - k'} \operatorname{sgn}((a_1 - a_2)k'_{\Im}) |\Gamma(k')|^2,$$

где  $dk^2 = dk_{\Re} dk_{\Im}$ . В силу (2.8.51) это доказывает, что  $\rho(k)$  не зависит от времени  $m_3$  и является порождающей функцией бесконечного набора интегралов движения. По (2.8.43) первый нетривиальный интеграл (первый коэффициент в разложении по  $1/k$ ) равен

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} (u_2(m) - u_1(m)) u(m) = \\ &= -4i \int d^2 k' (k' - a_1)(k' - a_2) \operatorname{sgn}((a_1 - a_2)k'_{\Im}) |\Gamma(k')|^2. \end{aligned}$$

### 2.8.3 Преобразование Дарбу

#### 2.8.3.1 Преобразование Дарбу и временная эволюция

В случае дискретных систем временная эволюция есть частный случай преобразования Дарбу. Мы рассматриваем здесь преобразования Дарбу непрерывного спектра, т.е., преобразования, которые дают новый потенциал  $\hat{u}$  и соответствующее решения Йоста  $\hat{\chi}(m, k)$ , задаваемое той же нормировкой (2.8.23) и  $\bar{\partial}$ -уравнением (2.8.49) с заменой

$$R(m, k) \rightarrow \hat{R}(m, k) = \frac{\bar{k} - a}{k - a} R(m, k) \quad (2.8.52)$$

где произвольный параметр  $a$  следует выбрать вещественным, чтобы сохранить свойство (2.8.47). Тогда по (2.8.49) мы получаем для  $\bar{\partial}$ -производной

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{k}} [(k - a)\hat{\chi}(m, k) - (k - a_j)\chi^{(j)}(m, k)] &= \\ &= R(m, k) \overline{[(k - a)\hat{\chi}(m, k) - (k - a_j)\chi^{(j)}(m, k)]}, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

где разность в квадратных скобках ограничена при  $k \rightarrow \infty$ . Действительно, в этом пределе

$$(k - a)\widehat{\chi}(m, k) - (k - a_1)\chi^{(j)}(m, k) \rightarrow \widehat{u}(m) - u^{(j)}(m) + a_1 - a,$$

где  $\widehat{u}$  дается асимптотикой решения Йоста  $\widehat{\chi}(m, k)$  как в (2.8.43). Таким образом, при условии однозначной разрешимости обратной задачи (2.8.23) и (2.8.49), мы выводим для нового решения Йоста уравнение

$$(k - a)[\widehat{\chi}(m, k) - \chi(m, k)] = (k - a_j)\chi_j(m, k) - (\widehat{u}(m) - u^{(j)}(m))\chi(m, k). \quad (2.8.53)$$

Очевидно, что в пределе  $k \rightarrow a$  решение Йоста  $\widehat{\chi}$  выпадает, так что посредством этого преобразования потенциал  $\widehat{u}$  дается как

$$\widehat{u}(m) = u^{(j)}(m) - (a - a_j)\frac{\chi_j(m, a)}{\chi(m, a)}, \quad j = 1, 2, 3,$$

иными словами дается явно в терминах исходного потенциала и значения его решения Йоста при спектральном параметре равном параметру  $a$  преобразования Дарбу (2.8.52).

Потенциал  $\widehat{u}$  может быть исключен из (2.8.53) и мы получаем

$$\widehat{\chi}(m, k) = \frac{k - a_j}{k - a}\chi^{(j)}(m, k) - \frac{(a - a_j)\chi^{(j)}(m, a)}{\chi(m, a)}\chi(m, k). \quad (2.8.54)$$

Полагая здесь  $k = a_j$  (мы используем определение (2.8.44) для значений функции  $\chi(m, k)$  в точках  $a_j$ ), мы получаем

$$\frac{\widehat{\chi}(m, a_j)}{\chi(m, a_j)} = \frac{\chi^{(j)}(m, a)}{\chi(m, a)},$$

так что (2.8.54) может быть записано в симметричной форме:

$$\frac{1}{k - a_j} \left[ \frac{\widehat{\chi}(m, k)}{\chi(m, k)} - \frac{\widehat{\chi}(m, a_j)}{\chi(m, a_j)} \right] = \frac{1}{k - a} \left[ \frac{\chi^{(j)}(m, k)}{\chi(m, k)} - \frac{\chi^{(j)}(m, a)}{\chi(m, a)} \right].$$

Выберем  $a = a_3$ . Тогда в терминах функции  $v(m)$  (см. (2.8.16)) мы получаем из предыдущего:

$$v^{(3)}(m) = v^{(j)}(m) - (a_3 - a_j)\frac{\chi^{(j)}(m, a_3)}{\chi(m, a_3)}, \quad (2.8.55)$$

$$\chi^{(3)}(m, k) = \frac{k - a_j}{k - a_3}\chi^{(j)}(m, k) - \frac{(a_3 - a_j)\chi^{(j)}(m, a_3)}{(k - a_3)\chi(m, a_3)}\chi(m, k), \quad (2.8.56)$$

где  $j = 3$  дает тождество. Отметим, что по (2.8.50) ясно, что преобразование данных рассеяния в (2.8.52) в случае  $a = a_3$  есть ни что иное, как сдвиг временной переменной  $m_3 \rightarrow m_3 + 1$ . Соответственно, равенства (2.8.55) и (2.8.56) при  $j = 1$  или  $j = 2$  демонстрируют это свойство в терминах потенциала и решения Йоста. С другой стороны, выполняя последовательно преобразования Дарбу со значениями параметра  $a$ , скажем,  $a_4, a_5$  и т.д., отличными от исходных  $a_1, a_2, a_3$ , мы вводим зависимость от новых “высших” времен  $m_4, m_5, \dots$ . Принимая во внимание (2.8.50), понятно, что по отношению к любым трем временам  $m_i, m_j$  и  $m_k$  ( $i \neq j \neq k$ ) мы получаем то же самое разностное уравнение Хироты.

