

Правительство Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
(НИУ ВШЭ)

УДК 512.74, 512.81, 514.84, 515.14, 530.145, 539.12
Рег. № НИОКТР АААА-А20-120070390117-1
Рег. № ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ
Проректор НИУ ВШЭ
канд. экон. наук
_____ М.М. Юдкевич
« ___ » _____ 2020 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И ВЕРТЕКСНЫХ АЛГЕБР И
ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ ПРОСТРАНСТВ МОДУЛЕЙ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К
КОМБИНАТОРИКЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ
(заключительный)

Руководители НИР:
зав. международной лабораторией теории
представлений и математической физики
ВШЭ-Сколтех, д-р физ.-мат. наук

_____ Б.Л. Фейгин

науч. руководитель международной
лаборатории теории представлений и
математической физики ВШЭ-Сколтех,
канд. физ.-мат. наук

_____ А.Ю. Окуньков

Москва 2020

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководители НИР:

научный руководитель,	_____	А.Ю. Окуньков (раздел 2)
канд. физ.-мат. наук	подпись, дата	
заведующий лабораторией, д-р	_____	Б.Л. Фейгин (введение,
физ.-мат. наук	подпись, дата	раздел 2)

Исполнители:

старший научный сотрудник,	_____	В.В. Лосяков (раздел 1)
канд. физ.-мат. наук	подпись, дата	
старший научный сотрудник,	_____	Л.Г. Рыбников (раздел 3)
канд. физ.-мат. наук	подпись, дата	
старший научный сотрудник	_____	Т. Такаси (раздел 3)
PhD	подпись, дата	
старший научный сотрудник,	_____	А.С. Хорошкин (раздел 2)
канд. физ.-мат. наук	подпись, дата	
научный сотрудник, канд. физ.-	_____	М.А. Берштейн (раздел 1)
мат. наук	подпись, дата	
научный сотрудник, канд. матем.	_____	П. Гавриленко (раздел 1)
наук	подпись, дата	
научный сотрудник, канд. матем.	_____	А. Ляшик (раздел 3)
наук	подпись, дата	
научный сотрудник, канд. матем.	_____	А.И. Ильин (раздел 3)
наук	подпись, дата	
стажер-исследователь	_____	Е.О. Богданова (раздел 2)
	подпись, дата	
стажер-исследователь	_____	И.С. Думанский (раздел 3)
	подпись, дата	
стажер-исследователь	_____	В.Д. Иванов (раздел 2)
	подпись, дата	
стажер-исследователь	_____	И.А. Карпов (раздел 3)
	подпись, дата	

стажер-исследователь	_____	И.А. Машанова-Голикова (раздел 3)
	подпись, дата	
стажер-исследователь	_____	Н.А. Сафонкин (раздел 1)
	подпись, дата	
стажер-исследователь	_____	А.К. Стоян (раздел 1)
	подпись, дата	
стажер-исследователь	_____	А.Д. Труфанов (раздел 1)
	подпись, дата	
Нормоконтроль	_____	А.Д. Вальковский
	подпись, дата	

РЕФЕРАТ

Отчет 116 страниц, 1 книга, 4 иллюстрации, 174 источника.

АЛГЕБРА ВИРАСОРО, W -АЛГЕБРЫ, КОНФОРМНЫЙ БЛОК, ИНСТАНТОННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ, ВЕРТЕКСНЫЕ АЛГЕБРЫ, АФФИННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ, УРАВНЕНИЕ КНИЖНИКА-ЗАМОЛОДЧИКОВА, ФУНКЦИЯ НЕКРАСОВА, УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ, МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ, АНЗАЦ БЕТЕ, ЯНГИАНЫ, ПОДАЛГЕБРЫ БЕТЕ, КВАНТОВЫЕ ГРУППЫ, КРИСТАЛЛЫ КАШИВАРЫ

Цели работы: развитие общего подхода к разнообразным вопросам, находящимся на стыке теории поля, квантовых интегрируемых систем с алгебраической геометрией, теорией представлений квантовых групп и бесконечномерных алгебр Ли и комбинаторикой.

Задачи: развитие новых направлений математики с опорой на идеи, возникающие в современной фундаментальной физике; вовлечение сотрудников и студентов НИУ ВШЭ в научную деятельность лаборатории, содействие их контактам с зарубежными исследователями.

Объекты научного исследования: интегрируемые модели квантовой механики и теории стохастических процессов; геометрическая теория представлений, вертексные алгебры, W -алгебры, конформные блоки, обобщенные янгианы, квантовые группы и тороидальные алгебры; кристаллы Кашивары и другие комбинаторные объекты.

Методы исследований: алгебраический и теоретико-представленческий анализ классических и квантовых теорий поля, статистической физики и случайных процессов, развитие методов теории представлений и вертексных алгебр в геометрии и топологии пространств модулей с приложениями к комбинаторике и математической физике.

Полученные результаты: Представления W -алгебр: продолжено построение теории представлений q - W -алгебр и их обобщений с приложениями к геометрии пространств модулей пучков на алгебраических поверхностях. Построено и исследовано функториальное сопоставление вертексных алгебр 4-мерным многообразиям. Анзац Бете и комбинаторика: Доказана гипотеза Этингофа, описывающая монодромии решений анзаца Бете в магнитных цепочках. Получены комбинаторные приложения этих результатов. Основные результаты получены в результате оригинальных исследований сотрудников лаборатории, в том числе совместных с зарубежными учеными. Отдельные результаты получены привлеченными внешними специалистами.

Организационные результаты: подготовка к публикации статей, содержащих результаты научной деятельности лаборатории; организация и проведение международных конференций, школ и научных семинаров, в том числе в дистанционном режиме.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
1 Представления W -алгебр и связанные с ними задачи пересчетной геометрии и интегрируемых системы	9
1.1 Соотношения раздутия на C^2/Z_2 из соотношений раздутия Накаджимы-Ёшиоки.....	9
1.1.1 Введение.....	9
1.1.2 Статсуммы Некрасова и соотношения раздутия Накаджимы-Ёшиоки.....	13
1.1.3 Соотношения раздутия на C^2/Z_2 из соотношений раздутия на C^2	17
1.2 Полуконечные гармонические функции на графе Гнедина-Кингмана	20
1.2.1 Введение.....	20
1.2.2 Полуконечные гармонические функции: классификация и явное описание.....	23
1.3 Иррегулярные конформные блоки, Пенлеве III и соотношения раздутия	27
1.3.1 Введение.....	27
1.3.2 Решение Пенлеве III и тау функции.....	29
1.3.3 Зануление тау функции.....	30
1.3.4 Конформный блок как функционал действия.....	31
1.3.5 Конформные блоки в бесконечности.....	33
1.4 Квантовое Пенлеве III ₃ в бесконечности и произвольный центральный заряд	35
1.4.1 q -Пенлеве III ₃ и предел $q \rightarrow 1$	35
1.4.2 Соотношения раздутия типа C^2/Z_2 и общие иррегулярные блоки в Бесконечности.....	38
1.4.3 Соотношения типа Накаджимы-Ёшиоки в бесконечности.....	41
1.5 Уравнения тетраэдра и кластерные алгебры.....	42
1.6 Твистованные W алгебры.....	45
1.7 Коэффициенты общего конформного блока в бесконечности.....	48
1.8 Киральные дифференциальные операторы как квантование голоморфной α -модели.....	51
1.9 Соотношения открытой топологической рекурсии в роде 1 и интегрируемые системы.....	52
1.10 Модель IRF типа Форрестера-Бакстера.....	53

2	4-мерные многообразия.....	54
2.1	Введение.....	54
2.2	Трансгрессия и QFT-значные топологические инварианты.....	56
2.3	Полезные инструменты.....	58
2.4	Киральные корреляторы и 4-мерные многообразия.....	61
3	Анзац Бете в магнитных цепочках и комбинаторика.....	63
3.1	Модель Годена и кристаллы Кашивары.....	63
3.2	Квантовая модель Годена и классическая система Калоджеро-Мозера.....	63
3.3	Новая многочастичная система с эллиптическим взаимодействием.....	64
3.4	1+1 теория поля Калоджеро-Мозера-Сазерленда и уравнения Ландау-Лифшица.....	64
3.4.1	Рациональный случай.....	65
3.4.2	Тригонометрический случай.....	77
3.4.3	Эллиптический случай.....	90
3.4.4	Взаимосвязь между 1+1 системой Калоджеро-Мозера и уравнением Ландау-Лифшица.....	93
3.5	Многообразия Шуберта в грассманиане Бейлинсона-Дринфельда и глобальные модули Демазюра.....	102
3.6	Представления супер-янг-янгманов.....	103
3.7	Модели обмена.....	103
3.8	Комбинаторика графов и калибровочные преобразования.....	103
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	105
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	107

ВВЕДЕНИЕ

За отчетный период (2020 год) Международная лаборатория теории представлений и математической физики ВШЭ – Сколтех организовала 2-ю весенняя студенческая школу по математике и физике (ONLINE) 30 апреля – 8 мая, крэш-курс Ивана Лосева (Yale University) “Колчаные многообразия” (ONLINE) 5-13 мая, и школу-конференцию "Vertex Algebras and Tensor Categories"(ONLINE) 23-27 ноября, в рамках которой прочитали миникурсы такие всемирно известные специалисты по конформной теории поля и теории представлений как Thomas Creutzig (University of Alberta, Canada), Andrew R. Linshaw (University of Denver, USA), Du Pei (Harvard University, USA), Victor Ostrik (University of Oregon, USA). По результатам исследований в 2019 году сотрудниками лаборатории было опубликовано 16 работ в журналах, индексируемых WoS/Scopus, все в журналах квартилей Q1/Q2.

В течение 2020 года сотрудники лаборатории защитили 4 диссертации на соискание степени кандидата математических наук НИУ ВШЭ:

- Алексей Ильин, тема диссертации: “Вырождение подалгебр Бете в янгианах”,
- Мария Матушко, тема диссертации: “Пределы интегрируемых систем типа Калоджеро-Сазерленда”,
- Антон Щечкин, тема диссертации: “Уравнения Пенлеве и теория представлений”,
- Андрей Ляшик, тема диссертации: “О векторах Бете $\mathfrak{gl}(2|1)$ -инвариантных интегрируемых моделей”,

Кроме того, стажер-исследователь лаборатории Екатерина Богданова стала лауреатом стипендии Арнольда.

Сотрудники лаборатории продолжали вести активную педагогическую работу, ими были прочитаны курсы на факультете математики НИУ ВШЭ, в Независимом Московском Университете, на школах для студентов, аспирантов и молодых ученых, проводимых как лабораторией, так и крупными международными научными и учебными центрами. Часть курсов была прочитана впервые. Мария Матушко была выбрана лучшим преподавателем НИУ ВШЭм в 2020 году по итогам студенческого голосования.

На протяжении года шел еженедельный рабочий Семинар по математической физике НИУ ВШЭ и Центра перспективных исследований Сколтеха, среди докладчиков – сотрудники Лаборатории и факультета, ассоциированные члены научного коллектива Лаборатории, ученые из российских и мировых научных центров. Также продолжали свою работу студенческие семинары “Теория представлений”, и "W-algebras and related topics" где выступали стажеры лаборатории и студенты факультета математики.

Сотрудниками лаборатории были получены значительные результаты по основным темам, заявленным на 2020 год:

1. Представления W -алгебр,
2. 4-мерные многообразия,
3. Анзац Бете и комбинаторика.

Результаты работ по этим темам составляют содержание настоящего отчета.

1. Представления W -алгебр и связанные с ними задачи пересчетной геометрии и интегрируемых систем

1.1 Соотношения раздутия на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ из соотношений раздутия Накаджимы-Ёшиоки

1.1.1 Введение

Предпосылки и основные результаты. Эта статья мотивирована исследованиями так называемого соответствия между уравнениями Пенлеве и калибровочными теориями (или, что то же самое, соответствия между изомонодромными деформациями и конформной теорией поля)¹, начатыми в работе [16], где тау-функция уравнения Пенлеве VI была записана в виде ряда Фурье от $SU(2)$ статсуммы Некрасова для инстантонов на \mathbb{C}^2 с четырьмя материями и соотношением $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$ на параметры Ω -бэкграунда,

$$\tau(a, s|z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s^n \mathcal{Z}(a + 2n\epsilon_2; -\epsilon_2, \epsilon_2|z). \quad (1.1)$$

После этого появилось множество обобщений этой формулы, в частности, на тау-функции уравнений Пенлеве V, III's [17], на тау-функции q -разностных уравнений Пенлеве [6], [27], [28], а также на изомонодромные задачи, более сложные, чем те, которые соответствуют уравнениям Пенлеве ([18], [24] и пр.) Главная идея этих обобщений (и соответствия между уравнениями Пенлеве и калибровочными теориями) заключается в том, что каждой тау-функции на стороне уравнений Пенлеве нужно сопоставить некоторую инстантонную статсумму на калибровочной стороне, такую, что тау-функция будет даваться рядом Фурье (1.1). В частности, эта функция для уравнения Пенлеве III($D_8^{(1)}$) — это $SU(2)$ инстантонная статсумма Некрасова на \mathbb{C}^2 без полей материи, для уравнений q -Пенлеве нужно взять пятимерные инстантонные статсуммы, добавив одно компактное измерение радиуса $R = -\log q$, для изомонодромных задач ранга N нужно взять калибровочную группу $SU(N)$ и т.д.

Оказывается, что уравнения Пенлеве (как дифференциальные, так и q -разностные) и, предположительно, более сложные изомонодромные задачи могут быть записаны в виде

¹Причиной для двух разных имен для одного соответствия, является то, что уравнения Пенлеве возникают, как частные случаи изомонодромных задач на сфере Римана с выколотыми точками, и то, что инстантонные статсуммы суперсимметричных калибровочных теорий равны подходящим конформным блокам конформной теории поля согласно АГТ-соответствию [1].

билинейных уравнений на эти тау-функции. Согласно (1.1), эти уравнения эквивалентны билинейным соотношениям на статсуммы Некрасова вида

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} + j/2} D\left(\mathcal{Z}(a - 2n\epsilon_2; -2\epsilon_2, 2\epsilon_2|z), \mathcal{Z}(a + 2n\epsilon_2; -2\epsilon_2, 2\epsilon_2|z)\right) = 0, \quad j = 0, 1, \quad (1.2)$$

где D — это некоторый дифференциальный или q -разностный оператор по z . Один из подходов к доказательству соответствия между уравнениями Пенлеве и калибровочными теориями в частных случаях состоит в том, чтобы искать подходящие билинейные соотношения на соответствующие статсуммы. Для дифференциальных уравнений Пенлеве это было сделано с конформной стороны АГТ-соответствия, используя теорию представлений алгебры Супер Вирасоро ([5],[7]). С калибровочной стороны билинейные соотношения на статсуммы Некрасова (четырёхмерные и пятимерные) возникают из соотношений раздутия Накаджимы-Ёшиоки (соотношения в пятимерном случае, выписанные ниже, были доказаны в [30]):

$$\beta_j^d(q_1, q_2|z)\mathcal{Z}(u; q_1, q_2|z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + j/2} \left(\mathcal{Z}(uq_1^{2n}; q_1, q_2q_1^{-1}|q_1^d z) \mathcal{Z}(uq_2^{2n}; q_1q_2^{-1}, q_2|q_2^d z) \right), \quad u = e^{Ra}, \quad q_i = e^{R\epsilon_i}, \quad (1.3)$$

где β_j^d — это некоторые простые мономиальные коэффициенты. А именно, билинейные соотношения можно получить, исключая статсумму в левой части из двух таких соотношений. Однако, параметры Ω -бэкграунда в правой части этих соотношений другие, чем в (1.2).

Подходящие соотношения с калибровочной стороны АГТ-соответствия, в принципе, могут быть получены из соотношений раздутия на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ (возможно, модифицированной пятым измерением). А именно, в [9] (см. также [11]) была доказана четырёхмерная формула для раздутия:

$$\mathcal{Z}_{X_2}(a; \epsilon_1, \epsilon_2|z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\mathcal{Z}(a + 2n\epsilon_1; 2\epsilon_1, -\epsilon_1 + \epsilon_2|z), \mathcal{Z}(a + 2n\epsilon_2; \epsilon_1 - \epsilon_2, 2\epsilon_2|z) \right), \quad (1.4)$$

где X_2 — это минимальное разрешение $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. Тем не менее, пятимерные модификации этих соотношений раздутия похоже, отсутствуют в литературе.

Первое соотношение такого типа, рассматриваемое при изучении уравнений q -Пенлеве:

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{Z}(uq_1^{2n}; q_1^2, q_2q_1^{-1}|q_1^2 z) \mathcal{Z}(uq_2^{2n}; q_1q_2^{-1}, q_2^2|q_2^2 z) = \\ & = (1 - (q_1q_2z)^{\frac{1}{2}}) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{Z}(uq_1^{2n}; q_1^2, q_2q_1^{-1}|z) \mathcal{Z}(uq_2^{2n}; q_1q_2^{-1}, q_2^2|z). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Оно было предложено в [6] (см. (B.5) в источнике) и доказано для случая уравнений Пенлеве, когда $q_1q_2 = 1$ в [8] (а также и в [28]). Оно было доказано элементарным способом, ис-

пользуя соотношения раздутия Накаджимы-Ёшиоки, но, похоже, этот способ нельзя обобщить для произвольного q_1, q_2 . Это, и другие соотношения, для общих q_1 и q_2 важны для изучения квантовых уравнений Пенлеве. Именно, они возникают в Гипотезе 4.2 из [3], а также в [4] для статсумм Некрасова, модифицированных членом Черна-Саймонса. В этой работе мы находим элементарный способ получить эти соотношения для произвольных q_1, q_2 из соотношений раздутия Накаджимы-Ёшиоки.

Наши результаты, полученные данным способом, таковы:

- Мы доказали соотношения Гипотезы 4.2 из работы [3]. Этими соотношениями являются уже упомянутое (1.5) и ещё три, которые получаются при помощи метода данной работы.
- Мы доказали соотношения, аналогичные (1.5), для статсумм Некрасова, модифицированных членом Черна-Саймонса на уровне 1.
- Также, при помощи этого подхода, мы доказали некоторые симметрии статсумм Некрасова, модифицированных членом Черна-Саймонса, а именно:

$$\mathcal{Z}_{inst}^{[2]}(u; q_1, q_2|z) = (z; q_1, q_2)_\infty \mathcal{Z}_{inst}^{[0]}(u; q_1, q_2|z), \quad (1.6)$$

и симметрия статсумм Некрасова, модифицированных членом Черна-Саймонса на уровне 1. Число в квадратных скобках означает уровень теории Черна-Саймонса.

Все эти соотношения — это соотношения на пятимерную $SU(2)$ калибровочную статсумму Некрасова без полей материи и мы доказываем их для произвольных q_1, q_2^2 . Билинейное соотношение на статсуммы Некрасова, модифицированные членом Черна-Саймонса на уровне 1 были доказаны в [8] для $q_1 q_2 = 1$ (а также и в [28]). Соотношение (1.6) было доказано в [8] для $q_1 q_2 = 1, q_1 q_2^2 = 1, q_1^2 q_2 = 1$, а соотношение (1.17) было доказано в [21, Ргор. 1.38] для $q_1^2 q_2 = 1$. Отсюда легко сделать стандартный предел к билинейным соотношениям на четырехмерные статсуммы Некрасова, мы здесь не будем обсуждать этого.

Метод основан на том, что двукратно раздувая \mathbb{C}^2 способом, показанным на Рис. 1.1 (где черный кружок обозначает точку, где мы будем раздувать) мы получим некоторую (-2) -кривую (жирная линия на схеме)³. Опишем схему раздутия более подробно. В левой её части мы имеем два дивизора, соответствующих координатам x и y плоскости \mathbb{C}^2 . Параметры Ω -бэкграунда ϵ_1, ϵ_2 сопоставляются этим дивизорам следующим образом:

²Строго говоря, доказательство сделано только для случая $\epsilon_1/\epsilon_2 \in \mathbb{Q}_{\leq 0}$, поскольку только в этом случае мы можем гарантировать сходимость рассматриваемых статсумм Некрасова, см. Раздел 1.1.2. В четырехмерном случае такой проблемы нету

³Мы благодарны Хираку Накаджиме, который предложил использовать это наблюдение для изучения билинейных соотношений на статсуммы Некрасова, возникающие из уравнений Пенлеве.

рассмотрим тор $(\mathbb{C}^*)^2$ растяжений координат, тогда ϵ_1, ϵ_2 — это координаты на алгебре Ли этого тора. Далее мы раздуваем \mathbb{C}^2 в точке и получаем исключительный дивизор, изображенный в виде наклонной линии. Координата на соответствующей $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ — это x/y (или y/x в карте бесконечности), соответствующий параметр Ω -бэкграунда — это $\epsilon_1 - \epsilon_2$ (или $\epsilon_2 - \epsilon_1$ в карте бесконечности). Мы можем рассмотреть инстантонную статсумму $\mathcal{Z}_{\widehat{\mathbb{C}^2}}(a; \epsilon_1, \epsilon_2|z) = \mathcal{Z}_{\mathbb{C}^2}(a; \epsilon_1, \epsilon_2|z)$ на этом раздутии $\widehat{\mathbb{C}^2}$. В соответствии с соотношениями раздутия Накаджимы-Ёшиоки (1.3) последняя может быть разложена в билинейную комбинацию статсумм на \mathbb{C}^2 . Эти статсуммы соответствуют точкам пересечения исключительного дивизора с координатными линиями для x and y . Отметим, что присутствие дополнительного пятого компактного измерения никак не сказывается на геометрии раздутий.

Как было упомянуто выше, мы ищем билинейные соотношения с параметрами Ω -бэкграунда, как в правой части (1.4). Сделаем второе раздутие, как показано на Рис. 1.1. Жирная линия соответствует некоторой (-2) кривой и можно увидеть, что параметры Ω -бэкграунда, соответствующие точкам пересечения этой (-2) кривой с двумя другими, находятся в желаемом соотношении. В терминах инстантонных статсумм, используя соотношения раздутия Накаджимы-Ёшиоки дважды, мы получаем трилинейную комбинацию инстантонных статсумм, такую что два множителя в ней имеют желаемое соотношение на параметры Ω -бэкграунда.

Отметим, что индекс самопересечения I в терминах параметров Ω -бэкграунда может быть выражен, как $I = \epsilon_1^{(1)}/\epsilon_2^{(1)} + \epsilon_2^{(2)}/\epsilon_1^{(2)}$. Поэтому билинейные соотношения на статсуммы Некрасова с $I = -2$ мы будем называть (-2) -билинейными соотношениями.

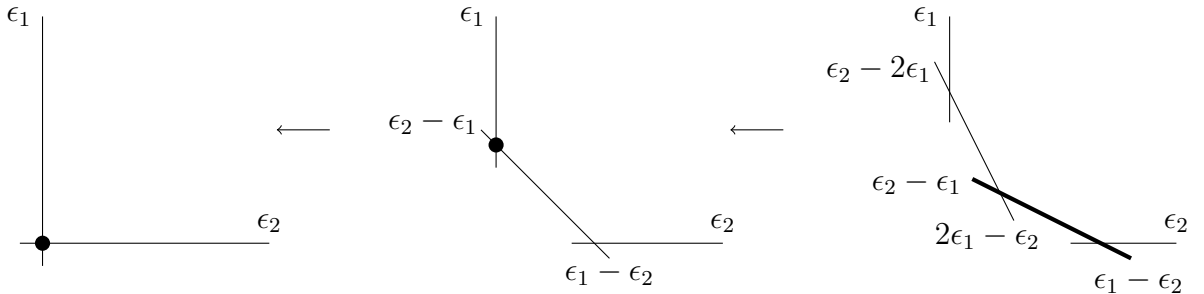


Рисунок 1.1 – Схема раздутия для нашего подхода

Используя эти наблюдения, мы применяем их для доказательства искомым билинейных соотношений. Практически наш подход распадается на ряд шагов:

1. Мы берем предполагаемые (-2) билинейные соотношения, схематически обозначая их $\widehat{\mathcal{Z}}(u; q_1, q_2|\cdot) = 0$ и сворачиваем их с подходящей статсуммой Некрасова (тут мы

опускаем точную зависимость от z для простоты):

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{Z}(u(q_1 q_2)^{2m}; q_1 q_2, q_1^{-2} | \cdot) \widehat{\mathcal{Z}}(u q_2^{2m}; q_1, q_2 | \cdot). \quad (1.7)$$

2. Подставляем $\widehat{\mathcal{Z}}(u; q_1, q_2 | \cdot) = \sum_{terms} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{Z}(u q_1^{2n}; q_1^2, q_2 q_1^{-1} | \cdot) \mathcal{Z}(u q_2^{2n}, q_1 q_2^{-1}, q_2^2 | \cdot)$ и используя соотношения раздутия Накаджимы-Ёшиоки (1.3) дважды, получаем линейную комбинацию статсумм Некрасова:

$$\begin{aligned} & \sum_{terms} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \mathcal{Z}(u(q_1 q_2)^{2m}; q_1 q_2, q_1^{-2} | \cdot) \mathcal{Z}(u q_2^{2m} q_1^{2n}; q_1^2, q_2 q_1^{-1} | \cdot) \mathcal{Z}(u q_2^{2m} q_2^{2n}; q_1 q_2^{-1}, q_2^2 | \cdot) = \\ & = \sum_{terms} \sum_{2m' \in \mathbb{Z}} \# \mathcal{Z}(u(q_1 q_2)^{2m'}; q_1 q_2, q_2 q_1^{-1} | \cdot) \mathcal{Z}(u q_2^{4m'}, q_1 q_2^{-1}, q_2^2 | \cdot) = \sum_{terms} \# \mathcal{Z}(u; q_1 q_2, q_2^2 | \cdot), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $\#$ означает некоторые элементарные коэффициенты, построенные из β в (1.3). Первая сумма обозначает различные слагаемые (с разными q -сдвигами z) в изначальном билинейном соотношении.

3. Предположим, что полученная линейная комбинация $\sum_{terms} \# \mathcal{Z}(u; q_1 q_2, q_2^2 | \cdot)$ равна нулю. Из этого мы доказываем, что (-2) билинейная комбинация, с которой мы начинали, тоже равна нулю. Это делается шаг за шагом, доказывая, что все степени z этой комбинации равны нулю.

Отметим, что связь между (-1) and (-2) раздутиями используется в теории инвариантов Дональдсона [15], [10].

1.1.2 Статсуммы Некрасова и соотношения раздутия Накаджимы-Ёшиоки

Пятимерные статсуммы Некрасова. Мы начинаем с обзора статсумм Некрасова \mathcal{Z} суперсимметричной $SU(2)$ калибровочной теории без полей материи на \mathbb{C}^2 , расширенной пятым компактным измерением, и обсуждения их компонент.

Полная статсумма Некрасова \mathcal{Z} разбивается в три множителя (мы используем соглашения статей [29], [30]):

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_{cl} \mathcal{Z}_{1-loop} \mathcal{Z}_{inst}. \quad (1.9)$$

В источниках \mathcal{Z}_{cl} и \mathcal{Z}_{1-loop} появляются из так называемой "части теории возмущений". Статсумма Некрасова зависит от параметров Ω -бэкграунда ϵ_1, ϵ_2 , вакуумных средних a_1, a_2 с условием $a_1 + a_2 = 0$ (мы обозначаем $a = a_1 - a_2$), а также от радиуса R пятого компактного

измерения. В пятимерном случае удобно использовать мультипликативные параметры, связанные с предыдущими по формулам:

$$u_i = e^{Rai}, \quad q_i = e^{R\epsilon_i}, \quad i = 1, 2, \quad (1.10)$$

с условием $u_1 u_2 = 1$ (мы обозначаем $u = u_1/u_2$). Чтобы получить суперсимметричную $SU(2)$ калибровочную теорию без материи на \mathbb{C}^2 , нужно устремить $R \rightarrow 0$, мы не будем обсуждать этот предел в данной статье. Иногда мы будем модифицировать нашу суперсимметричную $SU(2)$ калибровочную теорию без материи с помощью дополнительной теории Черна-Саймонса уровня $l \in \mathbb{Z}$. Мы будем обозначать соответствующую статсумму (и связанные объекты) верхним индексом $[l]$.

В этой работе по ряду причин будет рассматриваться только область $\epsilon_1 < 0 < \epsilon_2$, которая соответствует центральному заряду $c \leq 1$ (через АГТ-соответствие). Эта область содержит случаи $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$ and $2\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$ которые интересны в приложениях к уравнениям Пенлеве, как мы объясняли во Введении. Эта область также замкнута относительно соотношений раздутия Накаджимы-Ёшиоки (см. (1.29) ниже), которые мы обсуждаем в конце этого Раздела.

Инстантонная часть пятимерной статсуммы Некрасова, модифицированной теорией Черна-Саймонса на уровне l дается формулой Некрасова:

$$\mathcal{Z}_{inst}^{[l]}(u; q_1, q_2 | z) = \sum_{\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}} \frac{\prod_{i=1}^2 (q_1 q_2)^{-\frac{l}{2}|\lambda^{(i)}|} \mathbb{T}_{\lambda^{(i)}}^l(u_i; q_1, q_2)}{\prod_{i,j=1}^2 \mathbb{N}_{\lambda^{(i)}, \lambda^{(j)}}(u_i/u_j; q_1, q_2)} (q_1^{-1} q_2^{-1} z)^{|\lambda^{(1)}| + |\lambda^{(2)}|}, \quad (1.11)$$

записанной в терминах комбинаторных блоков:

$$\mathbb{N}_{\lambda, \mu}(u; q_1, q_2) = \prod_{s \in \lambda} \left(1 - u q_2^{-a_\mu(s)-1} q_1^{l_\lambda(s)}\right) \prod_{s \in \mu} \left(1 - u q_2^{a_\lambda(s)} q_1^{-l_\mu(s)-1}\right) \quad (1.12)$$

и множителя от теории Черна-Саймонса:

$$\mathbb{T}_\lambda(u; q_1, q_2) = \prod_{(i,j) \in \lambda} u^{-1} q_1^{1-i} q_2^{1-j}. \quad (1.13)$$

Тут $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}$ — это разбиения, $|\lambda| = \sum \lambda_j$ and $a_\lambda(s), l_\lambda(s)$ обозначают длины рук и ног для квадрата s в диаграмме Юнга разбиения λ .

Функция $\mathcal{Z}_{inst}^{[l]}(u; q_1, q_2 | z)$ имеет элементарные симметрии:

$$\mathcal{Z}_{inst}^{[l]}(u; q_1, q_2 | z) = \mathcal{Z}_{inst}^{[l]}(u; q_2, q_1 | z) = \mathcal{Z}_{inst}^{[l]}(u^{-1}; q_1, q_2 | z). \quad (1.14)$$

Для $l = 0$ есть ещё элементарная симметрия:

$$\mathcal{Z}_{inst}(u; q_1, q_2 | z) = \mathcal{Z}_{inst}(u; q_1^{-1}, q_2^{-1} | z). \quad (1.15)$$

Её доказательство основано на почленном сравнении слагаемых в степенном ряду, поэтому мы имеем также:

$$\mathcal{Z}_{inst}^{[-l]}(u; q_1, q_2|z) = \mathcal{Z}_{inst}^{[l]}(u; q_1^{-1}, q_2^{-1}|z) \quad (1.16)$$

В случае $q_1 q_2 = 1$ симметрия $q_1, q_2 \mapsto q_1^{-1}, q_2^{-1}$ эквивалентна симметрии $q_1 \leftrightarrow q_2$ для произвольного l .

Для общих q_1, q_2 , ситуация с симметрией $q_1, q_2 \mapsto q_1^{-1}, q_2^{-1}$ несколько более сложная. Для $l \neq 0$ почленное сравнение не работает. Тем не менее, для $l = 1$:

$$\mathcal{Z}_{inst}^{[1]}(u; q_1, q_2|z) = \mathcal{Z}_{inst}^{[1]}(u; q_1^{-1}, q_2^{-1}|z). \quad (1.17)$$

Это доказано в случае $q_1 = q^{-1}, q_2 = q^2$ в [21, Prop. 1.38].