### 2.8.3.2 $\tau$ -функция

Здесь мы приведем связь подхода МОЗР, развитого выше, со стандартной для дискретных систем  $\tau$ -функциональной формулировкой. Учитывая, что решение Йоста плохо определено в точках  $k = a_1, a_2$ , зафиксируем значения в этих точках, скажем, как в (2.8.44). Перепишем (2.8.24) как уравнение на функцию  $v(m)$ , см. (2.8.16), используя обозначения типа (2.8.2) и (2.8.5):

$$v^{(2)} - v^{(1)} = \frac{(k - a_2)\chi^{(2)}(k)}{\chi(k)} - \frac{(k - a_1)\chi^{(1)}(k)}{\chi(k)},$$

опуская везде зависимость от  $m$ . Полагая здесь  $k = a_1$  и  $k = a_2$ , получаем два равенства:

$$v^{(2)} - v^{(1)} = (a_1 - a_2) \frac{\chi^{(1)}(a_2)}{\chi(a_2)} = (a_1 - a_2) \frac{\chi^{(2)}(a_1)}{\chi(a_1)}, \quad (2.8.57)$$

и таким же способом по (2.8.26) и (2.8.25) соответственно

$$\begin{aligned} v^{(3)} - v^{(2)} &= (a_2 - a_3) \frac{\chi^{(2)}(a_3)}{\chi(a_3)} = (a_2 - a_3) \frac{\chi^{(3)}(a_2)}{\chi(a_2)}, \\ v^{(1)} - v^{(3)} &= (a_3 - a_1) \frac{\chi^{(3)}(a_1)}{\chi(a_1)} = (a_3 - a_1) \frac{\chi^{(1)}(a_3)}{\chi(a_3)}, \end{aligned} \quad (2.8.58)$$

что следует также из симметрии относительно циклической перестановки индексов. Это означает, что

$$\frac{\chi^{(i)}(a_j)}{\chi(a_j)} = \frac{\chi^{(j)}(a_i)}{\chi(a_i)}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.8.59)$$

Введем  $\tau$ -функцию посредством системы уравнений:

$$\tau^{(1)}(m) = (a_3 - a_1)^{m_3} (a_1 - a_2)^{m_2} \chi(m, a_1) \tau(m), \quad (2.8.60)$$

$$\tau^{(2)}(m) = (a_1 - a_2)^{m_1} (a_2 - a_3)^{m_3} \chi(m, a_2) \tau(m),$$

$$\tau^{(3)}(m) = (a_2 - a_3)^{m_2} (a_3 - a_1)^{m_1} \chi(m, a_3) \tau(m), \quad (2.8.61)$$

которые совместны благодаря (2.8.59). Подстановка  $\chi(m, a_j)$  из этих равенств в (2.8.57)–(2.8.58) дает (2.8.3)–(2.8.6). С другой стороны, суммируя (2.8.57)–(2.8.58), получаем

$$(a_1 - a_2) \frac{\chi^{(2)}(a_1)}{\chi(a_1)} + \text{cycle}(1, 2, 3) = 0,$$

что в силу (2.8.60)–(2.8.61) есть (2.8.1).

### 2.8.4 Солитонные решения

Солитонные решения разностного уравнения Хироты хорошо известны в литературе (см. [194]–[196]). Известно также, см. [208], что это уравнение допускает также ламп-решения. Здесь мы введем солитонные решения посредством следующего построения. Пусть даны два натуральных числа:

$$N_a, N_b \geq 1,$$



и набор  $N$  вещественных параметров  $\varkappa_n$ , которые можно выбрать упорядоченными:  $\varkappa_1 < \varkappa_2 < \dots < \varkappa_N$ , где

$$N = N_a + N_b.$$

Пусть  $\chi(m, k)$  – мероморфная функция  $k$ , которая имеет полюса в точках  $k = \varkappa_{n_1}, \dots, \varkappa_{n_{N_b}}$ , где  $\{n_1, \dots, n_{N_b}\}$  – некоторое подмножество  $\{1, \dots, N\}$ . Перенормируем решение Йоста:

$$\chi(m, k) \rightarrow \chi(m, k) \prod_{j=1}^{N_b} (k - \varkappa_{n_j})^{-1},$$

так что новое решение – полином порядка  $k^{N_b}$  с единичным коэффициентом у старшей степени. В силу (2.8.43) имеем

$$\frac{\chi(m, k)}{k^{N_b}} = 1 + \frac{1}{k} \left( u(m) - \sum_{j=1}^{N_b} \varkappa_{n_j} \right). \quad (2.8.62)$$

Итак,

$$\chi(m, k) = k^{N_b} + \sum_{l=1}^{N_b} k^{l-1} X(l, m), \quad (2.8.63)$$

где  $X(l, m)$  – некоторые коэффициенты, подлежащие определению. Воспользуемся с этой целью (2.8.21) с  $\chi(x, k)$  подставленным из последнего равенства, а на значения решения Йоста в точках  $k = \varkappa_n$  наложим  $N_b$  условий:

$$(\varphi(m, \varkappa_1), \dots, \varphi(m, \varkappa_N)) D = 0.$$

где  $D$  –  $N \times N_b$ -матрица с по крайней мере двумя ненулевыми старшими минорами. Это условие дает линейную систему уравнений для однозначного определения  $X(l, m)$ . Для описания решения этой системы введем следующие обозначения: пусть  $V$  – неполная,  $(N_b + 1) \times N$ -матрица Вандермонда

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \varkappa_1^{N_b} & \dots & \varkappa_N^{N_b} \end{pmatrix},$$

и пусть  $V(l)$  – матрица  $V$  с удаленной  $l$ -ой строкой (т.е.  $N_b \times N$ -матрица). Нам также нужны две диагональные  $N \times N$ -матрицы:

$$E(m) = \text{diag}\{E(m, \varkappa_1), \dots, E(m, \varkappa_N)\}$$

см. (2.8.22), и

$$k - \varkappa = \text{diag}\{k - \varkappa_1, \dots, k - \varkappa_N\}. \quad (2.8.64)$$

Пусть также  $Y(l, m)$  означает детерминант  $N_b \times N_b$ -матрицы

$$Y(l, m) = (-1)^{N_b+1-l} \det(V(l)E(m)D), \quad Y(m) = Y(N_b + 1, m).$$

Тогда легко видеть, что

$$X(l, m) = -\frac{Y(l, m)}{Y(m)},$$

Теперь по (2.8.63) легко получаем

$$\chi(m, k) = \frac{Z(m, k)}{Y(m)},$$

где

$$Z(m, k) = \det(V(N_b + 1)(k - \varkappa)E(m)D),$$

и где было использовано обозначение (2.8.64). Благодаря (2.8.62) получаем

$$u(m) = \sum_{j=1}^{N_b} \varkappa_{n_j} - \frac{Y(N_b, m)}{Y(m)}. \quad (2.8.65)$$

Построим соответствующую  $\tau$ -функцию. Благодаря (2.8.22) легко видеть, что

$$\chi(m, a_n) = (-1)^{N_b} \frac{Y^{(n)}(m)}{Y(m)}.$$

Таким образом, используя определения (2.8.60)–(2.8.61), видим, что  $\tau$ -функция (с точностью до некоторого константного множителя) равна

$$\tau(m) = (-1)^{N_b(m_1+m_2+m_3)} (a_3 - a_1)^{m_1 m_3} (a_1 - a_2)^{m_2 m_1} (a_2 - a_3)^{m_3 m_2} Y(m).$$

В качестве примера этой общей конструкции, приведем односолитонное решение, которое равно

$$u(m) = \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{1 + cf(m)},$$

где  $c$  – вещественная константа и

$$f(m) = \frac{E(m, \varkappa_2)}{E(m, \varkappa_1)} \equiv \left( \frac{\varkappa_2 - a_1}{\varkappa_1 - a_1} \right)^{m_1} \left( \frac{\varkappa_2 - a_2}{\varkappa_1 - a_2} \right)^{m_2} \left( \frac{\varkappa_2 - a_3}{\varkappa_1 - a_3} \right)^{m_3}.$$

Уже этот пример показывает, что предыдущее рассмотрение было формальным в том смысле, что знаменатель в (2.8.65) (т.е.  $\tau$ -функция) может принимать нулевые значения, так что решение может быть сингулярным при некоторых значениях  $m$ . Эта ситуация напоминает аналогичную проблему, хорошо известную в случае уравнения КПП. Однако там независимые переменные непрерывны, поэтому отсутствие сингулярностей эквивалентно знакоопределенности  $\tau$ -функции. Здесь, когда независимые переменные пробегают

дискретные значения, очевидно, что ситуация становится более сложной:  $\tau$ -функция может изменить знак, не проходя через ноль. Необходимо также отметить, что (2.8.65), на самом деле, определяет решение с точностью до аддитивной константы и, как легко видеть, в общем случае это решение стремится к разным константам, в зависимости от направления в котором стремятся к бесконечности  $m_1$  и  $m_2$ . Таким образом, строго говоря, солитонное решение не попадает в класс решений, для которых в предыдущих разделах был развит МОЗР. Солитонные решения интерполируют между разными константами на  $m$ -бесконечности и версию МОЗР, позволяющую рассмотрение таких решений еще предстоит развить. Другое свойство, специфическое для солитонных решений разностного уравнения Хироты – существование резонансных солитонов, т.е. солитонов с параметрами  $\kappa_i$ , совпадающими с некоторыми из параметров  $a_1, a_2, a_3$ . Односолитонное решение (2.8.4) показывает, что в соответствующем пределе решение существует, но свойства его могут быть весьма странными. Этот специальный класс солитонных решений заслуживает детального рассмотрения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате работы по проекту получены следующие научные результаты:

Введено понятие асимптотической алгебры киральных дифференциальных операторов. Доказана теорема о локализации для аффинных  $W$ -алгебр на критическом уровне.

Введена “твистованная алгебра Пуассона”, связанная с инволютивным решением квантового уравнения Янга-Бакстера. Построено обобщение пуассоновой структуры годеповского типа путем замены производной первого порядка по токовому параметру на производную более высокого порядка в локальной форме годеповской пуассоновой структуры. Предложена пуассонова структура, содержащая оба обобщения. Найдены, также, некоторые коммутативные семейства соответствующих твистованных пуассоновых алгебр.

Изучены интегрируемые обобщения, операторов Калоджеро-Мозера-Сазерленда, которые имеют только частичную симметрию. Установлена биекция между конечномерными обобщенными собственными подпространствами алгебры  $\mathfrak{D}_{n,m}$  и проективными накрытиями определенных неприводимых модулей над  $\mathfrak{gl}(n, 2m)$ .

Предложена гипотеза, связывающая действие кактусной группы на векторах Бете с действием той же группы на тезорном произведении кристаллов как объектов кограничной категории. Получено ее доказательство гипотезу в случае алгебры Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$

Получено аналитическое выражение для статсуммы стохастического процесса с  $Z_N$  симметрией, которое подтверждено численными наблюдениями.

Доказано, что порядок на вероятностных мерах, наследуемый с доминантного порядка на диаграммах Юнга, сохраняется при естественном отображении уменьшающем количество клеток в диаграмме на 1. Как следствие получено новое доказательство теоремы Тома о классификации нормированных экстремальных характеров бесконечной симметрической группы.

Доказан закон больших чисел для всех (гипотетически) эргодических мер на пространстве верхне-треугольных матриц, и показана связь предельных частот возникающей случайной диаграммы Юнга с коэффициентами, участвующими в параметризации.

Доказаны формулы вычетов для третьих производных обобщённых препотенциалов, которые дают эффективный способ для вычисления их разложений в режиме слабой связи.

Построена производящая функция интегралов движения для квантовой модели Годена с твистованными граничными условиями (управляющий  $T$ -оператор) и показано, что она удовлетворяет билинейному тождеству и уравнению Хироты для классической иерархии КП.

Полученные результаты составили содержание 10 опубликованных и принятых к печати статей, а также были доложены на многих международных научных конференциях. При участии Лаборатории была организована одна школа конференция и две летних школы. Кроме того были организованы визиты в Лабораторию иностранных уче-

ных, которые провели несколько курсов лекций для студентов и специалистов. Передовые тенденции развития математической физики и теории представлений регулярно обсуждались на постоянно действующем научном семинаре. Важная часть работы лаборатории это работа со студентами и аспирантами. Их занятость в творческом научном процессе работы Лаборатории безусловно позитивно отражается на их научном кругозоре и, уже начиная с начальных курсов, ориентирует их на работу на передовом рубеже современной математики и математической физики. В заключение стоит отметить, что за год работы лаборатория реализовала большинство поставленных задач и безусловно внесла весомый вклад как в научную и образовательную активность НИУ ВШЭ, так и в развитие современной математической мысли.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. M.Bershtein, Foda O. AGT, Burge pairs and minimal models // *Journal of High Energy Physics*. 2014. Vol. 06. No. 177
2. Погребков А. К. Разностное уравнение Хироты: метод обратной задачи рассеяния, преобразование Дарбу и солитоны // Теоретическая и математическая физика. 2014. Т. 181. № 3. С. 538-552.
3. Francisco C. Alcaraz, Pavel Pyatov, Rittenberg V. Stochastic processes with  $Z_N$  symmetry and complex Virasoro representations. The partition functions. // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2014. Vol. 47. No. 46. P. 462001.
4. Arakawa T., Kuwabara T., Fedor M. Localization of Affine W-Algebras // *Communications in Mathematical Physics*, 2014, ISSN 0010-3616, DOI:10.1007/s00220-014-2183-x, published online at <http://dx.doi.org/10.1007>
5. Akhmedova V., Zabrodin A. Dispersionless DKP hierarchy and elliptic Lowner equation // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2014. No. 47
6. Gavrylenko P., Marshakov A. Residue Formulas for Prepotentials, Instanton Expansions and Conformal Blocks // *Journal of High Energy Physics*. 2014. No. 5. P. 97.
7. Zabrodin A., Alexandrov A., Leurent S., Tsuboi Z. The master T-operator for the Gaudin model and KP hierarchy. // *Nuclear Physics B*. 2014. No. 883 . P. 173-223.
8. Gurevich D., Saponov P. A. Generalizations of Poisson Structures Related to Rational Gaudin Mode // *Annales Henri Poincare. Section A: Journal of Theoretical and Mathematical Physics*. 2014. No. DOI 10.1007/s00023-014-0350-4
9. Kruglinskaya O., Marshakov A. On Lie groups and Toda lattices // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2015, принято к печати
10. Akhmedov E., Popov F., Astrakhantsev N. Secularly growing loop corrections in strong electric fields // *Journal of High Energy Physics*. 2014
11. T. Arakawa, A remark on the  $C_2$ -finiteness condition for vertex algebras, to appear in *Math. Z*, *arXiv*:1004.1492;
12. T. Arakawa, W-algebras at the critical level, to appear in *Contemp. Math*.
13. T. Arakawa, D. Chebotarov, F. Malikov, Algebras of twisted chiral differential operators and affine localization of  $\mathfrak{g}$ -modules, to appear in *Sel. Math.*, *arXiv*:0810.4964
14. T. Arakawa, F. Malikov, A chiral Borel-Weil-Bott theorem, posted on *arXiv*:0903.1281
15. A. Beilinson, J. Bernstein. Localisation de  $\mathfrak{g}$ -modules. (French) *C. R. Acad. Sci. Paris Se'r. I Math.* 292 (1981), no. 1, 15–18.
16. A. Beilinson, J. Bernstein. A proof of Jantzen conjectures. I. M. Gelfand Seminar, 1–50, *Adv. Soviet Math.*, 16, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