Для $l = 2$ оказывается:

$$\mathcal{Z}_{inst}^{[2]}(u; q_1, q_2|z) = (z; q_1, q_2)_\infty \mathcal{Z}_{inst}^{[0]}(u; q_1, q_2|z), \quad (1.18)$$

соответственно:

$$\mathcal{Z}_{inst}^{[2]}(u; q_1^{-1}, q_2^{-1}|z) = \frac{1-z}{(z; q_1)_\infty (z; q_2)_\infty} \mathcal{Z}_{inst}^{[2]}(u; q_1, q_2|z). \quad (1.19)$$

Появившийся здесь q -символ Похгаммера определен по формуле:

$$(z; q_1, \dots, q_N)_\infty = \prod_{i_1, \dots, i_N=0}^{\infty} \left(1 - z \prod_{k=1}^N q_k^{i_k} \right). \quad (1.20)$$

Он удовлетворяет q -сдвиговым соотношениям:

$$(z; q_1, \dots, q_N)_\infty / (zq_1; q_1, \dots, q_N)_\infty = (z; q_2, \dots, q_N)_\infty, \quad (z; q)_\infty / (zq; q)_\infty = 1 - z. \quad (1.21)$$

Посмотрим на сходимость ряда (1.11). Сейчас мы докажем:

Предложение 1.1.1. Пусть $q_1 = q^{-m}, q_2 = q^n, m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, |q| \neq 1$ и $u \neq q^k, k \in \mathbb{Z}$. Тогда ряд (1.11) для $l = 0$ сходится абсолютно и равномерно на каждом ограниченном подмножестве \mathbb{C} .

Доказательство этого Предложения аналогично доказательству [26, Prop 1 (i)], оно обобщает [6, Предл. 3.1.] на случай $\epsilon_1/\epsilon_2 \in \mathbb{Q}_{<0}$.

Доказательство. Существуют константы $L_1, L_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, такие что:

$$\left| \frac{q^{k/2} - q^{-k/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} \right| > |k|L_1^{1/2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}, \quad \left| \frac{u^{1/2}q^{k/2} - u^{-1/2}q^{-k/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} \right| > L_2^{1/2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (1.22)$$

Тогда мы можем ограничить $\prod_{i,j=1}^2 N_{\lambda_i, \lambda_j}(u_i/u_j; q^{-m}, q^n)$ следующим образом (мы обозначаем $h_\lambda = a_\lambda + l_\lambda + 1$, этот объект называется крюком):

$$\begin{aligned} & \left| N_{\lambda_1, \lambda_1}(1; q^{-m}, q^n) N_{\lambda_2, \lambda_2}(1; q^{-m}, q^n) \right| = \\ & \prod_{s \in \lambda_1} \left| q^{\frac{m-n}{2}} \left| q^{\frac{1}{2}(n(a_{\lambda_1}(s)+1)+ml_{\lambda_1}(s))} - q^{-\frac{1}{2}(n(a_{\lambda_1}(s)+1)+ml_{\lambda_1}(s))} \right| \right| q^{\frac{1}{2}(na_{\lambda_1}(s)+m(l_{\lambda_1}(s)+1))} - q^{-\frac{1}{2}(na_{\lambda_1}(s)+m(l_{\lambda_1}(s)+1))} \right| \\ & \cdot \prod_{s \in \lambda_2} (\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2) > \left(\prod_{s \in \lambda_1} |h_{\lambda_1}|^2 \right) \left(\prod_{s \in \lambda_2} |h_{\lambda_2}|^2 \right) \left| q^{\frac{m-n}{2}} \min^2(m, n) L_1(q^{1/2} - q^{-1/2})^2 \right|^{| \lambda_1 | + | \lambda_2 |} = \\ & = \frac{|\lambda_1|!^2 |\lambda_2|!^2}{(\dim \lambda_1 \dim \lambda_2)^2} \left| q^{\frac{m-n}{2}} \min^2(m, n) L_1(q^{1/2} - q^{-1/2})^2 \right|^{| \lambda_1 | + | \lambda_2 |}, \quad (1.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| N_{\lambda_1, \lambda_2}(u; q^{-m}, q^n) N_{\lambda_2, \lambda_1}(u^{-1}; q^{-m}, q^n) \right| = \\ & = \prod_{s \in \lambda_2} \left| q^{\frac{m-n}{2}} \left| u^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}(n(a_{\lambda_2}(s)+1)+ml_{\lambda_1}(s))} - u^{-\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}(n(a_{\lambda_2}(s)+1)+ml_{\lambda_1}(s))} \right| \right| \\ & \cdot \left| u^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}(na_{\lambda_2}(s)+m(l_{\lambda_1}(s)+1))} - u^{-\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}(na_{\lambda_2}(s)+m(l_{\lambda_1}(s)+1))} \right| \\ & \cdot \prod_{s \in \lambda_1} (\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2, u \leftrightarrow u^{-1}) > \left| q^{\frac{m-n}{2}} L_2(q^{1/2} - q^{-1/2})^2 \right|^{| \lambda_1 | + | \lambda_2 |}, \quad (1.24) \end{aligned}$$

где мы использовали формулу крюков для $\dim \lambda$. Так как $\sum_{|\lambda|=n} (\dim \lambda)^2 = n!$, мы получаем $\mathcal{Z}_{inst}(u; q^{-1}, q|z) < \exp \left| \frac{2z}{q^{m-n} \min^2(m, n) L_1 L_2 (q^{1/2} - q^{-1/2})^4} \right|$. \square

Для случая $\epsilon_1/\epsilon_2 \notin \mathbb{Q}$ это рассуждение не работает. В этом случае полюса по u в сумме (1.11) плотны и, похоже, что ряд расходится. Тем не менее, какого-либо доказательства у нас нету. Для $l \neq 0$ мы также не имеем никакого доказательства, но компьютерные проверки показывают, что ряд начинает расходиться при $|l| > 2$. Пользуясь симметрией (1.16), далее мы ограничимся случаями уровней $l = 0, 1, 2$. Такое ограничение также естественно с точки зрения кластерных интегрируемых систем [4]. Случай $l = 2$ мы будем рассматривать только при обсуждении соотношения (1.18).

Отметим также, что сходимости инстантонных статсумм Некрасова в другом секторе (именно $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, а также комплексно-сопряженных и при этом не чисто мнимых ϵ_1, ϵ_2) обсуждалась в работе [14].

Классическая и однопетлевая части пятимерной статсуммы Некрасова имеют вид:

$$\mathcal{Z}_{cl}(u; q_1, q_2|z) = (q_1^{-1} q_2^{-1} z)^{-\frac{\log^2 u}{4 \log q_1 \log q_2}}, \quad (1.25)$$

$$\mathcal{Z}_{1-loop}(u; q_1, q_2) = (u; q_1, q_2)_\infty (u^{-1}; q_1, q_2)_\infty. \quad (1.26)$$

Эти части не зависят от уровня l (тем не менее, \mathcal{Z}_{cl} начинает зависеть от l в случае калибровочной группы $SU(r)$, $r > 2$). Можно увидеть, что симметрии $q_1 \leftrightarrow q_2$, $u \mapsto u^{-1}$

удовлетворяются и классической, и однопетлевой частью полной статсуммы Некрасова \mathcal{Z} также. Но для симметрии $q_1, q_2 \mapsto q_1^{-1}, q_2^{-1}$ имеем:

$$\mathcal{Z}_{cl}(u; q_1^{-1}, q_2^{-1}|z) = (q_1 q_2)^{-\frac{\log^2 u}{2 \log q_1 \log q_2}} \mathcal{Z}_{cl}(u; q_1, q_2|z), \quad (1.27)$$

и

$$\mathcal{Z}_{1-loop}(u; q_1^{-1}, q_2^{-1}) = (u q_1; q_1)_{\infty}^{-1} (u^{-1}; q_1)_{\infty}^{-1} (u; q_2)_{\infty}^{-1} (u^{-1} q_2; q_2)_{\infty}^{-1} \mathcal{Z}_{1-loop}(u; q_1, q_2), \quad (1.28)$$

где мы последовательно использовали свойства $(z; q_1^{-1}, q_2, \dots, q_N)_{\infty} = (z q_1; q_1, \dots, q_N)_{\infty}^{-1}$ и (1.21). Поэтому симметрия нарушена во всех случаях, кроме $q_1 q_2 = 1$.

Соотношения раздутья Накаджимы-Ёшиоки

Функции $\mathcal{Z}^{[l]}(u; q_1, q_2|z)$ удовлетворяют соотношениям раздутья Накаджимы-Ёшиоки [30], [21]

$$\beta_j^d(q_1, q_2|z) \mathcal{Z}^{[l]}(u; q_1, q_2|z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + j/2} \left(\mathcal{Z}^{[l]}(u q_1^{2n}; q_1, q_2 q_1^{-1} | q_1^{d + \frac{1}{2}l(j-1)} z) \mathcal{Z}^{[l]}(u q_2^{2n}; q_1 q_2^{-1}, q_2 | q_2^{d + \frac{1}{2}l(j-1)} z) \right), \quad (1.29)$$

для $j = 0, 1, l = 0, 1, 2, d = -1, 0, 1$. Соответствующие коэффициенты β_j^d оказываются независимыми от l , их значения приведены в таблице:

β_j^d	$d = -1$	$d = 0$	$d = 1$
$j = 0$	1	1	1
$j = 1$	$(q_1^{-1} q_2^{-1} z)^{1/4}$	0	$-(q_1 q_2 z)^{1/4}$

Эти результаты доказаны в Теореме 2.4 из [30] для $l = 0$ и в Теореме 2.11 из [31] для случая $l = 1, 2, j = 0$ и случая $l = 1, 2, j = 1, d = 0$. Мы не нашли случаи $l = 1, j = 1, d = \pm 1$ в литературе, но они следуют из результатов [31] (см. сноску 6 в [8])

Отметим, что, фактически, соотношения раздутья Накаджимы-Ёшиоки — это соотношения на $\mathcal{Z}_{inst}^{[l]}$, а \mathcal{Z}_{cl} и \mathcal{Z}_{1-loop} дают $(\mathbf{I}_n^d)^{-1} z^{n^2}$, где независимый от z коэффициент \mathbf{I}_n^d называется фактором раздутья.

Замечание 1.1.1. В соответствии с симметриями (1.16), (1.27), (1.28), коэффициенты $\beta_j^{d,[l]}$ для произвольного d удовлетворяют:

$$\beta_j^{d,[l]}(q_1^{-1}, q_2^{-1}|z) = (-1)^j \beta_j^{-d,[l]}(q_1, q_2|z), \quad (1.30)$$

где мы восстановили зависимость $\beta_j^{d,[l]}$ от l в случае произвольного d .

1.1.3 Соотношения раздутия на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ из соотношений раздутия на \mathbb{C}^2

Также имеются соотношения раздутия на статсуммы Некрасова на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$, имеющие форму:

$$\mathcal{Z}_{X_2}^{[l]}(u; q_1, q_2 | z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + j/2} D\left(\mathcal{Z}^{[l]}(uq_1^{2n}; q_1^2, q_2q_1^{-1} | z), \mathcal{Z}^{[l]}(uq_2^{2n}; q_1q_2^{-1}, q_2^2 | z)\right), \quad j = 0, 1, \quad (1.31)$$

где $\mathcal{Z}_{X_2}^{[l]}$ — это некоторая инстантонная статсумма на X_2 , которое является минимальным разрешением $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. Конкретный тип этой статсуммы зависит от билинейного q -разностного (по z) оператора D в правой части.

Как было уже упомянуто во Введении, эти соотношения могут быть использованы для доказательства формулы (1.1) для тау-функции q -разностных уравнений Пенлеве. Однако, нам нужны только соответствующие билинейные соотношения на статсуммы Некрасова на \mathbb{C}^2 , которые могут быть получены из предыдущих соотношений исключением $\mathcal{Z}_{X_2}^{[l]}$. Эти соотношения имеют вид суммы слагаемых типа:

$$\widehat{\mathcal{Z}}_d^{[l]}(u; q_1, q_2 | z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + j/2} \epsilon^n \mathcal{Z}^{[l]}(uq_1^{2n}; q_1^2, q_2q_1^{-1} | q_1^d z) \mathcal{Z}^{[l]}(uq_2^{2n}, q_1q_2^{-1}, q_2^2 | q_2^d z), \quad d \in \mathbb{Z}, \quad (1.32)$$

с коэффициентами, не зависящими от u . Мы увидим ниже, что знак $\epsilon = \pm 1$ существует только в случае $j = 1$.

Эти билинейные соотношения мы называем " (-2) билинейными соотношениями", отмечая, что для этих соотношений $I = \epsilon_1^{(1)}/\epsilon_2^{(1)} + \epsilon_2^{(2)}/\epsilon_1^{(2)} = -2$ в отличие от соотношений раздутия Накаджимы-Ёшиоки, где $I = -1$. Наша цель — найти подход к получению (-2) билинейных соотношений из соотношений раздутия Накаджимы-Ёшиоки (1.29). В этом Разделе мы проиллюстрируем общую схему для $l = 0$.

Сделаем следующую свертку $\widehat{\mathcal{Z}}(u; q_1q_2, q_1^{-2} | z)$ с (1.32):

$$\sum_{m \in \mathbb{Z} + j/2} \epsilon^m \mathcal{Z}(u(q_1q_2)^{2m}; q_1q_2, q_1^{-2} | (q_1q_2)^{d_1+d_2} z) \widehat{\mathcal{Z}}_d(uq_2^{2m}; q_1, q_2 | q_2^{d_1+d_2} z) \quad (1.33)$$

или, явно выписывая (-2) билинейное слагаемое:

$$\begin{aligned} & \sum_{m, n \in \mathbb{Z} + j/2} \epsilon^{m+n} \mathcal{Z}(uq_1^{2m}q_2^{2m}; q_1q_2, q_1^{-2} | (q_1q_2)^{d_1+d_2} z) \\ & \times \mathcal{Z}(uq_1^{2n}q_2^{2m}; q_1^2, q_2q_1^{-1} | q_1^{d_2-d_1}q_2^{d_1+d_2} z) \mathcal{Z}(uq_2^{2(m+n)}, q_1q_2^{-1}, q_2^2 | q_2^{d_2-d_1}q_2^{d_1+d_2} z), \end{aligned} \quad (1.34)$$

где мы ввели d_1 and d_2 , такие что $d = d_2 - d_1$. Сделаем замену $m = m' + n'$, $n = m' - n'$ в

полученном выражении:

$$\epsilon^j \left(\sum_{m' \in \mathbb{Z} + j/2, n' \in \mathbb{Z}} + \epsilon \sum_{m' \in \mathbb{Z} + j/2 + \frac{1}{2}, n' \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \right) \mathcal{Z}(u(q_1 q_2)^{2(m'+n')}; q_1 q_2, q_1^{-2} | (q_1 q_2)^{d_2 + d_1} z) \quad (1.35)$$

$$\mathcal{Z}(u(q_1 q_2)^{2m'} (q_1^{-1} q_2)^{2n'}; q_1^2, q_2 q_1^{-1} | q_1^{d_2 - d_1} q_2^{d_2 + d_1} z) \times \mathcal{Z}(u q_2^{4m'}, q_1 q_2^{-1}, q_2^2 | q_2^{2d_2} z).$$

Используя соотношения раздутья Накаджимы-Ёшиоки (1.29) для первой пары статсумм Некрасова (суммируя по n'), получаем

$$\sum_{2m' \in \mathbb{Z}} \epsilon^{2m'} \beta_{2m'+j \pmod 2}^{d_1} (q_1 q_2, q_2 q_1^{-1} | (q_1 q_2)^{d_2} z) \mathcal{Z}(u(q_1 q_2)^{2m'}; q_1 q_2, q_2 q_1^{-1} | (q_1 q_2)^{d_2} z) \times \quad (1.36)$$

$$\times \mathcal{Z}(u q_2^{4m'}, q_1 q_2^{-1}, q_2^2 | q_2^{2d_2} z),$$

что может опять быть просуммировано, используя соотношения раздутья Накаджимы-Ёшиоки (1.29), к

$$\left(\sum_{i=0,1} \epsilon^i \beta_{i+j \pmod 2}^{d_1} (q_1 q_2, q_2 q_1^{-1} | (q_1 q_2)^{d_2} z) \beta_i^{d_2} (q_1 q_2, q_2^2 | z) \right) \times \quad (1.37)$$

$$\times \mathcal{Z}(u; q_1 q_2, q_2^2 | z).$$

Возьмем сумму слагаемых типа (1.32) и сделаем свертку (1.33) с полной суммой. И пусть теперь после свертки мы получаем $\mathcal{Z}(u; q_1 q_2, q_2^2 | z)$ с нулевым коэффициентом. Отметим, что для того, чтобы свертка была возможна, т.е. однородна по всем слагаемым, мы должны брать слагаемые в соотношении с одинаковым сдвигом $d_1 + d_2$.

Ниже мы доказываем в случае $j = 0$, что изначальная сумма слагаемых тоже была равна нулю. Случай $j = 1$ более тонкий: мы доказываем, что изначальная сумма зануляется, если существует её две различных зануляющиеся свертки. У нас принципиально есть такая возможность, поскольку мы можем брать различные пары d_1 и d_2 , такие что $d_2 - d_1 = d$. Ниже, для простоты, мы обозначаем $d_{12} = d_1 + d_2$.

Предложение 1.1.2. Рассмотрим (-2) билинейное соотношения на статсуммы Некрасова, состоящие из слагаемых (1.32).

(i) Случай $j = 0$. Если имеется зануляющаяся свертка (1.33), тогда изначальное (-2) билинейное соотношение выполняется.

(ii) Случай $j = 1$. Если имеется хотя бы две различные зануляющиеся свертки, такие что $d_{12} \neq d'_{12}$, тогда изначальное (-2) билинейное соотношение выполняется.

Доказательство. В терминах инстантонной части \mathcal{Z}_{inst} , слагаемые (1.32) имеют вид:

$$(q_1^{-1} q_2^{-1} z)^{-\frac{\log^2 u}{8 \log q_1 \log q_2}} \sum_{n \in \mathbb{Z} + j/2} \frac{\epsilon^n u^{\frac{nd}{2}} (q_1 q_2)^{\frac{n^2 d}{2}} (q_1^{-1} q_2^{-1} z)^{\frac{n^2}{2}}}{\mathfrak{I}_n^d} \times \quad (1.38)$$

$$\times \mathcal{Z}_{inst}(u q_1^{2n}; q_1^2, q_2 q_1^{-1} | q_1^d z) \mathcal{Z}_{inst}(u q_2^{2n}, q_1 q_2^{-1}, q_2^2 | q_2^d z),$$

где \mathfrak{I}_n^d — коэффициенты раздутья $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$, получающиеся из \mathcal{Z}_{1-loop} .

Мы сворачиваем соотношение, собранное из таких слагаемых, с

$$\mathcal{Z}(u; q_1 q_2, q_1^{-2} | z) = z^{\frac{\log^2 u}{8 \log q_1 (\log q_2 + \log q_1)}} \sum_{p=0}^{+\infty} b_p(u) z^p, \quad (1.39)$$

$$b_0(u) = (q_1 q_2^{-1})^{\frac{\log^2 u}{8 \log q_1 (\log q_2 + \log q_1)}} \mathcal{Z}_{1-loop}(u; q_1 q_2, q_1^{-2}). \quad (1.40)$$

(i) В случае $j = 0$ вся сумма, как ряд по z , имеет вид:

$$z^{-\frac{\log^2 u}{8 \log q_1 \log q_2}} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(u) \epsilon^k z^{k/2}, \quad (1.41)$$

таким образом, мы видим, что (-2) билинейные соотношения разбиваются в соотношения с целыми и полуцелыми степенями z , а знак ϵ это выражает.

После свертки, мы имеем, с точностью до общего множителя:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \epsilon^m u^{\frac{m}{2} d_{12}} (q_1 q_2^2)^{\frac{m^2}{2} d_{12}} z^{\frac{m^2}{2}} \sum_{p=0}^{+\infty} b_p(u q_1^{2m} q_2^{2m}) ((q_1 q_2)^{d_{12}} z)^p \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(u q_2^{2m}) (q_2^{d_{12}} z)^{k/2} = 0. \quad (1.42)$$

Теперь, последовательно приравнивая к нулю коэффициенты перед степенями $z^{n/2}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, так как $b_0(u) \neq 0$, мы получаем $c_0 = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0 \dots$

(ii) В случае $j = 1$ такого разбиения нету:

$$z^{\frac{1}{8} - \frac{\log^2 u}{8 \log q_1 \log q_2}} \sum_{k=0}^{+\infty} d_k(u) z^k. \quad (1.43)$$

Две зануляющиеся свертки с $d_{12} \neq d'_{12}$ с точностью до общего множителя дают:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z} + 1/2} \epsilon^m u^{\frac{m}{2} d_{12}} (q_1 q_2^2)^{\frac{m^2}{2} d_{12}} z^{\frac{m^2}{2}} \sum_{p=0}^{+\infty} b_p(u (q_1 q_2)^{2m}) ((q_1 q_2)^{d_{12}} z)^p \sum_{k=0}^{+\infty} d_k(u q_2^{2m}) (q_2^{d_{12}} z)^k = 0, \quad (1.44)$$

$$\sum_{m \in \mathbb{Z} + 1/2} \epsilon^m u^{\frac{m}{2} d'_{12}} (q_1 q_2^2)^{\frac{m^2}{2} d'_{12}} z^{\frac{m^2}{2}} \sum_{p=0}^{+\infty} b_p(u (q_1 q_2)^{2m}) ((q_1 q_2)^{d'_{12}} z)^p \sum_{k=0}^{+\infty} d_k(u q_2^{2m}) (q_2^{d'_{12}} z)^k = 0. \quad (1.45)$$

Приравнивая к нулю коэффициенты перед степенями $z^{n+1/8}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, мы получаем систему линейных уравнений 2×2 на $d_n(u q_2)$ и $d_n(u q_2^{-1})$ с неоднородностью — линейной комбинацией d_k , $k < n$. Фундаментальная матрица этой системы равна

$$\begin{pmatrix} u^{d_{12}/4} (q_1 q_2^2)^{d_{12}/8} b_0(u q_1 q_2) q_2^{p d_{12}} & u^{-d_{12}/4} (q_1 q_2^2)^{d_{12}/8} b_0(u q_1^{-1} q_2^{-1}) q_2^{p d_{12}} \\ u^{d'_{12}/4} (q_1 q_2^2)^{d'_{12}/8} b_0(u q_1 q_2) q_2^{p d'_{12}} & u^{-d'_{12}/4} (q_1 q_2^2)^{d'_{12}/8} b_0(u q_1^{-1} q_2^{-1}) q_2^{p d'_{12}} \end{pmatrix}, \quad (1.46)$$

её детерминант равен

$$(q_1 q_2^2)^{(d_{12} + d'_{12})/8} b_0(u q_1 q_2) b_0(u (q_1 q_2)^{-1}) q_2^{(d_{12} + d'_{12})p} (u^{(d_{12} - d'_{12})/4} - u^{(d'_{12} - d_{12})/4}), \quad (1.47)$$

что не равно нулю для общего u . Следовательно, мы последовательно получаем $d_0 = 0$, $d_1 = 0$, $d_2 = 0 \dots$ \square

Мы видим, что в случае $j = 0$ знак ϵ соответствует ветке корня $z^{1/2}$, поэтому мы опустим его в следующем Разделе.

1.2 Полуконечные гармонические функции на графе Гнедина-Кингмана

1.2.1 Введение

В работе Кингмана [36] были описаны случайные перестановочно-инвариантные разбиения (random exchangeable partitions) множества натуральных чисел. Такие разбиения параметризуются вероятностными мерами на симплексе Кингмана, элементы которого суть бесконечные последовательности вещественных чисел $(\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq 0)$ с условием $\sum_i \alpha_i \leq 1$. Теорему Кингмана можно переформулировать в терминах гармонических функций на некотором графе ветвления – графе Кингмана \mathbb{K} ([39, 40, 35]). Вершины этого графа соответствуют диаграммам Юнга, а ребра отвечают правилу Пиери для мономиального базиса в алгебре симметрических функций Sym .

Гнединым [32] был получен аналог теоремы Кингмана для линейно упорядоченных разбиений. Тогда, как показано в [32], роль симплекса Кингмана играет пространство открытых подмножеств единичного интервала. Теорему Гнедина можно тоже переформулировать в терминах гармонических функций на некотором графе ветвления. Этот граф мы обозначаем через \mathbb{GK} и предлагаем называть графом Гнедина–Кингмана. Его вершины состоят из всевозможных композиций, а кратности ребер задаются правилом Пиери для мономиального базиса в алгебре *квазисимметрических* функций $QSym$. Эта интерпретация используется в работе Карева и Никитина [37], в которой теорема Гнедина передоказана другим методом.

Цель настоящей работы – классифицировать неразложимые *полуконечные* гармонические функции на графе Гнедина-Кингмана. Условие полуконечности предполагает, что в некоторых вершинах функция принимает значение $+\infty$; точное определение дано в параграфе 2.1. Основная теорема показывает, что параметрами классификации служат конечные наборы непересекающихся интервалов в $(0, 1)$ плюс некоторые дискретные данные (наборы композиций).

Применительно к графу Кингмана задача о полуконечных гармонических функциях была решена Вершиком и Керовым [34, 38]. Говоря неформально, наш результат соотносится с их результатом так же, как теорема Гнедина соотносится с теоремой Кингмана.

Используя естественное вложение колец $Sym \hookrightarrow QSym$, можно установить некоторое

соответствие между полуконечными гармоническими функциями на графах \mathbb{GK} и \mathbb{K} .

Отметим, что граф \mathbb{GK} служит диаграммой Браттели некоторой AF-алгебры, а неразложимые полуконечные гармонические функции на \mathbb{GK} соответствуют нормальным факторпредставлениям этой алгебры типа I_∞ и II_∞ .

Перейдем к более подробному описанию результатов.

Граф Гнедина-Кингмана \mathbb{GK} – это градуированный граф $\mathbb{GK} = \bigsqcup_{n \geq 0} \mathbb{GK}_n$, где \mathbb{GK}_n – это все возможные композиции (упорядоченные разбиения) числа n . По определению полагается $\mathbb{GK}_0 = \{\emptyset\}$.

Ребра между композициями с соседних уровней устроены следующим образом. Пусть $\mu = (n_1, \dots, n_k)$, $|\mu| = N$, тогда μ соединена ребрами со всеми композициями ν , $|\nu| = N - 1$, которые получаются из μ

- уменьшением одного из чисел n_i на единицу при $n_i \geq 2$,
- извлечением единицы из последовательности единиц, тем самым уменьшая длину этой последовательности на один: $\underbrace{(1, \dots, 1)}_j \mapsto \underbrace{(1, \dots, 1)}_{j-1}$.

В первом случае кратность ребра равна 1, во втором случае она равна j (см. Рисунок 1.2).

Замечание 1.2.1. Ребра в графе \mathbb{GK} отражают правило Пьери для мономиальных квазисимметрических функций M_λ (см. [41, (3.12)] для $\alpha = (1)$).

Если из ν в μ идет по крайней мере одно ребро, то мы пишем $\nu \nearrow \mu$. Кратность ребра, идущего из ν в μ будем обозначать через $\varkappa(\nu, \mu)$. По определению полагается $\varkappa(\nu, \mu) = 0$, если $|\mu| - |\nu| \neq 1$ или же $\nu \in \mathbb{GK}_{N-1}$, $\mu \in \mathbb{GK}_N$, но ν и μ не соединены ни одним ребром.

Путем будем называть последовательность композиций $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ (конечную или бесконечную) с условием $\lambda_i \nearrow \lambda_{i+1} \forall i$.

Будем говорить, что μ лежит выше чем ν , если μ лежит на более высоком уровне чем ν и их можно соединить путем. В этом случае мы будем писать $\mu > \nu$.

Функция $\varphi: \mathbb{GK} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$, заданная на множестве вершин графа \mathbb{GK} называется *гармонической*, если она удовлетворяет условию:

$$\varphi(\lambda) = \sum_{\mu: \lambda \nearrow \mu} \varkappa(\lambda, \mu) \varphi(\mu), \quad \forall \lambda \in \mathbb{GK}. \quad (1.48)$$

Замечание 1.2.2. Мы пользуемся следующими соглашениями:

- $x + (+\infty) = +\infty$, $x \in \mathbb{R}$,

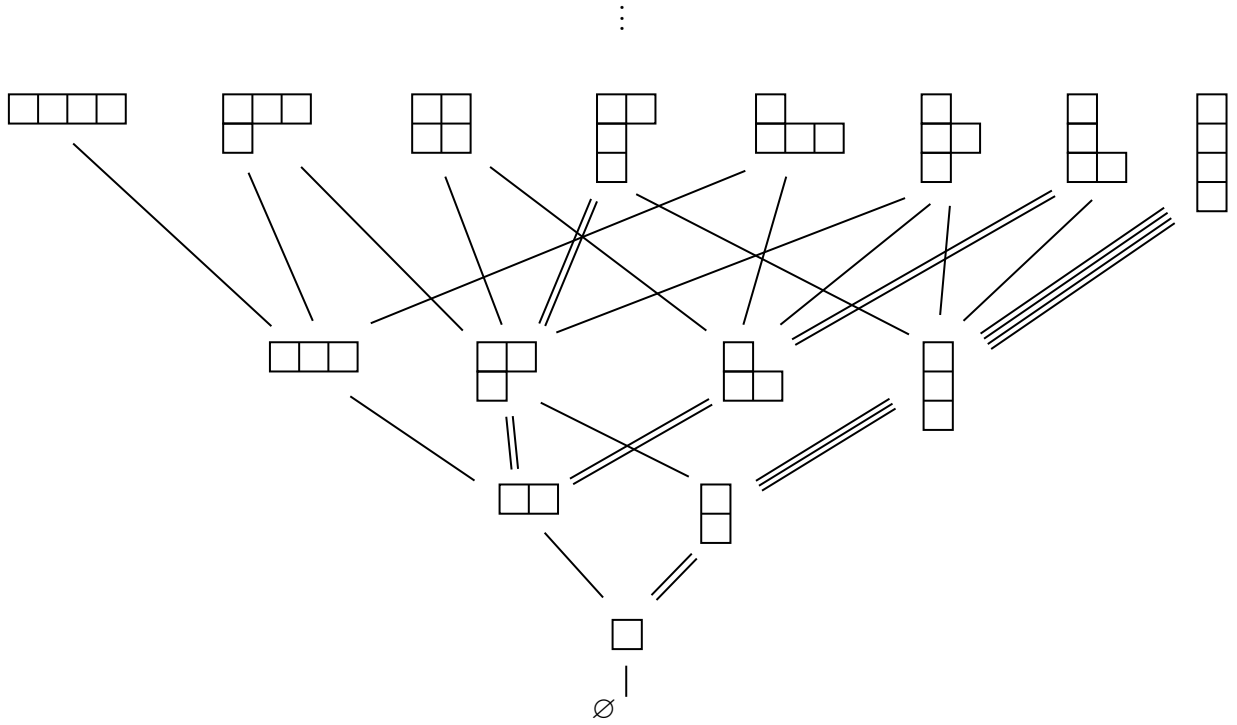


Рисунок 1.2 – Граф Гнедина-Кингмана

$$- (+\infty) + (+\infty) = +\infty,$$

$$- 0 \cdot (+\infty) = 0.$$

Пусть φ – гармоническая функция. Если $\varphi(\lambda) < +\infty$, то для любой композиции μ такой, что $\mu > \lambda$ мы имеем $\varphi(\mu) < +\infty$. Кроме того, если $\varphi(\lambda) = 0$, то для любой композиции μ такой, что $\mu > \lambda$ мы имеем $\varphi(\mu) = 0$.

Множество всех $\lambda \in \mathbb{GK}$, для которых $\varphi(\lambda) < +\infty$ мы будем называть *идеалом конечности* φ . Идеал нулей φ будет обозначаться через $\ker \varphi$, а носитель $\{\lambda \in \mathbb{GK} \mid \varphi(\lambda) > 0\}$ через $\text{supp } \varphi$.

Такие названия обусловлены тем, что множество вершин $I \subset \mathbb{GK}$, удовлетворяющих свойству $\lambda \in I, \mu > \lambda \implies \mu \in I$, принято называть *идеалом* в графе ветвления [40].

Гармоническая функция φ называется *конечной*, если $\varphi(\lambda) < +\infty, \forall \lambda \in \mathbb{GK}$.

Конечные гармонические функции предполагаются нормированными: $\varphi(\emptyset) = 1$.

Конечная гармоническая функция φ называется *неразложимой*, если для любых конечных гармонических функций φ_1, φ_2 и положительных вещественных чисел c_1, c_2 таких, что $c_1 + c_2 = 1$ мы имеем $\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \implies \varphi = \varphi_1$ или $\varphi = \varphi_2$.

По каждой конечной гармонической функции φ можно построить функционал $F_\varphi: QSym \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F_\varphi(M_\lambda) = \varphi(\lambda), \tag{1.49}$$

где M_λ мономиальная квазисимметрическая функция [41].

Такой функционал удовлетворяет следующим свойствам:

1. $F_\varphi(M_\lambda) \geq 0$,
2. $F_\varphi(M_{(1)}M_\lambda) = F_\varphi(M_\lambda)$,
3. $F_\varphi(1) = 1$.