17. A. Beilinson, V. Drinfeld. Chiral algebras. *American Mathematical Society Colloquium Publications*, 51. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. vi+375 pp. ISBN: 0-8218-3528-9.
18. A. Beilinson, B. Feigin, B. Mazur, Introduction to algebraic field theory on curves, preprint
19. M. Bershadsky, Conformal field theories via Hamiltonian reduction, *Comm. Math. Phys.*, Vol. 139, No. 1, pp. 71–82, 1991.
20. G. Bellamy and T. Kuwabara, On deformation quantizations of hypertoric varieties, preprint, *arXiv:math/1005.4645v2*.
21. J.-L. Brylinski, M.Kashiwara, Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems, *Inv. Math.*, 64, no.3 (1981), 387-410
22. E. Brieskorn, Singular elements of semi-simple algebraic groups, *Actes du Congrès International des Mathématiciens* (Nice, 1970), Tome 2, pp. 279-284, Gauthier-Villars, Paris, 1971
23. C. Dodd, K. Kremnizer, A localization theorem for finite W-algebras, *arXiv:0911.2210*
24. B. Feigin, E. Frenkel, Affine Kac-Moody algebras at the critical level and Gelfand-Dikii algebras, in: Infinite Analysis, eds. A.Tsuchiya, T.Eguchi, M.Jimbo, *Adv. Series in Math. Phys.* 16 197-215, Singapore, World Scientific, 1992
25. W.L. Gan, V. Ginzburg, Quantization of Slodowy slices, *Int.Math.Res.Not.*, no.2, p.243-255 (2004).
26. V. Gorbounov, F. Malikov, V. Schechtman, Gerbes of chiral differential operators. II. Vertex algebroids, *Invent. Math.* 155 (2004), no. 3, 605-680.
27. V. Gorbounov, F. Malikov, V. Schechtman, On chiral differential operators over homogeneous spaces. *Int. J. Math. Math. Sci.* 26 (2001), no.2, 83–106.
28. M. Kapranov, Noncommutative geometry based on commutator expansions, *J. reine angew. Math.* 505 (1998), 73-118
29. M. Kashiwara, R. Rouquier, Microlocalization of rational Cherednik algebras, posted on *arXiv:0705.1245*.
30. P. B. Kronheimer, The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients, *J. Differential Geom.* 29 (1989), 665–683.
31. V. Kac, S. Roan, and M. Wakimoto, Quantum reduction for affine superalgebras, *Comm. Math. Phys.*, Vol. 241, No. 2-3, pp. 307–342, 2003.
32. T. Kuwabara, Representation theory of the rational Cherednik algebras of type  $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$  via microlocal analysis, preprint, *arXiv:1003.3407v2*.
33. I. Losev, Quantized symplectic actions and W-algebras, *J. Amer. Math. Soc.* series 23 (2010), no.1, 35–59.
34. F. Malikov, V. Schechtman, A. Vaintrob, *Comm. in Math. Phys.* 204 (1999), 439-473

35. A. M. Polyakov, Gauge transformations and diffeomorphisms, *Internat. J. Modern Phys. A*, Vol. 5, No. 5, pp. 833–842, 1990.
36. A. Premet, Special transverse slices and their enveloping algebras, *Adv. in Math.* 170 (2002) n.1, pp. 397–424. With an appendix by Serge Scryabin
37. P. Slodowy, Simple singularities and simple algebraic groups, *Lecture Notes in Mathematics*, 815. Springer, Berlin, 1980.
38. Chervov, A., Rybnikov, L., Talalaev, D., Rational Lax operators and their quantization, *arXiv*: hep-th/0404106.
39. Gaudin, M., *La Fonction d'Onde de Bethe*, Masson, Paris, 1983.
40. Gurevich D. Algebraic aspects of the Yang-Baxter equation, *English translation: Leningrad Math. J.* 2 (1991) 801 – 828.
41. Gurevich D., Pyatov P., Saponov P., Representation theory of (modified) Reflection Equation Algebra of the  $GL(m|n)$  type, *St Petersburg Math. J.* 20 (2006) 213–253.
42. Gurevich D., Saponov P., Braided algebras and their applications to Noncommutative Geometry, *Advances in Applied Mathematics* 51 (2013) 228–253.
43. Majid S., *Foundations of quantum group theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
44. Reshetikhin N., Semenov-Tian-Shansky M., Central Extension of Quantum Current Groups, *Letters in Math. Physics* 19 (1990) 133–142.
45. Talalaev, D., Quantum Spectral Curves, English shortened version in “Travaux Mathématiques. Special Issue: *Geometry and Quantization*. Lectures of the school GEOQUANT 2009 at the University of Luxembourg”, Volume XIX, (2011), p. 203–271.
46. F.A. Berezin, G.P. Pokhil, V.M. Finkelberg Schrödinger equation for a system of one-dimensional particles with point interaction. *Vestnik MGU*, No. 1 (1964), 21–28.
47. Calogero-Moser-Sutherland models (Montreal, QC, 1997), 23–35, *CRM Ser. Math. Phys.*, Springer, New York, 2000.
48. O.A. Chalykh, M.V. Feigin and A.P. Veselov, New integrable generalizations of Calogero-Moser quantum problem. *J. Math. Phys.* 39, no. 2, 695–703 (1998).
49. H. Jack, A class of symmetric polynomials with a parameter. *Proc. Roy. Soc. Edin. Sect. A.* 69 (1970), 1–18.
50. M.A.Olshanetsky, A.M.Perelomov, Quantum systems related to root systems and radial parts of Laplace operators. *Funct. Anal. Appl.* 12, 1978, 121–128.
51. A.N. Sergeev, Superanalogs of the Calogero operators and Jack polynomials. *J. Nonlin. Math. Phys.* 8, 2001, no. 1, 59–64.
52. A.N. Sergeev, A.P. Veselov, Deformed quantum Calogero-Moser problems and Lie superalgebras. *Comm. Math. Phys.* 245 (2004), no. 2, 249–278.
53. A.N. Sergeev, A.P. Veselov, Jack-Laurent symmetric functions for special values of parameters. *arXiv*:1401.3802.



54. Aguirre, Leonardo; Felder, Giovanni; Veselov, Alexander P. Gaudin subalgebras and stable rational curves. *Compos. Math.* 147 (2011), no. 5, 1463–1478.
55. Devadoss, Satyan L. Tessellations of moduli spaces and the mosaic operad. *Homotopy invariant algebraic structures* (Baltimore, MD, 1998), 91–114, *Contemp. Math.*, 239, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
56. Davis, M.; Januszkiewicz, T.; Scott, R. Fundamental groups of blow-ups. *Adv. Math.* 177 (2003), no. 1, 115–179.
57. B. Feigin, E. Frenkel, N. Reshetikhin, Gaudin model, Bethe Ansatz and critical level. *Comm. Math. Phys.*, 166 (1994), pp. 27–62.
58. M. Gaudin, Diagonalisation d’une classe d’hamiltoniens de spin, *J. de Physique*, t.37, N 10, p. 1087–1098, 1976.
59. M. Gaudin, *La fonction d’onde de Bethe*. (French) [The Bethe wave function] Collection du Commissariat a’ l’Energie Atomique: Se’rie Scientifique. [Collection of the Atomic Energy Commission: Science Series] Masson, Paris, 1983. xvi+331 pp.
60. Henriques, André; Kamnitzer, Joel. Crystals and coboundary categories. *Duke Math. J.* 132 (2006), no. 2, 191–216.
61. Henriques, André; Kamnitzer, Joel. The octahedron recurrence and  $\mathfrak{gl}_n$  crystals. *Adv. Math.* 206 (2006), no. 1, 211–249
62. Kamnitzer, Joel; Tingley, Peter. The crystal commutor and Drinfeld’s unitarized  $R$ -matrix. *J. Algebraic Combin.* 29 (2009), no. 3, 315–335.
63. E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, *Schubert calculus and representation of the general linear group*, *arXiv:0711.4079*
64. Saifullin, Azad. Bachelor thesis at HSE, Moscow, 2013.
65. Varchenko, A. N. Asymptotic solutions to the Knizhnik-Zamolodchikov equation and crystal base. *Comm. Math. Phys.* 171 (1995), no. 1, 99–137.
66. L F Alday, D Gaiotto and Y Tachikawa, Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories, *Lett Math Phys* 91.2 (2010) 167–197. *arXiv:0906.3219*
67. A A Belavin, A M Polyakov and A B Zamolodchikov, Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, *Nucl Phys* B 241.2 (1984) 333–380.
68. N A Nekrasov, Seiberg-Witten prepotential from instanton counting, *Adv Theor and Math Phys* 7 (2004) 831–864. *hep-th/0206161*
69. A Mironov, A Morozov and Sh Shakirov, A direct proof of AGT conjecture at  $\beta = 1$ , *JHEP* 2011.2 (2011) 1–41. *arXiv:1012.3137*
70. V A Alba, V A Fateev, A V Litvinov and G M Tarnopolskiy, On combinatorial expansion of the conformal blocks arising from AGT conjecture, *Lett Math Phys* 98 (2011) 33–64 *arXiv:1012.1312*
71. R Santachiara, *private communication*.

72. Al B Zamolodchikov, Conformal symmetry in two dimensions: An explicit recurrence formula for the conformal partial wave amplitude, *Comm Math Phys* 96.3 (1984) 419-422.
73. R Santachiara and A Tanzini, Moore-Read fractional quantum Hall wave functions and  $SU(2)$  quiver gauge theories, *Phys Rev D* 82.12 (2010) 126006. *arXiv:1002.5017*
74. W H Burge, Restricted partition pairs, *J of Comb Th A* 63.2 (1993) 210–222.
75. O Foda, K S M Lee and T A Welsh, A Burge tree of Virasoro-type polynomial identities, *Int J Mod Phys A* 13.29 4967–5012. *arXiv:q-alg/9710025*
76. B Feigin, E Feigin, M Jimbo, T Miwa and E Mukhin, Quantum continuous  $\mathfrak{gl}_\infty$ : Tensor products of Fock modules and  $\mathcal{W}_n$ -characters, *Kyoto J of Math* 51.2 (2011) 365–392. *arXiv:1002.3100*
77. Alcaraz F C, Ram A and Rittenberg V 2014 *J. Phys. A* 47 212003
78. Levy D 1991 *Phys. Rev. Lett.* 67 1971
79. Martin P P and Saleur H 1993 *Comm. Math. Phys.* 158 155; 1994 *Lett. Math. Phys.* 30 189
80. Graham J J and Lehrer G I 1998 *L'Enseignement Math.* 44 173; 2002 *Compositio Math.* 133 173; 2003 *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 36 479
81. Morin-Duchesne A and Saint-Aubin Y 2013 *J. Phys. A* 46 285207
82. Martin P 1990 *Potts models and related problems in statistical mechanics* World Scientific
83. Alcaraz F C, Barber M N and Batchelor M T 1989 *Ann. Phys.* 182 280
84. Alcaraz F C and Rittenberg V 2013 *J. Stat. Mech.* P09010
85. Saleur H and Sornette D 1996 *J. Phys. I* 6 327
86. J. Baik, P. Deift, and K. Johansson, On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations, *Journal of the American Mathematical Society*, 12, no. 4, 1119– 1178, (1999). *arXiv:math/9810105*.
87. A. M. Borodin, The law of large numbers and the central limit theorem for the jordan normal form of large triangular matrices over a finite field, *Journal of Mathematical Sciences* (New York), 1999, 96:5, 3455–3471
88. A. Borodin, I. Corwin, Macdonald processes, *Probability Theory and Related Fields*, 158, no. 1-2 (2014), 225–400, *arXiv:1111.4408*.
89. A. Borodin, I. Corwin, V. Gorin, S. Shakirov, Observables of Macdonald processes, to appear in *Transactions of American Mathematical Society*, *arxiv:1306.0659*.
90. A. Borodin, A. Okounkov and G. Olshanski, Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups, *Journal of American Mathematical Society*, 13 (2000) 491–515. *arXiv:math/9905032*.
91. A. Bufetov, L. Petrov, Law of Large Numbers for Infinite Random Matrices over a Finite Field, *arXiv:1402.1772*.