Соответствие $\varphi \longleftrightarrow F_\varphi$ задает биекцию между конечными гармоническими функциями $\mathbb{G}\mathbb{K}$ и функционалами $QSym \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющими свойствам (1),(2),(3).

Мы будем отождествлять φ и F_φ и использовать для них одинаковое обозначение φ .

1.2.2 Полуконечные гармонические функции: классификация и явное описание

Рассмотрим алгебру $R = QSym / (M_{(1)} - 1)$ и положительный конус $K \subset R$, натянутый на образы мономиальных квазисимметрических функций: $K = span([M_\lambda] \mid \lambda \in \mathbb{G}\mathbb{K})_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$, где $[\cdot]: QSym \rightarrow R$ – канонический гомоморфизм. Отметим, что этот конус замкнут относительно умножения: $K \cdot K \subset K$. Конус K задает частичный порядок \geq_K на алгебре R : $a \geq_K b \iff a - b \in K$.

Каждая гармоническая функция φ задает аддитивное $\mathbb{R}_{\geq 0}$ – линейное отображение $F_\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$:

$$F_\varphi([M_\lambda]) = \varphi(\lambda). \quad (1.50)$$

Напомним, что мы пользуемся соглашением $0 \cdot (+\infty) = 0$, см. Замечание 1.2.2.

Гармоническая функция φ называется *полуконечной*, если она не является конечной и отображение $F_\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ обладает следующим свойством полунепрерывности снизу

$$F_\varphi(a) = \sup_{\substack{b \in K: b \leq_K a, \\ F_\varphi(b) < +\infty}} F_\varphi(b), \quad \forall a \in K. \quad (1.51)$$

Если $F_\varphi(a) < +\infty$, то условие (1.51) превращается в тривиальное равенство $F_\varphi(a) = F_\varphi(a)$.

Гармоническая функция φ является полуконечной тогда и только тогда, когда существует $a \in K$ такое, что $F_\varphi(a) = +\infty$ и для любого такого a найдется последовательность $\{a_n\}_{n \geq 1} \subset K$ такая, что $a_n \leq_K a$, $F_\varphi(a_n) < +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_\varphi(a_n) = +\infty$. Если φ полуконечная гармоническая функция $\mathbb{G}\mathbb{K}$, то найдется $\lambda \in \mathbb{G}\mathbb{K}$ такая, что $\varphi(\lambda) = +\infty$ и для любой такой λ найдется вершина $\mu > \lambda$ такая, что $0 < \varphi(\mu) < +\infty$.

Соответствие $\varphi \longleftrightarrow F_\varphi$ задает биекцию между полуконечными гармоническими функциями на графе \mathbb{GK} и $\mathbb{R}_{\geq 0}$ – линейными аддитивными отображениями $K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$, удовлетворяющими свойству (1.51).

Мы будем отождествлять φ и F_φ и использовать для них одинаковое обозначение – φ .

Полуконечная гармоническая функция φ называется *неразложимой*, если для любой конечной (тождественно не равной нулю) или полуконечной гармонической функции φ' такой, что $\varphi \geq \varphi'$, мы имеем $\varphi = c\varphi'$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$.

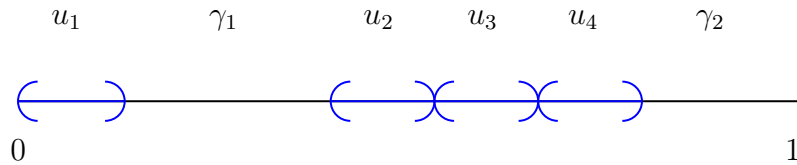
Опишем неразложимые конечные гармонические функции на графе Гнедина-Кингмана с непустым множеством нулей [37].

Пусть U_0 множество всевозможных открытых подмножеств единичного интервала, состоящих из конечного объединения интервалов, общая длина которых равна единице. Интервалы разделяются на два типа: h - *интервалы* и v - *интервалы* (h от horizontal, а v от vertical). Два v - интервала не могут идти подряд, а h - интервалы могут.

Замечание 1.2.3. Аналогом v - интервалов в графе Кингмана является параметр $\gamma = 1 - \sum_i \alpha_i$, поэтому они будут обозначаться символом γ с индексом, а h - интервалы – символом u с индексом.

Замечание 1.2.4. Графически h - интервалы будут изображаться синими отрезками, окруженными круглыми скобками, v - интервалы будут изображаться черными отрезками без каких-либо скобок.

Следующий элемент $u \in U_0$ состоит из четырех h - интервалов – u_1, u_2, u_3, u_4 и двух v - интервалов – γ_1, γ_2 :



Каждому элементу $u \in U_0$ соответствует конечная гармоническая функция φ_u на графе Гнедина-Кингмана \mathbb{GK} [32]. Описание φ_u будет очень похоже на конструкцию Керова границы графа Юнга: [33, p. 13-18] и особенно [33, p.18-19 Remark 4.8].

Для того, чтобы явно задать φ_u нам понадобятся следующие два гомоморфизма $\psi_+, \psi_- : QSym \rightarrow \mathbb{R}$, заданных по правилам:

$$\psi_+(M_\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda = (n), \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \psi_-(M_\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{n!}, & \text{если } \lambda = \underbrace{(1, \dots, 1)}_n, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.52)$$

Пусть u состоит в сумме из m интервалов. Каждому из h - интервалов поставим в соответствие ψ_+ , а каждому из v - интервалов – ψ_- . Тогда мы получим набор гомоморфизмов $\psi_1, \dots, \psi_m: QSym \rightarrow \mathbb{R}$.

Для вещественного числа $t \neq 0$ обозначим через r_t автоморфизм $QSym$, заданный по правилу $M_\lambda \mapsto t^{|\lambda|} M_\lambda$.

Через Δ обозначается коумножение в алгебре $QSym$, а $\Delta^{(n)}: QSym \rightarrow QSym^{\otimes n}$ определяется индуктивно:

$$\Delta^{(n+1)} = (\Delta \otimes 1) \circ \Delta^{(n)} = (1 \otimes \Delta) \circ \Delta^{(n)}, \quad \Delta^{(2)} = \Delta. \quad (1.53)$$

Обозначим через $w = (w_1, \dots, w_m)$ набор длин интервалов u , взятых в естественном порядке слева направо.

Гармоническая функция φ_u определяется следующим образом:

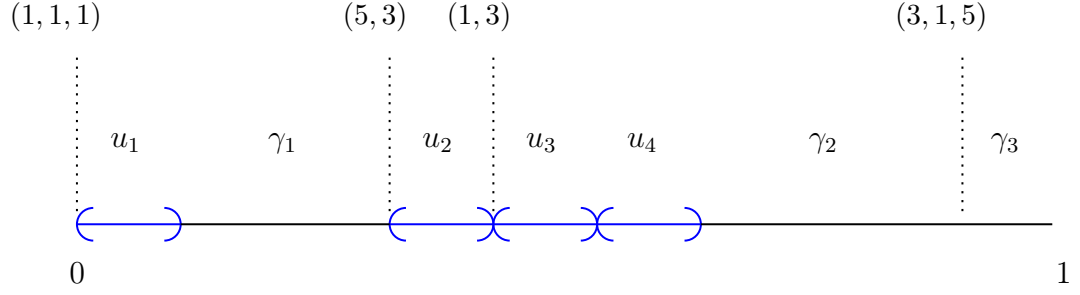
$$\varphi_u(\lambda) = (\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_m) \circ (r_{w_1} \otimes \dots \otimes r_{w_m}) \circ \Delta^{(m)}(M_\lambda). \quad (1.54)$$

При каждом фиксированном λ правая часть (1.54) задает некоторую функцию на U_0 , которую мы будем обозначать через $M_\lambda(u)$.

Определение 1.2.1. Рассмотрим множество \tilde{U}_0 , состоящее из всевозможных наборов $(u, \gamma; \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$, где

- u, γ – открытые непересекающиеся подмножества единичного интервала, состоящие из несвязного объединения конечного числа интервалов, общая длина которых равна единице. Интервалы из u называются h - интервалами, а интервалы из γ называются v - интервалами.
- m – общее число интервалов u и γ ;
- λ_i – некоторые композиции; хотя бы одна из них непустая. Мы считаем, что эти композиции находятся в граничных точках h - интервалов и v - интервалов. Таким образом, λ_0 находится в начале единичного отрезка, а λ_m – в конце. Если два v - интервала идут подряд, то композиция, разделяющая их, обязательно непустая. Кроме того, композиция, стоящая рядом с v - интервалом не может касаться его числом 1, то есть, крайний со стороны v - интервала символ в композиции должен быть не меньше двух. Композиции λ_i будут называться *разделяющими композициями*.

Следующий элемент $\tilde{u} \in \tilde{U}_0$ состоит из четырех h - интервалов – u_1, u_2, u_3, u_4 и трех v - интервалов – $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Последние два v - интервала находятся рядом друг с другом, но разделены композицией $(3, 1, 5)$. В этом случае $m = 7$ и композиции λ_i следующие:



$$\lambda_0 = (1, 1, 1), \lambda_1 = \emptyset, \lambda_2 = (5, 3), \lambda_3 = (1, 3), \lambda_4 = \lambda_5 = \emptyset, \lambda_6 = (3, 1, 5), \lambda_7 = \emptyset. \quad (1.55)$$

Теперь мы опишем неразложимые полуконечные гармонические функции $\varphi_{\tilde{u}}$, соответствующие $\tilde{u} \in \tilde{U}_0$ и сформулируем основной результат работы.

Теорема 1.2.1. Если φ – полуконечная неразложимая гармоническая функция на графе Гнедина-Кингмана \mathbb{GK} , то φ пропорциональна $\varphi_{\tilde{u}}$ для некоторого $\tilde{u} \in \tilde{U}_0$. Иначе говоря, неразложимые полуконечные гармонические функции на графе Гнедина-Кингмана параметризуются (с точностью до умножения на положительное вещественное число) элементами множества \tilde{U}_0 .

Полуконечная неразложимая гармоническая функция $\varphi_{\tilde{u}}$ задается следующим образом.

Пусть $\tilde{u} = (u, \gamma; \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Введем обозначение $n(\tilde{u}) = |\lambda_0| + |\lambda_1| + \dots + |\lambda_m|$.

Предложение 1.2.1.

$$\varphi_{\tilde{u}}(\lambda) = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{n(\tilde{u})}} \cdot M_{\lambda}^{\circ}(u^{\varepsilon}), & \text{если } \lambda \supseteq \lambda_{\tilde{u}}, \\ 0, & \text{если } \lambda \notin \mathbb{GK}_{\tilde{u}}, \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.56)$$

1.3 Иррегулярные конформные блоки, Пенлеве III и соотношения раздутия

1.3.1 Введение

Соответствие между SFT и изомонодромными деформациями является важной задачей математической физики. Один из главных результатов содержится в [42], где было найдено разложение тау функции уравнения Painlevé VI в виде ряда по $c = 1$ конформным блокам. С другой стороны, в [43] было показано, что регуляризованное действие, вычисленное на решении уравнения Painlevé VI задает $c \rightarrow \infty$, т. е. квазиклассический конформный блок.

В дальнейшем было предложено [44, 45, 46] объяснение этих соответствий посредством соотношений раздутия Накаджимы-Ёшиоки [47, 112], содержащих статсуммы Некрасова при различных значениях параметров Ω -бэкграунда, или конформные блоки с разными центральными зарядами [49].

Мы исследовали эти соотношения для случая уравнения Пенлеве III₃, не используя а priori конструкций из CFT. В частности, мы использовали определение квазиклассического конформного блока, предложенное в [43] для случая Пенлеве VI, в виде регуляризованного функционала действия, вычисленного на решении, и продолжили его на случай вырожденного уравнения - Пенлеве III. Такое функциональное представление оказывается полезно для изучения свойств решения в окрестности дивизора Мальгранжа, хотя в этой части мы лишь воспроизводим формулы, уже полученные в [50] без указания на связь с классическими конформными блоками. Однако, мы показали, что в терминах изонодромных тау функций дивизор Мальгранжа получает прозрачное описание, которое автоматически приводит к соотношениям раздутия, связывающим $c = 1$ and $c \rightarrow \infty$ конформные блоки, которые можно рассматривать как систему уравнений определяющих оба конформных блока.

Мы подчеркиваем, что такой подход позволяет получить довольно сложные соотношения 2d конформной теории, или даже 4d суперсимметричной теории в Ω бэкграунде, пользуясь исключительно методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Более того, как мы убедились, метод обобщается на рассматриваемый нами случай уравнения Пенлеве III, где помимо области $t \rightarrow 0$ имеется область $t \rightarrow \infty$, где большинство ингредиентов соответствия isomonodromy/CFT, таких как статсуммы Некрасова, неизвестны. Следуя [51], мы продолжаем аналитические методы в эту область и получаем аналоги соотношений раздутия для, предположительно, статсумм нелагранжевых теорий. В этой части наша работа пересекается с [52, 53], где соотношения раздутия были доказаны независимо, с использованием другой техники.

Также известно, что $c \rightarrow \infty$ конформные блоки описывают спектры дифференциальных уравнения второго порядка [54, 55], соответствующих квантовомеханической версии интегрируемой системы Зайберга-Виттена [56], так как точные условия квантования записываются в виде квазиклассических конформных блоков. Связь $c = 1$ конформных блоков с 2×2 матричными дифференциальными уравнениями, составляющими соответствующую линейную задачу, возникающая из соответствия isomonodromy/CFT, приводит к идее о том, что соотношения раздутия на конформные блоки могут быть получены из соотношений, связывающих дифференциальные уравнения второго порядка и 2×2 системы, известных уже довольно [57]. Вдохновляясь [58, section 6], мы получаем условия квантования для cosh-/cos-Матё в виде некоторых ограничений на данные монодромии

связанной 2×2 системы, дополненных условием сокращения лишней особенности, которое выражается как зануление Бэкланд преобразованной тау функции. Оказывается, что в случае $t \rightarrow \infty$ квазиклассические конформные блоки описывают теорию возмущений спектра в потенциале косинус. Чтобы установить это соответствие, мы используем выражения данных монодромии в кластерных координатах, получаемые из WKB графов.

Работа состоит из нескольких частей. Сначала мы рассматриваем 2×2 вспомогательную линейную задачу для Пенлеве III и изучаем ее связь с \cosh -/ \cos -Матьё. Соответствующая сингулярность решения Пенлеве на дивизоре Мальгранжа описывается условием зануления тау функции, асимптотические свойства которой изучаются с помощью явных Киевских формул из [59] (доказанных в [60, 61]). Квазиклассический конформный блок определяется из условия зануления тау функции, и, следуя [43] записывается в виде регуляризованного функционала действия. Затем мы получаем соотношения раздутия, большей частью переписывая определение квазиклассического блока.

Следующая часть нашей работы посвящена пределу $t \rightarrow \infty$. Мы пользуемся соответствующим разложением тау функции из [51] и ищем описание для полюсов решения в виде производных некой функции, которая затем отождествляется с "квазиклассическим конформным блоком в бесконечности". Чтобы дать его явное определение, мы пользуемся модифицированной версией функционала действия и затем, как и в случае $t \rightarrow 0$ используем этот функционал, чтобы доказать формулы для производных конформного блока (существование функции с данными частными производными). Мы также доказываем, что квазиклассические блоки в нуле и бесконечности связаны посредством производящей функции канонического преобразования. В завершение этой части мы предлагаем аналоги соотношений раздутия, связывающих " $c = 1$ " и " $c \rightarrow \infty$ " блоки в бесконечности.

Следующая часть посвящена изучению смысла квазиклассических конформных блоков в спектральной теории. Мы обнаруживаем, что подобно общеизвестным описаниям спектра в потенциалах \cos и \cosh в терминах "асимметричных $1-\epsilon$ " статсумм Некрасова, они описывают положения разрешенных областей в спектре потенциала \cos в пределе, когда эти области становятся экспоненциально узкими. Основным инструментом, который здесь используется - точный WKB, показывающий, что координаты из [51] практически совпадают с кластерными координатами, что было также замечено в [62]. В этой части мы также отождествляем одну из тау функций со статсуммой Замолодчикова [63] или спектральным детерминантом из [64]. Это отождествление дает явные интегральные представления для конформных блоков в бесконечности для некоторых специальных значений размерности.

Далее мы устанавливаем связь основных объектов с иррегулярными блоками, полученными из конформной теории, это сделано полностью в пределе $t \rightarrow 0$. Также мы проводим некоторый анализ для $t \rightarrow \infty$, где конформные блоки не имеют определения

в терминах CFT, но тем не менее можно найти поведение корреляторов со вставкой тяжелого вырожденного поля, когда координата этого поля стремится к бесконечности. Это позволяет отождествить регуляризованное действие с коррелятором.

Наконец, мы исследуем случай квантового Painlevé III₃, в решении которого участвуют конформные блоки с произвольным центральным зарядом. Предлагая разложение для квантовой тау функции в бесконечности, мы получаем аналоги $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ соотношений раздутия для $t \rightarrow \infty$ и решаем их порядок за порядком, чтобы найти разложение конформного блока. Мы проверяем, что в обоих пределах, $c = 1$ и $c = \infty$, восстанавливаются уже полученные результаты. Также мы проверяем, что эти общие конформные блоки в бесконечности удовлетворяют соотношениям раздутия типа Накаджимы-Ёшиоки, что поддерживает гипотезу о том, что они - правильные аналоги конформных блоков при $t \rightarrow \infty$.

1.3.2 Решение Пенлеве III и тау функции

Хорошо известно, что гамильтониан Пенлеве III₃ дается логарифмической производной изомодромной тау функции

$$H(w, w'; t) = \frac{tw'^2}{4w^2} + \frac{w}{t} + \frac{1}{w} = \partial_t \log \tau(t), \quad (1.57)$$

которая, в свою очередь, дает решение [60] уравнения PIII₃ по формуле

$$w(t)^{-1} = \partial_t t \partial_t \log \tau(t). \quad (1.58)$$

Для Bäcklund-преобразованного решения $w_1(t) = \frac{t}{w(t)}$ аналог (1.57) имеет вид

$$H(w_1, w'_1; t) = \frac{(tw' - w)^2}{4tw^2} + \frac{w}{t} + \frac{1}{w} = \partial_t \log \tau_1(t), \quad (1.59)$$

вычитая его из (1.57) мы получаем

$$\frac{1}{2} \partial_t \log w(t) - \frac{1}{4t} = \partial_t \log \frac{\tau(t)}{\tau_1(t)}, \quad (1.60)$$

что интегрируется в формулу для решения

$$w(t) = -t^{1/2} \frac{\tau(t)^2}{\tau_1(t)^2}, \quad (1.61)$$

и константа фиксируется из асимптотики.

В нашей работе мы активно используем явные “Киевские формулы” [59]

$$\tau(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{4\pi i n \eta t (\sigma + n)^2} \mathcal{B}(\sigma + n, t)}{G(1 + 2(\sigma + n)) G(1 - 2(\sigma + n))} \quad (1.62)$$

для изомонодромной тау функции $\tau(t)$ и

$$\tau_1(t) = \sum_{n \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}} \frac{e^{4\pi i n \eta} t^{(\sigma+n)^2} \mathcal{B}(\sigma+n, t)}{G(1+2(\sigma+n))G(1-2(\sigma+n))} \quad (1.63)$$

для Bäcklund–преобразованной $\tau_1(t)$, которая отличается от (1.62) только изменением значений индекса суммирования. В (1.62) и (1.63) $\mathcal{B}(\sigma, t)$ обозначают иррегулярные $c = 1$ конформные блоки (нормированные как $\mathcal{B}(\sigma, t) = 1 + O(t)$), или Некрасовские статсуммы в “самодуальном” Ω -бэкграунде для чистой $SU(2)$ суперсимметричной 4d калибровочной теории, а $G(x)$ обозначает функции Барнса.

Параметры $\{\sigma, \eta\}$ в (1.62) и (1.63) - это две константы интегрирования дифференциального уравнения второго порядка, или локальные координаты на пространстве данных монодромии \mathcal{M} для линейной системы, снабженной симплектической формой $\varpi = 4\pi i d\eta \wedge d\sigma$. Для наших целей удобно связать их с асимптотиками решения. Асимптотика тау функции (1.62) для малых положительных $0 < \Re\sigma \ll 1$:

$$\tau(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{\sigma^2} \left(1 - e^{-4\pi i \eta} \frac{\Gamma(2\sigma)^2}{\Gamma(2-2\sigma)^2} t^{-2\sigma+1} + \frac{t}{2\sigma^2} - e^{4\pi i \eta} \frac{\Gamma(-2\sigma)^2}{\Gamma(2+2\sigma)^2} t^{2\sigma+1} \right), \quad (1.64)$$

что дает следующую асимптотику для решения (1.58)

$$w(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\Gamma(1-2\sigma)^2}{\Gamma(2\sigma)^2} \frac{e^{4\pi i \eta} t^{2\sigma}}{\left(1 - \frac{\Gamma(1-2\sigma)^2}{\Gamma(1+2\sigma)^2} e^{4\pi i \eta} t^{2\sigma} \right)^2} = -\kappa t^{2\sigma} + O(t^{2\sigma}), \quad (1.65)$$

где $\kappa = e^{4\pi i \eta} \frac{\Gamma(1-2\sigma)^2}{\Gamma(2\sigma)^2}$, и мы сохраняем *все* порядки по $t^{2\sigma}$, но только нулевой порядок по целым степеням t . В этом пределе $w(t)$ удовлетворяет предельному автономному уравнению Лиувилля с сохраняющейся энергией $\frac{(tw')^2}{4w^2} + w = \sigma^2$.

1.3.3 Зануление тау функции

Ряд (1.62) для $\tau(t)$ сходится во всем \mathbb{C}_t^* , изомонодромная тау функция не имеет полюсов как функция (t, η) . Следовательно, все полюса решения $w(t)$ - это нули $\tau_1(\eta, \sigma, t)$, соответствующий локус называется *дивизором Мальгранжа*. Он описывает ситуацию, когда Bäcklund–преобразованная задача Римана-Гильберта не имеет решения.

Ограничение переменных на дивизор Мальгранжа мы обозначаем с помощью \star , например

$$\tau_1(\eta_\star(\sigma, t), \sigma, t) = 0, \quad (1.66)$$

or

$$\begin{aligned} \tau_1(\eta, \sigma, t_\star(\eta, \sigma)) = \tau_{1\star} = 0, \quad \tau_\star(\sigma, t) = \tau(\eta_\star, \sigma, t), \\ (\partial_t \tau_1)_\star(\sigma, t) = \partial_t \tau_1|_\star(\sigma, t) = (\partial_t \tau_1(\eta, \sigma, t))|_{\eta=\eta_\star(\sigma, t)}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Теперь рассмотрим асимптотику $w(t)$ в окрестности полюса. Можно получить:

$$\pm t^{1/4} \frac{\tau(\eta, \sigma, t)}{\tau_1(\eta, \sigma, t)} = \frac{t_\star}{t - t_\star} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} (t_\star^{-1} + 2H_\star) (t - t_\star) + o(t - t_\star). \quad (1.68)$$

Раскладывая левую часть мы получаем некоторые соотношения между тау функциями и их производными, скажем, в лидирующем порядке:

$$\tau_\star = \pm t_\star^{3/4} (\partial_t \tau_1)_\star. \quad (1.69)$$

Теперь будем искать of $\eta_\star(\sigma, t)$. Чтобы сделать это, мы подставляем анзац

$$\begin{aligned} e^{2\pi i \eta_\star} &= \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{F}(\sigma, t)}{\partial \sigma}\right) = -\frac{\Gamma(1+2\sigma)}{\Gamma(1-2\sigma)} t^{-\sigma} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\partial f(\sigma, t)}{\partial \sigma}\right) = \\ &= -\frac{\Gamma(1+2\sigma)}{\Gamma(1-2\sigma)} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\partial f_{cl}(\sigma, t)}{\partial \sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial f(\sigma, t)}{\partial \sigma}\right), \end{aligned} \quad (1.70)$$

в (1.66), где, $f(\sigma, t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(\sigma) t^i$, и получаем

$$f(\sigma, t) = -\frac{2t}{4\sigma^2 - 1} - \frac{(7 + 20\sigma^2)t^2}{4(\sigma^2 - 1)(4\sigma^2 - 1)^3} - \frac{4(144\sigma^4 + 232\sigma^2 + 29)t^3}{3(4\sigma^2 - 1)^5(4\sigma^4 - 13\sigma^2 + 9)} + \dots, \quad (1.71)$$

что совпадает с разложением квазиклассического конформного блока. Другие решени, в силу очевидного из (1.63) $\tau_1(t; \sigma + k, \eta) = e^{-4\pi i k \eta} \tau_1(t; \sigma, \eta)$, даются формулой $\eta = \eta_\star(\sigma + k, t)$ для $k \in \mathbb{Z}$. Также заметим, что мы зафиксировали знак “+” в формуле (1.69).

1.3.4 Конформный блок как функционал действия

Известно [43, 50] что квазиклассический блок может быть представлен в виде регуляризованного действия уравнения Пенлеве, вычисленного на решении. Определим

$$\tilde{f}(\sigma, t_\star) = \int_0^{t_\star} dt \tilde{\mathcal{L}}(w, w', t), \quad (1.72)$$

где

$$\tilde{\mathcal{L}}(w, w', t) = \mathcal{L}(w, w', t) - \frac{2t_\star}{(t - t_\star)^2} - \frac{\sigma^2}{t} \quad (1.73)$$

есть регуляризованный лагранжиан

$$\mathcal{L}(w, w', t) = \frac{t}{4} \left(\frac{w'}{w}\right)^2 - \frac{w}{t} - \frac{1}{w}, \quad (1.74)$$

Регуляризованное действие (1.72) хорошо определено на решении $w(t) = w(t; \sigma, t_\star)$, где константа интегрирования σ фиксируется асимптотикой в нуле, в то время как другая константа фиксируется условием на положение полюса $w(t)$, $t = t_\star$.

Вычислим производные действия (1.72) по t_* и σ . На уравнениях движения вклад вносят только граничные члены, поэтому

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}(\sigma, t_*)}{\partial t_*} &= \tilde{\mathcal{L}}(t_*) + \left(\frac{t}{2} \frac{\partial \log w(t, \sigma, t_*)}{\partial t_*} \frac{\partial \log w(t, \sigma, t_*)}{\partial t} + \frac{2t}{(t-t_*)^2} \right) \Big|_0^{t_*}, \\ \frac{\partial \tilde{f}(\sigma, t_*)}{\partial \sigma} &= \left(\frac{t}{2} \frac{\partial \log w(t, \sigma, t_*)}{\partial \sigma} \frac{\partial \log w(t, \sigma, t_*)}{\partial t} - 2\sigma \log t \right) \Big|_0^{t_*}.\end{aligned}\quad (1.75)$$

Подставляя разложения решения вокруг $t = 0$ и $t = t_*$ мы получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}(\sigma, t_*)}{\partial t_*} &= -H_* - \frac{\sigma^2}{t_*} - \sigma \frac{\partial}{\partial t_*} \log \left(e^{4\pi i \eta_*(\sigma, t_*)} \frac{\Gamma(1-2\sigma)^2}{\Gamma(2\sigma)^2} \right), \\ \frac{\partial \tilde{f}(\sigma, t_*)}{\partial \sigma} &= -2\sigma \log t_* - \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \log \left(e^{4\pi i \eta_*(\sigma, t_*)} \frac{\Gamma(1-2\sigma)^2}{\Gamma(2\sigma)^2} \right).\end{aligned}\quad (1.76)$$

Используя выражение (1.70) для η_* , это можно переписать как

$$\begin{aligned}\frac{\partial (f_{cl} + f)}{\partial \sigma} &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\tilde{f} + \sigma \log \left(e^{4\pi i \eta_*} \frac{\Gamma(1-2\sigma)^2}{\Gamma(1+2\sigma)^2} \right) + (1/4 + \sigma^2) \log t_* + 2\sigma - 1 \right), \\ -H_* + \frac{1}{4t_*} &= \frac{\partial}{\partial t_*} \left(\tilde{f} + \sigma \log \left(e^{4\pi i \eta_*} \frac{\Gamma(1-2\sigma)^2}{\Gamma(1+2\sigma)^2} \right) + (1/4 + \sigma^2) \log t_* + 2\sigma - 1 \right).\end{aligned}\quad (1.77)$$

где правая часть определяет квазиклассический конформный блок, если мы знаем асимптотику \tilde{f} при $t_* \rightarrow 0$.

Чтобы вычислить интеграл (1.72)

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\sigma, t_*) &\underset{t_* \rightarrow 0}{\sim} \int_0^{t_*} dt \left(-\frac{2t_*}{(t-t_*)^2} + t^{-1} \frac{8\sigma^2 (t/t_*)^{2\sigma}}{(1-(t/t_*)^{2\sigma})^2} \right) = \\ &= \frac{2t_*}{t-t_*} - \frac{4\sigma}{(t/t_*)^{2\sigma} - 1} \Big|_0^{t_*} = 1 - 2\sigma\end{aligned}\quad (1.78)$$

в пределе $t_* \rightarrow 0$ мы используем (1.65), выраженное через t_* и σ :

$$w(t, \sigma, t_*) \sim \frac{-\sigma^2 (t/t_*)^{2\sigma}}{(1-(t/t_*)^{2\sigma})^2}.\quad (1.79)$$

Это позволяет окончательно определить квазиклассический конформный блок как

$$f(\sigma, t) = \tilde{f}(\sigma, t) + \sigma \log \left(t^{2\sigma} e^{4\pi i \eta_*} \frac{\Gamma(1-2\sigma)^2}{\Gamma(1+2\sigma)^2} \right) + 2\sigma - 1,\quad (1.80)$$

с условием нормировки $f(\sigma, t)|_{t=0} = 0$. Для производных имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\sigma, t)}{\partial t} &= \frac{\sigma^2}{t} - H_*(\sigma, t), \\ \frac{\partial f(\sigma, t)}{\partial \sigma} &= 4\pi i \eta_*(\sigma, t) + 2\sigma \log t + 2 \log \frac{\Gamma(1-2\sigma)}{\Gamma(1+2\sigma)},\end{aligned}\quad (1.81)$$

это означает, что функция

$$\mathcal{F} = f(\sigma, t) - \sigma^2 \log t + 2 \int_0^\sigma d\sigma' \log \frac{\Gamma(1 + 2\sigma')}{\Gamma(1 - 2\sigma')} = f(\sigma, t) + f_{\text{cl}}(\sigma, t) + f_{\text{pert}}(\sigma, t) \quad (1.82)$$

задает лагранжево подмногообразие (дивизор Мальгранжа)

$$4\pi i \eta_\star = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma}, \quad -H_\star = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \quad (1.83)$$

для 2-формы $4\pi i d\eta \wedge d\sigma - dH \wedge dt$ на 4-мерном пространстве $\mathcal{M} \times \mathbb{C}_t^\star \times \mathbb{C}_H$. Также можно вычислить интеграл в (1.81) явно:

$$f_{\text{pert}}(\sigma, t) = -\log(G(1 + 2\sigma)G(1 - 2\sigma)) + 2\sigma \log \frac{\Gamma(1 + 2\sigma)}{\Gamma(1 - 2\sigma)} - 4\sigma^2 \quad (1.84)$$

1.3.5 Конформные блоки в бесконечности

В [51] было предложено разложение тау функции Painlevé III₃ при $t \rightarrow \infty$

$$\tau^\infty(\rho, \nu, r) = e^{\frac{r^2}{16} r^{\frac{1}{4}}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} C(\nu + in) e^{4\pi i n \rho} e^{(\nu + in)r} r^{\frac{1}{2}(\nu + in)^2} \mathcal{B}^\infty(\nu + in, r), \quad (1.85)$$

где

$$C(\nu) = G(1 + i\nu) 2^{\nu^2} e^{\frac{i\pi\nu^2}{4}} (2\pi)^{-\frac{i\nu}{2}}, \quad t = 2^{-12} r^4, \quad (1.86)$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^\infty(\nu, r) = & 1 + \frac{\nu(2\nu^2 + 1)}{8r} + \frac{\nu^2(4\nu^4 - 16\nu^2 - 11)}{128r^2} + \frac{\nu(8\nu^8 - 108\nu^6 + 402\nu^4 + 269\nu^2 - 24)}{3 \cdot 2^{10} \cdot r^3} + \\ & + \frac{\nu^2(2\nu^{10} - 56\nu^8 + 585\nu^6 - 2326\nu^4 - \frac{7831}{8}\nu^2 + 612)}{3 \cdot 2^{12} \cdot r^4} + \\ & + \frac{\nu(16\nu^{14} - 760\nu^{12} + 14920\nu^{10} - 148220\nu^8 + 654377\nu^6 - \frac{55975}{2}\nu^4 - 382488\nu^2 + 17280)}{15 \cdot 2^{17} \cdot r^5} + O(r^{-6}) \end{aligned} \quad (1.87)$$

- это $c = 1$ иррегулярные “блоки в бесконечности”. В отличие от области $t \rightarrow 0$, эти “конформные блоки” (1.87) еще не имеют определения в СФТ, что не удивительно для решений Painlevé с такими сингулярностями.