92. J. Fulman, Random matrix theory over finite fields, *Bulletin of American Mathematical Society* 39 (2002), 51–85.
93. V. Gorin, S. Kerov, A. Vershik, Finite traces and representations of the group of infinite matrices over a finite field, *Advances in Mathematics*, 254 (2014), 331–395. arXiv:1209.4945.
94. V. Ivanov, G. Olshanski, Kerov’s central limit theorem for the Plancherel measure on Young diagrams, In: S.Fomin, editor. *Symmetric Functions 2001: Surveys of Developments and Perspectives* (NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry. Vol.74), Kluwer, 2002, 93–151, arXiv:math/0304010
95. K. Johansson, Discrete orthogonal polynomial ensembles and the Plancherel measure, *Annals of Mathematics* (2) 153 (2001), no. 2, 259–296. arXiv:math/9906120.
96. S. Kerov, Gaussian limit for the Plancherel measure of the symmetric group, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Serie I* 316 (1993), 303–308
97. S. Kerov: *Asymptotic Representation Theory of the Symmetric Group and its Applications in Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
98. S. Kerov, A. Okounkov, G. Olshanski, The boundary of Young graph with Jack edge multiplicities, *International Mathematics Research Notices*, no. 4 (1998), 173–199. arXiv:q-alg/9703037
99. J. F. C. Kingman, Random partitions in population genetics, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 361 (1978), 1–20.
100. A. A. Kirillov, Variations on the triangular theme, *Dynkin Seminar on Lie Groups*, *Advances in Mathematical Sciences*, Series 2, 169 (1995), AMS.
101. I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Second Edition. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995
102. A. Okounkov, On the representations of the infinite symmetric group, *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, 240 (1997), 167–230, arXiv:math/9803037.
103. A. Okounkov, Random Matrices and Random Permutations, *International Mathematics Research Notices* (2000) 2000 (20), arXiv:math/9903176
104. E. Thoma: Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe, *Mathematische Zeitschrift*, 85 (1964), 40–61.
105. A. M. Vershik, The problem of describing central measures on the path spaces of graded graphs, arXiv:1408.3291
106. A. M. Vershik, S. V. Kerov, Asymptotic character theory of the symmetric group, *Functional Analysis and its Applications*, 15 (1981), 246–255.
107. A. M. Vershik, S. V. Kerov, The characters of the infinite symmetric group and probability properties of the Robinson–Schensted–Knuth algorithm, *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 7, no. 1 (1986), 116–124.
108. D. Gaiotto, *JHEP* 1208 (2012) 034 [arXiv:0904.2715 [hep-th]].
109. N. Seiberg and E. Witten, *Nucl. Phys. B* 426, 19 (1994) [arXiv:hep-th/9407087].

110. A. S. Losev, A. Marshakov and N. Nekrasov, in Ian Kogan memorial volume *From fields to strings: circumnavigating theoretical physics*, 581-621; [[hep-th/0302191](#)].
111. N. Nekrasov and A. Okounkov, [[hep-th/0306238](#)].
112. A. Braverman, Instanton counting via affine Lie algebras I: Equivariant J-functions of (affine) flag manifolds and Whittaker vectors, [[arXiv:math/0401409](#)] [[math.AG](#)];  
A. Braverman and P. Etingof, Instanton counting via affine Lie algebras II: from Whittaker vectors to the Seiberg-Witten prepotential, [[arXiv:math/0409441](#)] [[math.AG](#)].
113. L. F. Alday, D. Gaiotto and Y. Tachikawa, *Lett. Math. Phys.* 91 (2010) 167 [[arXiv:0906.3219](#)] [[hep-th](#)].
114. A. Marshakov, *JHEP* 1307 (2013) 068, [[arXiv:1303.0753](#)] [[hep-th](#)].
115. I. Krichever, *Commun. Pure. Appl. Math.* 47 (1992) 437 [[arXiv: hep-th/9205110](#)].
116. A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov and A. Morozov, *Phys. Lett. B* 355, 466 (1995) [[arXiv:hep-th/9505035](#)].
117. A. S. Losev, N. Nekrasov and S. Shatashvili, *Nucl. Phys.* B534 (1998) 549 [[arXiv:hep-th/9711108](#)].
118. A. Gorsky, A. Marshakov, A. Mironov and A. Morozov, *Nucl. Phys.* B527 (1998) 690-716 [[arXiv:hep-th/9802007](#)].
119. A. Marshakov and N. Nekrasov, *JHEP* 0701 (2007) 104 [[arXiv: hep-th/0612019](#)]; A. Marshakov, *Theor. Math. Phys.* 154 (2008) 362 [[arXiv:0706.2857](#)] [[hep-th](#)].
120. N. Nekrasov, *Adv. Theor. Math. Phys.* 7 (2004) 831 [[arXiv:hep-th/0206161](#)].
121. N. Nekrasov and V. Pestun, [[arXiv:1211.2240](#)] [[hep-th](#)].
122. L. Hollands, C. Keller and J. Song, *JHEP* 1110 (2011) 100 [[arXiv:1107.0973](#)] [[hep-th](#)].
123. Al. Zamolodchikov, *Nucl. Phys* B285 [FS19] (1987) 481-503.
124. Al. Zamolodchikov, *Comm.Math.Phys.* 96 (1984) 419; *JETP* 63 (1986) 1061; *Theor. Math. Phys.* 73 (1987) 1088.
125. T. Grimm, A. Klemm, M. Marino and M. Weiss, *JHEP* 0708 (2007) 058 [[arXiv:hep-th/0702187](#)].
126. A. Marshakov, A. Mironov and A. Morozov, *JHEP* 0911 (2009) 048 [[arXiv:0909.3338](#)] [[hep-th](#)].
127. R. Poghossian, *JHEP* 0912 (2009) 038 [[arXiv:0909.3412](#)] [[hep-th](#)].
128. T. Eguchi and K. Maruyoshi, *JHEP* 1002 (2010) 022 [[arXiv:0911.4797](#)] [[hep-th](#)].
129. E. Witten, *Nucl. Phys.* B340 (1990) 281;
- R. Dijkgraaf, E. Verlinde and H. Verlinde, *Nucl. Phys.* B352 (1991) 59.
130. B. Dubrovin, *Lecture Notes in Math.* 1620, Springer, Berlin, 1996, 120-348, [[arXiv:hep-th/9407018](#)].