Пуассоново отображение из начальных условий [51] дается формулами

$$e^{4\pi i \rho} = \frac{\sin 2\pi \eta}{\sin 2\pi(\sigma + \eta)}, \quad e^{\pi \nu} = \frac{\sin 2\pi \eta}{\sin 2\pi \sigma}, \quad (1.88)$$

так что преобразование Бэкланда отображает $\rho \mapsto \rho + \frac{1}{4}$, $\nu \mapsto \nu + i$. На самом деле можно определить две разные тау функции “в бесконечности”:

$$\begin{aligned} \tau_+^\infty(\rho, \nu, r) &= \tau^\infty(\rho, \nu, r), \\ \tau_-^\infty(\check{\rho}, \nu, r) &= e^{\frac{r^2}{16} r^{\frac{1}{4}}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_-(\nu + in) e^{4\pi i n \check{\rho}} e^{(\nu + in)r} (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} r^{\frac{1}{2}(\nu + in)^2} \mathcal{B}^\infty(\nu + in, r), \end{aligned} \quad (1.89)$$

где

$$C_{\pm}(\nu) = G(1 \pm i\nu)2^{\nu^2} e^{\frac{i\pi\nu^2}{4}} (2\pi)^{-\frac{i\nu}{2}}. \quad (1.90)$$

Из тождества для функций Барнса, следует соотношение

$$\tau_+^{\infty}(\rho, \nu, r) = \frac{G(1+i\nu)}{G(1-i\nu)} \tau_-^{\infty}(\check{\rho}, \nu, r) \quad (1.91)$$

после подстановки

$$e^{4\pi i \check{\rho}} = e^{4\pi i \rho} \frac{\sin i\pi\nu}{\pi} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\sin 2\pi(\sigma - \eta)}{\sin 2\pi\sigma} \quad (1.92)$$

для $\nu \notin i\mathbb{Z}$, см. ниже. Полезно переписать выражение (1.85) как

$$\begin{aligned} \tau^{\infty}(\rho, \nu, r) &= r^{\frac{\nu^2}{2} + \frac{1}{4}} e^{\frac{r^2}{16} + \nu r} \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(\nu) e^{4\pi i n(\rho + \rho_0)} e^{inr} r^{i\nu n - \frac{n^2}{2}} \mathcal{B}^{\infty}(\nu + in, r) = \\ &= r^{\frac{\nu^2}{2} + \frac{1}{4}} e^{\frac{r^2}{16} + \nu r} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(e^{4\pi i(\rho + \rho_0)} e^{ir} r^{i\nu - \frac{1}{2}} \right)^n r^{-n(n-1)/2} C_n(\nu) \mathcal{B}^{\infty}(\nu + in, r) = \\ &= r^{\frac{\nu^2}{2} + \frac{1}{4}} e^{\frac{r^2}{16} + \nu r} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{X}^n r^{-n(n-1)/2} C_n(\nu) \mathcal{B}^{\infty}(\nu + in, r) \end{aligned} \quad (1.93)$$

где

$$\mathcal{X} = e^{4\pi i(\rho + \rho_0)} e^{ir} r^{i\tilde{\nu}}, \quad e^{4\pi i \rho_0} = \frac{\sqrt{2\pi} 2^{2i\tilde{\nu}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tilde{\nu}\right) e^{\frac{\pi\tilde{\nu}}{2}}}, \quad \tilde{\nu} = \nu + i/2. \quad (1.94)$$

Перенормированные константы - это

$$C_n(\nu) = \frac{C(\nu + in)}{C(\nu)} e^{-4\pi i \rho_0 n}, \quad (1.95)$$

например,

$$\begin{aligned} \dots, \quad C_{-2}(\nu) &= \frac{\nu^2(\nu - i)}{64}, \quad C_{-1}(\nu) = \frac{\nu}{4}, \quad C_0(\nu) = C_1(\nu) = 1, \\ C_2(\nu) &= \frac{\nu + i}{4}, \quad C_3(\nu) = \frac{(\nu + i)^2(\nu + 2i)}{64}, \quad \dots \end{aligned} \quad (1.96)$$

В этих терминах решение РШЗ имеет вид

$$\begin{aligned} w(r) &= 2^{-6} r^2 \left(\frac{\tau^{\infty}(\rho, \nu, r)}{\tau^{\infty}(\rho + \frac{1}{4}, \nu, r)} \right)^2 = \\ &= \frac{r^2}{64} \left(\frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{X}^n r^{-n(n-1)/2} C_n(\tilde{\nu} - i/2) \mathcal{B}^{\infty}(\tilde{\nu} - i/2 + in, r)}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \mathcal{X}^n r^{-n(n-1)/2} C_n(\tilde{\nu} - i/2) \mathcal{B}^{\infty}(\tilde{\nu} - i/2 + in, r)} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Мы видим, что знаменатель зануляется в лидирующем порядке по r если $\mathcal{X} = e^{4\pi i(\rho + \rho_0)} e^{ir} r^{i\tilde{\nu}} = 1$. Разложение в (1.93) и (1.97) идет по степеням $\mathcal{X} = e^{4\pi i(\rho + \rho_0)} e^{ir} r^{i\tilde{\nu}}$ и r^{-1} , и мы собираемся, как в (1.64) и (1.65) at $t \rightarrow 0$, рассмотреть ряд по r^{-1} , сохраняя полную зависимость от \mathcal{X} , например

$$\begin{aligned} w(r) &= \frac{r^2}{64} \left(\frac{\tau^{\infty}(\rho, \nu, r)}{\tau^{\infty}(\rho + \frac{1}{4}, \nu, r)} \right)^2 = \\ &= \frac{r^2}{64} \left(\frac{1 + \mathcal{X}}{1 - \mathcal{X}} \right)^2 - \frac{r}{128} \frac{(1 + \mathcal{X})(2(\nu + i)\mathcal{X}^4 - (6i\nu^2 - 6\nu - i)\mathcal{X}^2 - 2\nu)}{\mathcal{X}(1 - \mathcal{X})^3} + O(1). \end{aligned} \quad (1.98)$$

Вычисляя гамильтониан из (1.93), получаем

$$tH = \frac{r}{4} \frac{\partial}{\partial r} \log \tau^\infty \underset{r \rightarrow \infty}{=} \frac{r^2}{32} + \frac{r\tilde{\nu}}{4} + \frac{ir(\mathcal{X} - 1)}{8(\mathcal{X} + 1)} + O(1). \quad (1.99)$$

Лидирующий член в (1.98) соответствует решению “сильно связанного” автономного уравнения Тоды с гамильтонианом, не зависящим от ν .

1.4 Квантовое Пенлеве III₃ в бесконечности и произвольный центральный заряд

До сих пор мы рассматривали только иррегулярные конформные блоки на бесконечности с центральными зарядами $c = 1$ (1.87), предложенные в [51], и построили их квазиклассический аналог с $c \rightarrow \infty$. Эти два выражения, естественно, представляют собой всего два аватара общего иррегулярного блока в бесконечности с произвольным $c = 1 + 6Q^2 = 1 + 6\frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2}{\epsilon_1 \epsilon_2}$, или двумя произвольными $\epsilon_{1,2}$ -параметрами Ω -фона. Ниже в этом разделе мы предлагаем определение такого общего иррегулярного блока.

Для этого напомним, во-первых, что $c = 1$ иррегулярные блоки на бесконечности (1.87) были найдены в [51] из требования, что их Фурье-преобразование (1.85) дает решение для Пенлеве III₃. Для обобщения этой идеи для произвольных центральных зарядов мы используем вслед за [65], что общий Ω -бэкграунд соответствует в контексте соответствия между СФТ и изомонодромными деформациями *квантованию*⁴ изначальной деавтономизированной интегрируемой системы.

Следовательно, для построения общих конформных блоков мы переключимся к квантовому уравнению Пенлеве III₃. Удобно начать с основных результатов [65], касающихся квантового q -разностного Пенлеве III₃, а затем взять предел $q \rightarrow 1$ от минимального набора соотношений, который достаточен для определения общих иррегулярных блоков в бесконечности.

1.4.1 q -Пенлеве III₃ и предел $q \rightarrow 1$

Квантовое уравнение q -Пенлеве III₃ [65] на самом деле представляет собой систему двух алгебраических соотношений на операторно-значную функцию $\hat{G}(Z)$:

$$\begin{cases} \hat{G}(Zq^{-1})^{\frac{1}{2}} \hat{G}(Zq)^{\frac{1}{2}} = \frac{\hat{G}(Z) + pZ}{\hat{G}(Z) + p}, \\ \hat{G}(Z) \hat{G}(q^{-1}Z) = p^4 \hat{G}(q^{-1}Z) \hat{G}(Z). \end{cases} \quad (1.100)$$

⁴Не путайте с q -деформацией. Два параметра $\epsilon_{1,2}$ выражаются через параметр сдвига q и мультипликативную константу Планка p . Пределы $q \rightarrow 1$ и $p \rightarrow 1$ независимы, так что можно получить как квантовое или классическое дифференциальное уравнение, так и квантовое или классическое q -разностное уравнение. Квантовые уравнения типа Пенлеве известны уже достаточно давно, см. [66, 67, 68]

Его решение дается отношением квантовых тау-функций.

$$\begin{aligned} \hat{G}(Z)^{\frac{1}{2}} &= \pm p^{\frac{1}{2}} Z^{\frac{1}{4}} \mathcal{T}_3^{-1} \mathcal{T}_1 = \\ &= \pm i p^{\frac{1}{2}} Z^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{n \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}} \hat{s}^n \mathbb{F}_{5d}(\hat{u} q_2^{4n}, q_1 q_2^{-1}, q_2^2 | Z) \right)^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{s}^n \mathbb{F}_{5d}(\hat{u} q_2^{4n}, q_1 q_2^{-1}, q_2^2 | Z), \end{aligned} \quad (1.101)$$

где квантовые тау-функции выглядят как

$$\mathcal{T}_1 = \hat{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{s}^n \mathbb{F}_{5d}(\hat{u} q_2^{4n}, q_1 q_2^{-1}, q_2^2 | Z), \quad \mathcal{T}_3 = i \hat{a} \sum_{n \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}} \hat{s}^n \mathbb{F}_{5d}(\hat{u} q_2^{4n}, q_1 q_2^{-1}, q_2^2 | Z), \quad (1.102)$$

с \mathbb{F}_{5d} являющимся q -деформированными иррегулярными конформными блоками, или пятимерными статсуммами суперсимметричной чистой $SU(2)$ калибровочной теории, включающей также классическую и пертурбативную части, \hat{u} и \hat{s} являются мультипликативными квантовыми каноническими переменными, а $q_1 q_2^{-1}$ и q_2^2 - параметрами Ω -бэкграунда, так что

$$\hat{u} \hat{s} = p^4 \hat{s} \hat{u}, \quad q = q_2^2, \quad p^2 = q_1 q_2, \quad q_2^2 \hat{a} = \hat{a} q_1^{-1} q_2, \quad Z \hat{b} = q_1 q_2 \hat{b} Z, \quad (1.103)$$

т.е. \hat{a} сдвигает параметры Ω -бэкграунда $\{q_i\}$, а значит и центральный заряд, тогда как \hat{b} сдвигает q -изонодромное время Z , а в классическом пределе $p = 1$ мы возвращаемся к самодуальному Ω -бэкграунду. Чтобы доказать, что (1.101) на самом деле является решением (1.100), квантовые тау-функции (1.102) должны удовлетворять некоторым билинейным соотношениям [65]:

$$\underline{\mathcal{T}}_1 \overline{\mathcal{T}}_1 = \mathcal{T}_1^2 + p^2 Z^{1/2} \mathcal{T}_3^2, \quad \underline{\mathcal{T}}_3 \overline{\mathcal{T}}_3 = \mathcal{T}_3^2 + p^2 Z^{1/2} \mathcal{T}_1^2, \quad \overline{\mathcal{T}}_1 \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_1 \overline{\mathcal{T}}_1, \quad \overline{\mathcal{T}}_3 \mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_3 \overline{\mathcal{T}}_3, \quad (1.104)$$

где операции сдвига по времени задаются

$$\begin{aligned} \overline{(q_1, q_2, \hat{u}, \hat{s}, Z, \hat{a}, \hat{b})} &= (q_1, q_2, \hat{u}, \hat{s}, q_2^2 Z, \hat{a} \hat{b}, \hat{b}), \\ \underline{(q_1, q_2, \hat{u}, \hat{s}, Z, \hat{a}, \hat{b})} &= (q_1, q_2, \hat{u}, \hat{s}, q_2^{-2} Z, \hat{a} \hat{b}^{-1}, \hat{b}). \end{aligned} \quad (1.105)$$

Заменив (1.102) на (1.104) и собрав коэффициенты при \hat{s}^k , мы получим⁵ два билинейных уравнения для \mathbb{F}_{5d} :

$$\begin{aligned} &\sum_{2n \in \mathbb{Z}} \mathbb{F}_{5d}(\hat{u} q_1^{4n}, q_1^2, q_1^{-1} q_2 | q_1^2 Z) \mathbb{F}_{5d}(\hat{u} q_2^{4n}, q_1 q_2^{-1}, q_2^2 | q_2^2 Z) = \\ &= (1 - p^2 Z^{1/2}) \sum_{2n \in \mathbb{Z}} \mathbb{F}_{5d}(\hat{u} q_1^{4n}, q_1^2, q_1^{-1} q_2 | Z) \mathbb{F}_{5d}(\hat{u} q_2^{4n}, q_1 q_2^{-1}, q_2^2 | Z) \end{aligned} \quad (1.106)$$

и

$$\begin{aligned} &\sum_{2n \in \mathbb{Z}} \mathbb{F}_{5d}(\hat{u} q_1^{4n}, q_1^2, q_1^{-1} q_2 | q_1 Z) \mathbb{F}_{5d}(\hat{u} q_2^{4n}, q_1 q_2^{-1}, q_2^2 | q_2 Z) = \\ &= \sum_{2n \in \mathbb{Z}} \mathbb{F}_{5d}(\hat{u} q_1^{4n}, q_1^2, q_1^{-1} q_2 | q_1^{-1} Z) \mathbb{F}_{5d}(\hat{u} q_2^{4n}, q_1 q_2^{-1}, q_2^2 | q_2^{-1} Z). \end{aligned} \quad (1.107)$$

⁵Существует небольшое различие между чётным и нечётным k , но в данном случае можно поиграть с целочисленными и полумесячными степенями и упаковать все уравнения в эти два, подробности см. в [69]

Уравнение (1.106) было найдено в [69], и фактически являлось мотивацией к квантовой деформации, другие уравнения из [65] теперь доказаны в [70]. Уравнение (1.107) следует из коммутативности тау-функций, и становится тривиальным для $q_2 = q_1^{-1}$, но все же необходимым в общей ситуации. Соотношения (1.106), (1.107) называются $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ уравнения раздутия, которые не нужно путать с изначальными уравнениями раздутия Накаджимы–Ёшиоки \mathbb{C}^2 [47] ⁶. Чтобы увидеть разницу, можно проверить, что в коммутативном пределе $p \rightarrow 1$ $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ уравнения превращаются в билинейные отношения для конформных блоков с $c = 1$, будучи эквивалентными уравнениям Пенлеве, в то время как уравнения Накаджимы–Ёшиоки превращаются в некоторые соотношения, в том числе, между $c = 1$ и $c \rightarrow \infty$ конформными блоками, как мы уже обсуждали ранее.

В четырёхмерном пределе (1.100).

$$q_1 = e^{\epsilon_1 l_5}, \quad q_2 = e^{\epsilon_2 l_5}, \quad u = e^{2\sigma l_5}, \quad Z = l_5^4 t, \quad \hat{G} = l_5^2 \hat{w}, \quad l_5 \rightarrow 0, \quad \epsilon_2 < 0, \quad \epsilon_1 > 0 \quad (1.108)$$

уравнения раздутия (1.106) (1.107) принимают вид

$$\begin{aligned} \sum_{2n \in \mathbb{Z}} D_{2\epsilon_1, 2\epsilon_2}^2 (F(\sigma + 2n\epsilon_1, 2\epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1 | t), F(\sigma + 2n\epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_2, 2\epsilon_2 | t)) = \\ = -2t^{1/2} \sum_{2n \in \mathbb{Z}} F(\sigma + 2n\epsilon_1, 2\epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1 | t) F(\sigma + 2n\epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_2, 2\epsilon_2 | t), \end{aligned} \quad (1.109)$$

и

$$\sum_{2n \in \mathbb{Z}} D_{2\epsilon_1, 2\epsilon_2}^1 (F(\sigma + 2n\epsilon_1, 2\epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1 | t), F(\sigma + 2n\epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_2, 2\epsilon_2 | t)) = 0, \quad (1.110)$$

соответственно, с $D_{2\epsilon_1, 2\epsilon_2}^k$ логарифмическими несимметричными производными Хироты по t , определенными через

$$f(e^{2\epsilon_1 \xi t}) g(e^{2\epsilon_2 \xi t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} D_{2\epsilon_1, 2\epsilon_2}^k (f, g)(t). \quad (1.111)$$

Уравнения (1.109), (1.110) впервые были выведены еще в [61], они эквивалентны билинейным отношениям Хироты для (квантовой) тау-функции и ее Бэклунд-преобразованной. Получается, что при решении этих двух уравнений можно найти итеративно коэффициенты конформных блоков для $\epsilon_2 \neq -\epsilon_1$.

Квантовое разностное уравнение (1.100) превращается в етырёхмерном пределе в квантовое дифференциальное уравнение:

$$\begin{cases} 4\epsilon_2^2 t \frac{d}{dt} \left(t \frac{d\hat{w}}{dt} \cdot \hat{w}^{-1} \right) = \frac{2t}{\hat{w}} - 2\hat{w}, \\ \left[\hat{w}^{-1}, t \frac{d\hat{w}}{dt} \right] = 2(\epsilon_1 + \epsilon_2). \end{cases} \quad (1.112)$$

⁶Тем не менее, в работах [71, 70] было обнаружено, что иногда уравнения одного типа следуют из уравнений другого типа.

Поскольку классическая версия этого уравнения имела разложение (1.97) в области $t \rightarrow \infty$, то аналогичную формулу мы ожидаем и в квантовом случае, а именно, что решение для (1.112) записывается как

$$\hat{w}(r)^{\frac{1}{2}} = \pm \frac{r}{8} (\mathcal{T}_3^\infty)^{-1} \mathcal{T}_1^\infty, \quad (1.113)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1^\infty &= \hat{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{4\pi i n \hat{\rho}} \mathbf{F}^\infty(\hat{\nu} + 2in\epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_2, 2\epsilon_2 | r), \\ \mathcal{T}_3^\infty &= \hat{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{4\pi i n \hat{\rho}} \mathbf{F}^\infty(\hat{\nu} + 2in\epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_2, 2\epsilon_2 | r), \end{aligned} \quad (1.114)$$

где канонические координаты на “квантовой” \mathcal{M} , $\{\hat{\rho}, \hat{\nu}\}$ или $\{\hat{\eta}, \hat{\sigma}\}$, где $\hat{s} = e^{4\pi i \hat{\eta}}$, соответствующие разложению $t \rightarrow 0$, теперь удовлетворяют следующим коммутационным отношениям:

$$i[\hat{\sigma}, \hat{\eta}] = [\hat{\nu}, \hat{\rho}] = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\pi}. \quad (1.115)$$

Замечание. Было бы интересно сравнить квантовую кластерную алгебру из [65], приводящую к (1.115), с квантованием данных монодромии в [72]. На первый взгляд они кажутся несвязанными, поскольку квантовый тор в [65] имеет параметр p , зависящий от радиуса компактного пятого измерения l_5 , тогда как квантовый тор в [72] имел квантовый параметр вида $e^{i\pi\epsilon_1/\epsilon_2}$, зависящий от центрального заряда. Чтобы увидеть, что эти две конструкции на самом деле описывают одно и то же явление, вычислим монодромию вырожденного поля $\phi_{(1,2)}$ вокруг общего поля с зарядом σ , который равен в соответствии со стандартными аргументами из конформной теории поля, $\text{diag}(\hat{m}_\sigma, \hat{m}_\sigma^{-1})$, где $\hat{m}_\sigma = e^{i\pi\sigma/\epsilon_2}$. Еще одна составляющая всех матриц монодромии это параметр Фурье \hat{s} , и можно проверить, что они удовлетворяют соотношению $\hat{s}\hat{m}_\sigma = e^{-2\pi i \epsilon_1/\epsilon_2} \hat{m}_\sigma \hat{s}$. Это значит, что конструкция [65] на самом деле содержит квантовый тор из [72], т.е. они должны быть связаны друг с другом.

1.4.2 Соотношения раздутия типа $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ и общие иррегулярные блоки в бесконечности

Формулы (1.114) вместе с четырёхмерным пределом (1.104) фактически позволяют записать при $t \rightarrow \infty$ соотношения раздутия. Они довольно похожи на (1.109), (1.110), хотя и с небольшим количеством важных отличий по сравнению со случаем $t \rightarrow 0$. Первое различие происходит из другого относительного знака между Бэклунд-преобразованными тау-функциями из-за другого знака в (1.97) по сравнению с (1.61), в то время как второе различие происходит от того, что при $t \rightarrow \infty$ преобразование Бэклунда это не полупростой сдвиг переменной суммирования $\mathbb{Z} \mapsto \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, а вставка лишнего знакового коэффициента $(-1)^n$. Из-за этих отличий теперь нам нужно сложить соотношения раздутия для ν и для

$\nu + i\epsilon_2$, которые не связаны преобразованием Бэклунда, чтобы получить единую формулу:

$$\sum_{2n \in \mathbb{Z}} D_{2\epsilon_1, 2\epsilon_2}^1 (\mathbf{F}^\infty(\nu + 2in\epsilon_1, 2\epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1|r), \mathbf{F}^\infty(\nu + 2in\epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_2, 2\epsilon_2|r)) = 0, \quad (1.116)$$

наряду с

$$\begin{aligned} & \sum_{2n \in \mathbb{Z}} D_{2\epsilon_1, 2\epsilon_2}^2 (\mathbf{F}^\infty(\nu + 2in\epsilon_1, 2\epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1|r), \mathbf{F}^\infty(\nu + 2in\epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_2, 2\epsilon_2|r)) = \\ & = \frac{r^2}{32} \sum_{2n \in \mathbb{Z}} (-1)^{2n} \mathbf{F}^\infty(\nu + 2in\epsilon_1, 2\epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1|r) \mathbf{F}^\infty(\nu + 2in\epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_2, 2\epsilon_2|r), \end{aligned} \quad (1.117)$$

где $D_{2\epsilon_1, 2\epsilon_2}^k$ это те же самые логарифмические производные по t , что и (1.111), переписанные как производные по r с использованием (1.86), и итерационная процедура поиска их решения ⁷ гораздо сложнее.

Чтобы найти иррегулярный блок на бесконечности итеративно, подставляем в (1.116), (1.117) следующий анзац:

$$\mathbf{F}^\infty(\nu, \epsilon_1, \epsilon_2|r) = \mathbf{C}_{\text{cl}}^\infty(\nu + i\bar{\epsilon}, \epsilon_1, \epsilon_2|r) \mathbf{C}_{\text{pert}}^\infty(\nu + i\bar{\epsilon}, \epsilon_1, \epsilon_2) \mathbf{B}^\infty(\nu + i\bar{\epsilon}, \epsilon_1, \epsilon_2|r), \quad (1.118)$$

где ⁸

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &= \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}, \\ \mathbf{C}_{\text{cl}}(\nu, \epsilon_1, \epsilon_2|r) &= \exp\left(-\frac{r^2}{16\epsilon_1\epsilon_2} - \frac{\nu r}{\epsilon_1\epsilon_2} + \frac{\epsilon_1^2 + 4\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2^2 - 4\nu^2}{8\epsilon_1\epsilon_2} \log r\right), \\ \mathbf{C}_{\text{pert}}(\nu, \epsilon_1, \epsilon_2) &= e^{-\frac{\nu^2}{\epsilon_1\epsilon_2}(i\pi/4 + \log 2)} \mathbf{G}(i\nu + (\epsilon_1 - \epsilon_2)/2, \epsilon_1, -\epsilon_2), \end{aligned} \quad (1.119)$$

а \mathbf{G} представляет собой двойную гамма-функцию, определяемую следующими разностными соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(x + \omega_1, \omega_1, \omega_2) &= \Gamma(x, \omega_2) \mathbf{G}(x, \omega_1, \omega_2), \\ \mathbf{G}(x + \omega_2, \omega_1, \omega_2) &= \Gamma(x, \omega_1) \mathbf{G}(x, \omega_1, \omega_2), \\ \Gamma(x + \omega, \omega) &= x\Gamma(x, \omega). \end{aligned} \quad (1.120)$$

Решая уравнения (1.116) и (1.117), мы получаем следующее разложение \mathbf{B}^∞ :

$$\mathbf{B}^\infty(\nu, \epsilon_1, \epsilon_2|r) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{N}_k(\nu, \epsilon_1, \epsilon_2)}{k! \cdot (16\epsilon_1\epsilon_2 r)^k}, \quad (1.121)$$

⁷А именно, в уравнениях $t \rightarrow \infty$ смешиваются члены на одном и том же уровне, но с разными сдвигами ν . Для того, чтобы решить их, мы используем полиномиальный анзац по ν , таким образом, что степень полинома на уровне k - это $3k$, а затем решаем линейную систему на коэффициентам на каждом уровне, но иногда свободный член на уровне k можно получить только из уравнений для уровня $k + 1$.

⁸Этот сдвиг на $i\bar{\epsilon}$ напрямую связан с использованием $\tilde{\nu} = \nu + \frac{i}{2}$ вместо ν во многих формулах раздела 1.3.5.

где $\mathbf{N}(\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ являются однородными полиномами от $\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ общей степени $3k$ с двумя дополнительными симметриями:

$$\mathbf{N}_k(-\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = (-1)^k \mathbf{N}_k(\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad \mathbf{N}_k(\nu, \varepsilon_2, \varepsilon_1) = \mathbf{N}_k(\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2). \quad (1.122)$$

Первый числитель имеет форму

$$\mathbf{N}_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \nu) = 3\varepsilon_1^2\nu + 8\varepsilon_1\varepsilon_2\nu + 3\varepsilon_2^2\nu - 4\nu^3, \quad (1.123)$$

другие формулы можно найти в Приложении 1.7. Мы находим, что в отличие от обычных иррегулярных блоков при $t \rightarrow 0$, здесь уже первый нетривиальный член разложения зависит от центрального заряда⁹.

В обоих известных пределах формула (1.121) воспроизводит $c = 1$

$$\mathbf{B}^\infty(\nu, \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1|r) = \mathcal{B}^\infty(\nu, r) \quad (1.124)$$

выражение, написанное в (1.87), и $c \rightarrow \infty$

$$\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} (\varepsilon_2 \log \mathbf{B}^\infty(\nu, \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2)) = -f^\infty(\nu, r) \quad (1.125)$$

квазиклассический случай. Очередная проверка согласованности была сделана в [73] для блоков, соответствующих $c = -2$ с использованием формализма $c = -2$ тау-функций из [71]. Интересно также отметить, что классические и пертурбативные части из (1.119) почти совпадают с выражениями для $c = 1$ и $c \rightarrow \infty$ с точностью до некоторых тривиальных переопределений.

Можно попытаться найти аналогичные интегральные формулы для других центральных зарядов. Для этого полезно объединить результаты [74], где спектральный детерминант был факторизован в произведение двух множителей, соответствующих нечетным и четным частям спектра, с результатами [71], если бы эти два множителя были идентифицированы с тау-функциями для $c = -2$. Это приводит к явным интегральным представлениям общих иррегулярных блоков (1.121) при $c = -2$ для бесконечной серии специальных точек $\nu \in \frac{i}{2} + i\mathbb{Z}$. Для $n = 1$ имеется следующий набор формул:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^\infty(3i/2, 2, -1, i\mathbf{r}) &= \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{8\pi}} e^{\mathbf{r}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\mathbf{r} \cosh x} \left(1 + \frac{1}{\cosh x} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{2\pi}} e^{\mathbf{r}} \left((1 - \mathbf{r})K_0(\mathbf{r}) - \frac{\pi}{2} (\mathbf{r}K_0(\mathbf{r})\mathbf{L}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{r}K_1(\mathbf{r})\mathbf{L}_0(\mathbf{r}) - 1) \right), \\ \mathbf{B}^\infty(5i/2, 2, -1, i\mathbf{r}) &= \\ &= \sqrt{\frac{8\mathbf{r}^3}{\pi}} e^{\mathbf{r}} \left((1 + \mathbf{r})K_0(\mathbf{r}) + \frac{\pi}{2} (\mathbf{r}K_0(\mathbf{r})\mathbf{L}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{r}K_1(\mathbf{r})\mathbf{L}_0(\mathbf{r}) - 1) \right), \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.126)$$

⁹. То же самое явление происходит в случаях Пенлеве III₁ и Пенлеве III₂, но не происходит для Пенлеве IV и Пенлеве V, мы благодарны X. Нагое за этот комментарий.

где $\mathbf{L}_\alpha(\mathbf{t})$ - модифицированная функция Струве, которая появляется после интегрирования $K_0(\mathbf{t})$, см. [75]. Существуют также некоторые простые отношения, например

$$\mathbf{B}^\infty(0, 1, -1, r) = \mathcal{B}^\infty(0, r) = 1, \quad \mathbf{B}^\infty(i/2, 2, -1, r) = \mathbf{B}^\infty(-i/2, 2, -1, r) = 1. \quad (1.127)$$

1.4.3 Соотношения типа Накаджимы–Ёшиоки в бесконечности

Наконец, давайте проверим, что общие иррегулярные блоки в бесконечности (1.118), как и их аватары из раздела 1.3.5, удовлетворяют аналогам уравнений раздутия Накаджимы–Ёшиоки. Соответствующее неоднородное соотношение имеет вид

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{F}^\infty(\nu + in\epsilon_1, \epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1 | r) \mathbf{F}^\infty(\nu + in\epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 | r) = \text{const} \cdot \mathbf{F}^\infty(\nu, \epsilon_1, \epsilon_2 | r), \quad (1.128)$$

где числовая константа в правой части зависит от нормировок двойных гамма-функций. Для (1.118) на практике это означает, что (1.121) удовлетворяет следующим соотношениям:

$$2\mathbf{B}^\infty(\nu + i(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2, \epsilon_1, \epsilon_2 | r) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n(\nu, \epsilon_1, \epsilon_2) r^{-\frac{1}{2}n(n-1)}. \quad (1.129)$$

$$\cdot \mathbf{B}^\infty(\nu + i\epsilon_2/2 + in\epsilon_1, \epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1 | r) \mathbf{B}^\infty(\nu + i\epsilon_1/2 + in\epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 | r),$$

где

$$\ell_n(\nu, \epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{\mathbf{G}(i\nu + \epsilon_1 - \epsilon_2 - n\epsilon_1, \epsilon_1, \epsilon_1 - \epsilon_2) \mathbf{G}(i\nu - \epsilon_2 - n\epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_2, -\epsilon_2)}{\mathbf{G}(i\nu + \epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_1, \epsilon_1 - \epsilon_2) \mathbf{G}(i\nu - \epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_2, -\epsilon_2)} 2^{n-n^2} e^{i\pi \frac{n-n^2}{4}} \quad (1.130)$$

это некоторые полиномы от $\nu, \epsilon_1, \epsilon_2$.