131. A. Marshakov, A. Mironov and A. Morozov, *Phys. Lett. B* 389 (1996) 43 [hep-th/9607109].
132. L. Chekhov, A. Marshakov, A. Mironov and D. Vasiliev, *Phys. Lett. B* 562 (2003) 323 [hep-th/0301071].
133. A. Marshakov and A. Mironov, *Nucl. Phys. B* 518 (1998) 59 [hep-th/9711156].
134. M. Matone, *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997) 1412-1415 [arXiv:9610204[hep-th]].
135. A. Litvinov, S. Lukyanov, N. Nekrasov, A. Zamolodchikov, [arXiv:1309.4700 [hep-th]]
136. E. D'Hoker, I. Krichever and D. H. Phong, *Nucl. Phys. B* 489 (1997) 179 [hep-th/9609041].
137. A. Marshakov, "Associativity equations in effective SUSY quantum field theories," [arXiv:hep-th/0108023]; *Theor. Math. Phys.* 132 (2002) 895 [arXiv:hep-th/0201267].
138. M. Sato, T. Miwa and M. Jimbo, Holonomic quantum fields I - V, *Publ. RIMS* 14 (1978) 223-267; 15 (1979) 201-278; 15 (1979) 577-629; 15 (1979) 871-972; 16 (1980) 531-584.
139. O. Gamayun, N. Iorgov and O. Lisovyy, *JHEP* 1210 (2012) 38 [hep-th/1207.0787].
140. A. Kitaev and D. Korotkin, *IMRN* 9817 (1998) 877-905 [math-ph/9810007].
141. A. Belavin, M. Bershtein, B. Feigin, A. Litvinov and G. Tarnopolsky, *Comm. Math. Phys.* 319 (2013) 269 [arXiv:1111.2803 [hep-th]].
142. J. Fay, Theta-functions on Riemann surfaces, *Lect. Notes Math.* 352, Springer, N.Y. 1973.
143. D. Mumford, *Tata Lectures on Theta*, 1988.
144. V. Knizhnik, *UFN* 159 (1989) 401;
- D. Lebedev and A. Morozov, *Nucl. Phys. B* 302 (1988) 163.
145. A. Alexandrov, S. Leurent, Z. Tsuboi and A. Zabrodin, The master  $T$ -operator for the Gaudin model and the KP hierarchy [arXiv:1306.1111].
146. A. Alexandrov, V. Kazakov, S. Leurent, Z. Tsuboi and A. Zabrodin, Classical tau-function for quantum spin chains, *JHEP* 1309 (2013) 064 [arXiv:1112.3310].
147. A. Zabrodin, The master  $T$ -operator for vertex models with trigonometric  $R$ -matrices as classical tau-function, *Teor. Mat. Fys.* 171:1 (2013) 59-76 (*Theor. Math. Phys.* 174 (2013) 52-67) [arXiv:1205.4152];
- A. Zabrodin, Hirota equation and Bethe ansatz in integrable models, *Suuri-kagaku Journal (in Japanese)*, Number 596 (2013) 7-12 [arXiv:1211.4428].
148. V. Kazakov, S. Leurent and Z. Tsuboi, Baxter's  $Q$ -operators and operatorial Bäcklund flow for quantum (super)-spin chains, *Commun. Math. Phys.* 311 (2012) 787-814 [arXiv:1010.4022].

149. H. Airault, H. P. McKean, and J. Moser, Rational and elliptic solutions of the Korteweg-De Vries equation and a related many-body problem, *Commun. Pure Appl. Math.*, 30 (1977) 95-148.
150. I.M. Krichever, Rational solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation and integrable systems of  $N$  particles on a line, *Funct. Anal. Appl.* 12:1 (1978) 59-61;  
I.M. Krichever, Rational solutions of the Zakharov-Shabat equations and completely integrable systems of  $N$  particles on a line, *J. Sov. Math.*, 21:3 (1983) 335-345.
151. T. Shiota, Calogero-Moser hierarchy and KP hierarchy, *J. Math. Phys.* 35 (1994) 5844-5849.
152. M. Gaudin, Diagonalisation d'une classe d'hamiltoniens de spin, *J. de Phys.* 37 (1976), no. 10 1087-1098.
153. F. Calogero, Solution of the one-dimensional  $N$ -body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials, *J. Math. Phys.* 12 (1971) 419-436;  
J. Moser, Three integrable hamiltonian systems connected with isospectrum deformations, *Adv. Math.* 16 (1976) 354-370.
154. E. Mukhin, V. Tarasov and A. Varchenko, Gaudin Hamiltonians generate the Bethe algebra of a tensor power of vector representation of  $gl_N$ , *St. Petersburg Math. J.* 22 (2011) 463-472 [[arXiv:0904.2131](#)];  
E. Mukhin, V. Tarasov and A. Varchenko, KZ characteristic variety as the zero set of classical Calogero-Moser Hamiltonians, *SIGMA* 8 (2012) 072 (11 pages) [[arXiv:1201.3990](#)].
155. N. Nekrasov, A. Rosly and S. Shatashvili, Darboux coordinates, Yang-Yang functional, and gauge theory, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 216 (2011) 69-93 [[arXiv:1103.3919](#)].
156. D. Gaiotto and P. Koroteev, On three dimensional quiver gauge theories and integrability, *JHEP* 05 (2013) 126 [[arXiv:1304.0779](#)].
157. M. Sato and Y. Sato, Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifold, *Lect. Notes in Num. Appl. Anal.* 5 (1982) 259-271.
158. E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, Transformation groups for soliton equations, in "Nonlinear integrable systems – classical and quantum", eds. M. Jimbo and T. Miwa, World Scientific, pp. 39-120 (1983);  
M. Jimbo and T. Miwa, Solitons and infinite dimensional Lie algebras, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* 19 (1983) 943-1001.
159. I. Krichever, O. Lipan, P. Wiegmann and A. Zabrodin, Quantum Integrable Models and Discrete Classical Hirota Equations, *Commun. Math. Phys.* 188 (1997) 267-304 [[arXiv:hep-th/9604080](#)].
160. A. Zabrodin, Discrete Hirota's equation in quantum integrable models, *Int. J. Mod. Phys.* B11 (1997) 3125-3158;  
A. Zabrodin, Hirota equation and Bethe ansatz, *Teor. Mat. Fyz.*, 116 (1998) 54-100

(English translation: *Theor. Math. Phys.* 116 (1998) 782-819).

161. V. Kazakov, A. S. Sorin and A. Zabrodin, Supersymmetric Bethe ansatz and Baxter equations from discrete Hirota dynamics, *Nucl. Phys. B* 790 (2008) 345-413 [[arXiv:hep-th/0703147](#)];

A. Zabrodin, Bäcklund transformations for difference Hirota equation and supersymmetric Bethe ansatz, *Teor. Mat. Fyz.* 155 (2008) 74-93 (English translation: *Theor. Math. Phys.* 155 (2008) 567-584) [[arXiv:0705.4006](#)].

162. K. Takasaki and T. Takebe, Integrable hierarchies and dispersionless limit, *Rev. Math. Phys.* 7 (1995) 743-808;

K. Takasaki and T. Takebe,  $\hbar$ -Dependent KP hierarchy, *Theor. Math. Phys.* 171 (2012) 683-690 [[arXiv:1105.0794](#)].

163. B. Feigin, E. Frenkel and N. Reshetikhin, Gaudin model, Bethe Ansatz and critical level, *Commun. Math. Phys.* 166 (1994) 27-62.

164. B. Enriquez and V. Rubtsov, Hitchin systems, higher Gaudin operators and  $R$ -matrices, *Math. Res. Lett.* 3 (1996) 343-357.

165. D. Talalaev, Quantization of the Gaudin system, *Funct. Anal. Appl.* 40(1) (2006) 86-91.

166. V. Kazakov and P. Vieira, From characters to quantum (super)spin chains via fusion, *JHEP* 0810 (2008) 050 [[arXiv:0711.2470](#) [hep-th]].

167. I. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, 2nd ed., Oxford University Press, 1995.

168. A. Orlov and T. Shiota, Schur function expansion for normal matrix model and associated discrete matrix models, *Phys. Lett.* A343 (2005) 384-396.

169. V. Enolski and J. Harnad, Schur function expansions of KP tau functions associated to algebraic curves, *Uspekhi Mat. Nauk* 66:4 (2011) 137-178 (Russian Math. Surveys 66:4 (2011) 767-807) [[arXiv:1012.3152](#)].

170. K. Sawada and T. Kotera, Integrability and a solution for the one-dimensional  $N$ -particle system with inversely quadratic pair potential, *J. Phys. Soc. Japan*, 39 (1975) 1614-1618.

171. S. Wojciechowski, New completely integrable Hamiltonian systems of  $N$  particles on the real line, *Phys. Lett.* 59A (1976) 84-86.

172. M. Olshanetsky and A. Perelomov, Classical integrable finite dimensional systems related to Lie algebras, *Phys. Repts.* 71 (1981) 313-400.

173. M. Jimbo and T. Miwa, Soliton equations and infinite dimensional Lie algebras, *Publ. RIMS, Kyoto University* 19 (1983) 943-1001.

174. R. Hirota and Y. Ohta, Hierarchies of coupled soliton equations I, *J. Phys. Soc. Japan* 60 (1991) 798-809.

175. M. Adler, E. Horozov and P. van Moerbeke, The Pfaff lattice and skew-orthogonal polynomials, *Int. Math. Res. Notices* 1999 (1999), no 11, 569-588.

176. M. Adler, T. Shiota and P. van Moerbeke, Pfaff  $\tau$ -functions, *Math. Ann.* 322 (2002) 423-476.
177. A. Orlov, Deformed Ginibre ensembles and integrable systems, *Phys. Lett. A* 378 (2014) 319-328.
178. K. Takasaki, Differential Fay identities and auxiliary linear problem of integrable hierarchies, *Advanced Studies in Pure Mathematics* 61 (2011) 387-441.
179. K. Takasaki, Auxiliary linear problem, difference Fay identities and dispersionless limit of Pfaff-Toda hierarchy, *SIGMA* 5 (2009) 109.
180. I. Krichever, The method of averaging for two dimensional integrable equations, *Funct. Anal. Appl.* 22 (1989) 200-213.
181. I. Krichever, A. Marshakov and A. Zabrodin, *Integrable Structure of the Dirichlet Boundary Problem in Multiply-Connected Domains*, *Commun. Math. Phys.* 259 (2005) 1-44.
182. C. Pommerenke, Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.
183. G. Goluzin, On parametric representation of functions univalent in an annulus, *Matem. Sbornik* 29 (1951) 469-476 (in Russian).
184. Y. Komatu, Untersuchungen über konforme Abbildung von zweifach zusammenhängenden Gebieten, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* 25 (1943) 1-42 (Avaliable via Journal@rchive, <http://www.journalarchive.jst.go.jp>).
185. I. A. Александров, Параметрические продолжения в теории однолистных функций, “Наука Москва, 1976.
186. J. Gibbons and S. Tsarev, Reductions of the Benney equations, *Phys. Lett. A*211 (1996) 19-24.
187. J. Gibbons and S. Tsarev, Conformal maps and reductions of the Benney equations, *Phys. Lett. A*258 (1999) 263-271.
188. M. Mañas,  $S$ -functions, reductions and hodograph solutions of the  $r$ th dispersionless modified KP and Dym hierarchies, *J. Phys. A: Math. Gen.* 37 (2004) 11191-11221.
189. T. Takebe, L.-P. Teo and A. Zabrodin, Löwner equation and dispersionless hierarchies, *J. Phys. A: Math. Gen.* 39 (2006) 11479-11501.
190. T. Takebe, Dispersionless BKP hierarchy and quadrant Löwner equation, *SIGMA* 10 (2014) 023 (13 pp.).
191. Yu. Manin, Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of  $\mathbb{P}^2$ , *Am. Math. Soc. Transl.* 186 (2) (1998) 131-151.
192. K. Takasaki, Painlevé-Calogero correspondence revisited, *J. Math. Phys.* 42 (2001) 1443-1473.
193. A. Zabrodin and A. Zotov, Quantum Painlevé-Calogero correspondence for Painleve VI, *J. Math. Phys.* 53 (2012) 073508.



194. R. Hirota, “Nonlinear partial difference equations II; Discrete time Toda equations” *Journ. Phys. Soc. Japan* 43 2074–2078 (1977)
195. R. Hirota, “Discrete analogue of a generalized Toda equation” *Journ. Phys. Soc. Japan* 50 3785–3791 (1981)
196. T. Miwa, “On Hirota’s difference equation” *Proc. Japan. Acad.* 58 A 9–12 (1982)
197. А. В. Забродин, “Разностные уравнения Хироты,” *ТМФ*, 113 179–230 (1997)
198. А. В. Забродин, “Преобразования Беклунда для разностного уравнения Хироты и суперсимметричный анзац Бете,” *ТМФ* 155 74–93 (2008)
199. I. Krichever, P. Wiegmann, A. Zabrodin “Elliptic solutions to difference nonlinear equations and related many-body problems”, *Commun. Math. Phys.*, 193 (2) 373–396 (1998)
200. S. Saito “Octahedral structure of the Hirota–Miwa equation”, *Journ. Nonlinear Math. Phys.* 10 1250032 (12 pages) (2012)
201. L. V. Bogdanov, B. G. Konopelchenko, “Generalized KP hierarchy: Möbius symmetry, symmetry constraints and Calogero–Moser system”, *Physica D* 152–153 85–96 (2001)
202. А. К. Погребков, “Коммутаторные тождества на ассоциативных алгебрах и интегрируемость нелинейных эволюционных уравнений”, *ТМФ*, 154 477–491 (2008)
203. А. К. Pogrebkov, “2D Toda chain and associated commutator identity”, in *Geometry, Topology, and Mathematical Physics. S. P. Novikov’s Seminar: 2006–2007*, Eds. V. M. Buchstaber, I. M. Krichever, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 224 pp. 261–270, AMS, Providence, RI (2008)
204. А. К. Pogrebkov, “Hirota difference equation and commutator identity on an associative algebra”, *Алгебра и анализ* 22 191–205 (2010).
205. M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, and M. C. Polivanov, *Theor. Math. Phys.* 93 1200 (1992).
206. M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov and B. Prinari, *Journ. Math. Phys.* 44 3309 (2003)
207. M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, *Theoret. and Math. Phys.* 172 1037–1051 (2012)
208. B. Grammaticos, A. Ramani, V. Papageorgiou, J. Satsuma and R. Willox, “Constructing lump-like solutions of the Hirota–Miwa equation”, *Journ. Math. Phys.* 40 12619–12627 (2007)