Для общих блоков (1.118) есть еще три соотношения типа Накаджимы–Ёшиоки, а именно:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \mathbf{F}^\infty(\nu + in\epsilon_1, \epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1 | r) \mathbf{F}^\infty(\nu + in\epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 | r) = 0, \quad (1.131)$$

которые являются ϵ -деформациями условия зануления тау-функции, а также

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_1 \partial_r \mathbf{F}^\infty(\nu + in\epsilon_1, \epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1 | r) \cdot \mathbf{F}^\infty(\nu + in\epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 | r) + \\ & + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{F}^\infty(\nu + in\epsilon_1, \epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1 | r) \cdot \epsilon_2 \partial_r \mathbf{F}^\infty(\nu + in\epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 | r) = 0, \end{aligned} \quad (1.132)$$

которая является ϵ -деформацией уравнения, связывающего логарифмическую производную $c = 1$ тау-функции с производной классических конформных блоков ¹⁰, и

$$\begin{aligned} & 2i(\epsilon_1 - \epsilon_2) \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \partial_r \mathbf{F}^\infty(\nu + in\epsilon_1, \epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1 | r) \cdot \mathbf{F}^\infty(\nu + in\epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 | r) = \\ & = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{F}^\infty(\nu + in\epsilon_1, \epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1 | r) \cdot \mathbf{F}^\infty(\nu + in\epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 | r), \end{aligned} \quad (1.133)$$

¹⁰. Не следует путать эти уравнения с приведенными выше (1.116), так как последние имеют другую связь между ϵ -параметрами конформных блоков.

которое обобщает формулу (1.69), следующую из того, что ведущий коэффициент в полюсе решения зависит только от его положения.

Однако, этот набор уравнений типа Накаджимы–Йошиоки не определяет общий иррегулярный блок, даже если подставить полиномиальный анзац, сохранив все известные симметрии. Например, (1.128) для общих значений параметров Ω -бэкграунда - это соотношение на три различных конформных блоках, со всеми разными центральными зарядами, и итерационная процедура не позволяет зафиксировать все коэффициенты.

Фактически точная форма уравнений (1.128), (1.131), (1.132), (1.133) найдена для уже известных функций F^∞ , так что они превращаются в ϵ -деформации соотношений из раздела 1.3.5. Тем не менее, в работе [70] было показано, что $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ соотношения раздутия следуют из некоторого расширенного набора соотношений Накаджимы–Ёшиоки. Однако в пределе $t \rightarrow \infty$ в данный момент у нас нету оснований для таких отношений, таких как квантовое уравнение Пенлеве, потому аналоги этого расширенного множества при $t \rightarrow \infty$ остаются в числе открытых задач.

1.5 Уравнения тетраэдра и кластерные алгебры

Уравнение тетраэдра введённое Замолотчиковым в [79, 80] является естественным обобщением уравнения Янга-Бакстера на три измерения. Если уравнение Янга-Бакстера - это уравнение операторы, соответствующих пересечениям линий в плоскости, то уравнение тетраэдра описывает тройные пересечения плоскостей в $3d$ пространстве. Аналог RLL уравнения это

$$L_{12,a}L_{13,b}L_{23,c}\mathcal{R}_{abc} = \mathcal{R}_{abc}L_{23,c}L_{13,b}L_{12,a}, \quad (1.134)$$

drawn in Fig. 1.3, left, involves two kinds of spaces, F and V , and two kinds of operators

$$L : V \otimes V \otimes F \rightarrow V \otimes V \otimes F, \quad \mathcal{R} : F \otimes F \otimes F \rightarrow F \otimes F \otimes F. \quad (1.135)$$

Уравнение тетраэдра должно приводить к структурам, которые не менее глубоки и намного красивее, чем уравнение Янга-Бакстера. Его интерпретация как “высшего” аналога уравнения Янга-Бакстера становится понятной, если предположить обратимость \mathcal{R}_{abc} и умножить обе стороны уравнения на \mathcal{R}_{abc}^{-1} справа. Это дает версию уравнения Янга-Бакстера с точностью до сопряжения, т.е. уже не между двумя способами перемножения L -операторов, а их эквивалентность. Рассматривая $L_{ij,x}$ как матрицу, действующую в $V_i \otimes V_j$, с коэффициентами в алгебре $A_x = \text{End}(F_x)$, мы можем переписать Eq. (1.134) как

$$L_{12}(\{v_a\})L_{13}(\{v_b\})L_{23}(\{v_c\}) = L_{23}(\{v'_c\})L_{13}(\{v'_b\})L_{12}(\{v'_a\}), \quad (1.136)$$

где под $\{v_x\}$ мы обозначаем набор генераторов A_x , и $v'_x = \mathcal{R}_{abc} v_x \mathcal{R}_{abc}^{-1}$ - это набор генераторов, сопряжённых $\mathcal{R}_{abc} \in A_a \otimes A_b \otimes A_c$. Поскольку сопряжение является автоморфизмом

алгебры, генераторы v' удовлетворяют тем же отношениям, что и v . Условие ассоциативности сопряжений при помощи \mathcal{R} приводит к функциональному уравнению тетраэдра

$$\mathcal{R}_{cef}\mathcal{R}_{bdf}\mathcal{R}_{ade}\mathcal{R}_{abc} = \mathcal{R}_{abc}\mathcal{R}_{ade}\mathcal{R}_{bdf}\mathcal{R}_{cef}. \quad (1.137)$$

Решение уравнения тетраэдра с $V = \mathbb{C}^2$ и оператор Лакса, со значениями в алгебре q -осциллятора, было найдено в [77, 76]. В классическом пределе решение является матрицей $L_{BS} : \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ имеющим вид

$$L_{BS}(x, y, \lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \mu k & -\lambda \mu x & \\ & y & \lambda k & \\ & & & -\lambda \mu \end{pmatrix}, \quad (1.138)$$

где $k^2 = 1 - xy$ и скобки Пуассона даются выражениями

$$\{x, y\} = k^2, \quad \{x, \lambda\} = \{x, \mu\} = \{y, \lambda\} = \{y, \mu\} = 0. \quad (1.139)$$

Оператор Лакса (1.138) удовлетворяет уравнению тетраэдра (1.136) с преобразованными переменными, дающимися

$$\begin{aligned} x'_a &= k_b'^{-1} \frac{\lambda_b}{\lambda_c} \left(k_c x_a - \frac{1}{\lambda_a \mu_c} k_a x_b y_c \right), & y'_a &= k_b'^{-1} \frac{\lambda_c}{\lambda_b} (k_c y_a - \lambda_a \mu_c k_a y_b x_c), \\ x'_b &= x_a x_c + \frac{1}{\lambda_a \lambda_c} k_a k_c x_b, & y'_b &= y_a y_c + \lambda_a \mu_c k_a k_c y_b, \\ x'_c &= k_b'^{-1} \frac{\mu_b}{\mu_a} \left(k_a x_c - \frac{1}{\lambda_a \mu_c} k_c y_a x_b \right), & y'_c &= k_b'^{-1} \frac{\mu_a}{\mu_b} (k_a y_c - \lambda_a \mu_c k_c x_a y_b), \\ k'_a &= k_a \frac{k_b}{k_b'}, & k'_c &= k_c \frac{k_b}{k_b'}, \\ k_b'^2 &= k_a^2 k_b^2 k_c^2 - 2k_a^2 k_c^2 + k_a^2 + k_c^2 - \frac{k_a k_c y_a x_b y_c}{\lambda_a \mu_c} - \lambda_a \mu_c k_a k_c x_a y_b x_c, \end{aligned} \quad (1.140)$$

Новые переменные (1.140) удовлетворяют тем-же соотношениям, так что преобразование действительно каноническое.

В нашей работе [78] мы показываем, что оператор Лакса (1.138) совпадает с трансформационной матрицей

$$L_{cl} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \gamma_3^{-1} & & & \\ & (\gamma_3 \gamma_4)^{-1} & \gamma_3^{-1} & \\ & \gamma_1 + (\gamma_2 \gamma_3 \gamma_4)^{-1} & (\gamma_2 \gamma_3)^{-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.141)$$

непересекающихся путей в планарной сети с Рис. 1.3. Вспомогательное пространство \mathbb{C}^2 в операторе Лакса мы интерпретируем как пространство, на котором действует трансформационная матрица путей. Матрица L_{cl} совпадает с матрицей Лакса (1.138) после замены

$$L_{BS} = (\sigma_1 \otimes \sigma_1 \circ P) \circ L_{cl} \circ (\sigma_1 \otimes \sigma_1 \circ P) \quad (1.142)$$

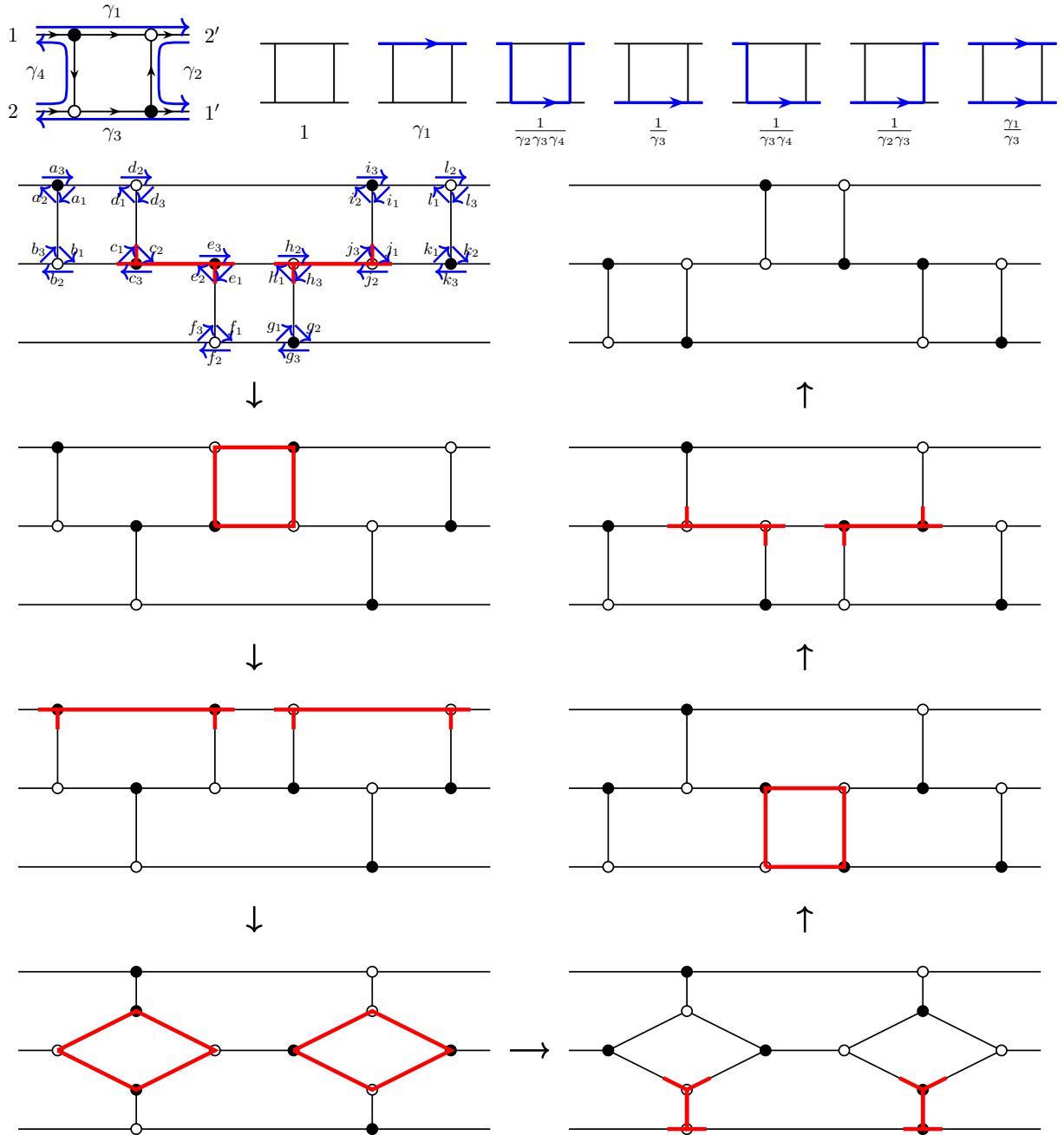


Рисунок 1.3 – Вверху. Четырёхугольный блок, трансфер матрица которого даёт решение Бажанова-Сергеева. Внизу. Последовательность преобразований, дающих преобразование тетраэдра.

где P это матрица перестановки $P(u \otimes v) = v \otimes u$, и после отождествления переменных

$$x = \gamma_1^{-1}, \quad y = \gamma_1 + (\gamma_2\gamma_3\gamma_4)^{-1}, \quad \lambda = -i\sqrt{\frac{\gamma_1\gamma_4}{\gamma_2\gamma_3}}, \quad \mu = -i\sqrt{\frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_3\gamma_4}}, \quad k = \frac{i}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4}}. \quad (1.143)$$

Преобразование тетраэдра (1.136) мы интерпретируем как последовательность четырёх 4-движений (и нескольких 2-движений), показанных на рисунке 1.3. Удивительно, что эта

последовательность преобразований хорошо известна в теории кластерных алгебр, однако ранее она не идентифицировалась с решением Бажанова-Сергеева уравнения тетраэдра. Показано также, что преобразование угловых переменных, полученных в результате преобразований сети, согласуется с преобразованиями, данными в Eq. (1.140).

Наше наблюдение позволяет расширить построение оператора Лакса для спиновой ХХЗ-цепочки (имеющей прямоугольный многоугольник Ньютона), который как известно может быть получен свёрткой операторов Лакса (1.138), до интегрируемых систем с произвольным центрально-симметричным многоугольником Ньютона, как на рисунке 1.4. Наконец, мы показываем как такие интегрируемые системы могут быть устроены на симплектическом листе в аффинной группе $\widehat{\text{PGL}}$ и распространяем ее на несимметричные многоугольники Ньютона. Мы также доказываем Лемму, которая показывает обратное: она классифицирует классы сопряжения в двойной аффинной группе Вейля типа A - по ньютоновским полигонам.

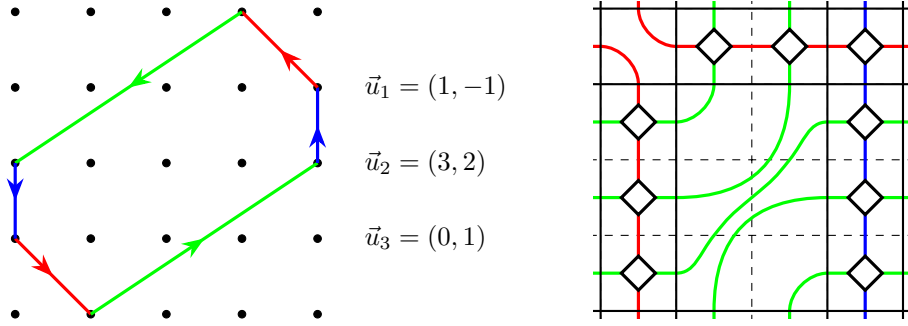


Рисунок 1.4 – Слева. Пример симметричного многоугольника Ньютона. Внизу. Справа. Соответствующая схема свёрток операторов Лакса.

1.6 Твистованные W алгебры

В случае $q = t$ тороидальная алгебра становится универсальной обертывающей алгебры Ли с генераторами $E_{k,l}$, c' , c и соотношением

$$[E_{k,l}, E_{r,s}] = (q^{(sk-lr)/2} - q^{(lr-sk)/2})E_{k+r, l+s} + \delta_{k,-r} \delta_{l,-s} (c'k + cl). \quad (1.144)$$

Обозначим эту алгебру Ли \mathfrak{Diff}_q , так как из этой алгебры существует гомоморфизм в алгебру q -разностных операторов, порожденную D, x с соотношением $Dx = qxD$; а именно $E_{k,l} \mapsto q^{kl/2} x^l D^k$.

Обозначим через $\mathfrak{Diff}_q^{\geq 0}$ подалгебру \mathfrak{Diff}_q , порожденную c и $E_{a,b}$, за $a \geq 0$. Есть еще один набор генераторов $E^k[j]$ лежащий в пополнении $U(\mathfrak{Diff}_q^{\geq 0})$, определенный по формуле

$\sum_{j \in \mathbb{Z}} E^k[j] z^{-j} = (E(z))^k$. Токи $H(z)$ и $E^k(z)$ при $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ удовлетворяют соотношениям q -деформированной W -алгебры \mathfrak{gl}_∞ (см. [81]). Мы обозначаем эту алгебру $\mathcal{W}_q(\mathfrak{gl}_\infty)$.

Есть идеал $J_{\mu,d}^{\geq 0}$ в $U(\mathfrak{Diff}_q^{\geq 0}) = \mathcal{W}_q(\mathfrak{gl}_\infty)$ который действует нулем на любом тензорном произведении $\mathcal{F}_{u_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{u_d}$, здесь $\mu = \frac{1}{1-q}(u_1 \cdots u_d)^{1/n}$. Этот идеал порождается соотношениями $c = d$ и

$$E^d(z) = \mu^d d! \exp(\varphi_-(z)) \exp(\varphi_+(z)), \quad (1.145)$$

где

$$\varphi_-(z) = \sum_{j>0} \frac{q^{-j/2} - q^{j/2}}{j} E_{0,-j} z^j, \quad \varphi_+(z) = - \sum_{j>0} \frac{q^{j/2} - q^{-j/2}}{j} E_{0,j} z^{-j}. \quad (1.146)$$

Фактор алгебра $\mathcal{W}_q(\mathfrak{gl}_\infty)/J_{\mu,d}^{\geq 0}$ - это q -деформированная W -алгебра \mathfrak{gl}_d . Мы обозначаем эту алгебру $\mathcal{W}_q(\mathfrak{gl}_d)$; она не зависит от μ (с точностью, до изоморфизма) и действует на любое тензорное произведение $\mathcal{F}_{u_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{u_d}$ (см. [82], [81]).

Мы изучаем тензорное произведение твистованных фоковских модулей $\mathcal{F}_{u_1}^\sigma \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{u_d}^\sigma$. Мы доказываем, что идеал $J_{\mu,nd,n'd}^{\geq 0}$, который, порождается соотношениями $c = nd$ и

$$E^{nd}(z) = z^{n'd} \mu^{nd} (nd)! \exp(\varphi_-(z)) \exp(\varphi_+(z)) \quad (1.147)$$

действует нулем при $\mu = (-1)^{1/n} \frac{q^{-1/2n}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} (u_1 \cdots u_d)^{1/nd}$. Обозначим фактор алгебру $\mathcal{W}_q(\mathfrak{gl}_\infty)/J_{\mu,nd,n'd}^{\geq 0}$ как $\mathcal{W}_q(\mathfrak{gl}_{nd}, n'd)$ и будем называть ее *твистованной q -деформированной W -алгеброй из \mathfrak{gl}_{nd}* .

Существует еще одно описание вышесказанного с использованием q -деформированной W -алгебры \mathfrak{sl}_n , введенной на сайте [134]. Определим генераторы $T_k[j]$ по формуле.

$$T_k(z) = \sum T_k[j] z^{-j} = \frac{\mu^{-k}}{k!} \exp\left(-\frac{k}{c} \varphi_-(z)\right) E^k(z) \exp\left(-\frac{k}{c} \varphi_+(z)\right). \quad (1.148)$$

Генераторы $T_k[j]$ являются элементами локализации пополнения $U(\mathfrak{Diff}_q^{\geq 0})$. Эти генераторы коммутируют с H_i и удовлетворяют некоторым квадратичным соотношениям. Алгебра порожденная $T_k[j]$ обозначается $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$.

В $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$ есть идеал, который действует по нулем на любое тензорное произведение $\mathcal{F}_{u_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{u_d}$. Этот идеал содержит отношения $c = d$, $T_d(z) = 1$, и $T_{d+k}(z) = 0$ для $k > 0$. Фактором по этому идеалу является стандартная W -алгебра $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_d)$ [134]. Мы получаем связь $\mathcal{W}_q(\mathfrak{gl}_d) = \mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_d) \otimes U(\mathfrak{Heis})$, где \mathfrak{Heis} - это алгебра Гейзенберга, генерируемая $E_{0,j}$.

В случае с произведением твистованных Фоковских модулей $\mathcal{F}_{u_1}^\sigma \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{u_d}^\sigma$ ситуация похожа. Соответствующий идеал содержит соотношения $T_{nd}(z) = z^{n'd}$, $T_{nd+k}(z) = 0$ для $k > 0$. Фактор можно задать в терминах образующих $T_1(z), \dots, T_{nd}(z)$ и некоторых соотношений. Алгебру с такими генераторами и соотношениями мы называем твистованной

W -алгеброй $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_{nd}, n'd)$.¹¹ Квадратические соотношения в алгебре $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_{nd}, n'd)$ те же, что и в не твистованном случае, единственное отличие лежит в соотношении $T_{nd}(z) = z^{n'd}$. Алгебра $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_{nd}, n'd)$ имеет градуировку $\deg T_k[j] = j + \frac{n'k}{n}$. Переименуем генераторы следующим образом $T_k^{tw}[r] = T_k[r - \frac{n'k}{n}]$, для $r \in \frac{n'k}{n} + \mathbb{Z}$. Реализации алгебры $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_{nd}, n'd)$ в терминах генераторов $T_k^{tw}[r]$ и презентации алгебры $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_{nd})$ в терминах генераторов $T_k[r]$ даны по одним и тем же формулам, разница только в области значений r . Эвристически можно подумать, что $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_{nd}, n'd)$ - это та же алгебра, что и $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_{nd})$, но порожденная токами имеющими нетривиальную монодромность около нуля. Для более подробного объяснения этих результатов рассмотрим пример \mathfrak{sl}_2 .

Пример 1.6.1. В качестве разминки рассмотрим нетвистованный случай $n' = 0$. Алгебра $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_2)$ - это деформированная в алгебра q -Вирасоро [85]. Она имеет один генерирующий ток $T(z) = T_1(z)$ и соотношение имеет вид

$$\sum_{l=0}^{\infty} f[l] \left(T[r-l] T[s+l] - T[s-l] T[r+l] \right) = -2r(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})^2 \delta_{r+s,0}, \quad (1.149)$$

где $f[l]$ - коэффициенты ряда $\sum_{l=0}^{\infty} f[l]x^l = \sqrt{(1-qx)(1-q^{-1}x)}/(1-x)$. Эта алгебра имеет стандартную бозонизацию [85].

$$T(z) = -(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})z \left[u : \exp(\eta(q^{1/2}z) - \eta(q^{-1/2}z)) : + u^{-1} : \exp(\eta(q^{-1/2}z) - \eta(q^{1/2}z)) : \right], \quad (1.150)$$

где $\eta(z) = \sum_{k \neq 0} \eta[k]z^{-k}/k$ и $\eta[k]$ - это генераторы алгебры Гейзенберга $[\eta[k_1], \eta[k_2]] = \frac{1}{2}k_1\delta_{k_1+k_2,0}$; также можно добавить $\eta[0]$, связанный с параметром u . С точки зрения тороидальной алгебры \mathfrak{Diff}_q эта формула соответствует тензорному произведению двух фоковских модулей $\mathcal{F}_{u_1} \otimes \mathcal{F}_{u_2}$, здесь $u^2 = u_1/u_2$.

Пример 1.6.2. Теперь рассмотрим твистованный случай $n' = 1$. Алгебра $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_2, 1)$ генерируется одним током $T^{tw}(z) = T_1^{tw}(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} T_1^{tw}[r]z^{-r}$. Генераторы $T^{tw}[r] = T_1^{tw}[r]$ удовлетворяют соотношению (1.149). Алгебра $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_2, 1)$ называется твистованная q -деформированная алгебра Вирасоро.

Как объяснялось выше, представления $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_2, 1)$ происходят из твистованных фоковских модулей $\mathcal{F}_u^{(1,2)}$. Бозонизация твистованного фоковского модуля приводит к бозонизации $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_2, 1)$. Используя наши предыдущие результаты мы получаем

$$T^{tw}(z) = (q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}) \left[z^{1/2} : \exp(\eta(q^{1/2}z) + \eta(q^{-1/2}z)) \dots : + z^{3/2} : \exp(-\eta(q^{1/2}z) - \eta(q^{-1/2}z)) \right]. \quad (1.151)$$

¹¹Можно найти определение $\mathcal{W}_{q,p}(\mathfrak{sl}_2, 1)$ в [84, (37)–(38)].

С другой стороны мы можем получить странную бозонизацию

$$T^{tw}(z) = (-1)^{\frac{1}{2}} \frac{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{2(q^{\frac{1}{4}} - q^{-\frac{1}{4}})} z^{\frac{1}{2}} \left[: \exp \left(\sum_{2|r} \frac{q^{-\frac{r}{4}} - q^{\frac{r}{4}}}{r} J_r z^{-\frac{r}{2}} \right) - : \exp \left(\sum_{2|r} \frac{q^{\frac{r}{4}} - q^{-\frac{r}{4}}}{r} J_r z^{-\frac{r}{2}} \right) : \right]. \quad (1.152)$$

Здесь $\eta(z) = \sum_{k \neq 0} \eta[k] z^{-k}/k + Q + \eta[0] \log z$, а J_r - моды нечетной алгебры Гейзенберга, $[J_r, J_s] = r\delta_{r+s,0}$. Эти формулы для бозонизации, вероятно, являются новыми.

Пример 1.6.3. Также можно использовать вложение $\mathfrak{Diff}_{q^{1/n}}^\Lambda \subset \mathfrak{Diff}_{q^{1/n}}$ для построения бозонизации W -алгебр. А именно, можно взять представление $\mathfrak{Diff}_{q^{1/n}}$ с известной бозонизацией, а затем выразить W -алгебру, связанную с $\mathfrak{Diff}_q = \mathfrak{Diff}_{q^{1/n}}^\Lambda$ в терминах этих бозонов.

Например, рассмотрим Λ , порожденную $v_1 = e_1, v_2 = 2e_2$ и фоковские представления $\mathcal{F}_{u^{1/2}}$ алгебры $\mathfrak{Diff}_{q^{1/2}}$. Можно показать, что алгебра $\mathcal{W}_q(\mathfrak{gl}_\infty)$, связанная с $\mathfrak{Diff}_q \cong \mathfrak{Diff}_{q^{1/2}}^\Lambda$ действует на $\mathcal{F}_{u^{1/2}}$ посредством своего фактора $\mathcal{W}_q(\mathfrak{gl}_2)$. Таким образом, мы получаем нечетную (или странную) бозонизацию нетвистованной q -деформированной алгебры Вирасоро $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_2)$.

$$T(z) = \frac{q^{\frac{1}{4}} + q^{-\frac{1}{4}}}{2} \left[: \exp \left(\sum_{2|r} \frac{q^{-\frac{r}{4}} - q^{\frac{r}{4}}}{r} J_r z^{-\frac{r}{2}} \right) : + : \exp \left(\sum_{2|r} \frac{q^{\frac{r}{4}} - q^{-\frac{r}{4}}}{r} J_r z^{-\frac{r}{2}} \right) : \right]. \quad (1.153)$$

Здесь J_r - нечетные моды начального бозона для \mathcal{F}_u . Чётные моды бозона пропадают в формуле, так как он принадлежит $\mathfrak{Heis} \subset \mathfrak{Diff}_{q^{1/2}}^\Lambda$.

Можно показать, что формула (1.153) дает бозонизацию некоторого специального представления $\mathcal{W}_q(\mathfrak{sl}_2)$, а точнее, прямой суммы фоковских модулей (определенных по (1.150)) с параметрами $u = q^{l-1/4}$ для $l \in \mathbb{Z}$.

В конформном пределе $q \rightarrow 1$ формула (1.153) переходит в нечетную бозонизацию алгебры Вирасоро $L_k = \frac{1}{4} \cdot \sum_{\frac{1}{2}(r+s)=k} : J_r J_s : + \frac{1}{16} \delta_{k,0}$, см. например [86].

1.7 Коэффициенты общего конформного блока в бесконечности

Здесь мы представляем первые семь членов разложения общего иррегулярного блока (1.121) на бесконечности:

$$\begin{aligned} B^\infty(\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = & 1 + \frac{N_1(\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2)}{1! \cdot 16\varepsilon_1\varepsilon_2 r} + \frac{N_2(\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2)}{2! \cdot (16\varepsilon_1\varepsilon_2 r)^2} + \frac{N_3(\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2)}{3! \cdot (16\varepsilon_1\varepsilon_2 r)^3} + \\ & + \frac{N_4(\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2)}{4! \cdot (16\varepsilon_1\varepsilon_2 r)^4} + \frac{N_5(\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2)}{5! \cdot (16\varepsilon_1\varepsilon_2 r)^5} + \frac{N_6(\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2)}{6! \cdot (16\varepsilon_1\varepsilon_2 r)^6} + \frac{N_7(\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2)}{7! \cdot (16\varepsilon_1\varepsilon_2 r)^7} + \dots \end{aligned} \quad (1.154)$$

Они равны следующим выражениям:

$$N_1(\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = 3\varepsilon_1^2\nu + 8\varepsilon_1\varepsilon_2\nu + 3\varepsilon_2^2\nu - 4\nu^3$$

$$\begin{aligned} N_2(\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = & 9\varepsilon_1^5\varepsilon_2 + 48\varepsilon_1^4\varepsilon_2^2 + 78\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3 + 48\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4 + 9\varepsilon_1\varepsilon_2^5 + \\ & 9\varepsilon_1^4\nu^2 - 88\varepsilon_1^3\varepsilon_2\nu^2 - 238\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\nu^2 - 88\varepsilon_1\varepsilon_2^3\nu^2 + 9\varepsilon_2^4\nu^2 - 24\varepsilon_1^2\nu^4 + 16\varepsilon_1\varepsilon_2\nu^4 - 24\varepsilon_2^2\nu^4 + 16\nu^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_3(\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = & 81\varepsilon_1^7\varepsilon_2\nu - 2592\varepsilon_1^6\varepsilon_2^2\nu - 13425\varepsilon_1^5\varepsilon_2^3\nu - 21312\varepsilon_1^4\varepsilon_2^4\nu - \\ & 13425\varepsilon_1^3\varepsilon_2^5\nu - 2592\varepsilon_1^2\varepsilon_2^6\nu + 81\varepsilon_1\varepsilon_2^7\nu + 27\varepsilon_1^6\nu^3 - 1116\varepsilon_1^5\varepsilon_2\nu^3 + 7057\varepsilon_1^4\varepsilon_2^2\nu^3 + 18552\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3\nu^3 + \\ & 7057\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4\nu^3 - 1116\varepsilon_1\varepsilon_2^5\nu^3 + 27\varepsilon_2^6\nu^3 - 108\varepsilon_1^4\nu^5 + 1776\varepsilon_1^3\varepsilon_2\nu^5 + 552\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\nu^5 + 1776\varepsilon_1\varepsilon_2^3\nu^5 - \\ & 108\varepsilon_2^4\nu^5 + 144\varepsilon_1^2\nu^7 - 576\varepsilon_1\varepsilon_2\nu^7 + 144\varepsilon_2^2\nu^7 - 64\nu^9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_4(\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = & 243\varepsilon_1^{10}\varepsilon_2^2 - 44064\varepsilon_1^9\varepsilon_2^3 - 313740\varepsilon_1^8\varepsilon_2^4 - \\ & 831456\varepsilon_1^7\varepsilon_2^5 - 1124046\varepsilon_1^6\varepsilon_2^6 - 831456\varepsilon_1^5\varepsilon_2^7 - 313740\varepsilon_1^4\varepsilon_2^8 - 44064\varepsilon_1^3\varepsilon_2^9 + 243\varepsilon_1^2\varepsilon_2^{10} + 486\varepsilon_1^9\varepsilon_2\nu^2 - \\ & -41040\varepsilon_1^8\varepsilon_2^2\nu^2 + 808128\varepsilon_1^7\varepsilon_2^3\nu^2 + 3941328\varepsilon_1^6\varepsilon_2^4\nu^2 + 6105012\varepsilon_1^5\varepsilon_2^5\nu^2 + \\ & 3941328\varepsilon_1^4\varepsilon_2^6\nu^2 + 808128\varepsilon_1^3\varepsilon_2^7\nu^2 - 41040\varepsilon_1^2\varepsilon_2^8\nu^2 + 486\varepsilon_1\varepsilon_2^9\nu^2 + 81\varepsilon_1^8\nu^4 - 7776\varepsilon_1^7\varepsilon_2\nu^4 + \\ & 206052\varepsilon_1^6\varepsilon_2^2\nu^4 - 830176\varepsilon_1^5\varepsilon_2^3\nu^4 - 2213466\varepsilon_1^4\varepsilon_2^4\nu^4 - 830176\varepsilon_1^3\varepsilon_2^5\nu^4 + \\ & 206052\varepsilon_1^2\varepsilon_2^6\nu^4 - 7776\varepsilon_1\varepsilon_2^7\nu^4 + 81\varepsilon_2^8\nu^4 - 432\varepsilon_1^6\nu^6 + 21312\varepsilon_1^5\varepsilon_2\nu^6 - 210448\varepsilon_1^4\varepsilon_2^2\nu^6 - \\ & 166656\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3\nu^6 - 210448\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4\nu^6 + 21312\varepsilon_1\varepsilon_2^5\nu^6 - 432\varepsilon_2^6\nu^6 + 864\varepsilon_1^4\nu^8 - 19968\varepsilon_1^3\varepsilon_2\nu^8 + \\ & 33216\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\nu^8 - 19968\varepsilon_1\varepsilon_2^3\nu^8 + 864\varepsilon_2^4\nu^8 - 768\varepsilon_1^2\nu^{10} + 5632\varepsilon_1\varepsilon_2\nu^{10} - 768\varepsilon_2^2\nu^{10} + 256\nu^{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_5(\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = & 3645\varepsilon_1^{12}\varepsilon_2\nu - 942840\varepsilon_1^{11}\varepsilon_2^2\nu + 54505737\varepsilon_1^{10}\varepsilon_2^3\nu + \\ & 363517920\varepsilon_1^9\varepsilon_2^4\nu + 918147258\varepsilon_1^8\varepsilon_2^5\nu + 1221269040\varepsilon_1^7\varepsilon_2^6\nu + \\ & 918147258\varepsilon_1^6\varepsilon_2^7\nu + 363517920\varepsilon_1^5\varepsilon_2^8\nu + 54505737\varepsilon_1^4\varepsilon_2^9\nu - \\ & 942840\varepsilon_1^3\varepsilon_2^{10}\nu + 3645\varepsilon_1^2\varepsilon_2^{11}\nu + 2430\varepsilon_1^{11}\varepsilon_2\nu^3 - 374220\varepsilon_1^{10}\varepsilon_2^2\nu^3 + 19525950\varepsilon_1^9\varepsilon_2^3\nu^3 - \\ & 275671824\varepsilon_1^8\varepsilon_2^4\nu^3 - 1287899580\varepsilon_1^7\varepsilon_2^5\nu^3 - 1960171080\varepsilon_1^6\varepsilon_2^6\nu^3 - 1287899580\varepsilon_1^5\varepsilon_2^7\nu^3 - \\ & 275671824\varepsilon_1^4\varepsilon_2^8\nu^3 + 19525950\varepsilon_1^3\varepsilon_2^9\nu^3 - 374220\varepsilon_1^2\varepsilon_2^{10}\nu^3 + 2430\varepsilon_1\varepsilon_2^{11}\nu^3 + 243\varepsilon_1^{10}\nu^5 - \\ & 43200\varepsilon_1^9\varepsilon_2\nu^5 + 2537055\varepsilon_1^8\varepsilon_2^2\nu^5 - 52037920\varepsilon_1^7\varepsilon_2^3\nu^5 + 113231582\varepsilon_1^6\varepsilon_2^4\nu^5 + 333908800\varepsilon_1^5\varepsilon_2^5\nu^5 + \\ & 113231582\varepsilon_1^4\varepsilon_2^6\nu^5 - 52037920\varepsilon_1^3\varepsilon_2^7\nu^5 + 2537055\varepsilon_1^2\varepsilon_2^8\nu^5 - 43200\varepsilon_1\varepsilon_2^9\nu^5 + 243\varepsilon_2^{10}\nu^5 - \\ & 1620\varepsilon_1^8\nu^7 + 164160\varepsilon_1^7\varepsilon_2\nu^7 - 4892880\varepsilon_1^6\varepsilon_2^2\nu^7 + 34381120\varepsilon_1^5\varepsilon_2^3\nu^7 + 36999432\varepsilon_1^4\varepsilon_2^4\nu^7 + \\ & 34381120\varepsilon_1^3\varepsilon_2^5\nu^7 - 4892880\varepsilon_1^2\varepsilon_2^6\nu^7 + 164160\varepsilon_1\varepsilon_2^7\nu^7 - 1620\varepsilon_2^8\nu^7 + 4320\varepsilon_1^6\nu^9 - 253440\varepsilon_1^5\varepsilon_2\nu^9 + \\ & 3337120\varepsilon_1^4\varepsilon_2^2\nu^9 - 2296320\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3\nu^9 + 3337120\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4\nu^9 - 253440\varepsilon_1\varepsilon_2^5\nu^9 + 4320\varepsilon_2^6\nu^9 - \\ & 5760\varepsilon_1^4\nu^{11} + 171520\varepsilon_1^3\varepsilon_2\nu^{11} - 600320\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\nu^{11} + 171520\varepsilon_1\varepsilon_2^3\nu^{11} - 5760\varepsilon_2^4\nu^{11} + 3840\varepsilon_1^2\nu^{13} - \\ & 40960\varepsilon_1\varepsilon_2\nu^{13} + 3840\varepsilon_2^2\nu^{13} - 1024\nu^{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_6(\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = & 10935\varepsilon_1^{15}\varepsilon_2^3 - 6123600\varepsilon_1^{14}\varepsilon_2^4 + 1870567830\varepsilon_1^{13}\varepsilon_2^5 + \\
& 15399920880\varepsilon_1^{12}\varepsilon_2^6 + 51915211065\varepsilon_1^{11}\varepsilon_2^7 + 99666119520\varepsilon_1^{10}\varepsilon_2^8 + 122548253940\varepsilon_1^9\varepsilon_2^9 + \\
& 99666119520\varepsilon_1^8\varepsilon_2^{10} + 51915211065\varepsilon_1^7\varepsilon_2^{11} + 15399920880\varepsilon_1^6\varepsilon_2^{12} + 1870567830\varepsilon_1^5\varepsilon_2^{13} - 6123600\varepsilon_1^4\varepsilon_2^{14} + \\
& 10935\varepsilon_1^3\varepsilon_2^{15} + 32805\varepsilon_1^{14}\varepsilon_2^2\nu^2 - 11518200\varepsilon_1^{13}\varepsilon_2^3\nu^2 + 1355959926\varepsilon_1^{12}\varepsilon_2^4\nu^2 - 48923552664\varepsilon_1^{11}\varepsilon_2^5\nu^2 - \\
& 306706300965\varepsilon_1^{10}\varepsilon_2^6\nu^2 - 743963673456\varepsilon_1^9\varepsilon_2^7\nu^2 - 976770129132\varepsilon_1^8\varepsilon_2^8\nu^2 - 743963673456\varepsilon_1^7\varepsilon_2^9\nu^2 - \\
& 306706300965\varepsilon_1^6\varepsilon_2^{10}\nu^2 - 48923552664\varepsilon_1^5\varepsilon_2^{11}\nu^2 + 1355959926\varepsilon_1^4\varepsilon_2^{12}\nu^2 - 11518200\varepsilon_1^3\varepsilon_2^{13}\nu^2 + \\
& 32805\varepsilon_1^2\varepsilon_2^{14}\nu^2 + 10935\varepsilon_1^{13}\varepsilon_2\nu^4 - 2653560\varepsilon_1^{12}\varepsilon_2^2\nu^4 + 249573150\varepsilon_1^{11}\varepsilon_2^3\nu^4 - 10060239960\varepsilon_1^{10}\varepsilon_2^4\nu^4 + \\
& 101230015113\varepsilon_1^9\varepsilon_2^5\nu^4 + 465473120976\varepsilon_1^8\varepsilon_2^6\nu^4 + 701077918020\varepsilon_1^7\varepsilon_2^7\nu^4 + 465473120976\varepsilon_1^6\varepsilon_2^8\nu^4 + \\
& 101230015113\varepsilon_1^5\varepsilon_2^9\nu^4 - 10060239960\varepsilon_1^4\varepsilon_2^{10}\nu^4 + 249573150\varepsilon_1^3\varepsilon_2^{11}\nu^4 - 2653560\varepsilon_1^2\varepsilon_2^{12}\nu^4 + \\
& 10935\varepsilon_1\varepsilon_2^{13}\nu^4 + 729\varepsilon_1^{12}\nu^6 - 211896\varepsilon_1^{11}\varepsilon_2\nu^6 + 22012614\varepsilon_1^{10}\varepsilon_2^2\nu^6 - 998646360\varepsilon_1^9\varepsilon_2^3\nu^6 + \\
& 16573211767\varepsilon_1^8\varepsilon_2^4\nu^6 - 12533430384\varepsilon_1^7\varepsilon_2^5\nu^6 - 54762121708\varepsilon_1^6\varepsilon_2^6\nu^6 - 12533430384\varepsilon_1^5\varepsilon_2^7\nu^6 + \\
& 16573211767\varepsilon_1^4\varepsilon_2^8\nu^6 - 998646360\varepsilon_1^3\varepsilon_2^9\nu^6 + 22012614\varepsilon_1^2\varepsilon_2^{10}\nu^6 - 211896\varepsilon_1\varepsilon_2^{11}\nu^6 + 729\varepsilon_2^{12}\nu^6 - \\
& 5832\varepsilon_1^{10}\nu^8 + 1017360\varepsilon_1^9\varepsilon_2\nu^8 - 61096680\varepsilon_1^8\varepsilon_2^2\nu^8 + 1387273920\varepsilon_1^7\varepsilon_2^3\nu^8 - 7019554512\varepsilon_1^6\varepsilon_2^4\nu^8 - \\
& 8853922464\varepsilon_1^5\varepsilon_2^5\nu^8 - 7019554512\varepsilon_1^4\varepsilon_2^6\nu^8 + 1387273920\varepsilon_1^3\varepsilon_2^7\nu^8 - 61096680\varepsilon_1^2\varepsilon_2^8\nu^8 + \\
& 1017360\varepsilon_1\varepsilon_2^9\nu^8 - 5832\varepsilon_2^{10}\nu^8 + 19440\varepsilon_1^8\nu^{10} - 2177280\varepsilon_1^7\varepsilon_2\nu^{10} + 73886400\varepsilon_1^6\varepsilon_2^2\nu^{10} - \\
& 694890240\varepsilon_1^5\varepsilon_2^3\nu^{10} + 82687392\varepsilon_1^4\varepsilon_2^4\nu^{10} - 694890240\varepsilon_1^3\varepsilon_2^5\nu^{10} + 73886400\varepsilon_1^2\varepsilon_2^6\nu^{10} - \\
& 2177280\varepsilon_1\varepsilon_2^7\nu^{10} + 19440\varepsilon_2^8\nu^{10} - 34560\varepsilon_1^6\nu^{12} + 2361600\varepsilon_1^5\varepsilon_2\nu^{12} - 38800640\varepsilon_1^4\varepsilon_2^2\nu^{12} + \\
& 78743040\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3\nu^{12} - 38800640\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4\nu^{12} + 2361600\varepsilon_1\varepsilon_2^5\nu^{12} - 34560\varepsilon_2^6\nu^{12} + 34560\varepsilon_1^4\nu^{14} - \\
& 1259520\varepsilon_1^3\varepsilon_2\nu^{14} + 6643200\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\nu^{14} - 1259520\varepsilon_1\varepsilon_2^3\nu^{14} + 34560\varepsilon_2^4\nu^{14} - 18432\varepsilon_1^2\nu^{16} + \\
& 258048\varepsilon_1\varepsilon_2\nu^{16} - 18432\varepsilon_2^2\nu^{16} + 4096\nu^{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_7(\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = & 229635\varepsilon_1^{17}\varepsilon_2^3\nu - 155539440\varepsilon_1^{16}\varepsilon_2^4\nu + 55884131793\varepsilon_1^{15}\varepsilon_2^5\nu \\
& - 5391195581664\varepsilon_1^{14}\varepsilon_2^6\nu - 41384943697797\varepsilon_1^{13}\varepsilon_2^7\nu - 132047280084240\varepsilon_1^{12}\varepsilon_2^8\nu - 245411586797391\varepsilon_1^{11}\varepsilon_2^9\nu - \\
& 298557581216832\varepsilon_1^{10}\varepsilon_2^{10}\nu - 245411586797391\varepsilon_1^9\varepsilon_2^{11}\nu - 132047280084240\varepsilon_1^8\varepsilon_2^{12}\nu - 41384943697797\varepsilon_1^7\varepsilon_2^{13}\nu - \\
& 5391195581664\varepsilon_1^6\varepsilon_2^{14}\nu + 55884131793\varepsilon_1^5\varepsilon_2^{15}\nu - 155539440\varepsilon_1^4\varepsilon_2^{16}\nu + 229635\varepsilon_1^3\varepsilon_2^{17}\nu + 229635\varepsilon_1^6\varepsilon_2^2\nu^3 - \\
& 105632100\varepsilon_1^{15}\varepsilon_2^3\nu^3 + 18965185533\varepsilon_1^{14}\varepsilon_2^4\nu^3 - 1530711243432\varepsilon_1^{13}\varepsilon_2^5\nu^3 + 39264115062519\varepsilon_1^{12}\varepsilon_2^6\nu^3 + \\
& 234925104022308\varepsilon_1^{11}\varepsilon_2^7\nu^3 + 552197105280009\varepsilon_1^{10}\varepsilon_2^8\nu^3 + 717652495077840\varepsilon_1^9\varepsilon_2^9\nu^3 + 552197105280009\varepsilon_1^8\varepsilon_2^{10}\nu^3 + \\
& 234925104022308\varepsilon_1^7\varepsilon_2^{11}\nu^3 + 39264115062519\varepsilon_1^6\varepsilon_2^{12}\nu^3 - 1530711243432\varepsilon_1^5\varepsilon_2^{13}\nu^3 + 18965185533\varepsilon_1^4\varepsilon_2^{14}\nu^3 - \\
& 105632100\varepsilon_1^3\varepsilon_2^{15}\nu^3 + 229635\varepsilon_1^2\varepsilon_2^{16}\nu^3 + 45927\varepsilon_1^{15}\varepsilon_2\nu^5 - 16186716\varepsilon_1^{14}\varepsilon_2^2\nu^5 + \\
& 2366650629\varepsilon_1^{13}\varepsilon_2^3\nu^5 - 174442592520\varepsilon_1^{12}\varepsilon_2^4\nu^5 + 5786660199159\varepsilon_1^{11}\varepsilon_2^5\nu^5 - 38906707376292\varepsilon_1^{10}\varepsilon_2^6\nu^5 - \\
& 182914338354531\varepsilon_1^9\varepsilon_2^7\nu^5 - 274659838097904\varepsilon_1^8\varepsilon_2^8\nu^5 - 182914338354531\varepsilon_1^7\varepsilon_2^9\nu^5 - 38906707376292\varepsilon_1^6\varepsilon_2^{10}\nu^5 + \\
& 5786660199159\varepsilon_1^5\varepsilon_2^{11}\nu^5 - 174442592520\varepsilon_1^4\varepsilon_2^{12}\nu^5 + 2366650629\varepsilon_1^3\varepsilon_2^{13}\nu^5 - 16186716\varepsilon_1^2\varepsilon_2^{14}\nu^5 + \\
& 45927\varepsilon_1\varepsilon_2^{15}\nu^5 + 2187\varepsilon_1^{14}\nu^7 - 959364\varepsilon_1^{13}\varepsilon_2\nu^7 + 156244221\varepsilon_1^{12}\varepsilon_2^2\nu^7 - 12286588104\varepsilon_1^{11}\varepsilon_2^3\nu^7 + \\
& 465501666903\varepsilon_1^{10}\varepsilon_2^4\nu^7 - 6261628992892\varepsilon_1^9\varepsilon_2^5\nu^7 - 1711641220383\varepsilon_1^8\varepsilon_2^6\nu^7 + 7163451093904\varepsilon_1^7\varepsilon_2^7\nu^7 - \\
& 1711641220383\varepsilon_1^6\varepsilon_2^8\nu^7 - 6261628992892\varepsilon_1^5\varepsilon_2^9\nu^7 + 465501666903\varepsilon_1^4\varepsilon_2^{10}\nu^7 - 12286588104\varepsilon_1^3\varepsilon_2^{11}\nu^7 + \\
& 156244221\varepsilon_1^2\varepsilon_2^{12}\nu^7 - 959364\varepsilon_1\varepsilon_2^{13}\nu^7 + 2187\varepsilon_1^2\nu^9 - 20412\varepsilon_1^{12}\nu^9 + 5524848\varepsilon_1^{11}\varepsilon_2\nu^9 - 559381032\varepsilon_1^{10}\varepsilon_2^2\nu^9 + \\
& 25652744880\varepsilon_1^9\varepsilon_2^3\nu^9 - 476390311684\varepsilon_1^8\varepsilon_2^4\nu^9 + 1668037353696\varepsilon_1^7\varepsilon_2^5\nu^9 + 2332861063888\varepsilon_1^6\varepsilon_2^6\nu^9 + \\
& 1668037353696\varepsilon_1^5\varepsilon_2^7\nu^9 - 476390311684\varepsilon_1^4\varepsilon_2^8\nu^9 + 25652744880\varepsilon_1^3\varepsilon_2^9\nu^9 - 559381032\varepsilon_1^2\varepsilon_2^{10}\nu^9 + \\
& 5524848\varepsilon_1\varepsilon_2^{11}\nu^9 - 20412\varepsilon_1^2\nu^9 + 81648\varepsilon_1^{10}\nu^{11} - 15059520\varepsilon_1^9\varepsilon_2\nu^{11} + 968330160\varepsilon_1^8\varepsilon_2^2\nu^{11} - \\
& 24485180160\varepsilon_1^7\varepsilon_2^3\nu^{11} + 174548349024\varepsilon_1^6\varepsilon_2^4\nu^{11} + 43770125952\varepsilon_1^5\varepsilon_2^5\nu^{11} + 174548349024\varepsilon_1^4\varepsilon_2^6\nu^{11} - \\
& 24485180160\varepsilon_1^3\varepsilon_2^7\nu^{11} + 968330160\varepsilon_1^2\varepsilon_2^8\nu^{11} - 15059520\varepsilon_1\varepsilon_2^9\nu^{11} + 81648\varepsilon_2^{10}\nu^{11} - 181440\varepsilon_1^8\nu^{13} + \\
& 22498560\varepsilon_1^7\varepsilon_2\nu^{13} - 863143680\varepsilon_1^6\varepsilon_2^2\nu^{13} + 10046032640\varepsilon_1^5\varepsilon_2^3\nu^{13} - 12006384768\varepsilon_1^4\varepsilon_2^4\nu^{13} + \\
& 10046032640\varepsilon_1^3\varepsilon_2^5\nu^{13} - 863143680\varepsilon_1^2\varepsilon_2^6\nu^{13} + 22498560\varepsilon_1\varepsilon_2^7\nu^{13} - 181440\varepsilon_2^8\nu^{13} + 241920\varepsilon_1^6\nu^{15} - \\
& 18902016\varepsilon_1^5\varepsilon_2\nu^{15} + 372286208\varepsilon_1^4\varepsilon_2^2\nu^{15} - 1227835392\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3\nu^{15} + 372286208\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4\nu^{15} - \\
& 18902016\varepsilon_1\varepsilon_2^5\nu^{15} + 241920\varepsilon_2^6\nu^{15} - 193536\varepsilon_1^4\nu^{17} + 8343552\varepsilon_1^3\varepsilon_2\nu^{17} - 58533888\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\nu^{17} + \\
& 8343552\varepsilon_1\varepsilon_2^3\nu^{17} - 193536\varepsilon_2^4\nu^{17} + 86016\varepsilon_1^2\nu^{19} - 1490944\varepsilon_1\varepsilon_2\nu^{19} + 86016\varepsilon_2^2\nu^{19} - 16384\nu^{21}
\end{aligned}$$

1.8 Киральные дифференциальные операторы как квантование голоморфной σ -модели

Искривленная γ -система представляет собой нелинейную σ -модель с римановой поверхностью в качестве источника и комплексным многообразием X в качестве цели. Ее классические решения выбирают из голоморфных отображений из римановой поверхности в X . Физические аргументы отождествляют ее алгебру операторов с вертексной алгеброй,

известной как киральные дифференциальные операторы (CDO) от X . Василий Горбунов, совместно с О.Гвиллиамом и Б. Уильямсом в [22] проверили эти утверждения математически, построив и строгое квантование этой системы с использованием техники, разработанной Кевином Костелло и Оуэном Гвиллиамом, сочетающий перенормировку, формализм Баталина-Вилковиского, и факторизационные алгебры. Кроме того, установлено, что факторизационная алгебра квантовые наблюдаемые искривленной $\beta\gamma$ -системы кодируют пучок киральных дифференциальных операторов. В этом смысле наш подход обеспечивает деформационное квантование вертексной алгебры. Как и во многих подходах к деформационному квантованию, ключевую роль играет формальная геометрия Гельфанда-Каждана. Начнем с построения квантования $\beta\gamma$ -системы с n -мерным формальным диском в качестве цели. Есть препятствие к квантованию эквивариантно относительно действия формальных векторных полей W_n на целевом диске, и естественно отождествляется с первым классом Понтрягина в Когомологии Гельфанда-Фукса. Таким образом, любая тривиализация коцикла препятствий дает эквивариантное квантование относительно расширения W_n с помощью замкнутых 2-форм на диске. Используя упомянутый выше механизм, мы естественным образом получаем факторизационную алгебру квантовых наблюдаемых, с которой связана вертексная алгебра, легко отождествляемая с формальной вертексной алгеброй $\beta\gamma$. Далее мы представляем версию Формальной геометрии Гельфанда-Каждана, подходящей для факторизационных алгебр, и мы проверяем что для комплексного многообразия X с тривиализированным первым классом Понтрягина ассоциированная факторизационная алгебра восстанавливает вертексную алгебру CDO многообразия X .

1.9 Соотношения открытой топологической рекурсии в роде 1 и интегрируемые системы

Результаты Александра Буряка [12] посвящены соотношениям открытой топологической рекурсии в роде 1, являющимся уравнениями в частных производных, которые гипотетически контролируют открытые инварианты Громова-Виттена в роде 1. Приводится явная формула для произвольного решения, которая аналогична формуле Дайкграафа-Виттена для замкнутого потенциала Громова-Виттена в роде 1. Также доказано, что в приближении до рода 1 экспонента открытого потенциала удовлетворяет системе явно построенных линейных эволюционных уравнений в частных производных с одной пространственной переменной.

1.10 Модель IRF типа Форрестера-Бакстера

В ходе изучения струнных решений алгебраического анзаца Бете для решеточной модели IRF типа Форрестера-Бакстера $(2, 2s + 1)$, найдены решения, соответствующие основному состоянию и первым возбужденным состояниям, вычислена их точная матрица рассеяния. Получены формулы для корреляционных функций локальных операторов на близких расстояниях в низко-температурном пределе, установлена взаимосвязь с известными выражениями для корреляционных функций.

2. 4-мерные многообразия

2.1 Введение

Результаты этого раздела содержатся в основной публикации Б.Л.Фейгина в соавторстве с С.Гуковым [13]. Цель этой статьи - проложить новые пути между топологией и алгеброй, в частности, топологией 4-многообразий и вертексной операторной алгеброй. В то время как различные связи между этими двумя предметами возникли в течение последних 2-3 десятилетий, вопросы топологии, представляющие первостепенный интерес, связанные с операциями хирургии (вырезания и склейки), остаются, на удивление, нетронутыми.

Точно так же, с точки зрения алгебры, многие традиционные связи с топологией полагаются на алгебраические структуры, используемые в качестве входных данных, *например*, алгебры Фробениуса при построении 2d TQFT или модульные тензорные категории при построении 3D TQFT. Однако более поздние исследования предполагают, что такие алгебраические структуры сами могут быть топологическими инвариантами многообразий, так что можно говорить о $\text{VOA}[M_4]$ или $\text{MTC}[M_3]$.

Направление внимания прямо на эти недооцененные аспекты потенциально может быть очень полезным для развития обоих предметов. В частности, мы описываем большой класс вертекс-операторных алгебр (VOA), заданных выбором гладкого 4-многообразия M_4 и системы корней \mathfrak{g} типа ADE.¹ Мы сосредотачиваемся на алгебраических операциях, которые соответствуют операциям вырезания и склейки в топологии, и используем эквивалентности VOA, которые соответствуют различным способам построения одного и того же 4-многообразия в качестве тестов предлагаемого словаря.

Математически проблема, которую мы хотим решить, мотивируется изучением алгебраической структуры, которую можно найти о когомологиях (или К-теории) пространств модулей G -инстантонов на M_4 , где G - компактная группа Ли с $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$. Его цель - обобщить конструкцию Накаджимы для пространств ALE [87] на произвольные 4-многообразия. В частности, когда M_4 - комплексная поверхность, алгебру $\text{VOA}[M_4]$ можно рассматривать как порожденную модификациями Гекке калибровочного расслоения (пучка) вдоль кривых $C_i \subset M_4$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}(-1)|_{C_i} \longrightarrow 0 \quad (2.1)$$

Чтобы подчеркнуть зависимость $\text{VOA}[M_4]$ от выбора системы корней, иногда мы пишем это как $\text{VOA}[M_4, G]$ или $\text{VOA}[M_4, \mathfrak{g}]$, и используем более короткие обозначения, когда эти

¹Чаще всего наши VOA фактически будут *конформными* вертексными алгебрами и / или вертексными *супералгебрами*. Однако, для простоты изложения, мы не будем особо выделять такие дополнительные структуры, если они не станут центром нашего внимания.

дополнительные данные фиксированы и не зависят от контекста. В этой статье мы в основном сосредотачиваемся на случае ранга 1, оставляя подробное обсуждение G более высокого ранга для нашей следующей статьи. Для $G = U(1)$ и произвольного M_4 полное описание $\text{VOA}[M_4, G]$ можно легко извлечь из [88, 89].

Здесь есть как минимум три ингредиента, которые требуют немедленного внимания: пространство модулей \mathcal{M}_n , его когомологии и дополнительные данные ρ . Что касается первого ингредиента, то наиболее естественный кандидат в \mathcal{M}_n , а именно пространство модулей инстантонов на M_4 с $c_2(E) = n$, - некомпактное особое пространство, которое довольно чувствительно к метрике $g(M_4)$, что затрудняет поиск подходящей теории когомологий, которая была бы действительно инвариантной. Несколько лучший кандидат, мотивированный физикой, - это пространство модулей решений уравнений Вафа-Виттена [90] на M_4 . (Отчасти причина того, что это пространство модулей с лучшим поведением, связана с тем, что теория Вафа-Виттена является примером *сбалансированной* топологической теории [91].)

Точно так же нужна подходящая теория когомологий, первым приближением которой являлась бы К-теория. Однако лучшим кандидатом являются когомологии Флоера, основанная на топологическом твисте 5-мерной теории супер-Янга-Миллса [92, 93] который категорифицирует (числовые) инварианты Вафа-Виттена M_4 . Комплекс Флоера в этой пятимерной теории построен путем изучения решений следующих уравнений в частных производных (УрЧП) на $\mathbb{R} \times M_4$:

$$\begin{aligned} F^+ - \frac{1}{4}B \times B - \frac{1}{2}D_t B &= 0 & \text{где } A \in () \\ F_{t\mu} + D^\nu B_{\nu\mu} &= 0 & B \in \Omega_+^2(\text{ad}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

где \mathbb{R} параметризовано “временной” координатой t , F - кривизна калибровочной связности A , а B - самодуальная 2-форма на M_4 . Когда A и B не зависят от t , эти уравнения сводятся к уравнениям Вафа-Виттена на M_4 ; тогда t -компонента A становится ad -значным скаляром на M_4 , обозначаемым C в тексте [90]. Следуя конструкции Флоера [94], цель состоит в том, чтобы использовать такие “стационарные” решения в качестве генераторов комплекса и определить гомологии относительно дифференциала, который “считает” t -зависимые решения, “инстантоны”. Поскольку пространства модулей, участвующие в этой задаче, некомпактны и всегда особы, выполнение этого на практике требует существенной работы, которая в настоящее время ведется, см. например [95, 96, 97, 98].

Наконец, $\rho : \pi_1(\partial M_4) \rightarrow G_{\mathbb{C}}$ обозначает выбор граничного условия, когда M_4 некомпактно. Действительно, граничные условия в теории Вафа-Виттена естественным образом помечаются комплексными плоскими связностями на $M_3 = \partial M_4$. Однако, как мы увидим ниже, лучше рассматривать ρ как элемент в $K^0(\text{MTC}[M_3])$, кольцо Гротендика (модуль-

ной) тензорной категории $\text{MTC}[M_3]$, введенное в [99].

2.2 Трансгрессия и QFT-значные топологические ин- варианты

Физически $\text{VOA}[M_4]$ является киральной алгеброй 2-мерной $\mathcal{N} = (0, 2)$ суперконформной теории $T[M_4]$, введенной в [88] и полученной компактификацией шестимерной $(0, 2)$ пятибрановой теории на 4-многообразии M_4 .

Основная идея компактификации и сопоставления теорий поля многообразиям аналогична операции интегрирования по слоям или прямого образа в математике. Чтобы проиллюстрировать эту параллель, рассмотрим вполне расширенную d -мерную TQFT, которое, согласно (расширению) стандартных аксиом Атьи-Сигала, сопоставляет число замкнутому d -многообразию, векторное пространство – замкнутому $(d - 1)$ -многообразию и так далее, вплоть до $(d - 1)$ - категории, сопоставляемой точке. В этом контексте довольно ясно, что любое замкнутое n -мерное многообразие M_n , с $n \leq d$, определяет TQFT в размерности $d - n$ (*m. e.* функтор из Bord_{d-n}) с помощью "прямого образа"

$$\text{TQFT}_{d-n}(\dots) := \text{TQFT}_d(\dots \times M_n) \quad (2.3)$$

что аналогично вычислению классов когомологий (тривиального) расслоения $M_n \times (\dots)$ вдоль слоя M_n . Другими словами, если мы хотим знать, что функтор TQFT_{d-n} сопоставляет пространству из Bord_{d-n} , мы можем просто взять произведение этого пространства на M_n и применить TQFT_d .

Нетривиальные топологические теории в старших размерностях встречаются довольно редко. Однако можно создать множество многомерных суперсимметричных теорий [100, 101] по крайней мере, “частично топологический” на пространствах до определенной размерности n . В таких случаях по-прежнему применяется версия TQFT редукции, которая определяет топологический инвариант M_n , хотя и принимает значения в QFT, а не в TQFT. Все QFT, относящиеся к нам здесь, являются конформными, как в шести измерениях, так и в двух измерениях после интегрирования по слоям M_4 :

$$2|2\text{-CFT}(\dots) := 6|16\text{-CFT}(\dots \times M_4) \quad (2.4)$$

Хотя шестимерную теорию здесь нельзя сделать полностью топологической, она допускает голоморфное скручивание по 2-мерной поверхности Σ (помимо топологического скручивания по 4-многообразию M_4) что приводит к киральной алгебре $\text{VOA}[M_4]$. В M-теории

соответствующая геометрия выглядит как

$$\begin{array}{rcccl}
 \text{11d space-time:} & T^*\Sigma & \times & \Lambda^{2,+}(M_4) & \\
 & \cup & & \cup & \\
 \text{\(N\) fivebranes:} & \underbrace{\Sigma}_{\text{holomorphic twist}} & \times & \underbrace{M_4}_{\text{topological twist}} & (2.5)
 \end{array}$$

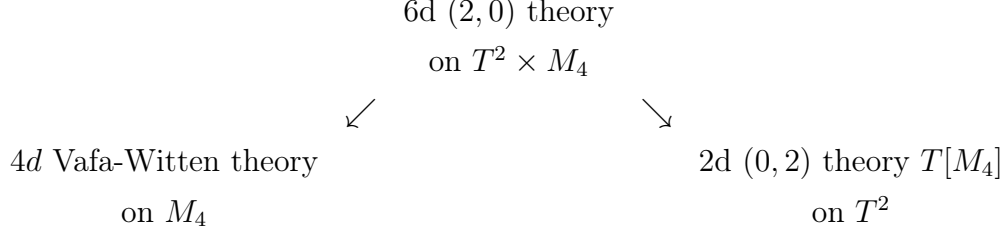
Голоморфные твисты двумерных теорий $(0, 2)$, примерами которых являются $T[M_4]$, имеют довольно долгую историю [102, 103, 104], а обобщения на голоморфные твисты многомерных QFT восходят к работам Йохансена [105, 106, 107] середины 90-х годов.

Этот способ связать двумерную суперконформную теорию с 4-многообразием аналогично так называемому 3d-3d соответствию который связывает 3|4-CFT, называемую $T[M_3]$, с 3-многообразием M_3 (и выбором системы корней). Фактически, 3D-3D-соответствие и теория $T[M_3]$ также будут играть роль в нашей истории, когда мы рассмотрим склейку 4-многообразий вдоль M_3 . И $T[M_4]$, и $T[M_3]$ могут (и должны!) рассматриваться как топологические инварианты, принимающие значения в квантовых теориях поля, из которых более традиционные топологические инварианты можно извлечь, беря различные статистические суммы этих теорий, изучая их гильбертовы пространства, *и т. д.*

Подобно тому, как $\text{VOA}[M_4]$ улавливает "математическое содержание" 2-мерной $\mathcal{N} = (0, 2)$ суперконформной теории $T[M_4]$, модульная тензорная категория $\text{MTC}[M_3]$, упомянутая ранее, отражает математическое содержание $T[M_3]$, относящееся к операциям склейки. Различные конструкции $T[M_4]$ и $T[M_3]$, на которых мы здесь концентрируемся, во многом соответствуют общей идее соответствия BPS / CFT, сформулированной примерно в 2002-2004 гг. [108] (см. также введение в [109]), которые мы надеемся обогатить, соединив последние с двойственностями 2-мерной теории $\mathcal{N} = (0, 2)$ и 3-мерной $\mathcal{N} = 2$. В частности, одна из наших основных целей - описать поведение $\text{VOA}[M_4]$ при операции вырезания и склейки на M_4 и изучить эквивалентности VOA, связанных с разными конструкциями одного и того же 4-многообразия.

Другая цель данной статьи - объединить различные исследования, в которых подобные вертексные алгебры появляются в тесно связанных физических системах, но еще не были явно связаны. Таким образом, некоторые из вертексных алгебр, о которых мы собираемся упомянуть, известны в контексте соответствия BPS/CFT и AGT [110, 111, 112, 113, 114] и одна новинка настоящего подхода состоит в том, чтобы интерпретировать даже эти знакомые примеры как киральные алгебры 2-х суперконформных теорий $T[M_4]$. Излишне говорить, что важно проверить эту предложенную интерпретацию, изучив теории $T[M_4]$ и убедившись, что их киральные алгебры действительно согласуются с обсуждаемыми здесь VOA.

То, как мы представили здесь математические и физические мотивы, делает неочевидным, что они на самом деле описывают одну и ту же проблему. Связь становится более очевидной, если в физической установке мы возьмем $\Sigma = T^2$ и рассмотрим два разные порядка компактификации:



оба описывают одну и ту же статистическую сумму 6d суперконформной теории на $T^2 \times M_4$ и, следовательно, должны дать один и тот же результат. В самом деле, с одной стороны, статистическая сумма теории Вафа-Виттена на M_4 является “декатегоризацией”, *m.e.* градуированной эйлеровой характеристикой \cup_{nn} . И, с другой стороны, эллиптический род 2-мерной $\mathcal{N} = (0, 2)$ суперконформной теории $T[M_4]$ является характером киральной алгебры, который отныне будет нашим основным рабочим определением $\text{VOA}[M_4]$:

$$\chi_\rho(q) := v_\rho q^{L_0 - \frac{c}{24}} = Z_{VW}(M_4, \rho; q) \quad (2.6)$$

Напомним, что в общей 2d $(0, 2)$ суперконформной теории есть левая и правая киральные алгебры, в которые входят $\mathcal{N} = 0$ Вирасоро и $\mathcal{N} = 2$ супер-подалгебры Вирасоро, соответственно, с центральными зарядами c_L и c_R . Алгебра $\mathcal{N} = 2$ в правом секторе также включает суперзаряд \bar{Q}_+ , такой, что только состояния в \bar{Q}_+ кохомологиях вносят вклад в эллиптический род [116]. В результате можно определить эллиптический род 2d $(0, 2)$ суперконформной теории, взяв след по всем состояниям или, что то же самое, по состояниям в кохомологиях \bar{Q}_+ . Обозначая последнее через V или V_ρ в контексте 2d $\mathcal{N} = (0, 2)$ теории $T[M_4]$, мы приходим к нужному отождествлению. Обратите внимание, поскольку левая и правая киральные алгебры коммутируют, V_ρ несет действие левой киральной алгебры, которое мы называем $\text{VOA}[M_4]$.

2.3 Полезные инструменты

Физическая формулировка (2.5) предоставляет как минимум три различных куска ценной информации о нашей $\text{VOA}[M_4]$, которые относительно доступны для общих 4-многообразий (отсортированных здесь от более простых к более сложным):

- центральный заряд c_L $\text{VOA}[M_4]$ или, что то же самое, центральный заряд левого сектора 2d $(0, 2)$ суперконформной теории $T[M_4]$;

M_4	c_L	c_R
S^4	$26 = 2 + 24$	$27 = 3 + 24$
2	57	60
$^{-2}$	21	21
$S^2 \times S^2$	52	54
$m^2 \# n^2$	$26 + 31m - 5n$	$27 + 33m - 6n$
$^1 \times \Sigma_{g,n}$	$2g + 4n + 4$	$6n + 6$
K3	24	12

Таблица 2.1: Central charges of the 2d = (0, 2) superconformal theory $T[M_4, G]$ with $G = SU(2)$ and various M_4 . Of particular interest to us is the value c_L , which is the central charge of the vertex operator algebra $\text{VOA}[M_4]$.

- информация о продукте слияния и модульном действии $SL(2, \mathbb{C})$ на представлении (под) кольце $\text{VOA}[M_4]$, когда M_4 имеет границу;
- характеры модулей над (2.6).

Кратко прокомментируем каждый из трех пунктов.

Центральный заряд $\text{VOA}[M_4]$ унаследован от полной суперконформной теории $T[M_4]$ который содержит как левый, так и правый сектор. Например, для $G = SU(2)$ и общего M_4 (неприводимой голономии) мы имеем

$$c_L = 13\chi + 18\sigma \quad (2.7)$$

где χ и σ - соответственно эйлерова характеристика и сигнатура M_4 . Простые примеры 4-многообразий и соответствующие значения c_L перечислены в таблице.

Второй полезный инструмент, $\text{MTC}[M_3]$, играет роль только при изучении 4-многообразий с краем и в вопросах, связанных со склейками по этим границам, как уже вкратце упоминалось ранее. В частности, существует такое отображение [?, eq. (2.49)] из объектов $\text{MTC}[M_3]$ в модули над $\text{VOA}[M_4]$, что из с точки зрения 5d калибровочной теории на $\mathbb{R} \times M_4$, задает граничные условия объектам $\text{MTC}[M_3]$. А сама $\text{MTC}[M_3]$ является (подкатегорией) представлений нашей киральной алгебры $\text{VOA}[M_4]$. В частности, ее кольцо Гротендика является (подкольцом) кольца представления $\text{VOA}[M_4]$:

$$K^0(\text{MTC}[M_3]) \subseteq \text{Representation ring of VOA}[M_4] \quad (2.8)$$

Следуя [99], его можно вычислить для довольно общих трехмерных многообразий. Конкретно, когда все плоские соединения G

M_3 изолированы, как eg для сферы Пуанкаре $P = -\Sigma(2, 3, 5)$ или более общих трубопроводов, обсуждаемых ниже, мы ожидаем, что простые объекты $\text{MTC}[M_3]$ будут во взаимно однозначном соответствии с представлениями

$$(2.9) \quad \rho : \pi_1(M_3) \rightarrow G$$

с точностью до сопряжения. Например, когда $G = U(N)$ и $M_3 = L(p, 1)$ - пространство линз, мы имеем

$$K^0(\text{MTC}[L(p, 1)]) = \text{Verlinde algebra of } \widehat{\mathfrak{su}}(p)_N \quad (2.10)$$

Чтобы дать другой пример, из другого семейства, рассмотрим 3-многообразие, определенное по следующему трубчатому графу

$$\begin{array}{ccc} & \bullet^{-2} & \\ & | & \\ \bullet^{-2} & \bullet^{-2} & \bullet^{-2} \\ & | & \\ & \bullet^{-2} & \end{array} : \quad \text{MTC}[M_3] = \text{3-fermion model} \quad (2.11)$$

для которой $\text{MTC}[M_3, U(1)]$ - модульная тензорная категория, определяющая фузию и брейдинг в так называемой “ 3-фермионной модели ”, близкая родственница модели торического кода Китаева.

Физически $\text{MTC}[M_3, G]$ можно представить несколькими разными, но эквивалентными способами. С одной стороны, ее можно определить как категорию линейных операторов в 3d $\mathcal{N} = 2$ теории $T[M_3, G]$. С другой стороны, она удобным образом кодирует информацию обо всех топологически скрученных статистических суммах («индексах») 3d $\mathcal{N} = 2$ теории $T[M_3, G]$ на $S^1 \times \Sigma$. В частности, первое описание $\text{MTC}[M_3]$ особенно полезно для понимания его свойств фузии и брейдинга [118], тогда как второе включает матрицы S и T $\text{MTC}[M_3, G]$ критически важным образом, который связан с модульными преобразованиями символов VOA (2.6) для M_4 , ограниченного M_3 .

Наконец, символ (2.6) равен статистической сумме Вафа-Виттена на M_4 [90]. Хотя этот ингредиент предоставляет большую часть информации о VOA[M_4], его также очень трудно вычислить. (См., Однако, [119, 120] о последних достижениях в этой области.) Когда M_4 имеет границу, (2.6) помечается выбором сложной плоской связи ρ или, когда плоские связи изолированы, генератором кольца $K^0(\text{MTC}[M_3])$. В таких случаях модульные

свойства (2.6) могут отличаться от традиционной модульности по принципу [90, 121, 122]. Модульные свойства (2.6) для общих 4-многообразий, ограниченных M_3 , безусловно, заслуживают дальнейшего изучения. Даже когда M_4 не имеет границы, обратите внимание, что V_ρ не обязан быть вакуумным модулем.

2.4 Киральные корреляторы и 4-мерные многообразия

Еще одна мотивация для настоящей работы - новый взгляд на инварианты. Надеемся, это будет стимулировать развитие новых инвариантов 4-мерных многообразий в будущем.

Полезный пример, который следует иметь в виду, особенно когда все становится слишком технически сложным, - это случай $G = U(1)$. Он не только может дать интуитивное представление о $\text{VOA}[M_4, G]$ с неабелевой группой G , но это также может помочь понять, почему вертексные алгебры вообще актуальны. Предположим, например, что вас интересует изучение традиционных калибровочно-теоретических инвариантов M_4 , такие как инварианты Зайберга-Виттена. На первый взгляд, эта проблема не имеет ничего общего с инвариантами Вафа-Виттена, не говоря уже о вертексных алгебрах. Небольшая вариация теории Зайберга-Виттена, в которой имеется несколько спинорных полей Ψ_i , $i = 1, \dots, N_f$:

$$\begin{aligned} F_A^+ &= \sum_{i=1}^{N_f} (\Psi_i \bar{\Psi}_i)^+, \\ / \Psi_i &= 0, \quad i = 1, \dots, N_f, \end{aligned} \tag{2.12}$$

оказывается довольно сложной задачей даже для $G = U(1)$, потому что пространства модулей решений эти PDE некомпактны (и поэтому интегралы по этим пространствам модулей не определены) [123, 124, 125]. К счастью, в этом случае некомпактность легко “вылечить”, работая эквивариантно относительно симметрии $SU(N_f)$, которая действует на Ψ_i очевидным образом. Легко видеть, что множества неподвижных точек этого действия компактны [89]. Следовательно, можно определить соответствующие эквивариантные интегралы, и конечный результат будет функцией эквивариантные параметры z_i , $i = 1, \dots, N_f$.

В нашей формулировке эта проблема выглядит как типичная проблема калибровочной теории и не имеет очевидной связи с вертексными алгебрами, пока мы не вычислим интегралы и не поймем, что как функции от z_i они равны киральным корреляторам в $\text{VOA}[M_4, G]$ с $G = U(1)$. Схематично (подробнее см. [89]),

$$SU(N_f)\text{-equivariant} \int_{N_f} (\dots) = \langle (z_1) \dots (z_{N_f}) \rangle_{\text{VOA}[M_4]} \tag{2.13}$$

Удивительный появление VOA на этом не заканчивается. Для $G = U(1)$ соответствующая вершинная алгебра, а также полная физическая 2d $\mathcal{N} = (0, 2)$ теория $T[M_4]$ легко определяется для любого 4-многообразия M_4 с помощью стандартных правил редукции Калуцы-Клейна. (Результирующий VOA по существу представляет собой решеточную алгебру для $H_2(M_4, \mathbb{Z})$ по модулю некоторой важной детали. Если мы теперь вычислим его эллиптический род, мы получим совершенно другой калибровочно-теоретический инвариант, а именно статистическую сумму Вафа-Виттена для M_4 с $G = U(1)$, *cf.* (2.6). Таким образом, $\text{VOA}[M_4]$ служит естественным пристанищем для, казалось бы, различных и не связанных между собой проблем калибровочной теории.

Наоборот, когда G неабелева, вычисление инвариантов типа Дональдсона-Виттена на основе (2.12) или статистические суммы Вафа-Виттена для данного 4-многообразия M_4 может помочь идентифицировать соответствующую алгебру $\text{VOA}[M_4]$ интерпретируя эти инварианты как киральные корреляторы или характеры соответственно.

3. Анзац Бете в магнитных цепочках и комбинаторика

3.1 Модель Годена и кристаллы Кашивары

Зафиксируем полупростую алгебру Ли \mathfrak{g} . Алгебры Годена - это коммутативные алгебры, действующие на пространствах кратностей тензорного произведения для \mathfrak{g} -представлений. Эти алгебры зависят от параметра, который является точкой в пространстве модулей Делиня-Мамфорда стабильных кривых рода 0 с отмеченными точками. Для вещественных значений параметра алгебра Годена действует с простым спектром в пространстве кратностей тензорного произведения и дает нам базис из собственных векторов. В работе [23] мы изучили монодромию этих собственных векторов при изменении параметра в пределах вещественной части пространства Делиня-Мамфорда; это дает действие фундаментальной группы этого пространства модулей, которая называется группой кактусов.

Доказана гипотеза Этингофа, согласно которой монодромия собственных векторов алгебр Годена согласуется с действием группы кактусов на тензорные произведения \mathfrak{g} -кристаллов. Фактически, мы доказываем, что кограничная категория нормальных \mathfrak{g} -кристаллов может быть восстановлена с помощью накрытий пространств модулей.

Наш основной инструмент - это построение кристаллической структуры на множестве собственных векторов для сдвига алгебр аргументов, еще одного семейства коммутативных алгебр, которые действуют на любое неприводимое \mathfrak{g} -представление. Также доказано, что монодромия таких собственных векторов задается внутренним действием группы кактусов на \mathfrak{g} -кристаллах.

3.2 Квантовая модель Годена и классическая система Калоджеро-Мозера

Антоном Забродиним и соавторами установлено замечательное соответствие между квантовой моделью Годена с границей и классической интегрируемой многочастичной системой типа Калоджеро-Мозера, ассоциированной с системой корней классических алгебр Ли (серий B, C и D). Было показано, что при отождествлении спектра квантовых гамильтонианов Годена H_j^G со скоростями частиц \dot{q}_j в классической модели типа Калоджеро-Мозера все интегралы движения в последней принимают нулевые значения. Это является обобщением ранее установленной квантово-классической дуальности между моделями Годена с периодическими граничными условиями и системами Калоджеро-Мозера, ассоциированными с системами корней типа A.

3.3 Новая многочастичная система с эллиптическим взаимодействием

Были выведены уравнения движения для полюсов эллиптических решений В-версии уравнения Кадомцева-Петвиашвили (В-КП). Основное техническое средство – вспомогательная линейная задача для волновой функции. Были также найдены интегралы движения полученной динамической системы и исследована соответствующая спектральная кривая.

Найденная динамическая система, управляющая динамикой полюсов эллиптических решений уравнения В-КП, – это новая, ранее неизвестная многочастичная (N -частичная) система с эллиптическим взаимодействием. В отличие от системы Калоджеро-Мозера, уравнения движения содержат первые производные по времени, и, кроме того, не только парное, но и трех-частичное взаимодействие.

Метод вывода уравнений движения полюсов сингулярных решений, который был нами использован, был предложен Кричевером. Он заключается в подстановке полюсно-го решения не в нелинейное уравнение, а в подстановке полюсного анзаца для волновой функции во вспомогательную линейную задачу. Этот метод позволяет не только вывести уравнения движения полюсов, но и получить коммутационное представление для них. В случае уравнения В-КП вместо представления Лакса возникает представление в виде тройки Манакова в $N \times N$ матрицах, зависящих от динамических переменных (координат и скоростей) и спектрального параметра.

Наш основной результат заключается в следующем. Пусть решение уравнения В-КП имеет вид

$$u(x, t) = - \sum_{i=1}^N \wp(x - x_i(t)),$$

где \wp – эллиптическая \wp -функция Вейерштрасса. Тогда полюса x_i удовлетворяют следующей системе уравнений движения:

$$\ddot{x}_i + 6 \sum_{j \neq i} (\dot{x}_i + \dot{x}_j) \wp'(x_i - x_j) - 72 \sum_{j \neq k \neq i} \wp(x_i - x_j) \wp'(x_i - x_k) = 0,$$

где точка означает производную по времени. Это новая, ранее неизвестная, динамическая система. Найдены интегралы движения для нее.

3.4 1+1 теория поля Калоджеро-Мозера-Сазерленда и уравнения Ландау-Лифшица

В работе [2] Андреем Зотовым (совместно с К.Аталиковым) получена явная замена переменных между 1+1 теорией поля Калоджеро-Мозера-Сазерленда и уравнениями Ландау-

Лифшица. Конструкция использует описание систем через расслоения Хиггса бесконечного ранга. Основным элементом построения является калибровочное преобразование – модификация расслоений Хиггса, связывающая U-V пары двух моделей, а следовательно, и соответствующие уравнения Захарова-Шабата.

3.4.1 Рациональный случай

Волчок Эйлера в рациональном случае. Используем матрицу Лакса вида

$$L = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(S_{11} - S_{22}) - z^2 S_{12} & S_{12} \\ S_{21} - z^2(S_{11} - S_{22}) - z^4 S_{12} & \frac{1}{2}(S_{22} - S_{11}) + z^2 S_{12} \end{pmatrix} \quad (1.1.1)$$

и скобку Пуассона-Ли

$$\{S_{ij}, S_{kl}\} = S_{il}\delta_{kj} - S_{kj}\delta_{il}, \quad (1.1.2)$$

Гамильтонианы и уравнение движения

$$\dot{S} = \{H, S\} = [J(S), S], \quad (1.1.3)$$

уравнения Лакса

$$\dot{L}(z) = \{H, L(z)\} = [L(z), M(z)] \quad (1.1.4)$$

Подставляя матрицу (1.1.1) в определение производящей функции Гамильтониана

$$\frac{1}{2}Tr(L^2) = \frac{S_{11}^2 + S_{22}^2 - 2S_{11}(4S_{12}z^2 + S_{22}) + 4S_{12}(2S_{22}z^2 + S_{21})}{4z^2} \quad (1.5.1)$$

или

$$\frac{1}{2}Tr(L^2) = -2S_{12}(S_{11} - S_{22}) + \frac{S_{11}^2 - 2S_{11}S_{22} + S_{22}^2 + 4S_{12}S_{21}}{4z^2} = 2H_0 + \frac{H_2}{z^2}. \quad (1.5.2)$$

получаем гамильтонианы, которые являются коэффициентами при степенях z

$$\begin{aligned} H_0 &= -S_{12}(S_{11} - S_{22}) \\ H_2 &= \frac{1}{4}(S_{11}^2 - 2S_{11}S_{22} + S_{22}^2 + 4S_{12}S_{21}) \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

Используя соотношения (1.1.3) и (1.1.2), получаем уравнения движения

$$\begin{cases} \dot{S}_{11} = -\dot{S}_{22} = S_{12}(S_{11} - S_{22}) \\ \dot{S}_{21} = 2S_{12}S_{21} - (S_{11} - S_{22})^2 \\ \dot{S}_{12} = -2S_{12}^2 \end{cases} \quad (1.1.6)$$

Сравнивая уравнения (1.1.6) и (1.1.3), получаем следующую матрицу

$$J(S) = - \begin{pmatrix} S_{12} & 0 \\ S_{11} - S_{22} & -S_{12} \end{pmatrix} \quad (1.1.7)$$

Матрица M :

$$M(z) = \begin{pmatrix} S_{12} & 0 \\ S_{11} - S_{22} + 2z^2 S_{12} & -S_{12} \end{pmatrix} \quad (1.1.8)$$

Если поставить матрицы (1.1.1) и (1.1.8) в уравнение Лакса (1.1.4), то это уравнение Лакса будет эквивалентно системе уравнений (1.1.6). С учётом определения (1.5.3) и (1.1.7), гамильтониан можно представить в следующем виде

$$H_0 = \frac{1}{2} \text{Tr}(SJ(S)). \quad (1.1.9)$$

Система Калоджеро-Мозера в рациональном случае.

Используем матрицу Лакса вида

$$L = \begin{pmatrix} p & \frac{\nu}{2q} - \frac{\nu}{2z} \\ -\frac{\nu}{2z} - \frac{\nu}{2q} & -p \end{pmatrix} \quad (1.2.1)$$

и скобки Пуассона

$$\{p, q\} = 1, \quad \{q, q\} = 0, \quad \{p, p\} = 0 \quad (1.2.2)$$

уравнения Лакса

$$\dot{L}(z) = \{H, L(z)\} = [L(z), M(z)] \quad (1.2.3)$$

Используя соотношения (1.2.1), получаем производящую функцию для гамильтониана

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(L^2) = p^2 - \frac{\nu^2}{4q^2} + \frac{\nu^2}{4z^2} = 2H_0 + \frac{H_2}{z^2} \quad (1.2.4.1)$$

из предыдущего пункта нам известно, что коэффициент при каждой степени спектрального параметра - это отдельный гамильтониан, поэтому Гамильтониан степени z^0 имеет вид

$$H_0 = \frac{p^2}{2} - \frac{\nu^2}{8q^2} \quad (1.2.4.2)$$

а при z^{-2} мы имеем $H_2 = \frac{\nu^2}{4}$. Подставляя, полученный гамильтониан (1.2.4.2) в (1.2.3), получаем уравнения движения

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\nu^2}{4q^3}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \quad (1.2.5)$$

а матрица $M(z)$ будет иметь вид

$$M(z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4q^2} & -\frac{\nu}{4q^2} \\ -\frac{\nu}{4q^2} & -\frac{1}{4q^2} \end{pmatrix} \quad (1.2.6)$$

Если поставить матрицы (1.2.1) и (1.2.6) в уравнение Лакса (1.2.3), то уравнение Лакса будет эквивалентно уравнению (1.2.5).

Взаимосвязь между системами Эйлера и Калоджеро-Мозера. Нам известно, что уравнение Лакса обладает естественной калибровочной инвариантностью, т. е. это уравнение инвариантно относительно преобразований

$$L \rightarrow gLg^{-1}, \quad M \rightarrow gMg^{-1} - \partial_t gg^{-1} \quad (1.3.1)$$

Представим свойство матрицы Лакса (1.3.1) в виде калибровочного преобразования вида

$$L^{\text{top}}(z) = g(z)L^{\text{CM}}(z)g^{-1}(z) \quad (1.3.2)$$

Подставляя определение матрицы калибровочного преобразования

$$g = \Xi(z, q)D^{-1}(q) \quad (1.3.4)$$

где

$$\Xi(z, q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (z+q)^2 & (z-q)^2 \end{pmatrix} \quad (1.3.5.1)$$

и

$$D = 2q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.3.5.2)$$

В итоге матрица перехода (1.3.4) будет иметь следующий вид

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{2q} & -\frac{1}{2q} \\ \frac{(q+z)^2}{2q} & -\frac{(z-q)^2}{2q} \end{pmatrix} \quad (1.3.6.1)$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{(z-q)^2}{2z} & \frac{1}{2z} \\ -\frac{(q+z)^2}{2z} & \frac{1}{2z} \end{pmatrix} \quad (1.3.6.2)$$

Подставляя (1.3.6) и (1.2.1) в (1.3.2), получаем

$$L^{\text{top}} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \quad (1.3.7)$$

где элементы матрицы (1.1.7) имеют вид

$$L_{11} = -\frac{pq}{2z} - \frac{pz}{2q} - \frac{\nu z}{4q^2} + \frac{\nu}{4z} \quad (1.3.7.1)$$

$$L_{12} = \frac{p}{2qz} + \frac{\nu}{4q^2z} \quad (1.3.7.2)$$

$$L_{21} = -\frac{pq^3}{2z} - \frac{pz^3}{2q} + pqz - \frac{\nu z^3}{4q^2} + \frac{3\nu q^2}{4z} - \frac{\nu z}{2} \quad (1.3.7.3)$$

$$L_{22} = \frac{pq}{2z} + \frac{pz}{2q} + \frac{\nu z}{4q^2} - \frac{\nu}{4z} \quad (1.3.7.4)$$

В итоге приравнивая матрицу (1.3.7) к (1.1.1), получаем следующие замены

$$S_{11}(p, q, \nu) = -\frac{pq}{2} + \frac{\nu}{4} \quad (1.3.8.1)$$

$$S_{12}(p, q, \nu) = \frac{p}{2q} + \frac{\nu}{4q^2} \quad (1.3.8.2)$$

$$S_{21}(p, q, \nu) = -\frac{q}{2} \left(pq^2 - \frac{3\nu q}{2} \right) \quad (1.3.8.3)$$

$$S_{22}(p, q, \nu) = \frac{pq}{2} - \frac{\nu}{4} \quad (1.3.8.4)$$

и проверяем соответствующие скобки Пуассона (с учётом $\{p, q\} = 1$)

$$\{S_{11}, S_{12}\} = S_{12} \quad (1.3.9.1)$$

$$\{S_{11}, S_{21}\} = -S_{21} \quad (1.3.9.2)$$

$$\{S_{12}, S_{21}\} = 2S_{11} \quad (1.3.9.3)$$

Затем подставляем полученные замены в Гамильтониан (1.1.5.3)

$$H = -S_{12}(S_{11} - S_{22}) = \frac{p^2}{2} - \frac{\nu^2}{8q^2} \quad (1.3.10)$$

Гамильтонианы в $SL(2, \mathbb{C})$. Вычисление гамильтонианов в $SL(2, \mathbb{C})$. Воспользуемся калибровочным преобразованием

$$f^{-1}Lf - kf^{-1}\partial_x f = L' \quad (1.4.1)$$

где f определяется следующим образом

$$f = \begin{pmatrix} \sqrt{L_{12}} & 0 \\ -\frac{L_{11}}{\sqrt{L_{12}}} + k\frac{\partial_p \sqrt{L_{12}}}{L_{12}} & \frac{1}{\sqrt{L_{12}}} \end{pmatrix} \quad (1.4.2)$$

В итоге наша матрица Лакса преобразуется в

$$L' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ T & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4.3)$$

с выражением T

$$T = L_{21}L_{12} + L_{11}^2 - k\frac{L_{11}\partial_x L_{12}}{L_{12}} + k\partial_x L_{11} - \frac{1}{2}k^2\frac{\partial_x^2 L_{12}}{L_{12}} + \frac{3}{4}k^2\frac{(\partial_x L_{12})^2}{L_{12}^2} \quad (1.4.4)$$

которое приводит к уравнению Шредингера

$$(-k^2\partial_x^2 + T)\psi = 0 \quad (1.4.5)$$

возьмём волновую функцию в виде $\psi = \exp\{-\frac{1}{k} \oint dy \chi(y)\}$, мы приходим к уравнению Риккати

$$-k\partial_x \chi + \chi^2 - T = 0 \quad (1.4.6)$$

Решение получают с помощью локальных разложений

$$\chi = \sum_{l=-1}^{\infty} z^l \chi_l \quad (1.4.7)$$

Это разложение дает плотности закона сохранения

$$H_l \sim \oint dx \chi_{l-1} \quad (1.4.8)$$

Значение χ_l можно найти из уравнения Риккати, мы также можем представить T в виде локального выражения

$$T(z) = \sum_{l=-2}^{\infty} z^l T_l \quad (1.4.9)$$

в окрестности нуля. Для $l = -2, -1, 0$ мы имеем следующие выражения из уравнения Риккати

$$\begin{cases} \chi_{-1} = \sqrt{T_{-2}} \\ \chi_0 = \frac{1}{2\chi_{-1}} (T_{-1} + k\partial_x \chi_{-1}) \\ \chi_1 = \frac{1}{2\chi_{-1}} \left(T_0 - \frac{T_{-1}^2}{4T_{-2}} \right) \end{cases} \quad (1.4.10)$$

Гамильтонианы для полевого обобщения модели Калоджера-Мозера.

Используя конструкцию описанную в пункте 1.4 для матрицы Лакса

$$\tilde{L}_4^{CM} = \begin{pmatrix} p - k\frac{q_x}{2z} & -\nu \left(\frac{1}{2z} - \frac{1}{2q} \right) \\ -\nu \left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{2q} \right) & -p + k\frac{q_x}{2z} \end{pmatrix} \quad (1.5.1)$$

и выражения для T мы имеем

$$\begin{cases} 4T_{-2}^{CM} = k^2 q_x^2 + \nu^2 = c^2 = h' \\ 2T_{-1}^{CM} = -2kpq_x + \frac{k^2 \nu_x}{\nu} q_x - k^2 q_{xx} \\ T_0^{CM} = p^2 + \frac{2k^2 q_x^2 - \nu^2}{4q^2} - \frac{kp\nu_x}{\nu} + \frac{k^2}{4} \left(\frac{\nu_x}{\nu} \right)^2 \end{cases} \quad (1.5.2)$$

Теперь нам нужен не тривиальный Гамильтониан квадратичный в поле моментов p . Это двумерное обобщение квадратичного Гамильтониана Калоджера-Мозера

$$H_0^{CM} = \oint dx \sqrt{h} \chi_1 = \frac{1}{2} \oint dx \left(T_0 - \frac{1}{h'} T_{-1}^2 \right) \quad (1.5.3)$$

где подинтегральное выражение имеет вид

$$T_0^{CM} - \frac{1}{h'} (T_{-1}^{CM})^2 = p^2 \left(1 - \frac{k^2 q_x^2}{c^2} \right) + \frac{3k^2 q_x^2 - c^2}{4q^2} - \frac{k^4 q_{xx}^2}{4\nu^2} \quad (1.5.4)$$

Уравнение движения, производимые H_0^{CM} имеют вид:

$$\dot{q} = p \left(1 - \frac{k^2 q_x^2}{c^2} \right) \quad (1.5.5.1)$$

$$\dot{p} = -\frac{k^2}{c^2} \partial_x (p^2 q_x) + \frac{3k^2 q_x^2 - c^2}{4q^3} + \frac{3k^2}{4} \partial_x \left(\frac{q_x}{q^2} \right) + \frac{k^4}{4} \partial_x \left(\frac{q_{xxx} \nu - \nu_x q_{xx}}{\nu^3} \right) \quad (1.5.5.2)$$

с соответствующей скобкой Пуассона

$$\{p(x), q(y)\} = \delta(x - y) \quad (1.5.6)$$

Если подставить $k = 0$, то (учитывая $c^2 = k^2 q_x^2 + \nu^2$) уравнения движения (1.5.5.1) и Гамильтониан перейдут в выражения (1.2.5) и (1.2.4.2).

Гамильтониан для системы Ландау-Лифшиц.

Теперь, используя конструкцию описанную в пункте 1.4 и локальное разложение матрицы Лакса

$$L = \sum_{l=-1}^{\infty} z^l L_l \quad (1.6.1)$$

получаем следующие выражение для T

$$T_{-2} = L_{12}^{-1} L_{21}^{-1} + L_{11}^{-1} L_{11}^{-1} \quad (1.6.2.1)$$

$$T_{-1} = L_{12}^{-1} L_{21}^0 + L_{12}^0 L_{21}^{-1} + 2L_{11}^0 L_{11}^{-1} - k \frac{L_{11}^{-1} \partial_x L_{12}^{-1}}{L_{12}^{-1}} + k \partial_x L_{11}^{-1} \quad (1.6.2.2)$$

$$\begin{aligned} T_0 &= L_{12}^1 L_{21}^{-1} + L_{12}^{-1} L_{21}^1 + 2L_{11}^1 L_{11}^{-1} + L_{12}^0 L_{21}^0 + L_{11}^0 L_{11}^0 - \\ &- \frac{k}{L_{12}^{-1}} \left(L_{11}^0 \partial_x L_{12}^{-1} + L_{11}^{-1} \partial_x L_{12}^0 - \frac{L_{12}^0 L_{11}^{-1} \partial_x L_{12}^{-1}}{L_{12}^{-1}} \right) + k \partial_x L_{11}^0 - \\ &- \frac{k^2}{2} \frac{\partial_x^2 L_{12}^{-1}}{L_{12}^{-1}} + \frac{3k^2}{4} \left(\frac{\partial_x L_{12}^{-1}}{L_{12}^{-1}} \right) \end{aligned} \quad (1.6.2.3)$$

Подставляя теперь матрицу Лакса

$$L = \begin{pmatrix} \frac{S_{11}(x)}{z} - z S_{12}(x) & \frac{S_{12}(x)}{z} \\ -S_{12}(x) z^3 - 2S_{11}(x) z + \frac{S_{21}(x)}{z} & -\frac{S_{11}(x)}{z} + z S_{12}(x) \end{pmatrix} \quad (1.6.3)$$

Теперь подставляем соответствующие элементы матрицы (1.6.3) в (1.6.2), мы получаем следующие соотношения

$$T_{-2} = S_{11}(x)^2 + S_{12}(x) S_{21}(x) \quad (1.6.4.1)$$

$$T_{-1} = k(S_{11}(x))_x - \frac{k S_{11}(x) (S_{12}(x))_x}{S_{12}(x)} \quad (1.6.4.2)$$

$$T_0 = -4S_{11}(x) S_{12}(x) + \frac{3k^2 (S_{12}(x))_{xx}^2}{4(S_{12}(x))^2} - \frac{k^2 (S_{12}(x))_{xx}}{2S_{12}(x)} \quad (1.6.4.3)$$

где индекс x и xx - это производные по x . Используя следующие определения

$$h_l(x) = \lambda \chi_{l-1}, \quad \lambda^2 = T_{-2} \quad (1.6.5)$$

где λ - собственное значение матрицы

$$S = \begin{pmatrix} S_{11}(x) & S_{12}(x) \\ S_{21}(x) & -S_{11}(x) \end{pmatrix} \quad (1.6.6)$$

мы имеем следующее выражение

$$h_2 = \lambda \chi_1 = \frac{1}{2} \left(T_0 - \frac{1}{4\lambda^2} T_{-1}^2 \right) \quad (1.6.7)$$

Наконец, подставляя (1.6.7) и (1.6.4) в Гамильтониан

$$H_l = \oint dx h_l(x) \quad (1.6.8)$$

получаем следующий Гамильтониан Ландау-Лифшица

$$H^{LL} = \frac{1}{2} \oint \{ -4S_{11}(x)S_{12}(x) - \alpha (2(S_{11}(x))_x^2 + 2(S_{12}(x))_x(S_{21}(x))_x) \} dx \quad (1.6.9.1)$$

$$H^{LL} = \frac{1}{2} \oint \{ tr(SJ(S)) - \alpha tr(S_x^2) \} dx \quad (1.6.9.2)$$

с константой $\alpha = k^2/8\lambda^2$. Если подставить этот Гамильтониан в (1.1.3) с учетом скобки Пуассона-Ли

$$\{S_{ij}(x), S_{kl}(y)\} = (S_{il}(x)\delta_{kj} - S_{kj}(x)\delta_{il}) \delta(x - y) \quad (1.6.10)$$

то в итоге мы получаем уравнение движения для ферромагнетика

$$\partial_t S = [J(S), S] - \alpha [S, S_{xx}] \quad (1.6.11)$$

А при подстановке переменных (1.8.37) в (1.6.9) получим

$$H = \frac{1}{2} \oint dx \left(p^2 \left(1 - \frac{k^2 q_x^2}{c^2} \right) + \frac{3k^2 q_x^2 - c^2}{4q^2} - \frac{k^4 q_{xx}^2}{4\nu^2} \right) \quad (1.6.12)$$

Уравнение Ландау-Лифшица.

Уравнение Захарова- Шабата

$$\partial_t U(z) + k \partial_x V(z) = [U(z), V(z)] \quad (1.7.1)$$

где x - координата на окружности. Динамические переменные - это теперь периодические поля со скобками Пуассона

$$\{S_{ij}(x), S_{kl}(y)\} = (S_{il}(x)\delta_{kj} - S_{kj}(x)\delta_{il}) \delta(x - y) \quad (1.7.2)$$

На основе последних данных матрица Лакса (1.6.3) примет вид одной из U-V пар

$$U^{LL} = L(z, S(x)) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} S_{11} - z^2 S_{12} & S_{12} \\ S_{21} - 2z^2 S_{11} - z^4 S_{12} & -S_{11} + z^2 S_{12} \end{pmatrix} \quad (1.7.3)$$

и

$$V^{LL} = -\frac{1}{2} (V_1^{LL} + V_2^{LL}) \quad (1.7.4)$$

$$V_1^{LL} = -\frac{1}{z} L(z, S) - 2M(z, S) = -\frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & -S_{11} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_{12} & 0 \\ 2S_{11} + 3z^2 S_{12} & -S_{12} \end{pmatrix} \quad (1.7.5)$$

где матрица M

$$M(z, S) = \begin{pmatrix} S_{12} & 0 \\ 2S_{11} + 2z^2 S_{12} & -S_{12} \end{pmatrix} \quad (1.7.6)$$

Мы можем представить V_2^{LL} в виде

$$V_2^{LL} = L(z, h) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} h_{11} - z^2 h_{12} & h_{12} \\ h_{21} - 2z^2 h_{11} - z^4 h_{12} & -h_{11} + z^2 h_{12} \end{pmatrix} \quad (1.7.7)$$

где матрица h

$$h = -\frac{k}{4\lambda^2} [S, S_x], \quad S_x = \partial_x S \quad (1.7.8)$$

Включив эти определения в (1.7.1), мы получим два уравнения:

$$k\partial_x V_1^{LL} = [L, V_2^{LL}], \quad (1.7.9)$$

$$\partial_t L - \frac{1}{2} k\partial_x V_2^{LL} = -\frac{1}{2} [L, V_1^{LL}] = [L, \mathcal{M}] \quad (1.7.10)$$

и

$$-k\partial_x S = [S, h] \quad (1.7.11)$$

$$\partial_t S - (k/2)\partial_x h = [J(S), S] \quad (1.7.12)$$

Благодаря соотношению $SS_x + S_x S = 0$ первое уравнение может быть решено, как указано в (1.7.8). Второе уравнение принимает вид:

$$\partial_t S = [J(S), S] - \alpha [S, S_{xx}] \quad (1.7.13)$$

с константой $\alpha = k^2/8\lambda^2$. По компонентам имеем

$$\begin{cases} \partial_t S_{11} = \alpha S_{21} \partial_x^2 S_{12} - \alpha S_{12} \partial_x^2 S_{21} + 2S_{12} S_{11} \\ \partial_t S_{21} = -2\alpha S_{21} \partial_x^2 S_{11} + 2\alpha S_{11} \partial_x^2 S_{21} + 2S_{12} S_{21} - 4S_{11}^2 \\ \partial_t S_{12} = -2\alpha S_{11} \partial_x^2 S_{12} + 2\alpha S_{12} \partial_x^2 S_{11} - 2S_{12}^2 \end{cases} \quad (1.7.14)$$

Отсюда следует, что уравнение (1.7.14) и (1.7.13) эквивалентно (1.7.1)

Взаимосвязь между системами Ландау-Лифшица и 1+1 Калоджеро-Мозера. Матрица Лакса полевой модели Калоджеро-Мозера (для $SL(2, \mathbb{C})$)

$$\tilde{L}_4^{CM} = \begin{pmatrix} p - k\frac{q_x}{2z} & -\nu\left(\frac{1}{2z} - \frac{1}{2q}\right) \\ -\nu\left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{2q}\right) & -p + k\frac{q_x}{2z} \end{pmatrix} \quad (1.8.1)$$

с вычетом

$$B = Res\tilde{L}_4^{CM} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}kq_x & -\frac{\nu}{2} \\ -\frac{\nu}{2} & \frac{1}{2}kq_x \end{pmatrix} \quad (1.8.2.1)$$

Исходно матрица D выбиралась из таких соображений

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.8.2.2)$$

чтобы матрица перехода g обладала таким свойством, что от $g(z=0)$ имеет собственный вектор $(1, 1)$, собственный вектор вычета вида

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\nu}{2} \\ -\frac{\nu}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.8.3)$$

должен зануляется в ядре. Это необходимо для того, чтобы не образовывались полюса второго порядка при сопряжении матриц перехода калибровочным преобразованием. Поэтому для случая поля, т. е. для матрицы Лакса (1.8.1) нужно выбрать такую матрицу

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \quad (1.8.4)$$

чтобы полученная при этом g зануляла собственный вектор (1.8.2.1). В качестве упражнения вы можете определить собственный вектор вычета (1.8.2.1) и матрицу D самостоятельно. А матрица g при этом будет равна (1.8.14.1). Теперь вычислим собственный вектор $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$, который при $k=0$ переходит в $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Сперва вычислим собственное значение из детерминанта

$$\det(B - \lambda I) = 0 \quad (1.8.5)$$

Дальше из собственных значений

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2} \quad (1.8.6.1)$$

$$\lambda_2 = \frac{c}{2} \quad (1.8.6.2)$$

и уравнение

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}kq_x - \lambda & -\frac{\nu}{2} \\ -\frac{\nu}{2} & \frac{1}{2}kq_x - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.8.7)$$

получаем собственные векторы для случая (1.8.6.1)

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{kq_x}{2} - \frac{c}{2} \\ -\frac{\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (1.8.8.1)$$

А для случая (1.8.6.2)

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{2} - \frac{kq_x}{2} \\ -\frac{\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (1.8.8.2)$$

где $c = \sqrt{h'} = \sqrt{\nu^2 + k^2 q_x^2}$. Если ввести условие $k = 0$, то только вектор (1.8.8.1) переходит в $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Теперь имея в наличии собственный вектор (1.8.8.1) и оператор Хекке

$$\Xi(z, q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (z+q)^2 & (z-q)^2 \end{pmatrix} \quad (1.8.9.1)$$

$$\Xi^{-1}(z, q) = -\frac{1}{4qz} \begin{pmatrix} (z-q)^2 & -1 \\ -(z+q)^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.8.9.2)$$

мы сможем определить элементы диагональной матрицы

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \quad (1.8.10)$$

А для этого необходимо, чтобы матрица калибровочного преобразования

$$g = \Xi(z, q)D^{-1}(q) \quad (1.8.11)$$

зануляла вектор (1.8.8.1), т. е.

$$g \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.8.12)$$

В итоге матрица (1.8.10) имеет вид

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\nu}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(c + kq) \end{pmatrix} \quad (1.8.13.1)$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{2}{\nu} & 0 \\ 0 & \frac{2}{-kq_x - c} \end{pmatrix} \quad (1.8.13.2)$$

В итоге калибровочное преобразование (1.8.11) примет вид

$$g = \begin{pmatrix} \frac{\nu}{2} & -\frac{1}{2}(c + kq_x) \\ \frac{1}{2}(q + z)^2 \nu & -\frac{1}{2}(z - q)^2 (c + kq_x) \end{pmatrix} \quad (1.8.14.1)$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{(z-q)^2}{2qz\nu} & \frac{1}{2qz\nu} \\ -\frac{(q+z)^2}{2qz(c+kq_x)} & \frac{1}{2qz(c+kq_x)} \end{pmatrix} \quad (1.8.14.2)$$

Теперь подставляя (1.8.14.1), (1.8.14.1) и (1.8.1) в

$$L^{LL} = -kg\partial_x g^{-1} + g\tilde{L}^{CM}g^{-1} \quad (1.8.15.1)$$

Уравнение Захарова-Шабата инвариантно относительно преобразований

$$L \rightarrow gLg^{-1}, \quad M \rightarrow gMg^{-1} - \partial_t gg^{-1} \quad (*)$$

Т.е. в соответствии взаимосвязи м/д системой Калоджера и волчками Эйлера в механике из предыдущего семинара переходит в соответствие на уровне (1+1)-теорией. Здесь второе слагаемое обозначим как

$$\tilde{L}^{(CM),(2)} = g\tilde{L}^{CM}g^{-1} = \begin{pmatrix} L_{11}^{CM} & L_{12}^{CM} \\ L_{21}^{CM} & L_{22}^{CM} \end{pmatrix} \quad (1.8.15.2)$$

где элементы матрицы

$$L_{11}^{CM} = \frac{1}{\det g} \left(\tilde{L}_{11}^{CM} (g_{11}g_{22} + g_{21}g_{12}) + \tilde{L}_{21}^{CM} g_{12}g_{22} - \tilde{L}_{12}^{CM} g_{11}g_{21} \right) \quad (1.8.15.3)$$

$$L_{12}^{CM} = \frac{1}{\det g} \left(-2\tilde{L}_{11}^{CM} (g_{12}g_{11}) + \tilde{L}_{12}^{CM} g_{11}^2 - \tilde{L}_{21}^{CM} g_{12}^2 \right) \quad (1.8.15.4)$$

$$L_{21}^{CM} = \frac{1}{\det g} \left(2\tilde{L}_{11}^{CM} g_{21}g_{22} + \tilde{L}_{21}^{CM} g_{22}^2 - \tilde{L}_{12}^{CM} g_{21}^2 \right) \quad (1.8.15.5)$$

С учётом следующих соотношений

$$\begin{aligned} \det g &= zq(c + kq_x)\nu, \\ g_{12}g_{22} &= \frac{1}{4}(z - q)^2(c + kq_x)^2, \quad g_{11}g_{21} = \frac{1}{4}(q + z)^2\nu^2 \end{aligned} \quad (1.8.15.6)$$

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= \frac{\nu^2}{4} \\ g_{12}^2 &= \frac{1}{4}(c + kq_x)^2 \end{aligned} \quad (1.8.15.7)$$

$$\begin{aligned} g_{21}^2 &= \frac{1}{4}(q + z)^4\nu^2 \\ g_{22}^2 &= \frac{1}{4}(z - q)^4(c + kq_x)^2 \end{aligned} \quad (1.8.15.8)$$

и выражения

$$g_{11}g_{22} + g_{21}g_{12} = -\frac{1}{2}(q^2 + z^2)(c + kq_x)\nu \quad (1.8.15.9)$$

$$g_{12}g_{11} = -\frac{1}{4}(c + kq_x)\nu \quad (1.8.15.10)$$

$$g_{21}g_{22} = -\frac{1}{4}(z - q)^2(q + z)^2(c + kq_x)\nu \quad (1.8.15.11)$$

а первое слагаемое будет имеет вид

$$G^{(1)} = -kg\partial_x g^{-1} \quad (1.8.15.12)$$

Если приравнять соотношения (1.7.3) и (1.8.15.1), то следующие замены будут зависеть от спектрального параметра. Чтобы избавиться от лишних слагаемых мы нормируем калибровочное преобразование (1.8.14.1) и (1.8.14.2) на обратный корень из детерминанта

$$G = g\sqrt{(\det g)^{-1}}, \quad G^{-1} = g^{-1}\sqrt{\det g} \quad (1.8.16)$$

Используя калибровочное преобразование (1.8.16) в (1.8.15.1) матрица (1.8.15.2) остаётся неизменной, а для матрица (1.8.15.12) приобретает дополнительную матрицу вида

$$G^{(2)} = -kI\sqrt{(\det g)^{-1}}\partial_x\sqrt{\det g} \quad (1.8.17)$$

где I - единичная матрица. В итоге мы имеем следующую матрицу

$$G = G^{(1)} + G^{(2)} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \quad (1.8.17.1)$$

где элементы матрицы

$$G_{11} = \frac{k(\nu(-2czq_x + k(q^2 + z^2)q_{xx} - 2kzq_x^2) - (q^2 + z^2)\nu_x(c + kq_x))}{4zq\nu(c + kq_x)} \quad (1.8.17.2)$$

$$G_{12} = \frac{k(\nu_x(c + kq_x) - k\nu q_{xx})}{4zq\nu(c + kq_x)} \quad (1.8.17.3)$$

$$G_{21} = \frac{k(z - q)(q + z)(-(z^2 - q^2)\nu_x(c + kq_x) - \nu(4czq_x + k(q^2 - z^2)q_{xx} + 4kzq_x^2))}{4zq\nu(c + kq_x)} \quad (1.8.17.4)$$

$$G_{22} = -G_{11} \quad (1.8.17.5)$$

Благодаря этой матрице лишние слагаемые для диагональных элементов матрицы (1.8.15.1) зануляются. В итоге мы имеем следующие замены

$$S_{12} = \frac{c}{4q^2} + \frac{p}{2q} - \frac{ck^2q_{xx}}{4q(c^2 - k^2q_x^2)} \quad (1.8.18.1)$$

$$S_{11} = \frac{c}{4} - \frac{pq}{2} + \frac{ck^2qq_{xx}}{4(c^2 - k^2q_x^2)} \quad (1.8.18.2)$$

$$S_{21} = \frac{3cq^2}{4} - \frac{pq^3}{2} + \frac{ck^2q^3q_{xx}}{4(c^2 - k^2q_x^2)} \quad (1.8.18.3)$$

Скобки Пуассона-Ли будут иметь соответствующий вид

$$\{S_{11}(x), S_{12}(y)\} = S_{12}(x)\delta(x - y) \quad (1.8.19.1)$$

$$\{S_{11}(x), S_{21}(y)\} = -S_{21}(x)\delta(x - y) \quad (1.8.19.2)$$

$$\{S_{12}(x), S_{21}(y)\} = 2S_{11}(x)\delta(x - y) \quad (1.8.19.3)$$

аналогичные скобкам для механики (1.3.6)

3.4.2 Тригонометрический случай.

Калибровочное преобразование. Матрица Лакса Калоджеро-Мозера

$$L^{CM} = \begin{pmatrix} p & \frac{\nu}{2} \coth(q) - \frac{\nu}{2} \coth(z) \\ -\frac{\nu}{2} \coth(z) - \frac{\nu}{2} \coth(q) & -p \end{pmatrix} \quad (2.1.1)$$

Используем калибровочное преобразование

$$L^{\text{top}} = gL^{\text{CM}}g^{-1} \quad (2.1.2)$$

и матрицу Лакса вида

$$L^{\text{tor}} = \begin{pmatrix} S_{11} \coth(z) & \frac{S_{12}}{\sinh(z)} \\ \frac{S_{21}}{\sinh(z)} - 4S_{12} \sinh(z) & S_{22} \coth(z) \end{pmatrix} \quad (2.1.3)$$

Оператор Гекке

$$\Xi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{(q+z)} + e^{-(q+z)} & e^{(z-q)} + e^{-(z-q)} \end{pmatrix} \quad (2.1.4.1)$$

или для тригонометрического случая

$$\Xi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 \cosh(q+z) & 2 \cosh(z-q) \end{pmatrix} \quad (2.1.4.2)$$

и диагональную матрицу

$$D = 2 \sinh(q) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.1.5)$$

наша матрица перехода

$$g = \Xi(z, q)D^{-1}(q) \quad (2.1.6.1)$$

из калибровочного преобразования примет вид

$$g = \frac{1}{2\sinh(q)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 \cosh(q+z) & -2 \cosh(q-z) \end{pmatrix} \quad (2.1.6.2)$$

$$g^{-1} = \frac{\sinh(q)}{\cosh(q-z) - \cosh(q+z)} \begin{pmatrix} 2 \cosh(q-z) & -1 \\ 2 \cosh(q+z) & -1 \end{pmatrix} \quad (2.1.6.3)$$

Теперь подставляя (2.1.6.2), (2.1.6.3) и (2.1.1) в (2.1.2), получаем

$$L^{\text{top}} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \quad (2.1.7)$$

где элементы матрицы (2.1.7) имеют вид

$$L_{11} = - \left(p \coth(q) + \frac{\nu}{2 \sinh^2(q)} \right) \coth(z) \quad (2.1.7.1)$$

$$L_{12} = \frac{1}{4} \frac{(2p + \nu \coth(q))}{\sinh(q) \sinh(z)} \quad (2.1.7.2)$$

$$L_{21} = - \frac{(2p \sinh(q + 2z) + 2p \sinh(q - 2z) + 2p \sinh(3q) - 2p \sinh(q))}{4 \sinh^2(q) \sinh(z)} - \frac{(3\nu \cosh(q) - \nu \cosh(3q) + \nu \cosh(q + 2z) + \nu \cosh(q - 2z))}{4 \sinh^2(q) \sinh(z)} \quad (2.1.7.3)$$

$$L_{22} = \left(p \coth(q) + \frac{\nu}{2 \sinh^2(q)} \right) \coth(z) \quad (2.1.7.4)$$

В итоге приравнивая матрицу (2.1.7) к (2.1.3) получаем следующие замены

$$S_{12} = \frac{1}{4} \frac{(2p + \nu \coth(q))}{\sinh(q)} \quad (2.1.8.1)$$

$$S_{11} = - \left(p \coth(q) + \frac{\nu}{2 \sinh^2(q)} \right) \quad (2.1.8.2)$$

$$S_{22} = p \coth(q) + \frac{\nu}{2 \sinh^2(q)} \quad (2.1.8.3)$$

$$S_{21} = - \coth(q) \left(\frac{2p \sinh(2q) + 3\nu - \nu \cosh(2q)}{2 \sinh(q)} \right) \quad (2.1.8.4)$$

Используя каноническое отображение $p \rightarrow p - \frac{\nu}{2} \coth(q)$ наши динамические замены приобретают вид

$$S_{12} = \frac{1}{2} \frac{p}{\sinh(q)} \quad (2.1.9.1)$$

$$S_{11} = \frac{\nu}{2} - p \coth(q) \quad (2.1.9.2)$$

$$S_{22} = p \coth(q) - \frac{\nu}{2} \quad (2.1.9.3)$$

$$S_{21} = 2 \cosh(q)(\nu - p \coth(q)) \quad (2.1.9.4)$$

С соответствующими скобками Пуассона

$$\{S_{11}, S_{12}\} = S_{12} \quad (2.1.10.1)$$

$$\{S_{11}, S_{21}\} = -S_{21} \quad (2.1.10.2)$$

$$\{S_{12}, S_{21}\} = 2S_{11} \quad (2.1.10.3)$$

Система Калоджеро-Мозера в тригонометрическом случае.

Используя матрицу Лакса вида

$$L = \begin{pmatrix} p & \frac{\nu}{2} \coth(q) - \frac{\nu}{2} \coth(z) \\ -\frac{\nu}{2} \coth(q) - \frac{\nu}{2} \coth(z) & -p \end{pmatrix} \quad (2.2.1)$$

из соотношения производящей функции

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(L^2), \quad (2.2.2)$$

получим уравнение движения и уравнения Лакса

$$\dot{L}(z) = \{H, L(z)\} = [L(z), \mathcal{M}(z)] \quad (2.2.3)$$

Используя соотношения (2.2.2) получаем

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(L^2) = p^2 - \frac{\nu^2}{4} \coth^2(q) + \frac{\nu^2}{4} \coth^2(z) \quad (2.2.4.1)$$

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(L^2) = 2H_0 + H_2 \coth^2(z) \quad (2.2.4.2)$$

В итоге мы имеем следующие гамильтонианы

$$H_0 = \frac{p^2}{2} - \frac{\nu^2}{8} \coth^2(q) \quad (2.2.4.3)$$

и

$$H_2 = \frac{\nu^2}{4} \quad (2.2.4.4)$$

Теперь подставляя полученный Гамильтониан H_0 в (2.2.3), получаем уравнения движения

$$\dot{p} = -\frac{\nu^2 \coth(q)}{4 \sinh^2(q)} \quad (2.2.5)$$

а матрица $M(z)$ будет иметь вид

$$M(z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4 \sinh^2(q)} & -\frac{\nu}{4 \sinh^2(q)} \\ -\frac{\nu}{4 \sinh^2(q)} & -\frac{1}{4 \sinh^2(q)} \end{pmatrix} \quad (2.2.6)$$

Описание волчка Эйлера в тригонометрическом случае.

Используя матрицу Лакса вида

$$L = \begin{pmatrix} S_{11} \coth(z) & \frac{S_{12}}{\sinh(z)} \\ \frac{S_{21}}{\sinh(z)} - 4 \sinh(z) S_{12} & S_{22} \coth(z) \end{pmatrix} \quad (2.3.1)$$

получим гамильтонианы из производящей функции

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(L^2), \quad (2.3.2)$$

Используя соотношения (2.3.2) получаем

$$\frac{1}{2}Tr(L^2) = -4S_{12}^2 - S_{12}S_{21} + \frac{1}{2}(S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{12}S_{21}) \coth^2(z) \quad (2.3.3.1)$$

$$\frac{1}{2}Tr(L^2) = 2H_0 + H_2 \coth^2(z) \quad (2.3.3.2)$$

Гамильтонианы

$$H_0 = -2S_{12}^2 - \frac{1}{2}S_{12}S_{21} = \frac{p^2}{2} - \frac{\nu^2}{8} \coth^2(q) \quad (2.3.4.1)$$

$$H_2 = \frac{\nu^2}{4} \quad (2.3.4.2)$$

В итоге, полученные гамильтонианы (2.3.4) совпадают с (2.2.4). Согласованность не нарушена. Теперь перейдем к уравнению движения, которая описывает Гамильтониан H_0

$$\begin{cases} \dot{S}_{11} = -\dot{S}_{22} = 4S_{12}^2 \\ \dot{S}_{21} = -4S_{12}(S_{11} - S_{22}) - \frac{1}{2}S_{21}(S_{11} - S_{22}) \\ \dot{S}_{12} = \frac{1}{2}S_{12}(S_{11} - S_{22}) \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Приравнявая уравнение (2.3.5) и

$$\dot{S} = \{H, S\} = [J(S), S], \quad (2.3.6)$$

получаем следующую матрицу

$$J_1(S) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}S_{11} & 0 \\ -4S_{12} & \frac{1}{2}S_{22} \end{pmatrix} \quad (2.3.7)$$

Если подставить матрицу (2.3.7) в

$$H = \frac{1}{2}Tr(SJ(S)) \quad (2.3.8)$$

то получаем другой Гамильтониан

$$H = -2S_{12}^2 + \frac{1}{4}S_{11}^2 + \frac{1}{4}S_{22}^2 \quad (2.3.9)$$

который не согласуется с Гамильтонианом (2.3.4.1). Поэтому мы вводим новую матрицу $J(S)$

$$J(S) = J_1(S) - \frac{1}{2}S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}S_{12} \\ -4S_{12} - \frac{1}{2}S_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.10)$$

Теперь подставляя эту матрицу в Гамильтониан (2.3.8) получаем (2.3.4.1) и согласованность гамильтониана и уравнения движения сохраняется. Теперь, используя соотношения (2.3.1) и (2.2.3) мы имеем матрицу M

$$M(z) = - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}S_{11} & 0 \\ -4S_{12} \cosh(z) & \frac{1}{2}S_{22} \end{pmatrix} \quad (2.3.11)$$

Если поставить матрицы (2.3.1) и (2.3.8) в уравнение Лакса (2.2.3), то это уравнение Лакса будет эквивалентно системе уравнений (2.3.5).

Взаимосвязь между системами Ландау-Лифшица и 1+1 Калоджеро-Мозера. Матрица Лакса полевого Калоджеро-Мозера (для $SL(2, \mathbb{C})$)

$$L = \begin{pmatrix} p - \frac{kq_x}{2} \coth(z) & \frac{\nu}{2} \coth(q) - \frac{\nu}{2} \coth(z) \\ -\frac{\nu}{2} \coth(q) - \frac{\nu}{2} \coth(z) & -p + \frac{kq_x}{2} \coth(z) \end{pmatrix} \quad (2.4.1)$$

с вычетом

$$B = Res \tilde{L}_4^{CM} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}kq_x & -\frac{\nu}{2} \\ -\frac{\nu}{2} & \frac{1}{2}kq_x \end{pmatrix} \quad (2.4.2.1)$$

Изначально матрица D выбиралась из таких соображений

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.4.2.2)$$

чтобы матрица перехода g обладала таким свойством, что от $g(z=0)$ имеет собственный вектор $(1, 1)$, собственный вектор вычета вида

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\nu}{2} \\ -\frac{\nu}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.3)$$

должен зануляется в ядре. Для случая 1+1, т.е. для матрицы Лакса (2.4.1) нужно выбрать такую матрицу

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \quad (2.4.4)$$

чтобы полученная при этом g зануляла собственный вектор (2.4.2.1). В качестве упражнения вы можете определить собственный вектор вычета (2.4.2.1) и матрицу D . А матрица g при этом будет равна (2.4.14.1).

Теперь вычислим собственный вектор $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$, который при $k=0$ переходит в $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Сперва вычислим собственные значения из детерминанта

$$\det(B - \lambda I) = 0 \quad (2.4.5)$$

Дальше из собственных значений

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2} \quad (2.4.6.1)$$

$$\lambda_2 = \frac{c}{2} \quad (2.4.6.2)$$

и уравнения

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}kq_x - \lambda & -\frac{\nu}{2} \\ -\frac{\nu}{2} & \frac{1}{2}kq_x - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.4.7)$$

получаем собственные векторы для случая (2.4.6.1)

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{kq_x}{2} - \frac{c}{2} \\ -\frac{\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (2.4.8.1)$$

А для случая (2.4.6.2)

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{2} - \frac{kq_x}{2} \\ -\frac{\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (2.4.8.2)$$

где $c = \sqrt{h'} = \sqrt{\nu^2 + k^2q_x^2}$. Если ввести условие $k = 0$, то только вектор (2.4.8.1) переходит в $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Имея в наличии собственный вектор (2.4.8.1) и оператор

$$\Xi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 \cosh(q+z) & 2 \cosh(z-q) \end{pmatrix} \quad (2.4.9)$$

можем определить элементы диагональной матрицы

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \quad (2.4.10)$$

Матрица калибровочного преобразования

$$g = \Xi(z, q)D^{-1}(q) \quad (2.4.11)$$

зануляет вектор (2.4.8.1), т. е.

$$g \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.4.12)$$

В итоге матрица (2.4.10) имеет вид

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\nu}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(c + kq) \end{pmatrix} \quad (2.4.13.1)$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{2}{\nu} & 0 \\ 0 & \frac{2}{-kq_x - c} \end{pmatrix} \quad (2.4.13.2)$$

Калибровочное преобразование (2.4.11) примет вид

$$g = \begin{pmatrix} \frac{\nu}{2} & -\frac{1}{2}(c + kq_x) \\ \cosh(z+q)\nu & -\cosh(z-q)(c + kq_x) \end{pmatrix} \quad (2.4.14.1)$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1 - \coth(z) \coth(q)}{\nu} & \frac{1}{2\nu \sinh(z) \sinh(q)} \\ -\frac{\coth(z) \coth(q) + 1}{c + kq_x} & \frac{1}{2 \sinh(z) \sinh(q) (c + kq_x)} \end{pmatrix} \quad (2.4.14.2)$$

Подставляя (2.4.14.1), (2.4.14.2) и (2.4.1) в

$$L^{LL} = -kg \partial_x g^{-1} + g \tilde{L}^{CM} g^{-1} \quad (2.4.15.1)$$

Калибровочное преобразование

$$L \rightarrow gLg^{-1}, \quad M \rightarrow gMg^{-1} - \partial_t g g^{-1} \quad (*)$$

Здесь второе слагаемое обозначим

$$\tilde{L}^{(CM),(2)} = g \tilde{L}^{CM} g^{-1} = \begin{pmatrix} L_{11}^{CM} & L_{12}^{CM} \\ L_{21}^{CM} & L_{22}^{CM} \end{pmatrix} \quad (2.4.15.2)$$

где элементы матрицы

$$L_{11}^{CM} = \frac{1}{\det g} \left(\tilde{L}_{11}^{CM} (g_{11}g_{22} + g_{21}g_{12}) + \tilde{L}_{21}^{CM} g_{12}g_{22} - \tilde{L}_{12}^{CM} g_{11}g_{21} \right) \quad (2.4.15.3)$$

$$L_{12}^{CM} = \frac{1}{\det g} \left(-2\tilde{L}_{11}^{CM} (g_{12}g_{11}) + \tilde{L}_{12}^{CM} g_{11}^2 - \tilde{L}_{21}^{CM} g_{12}^2 \right) \quad (2.4.15.4)$$

$$L_{21}^{CM} = \frac{1}{\det g} \left(2\tilde{L}_{11}^{CM} g_{21}g_{22} + \tilde{L}_{21}^{CM} g_{22}^2 - \tilde{L}_{12}^{CM} g_{21}^2 \right) \quad (2.4.15.5)$$

С учётом следующих соотношений

$$\begin{aligned} \det g &= \sinh(z) \sinh(q) (c + kq_x) \nu, \\ g_{12}g_{22} &= \frac{1}{2} \cosh(z - q) (c + kq_x)^2, \quad g_{11}g_{21} = \frac{1}{2} \cosh(q + z) \nu^2 \end{aligned} \quad (2.4.15.6)$$

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= \frac{\nu^2}{4} \\ g_{12}^2 &= \frac{1}{4} (c + kq_x)^2 \end{aligned} \quad (2.4.15.7)$$

$$\begin{aligned} g_{21}^2 &= \cosh^2(q + z) \nu^2 \\ g_{22}^2 &= \cosh^2(z - q) (c + kq_x)^2 \end{aligned} \quad (2.4.15.8)$$

и выражения

$$g_{11}g_{22} + g_{21}g_{12} = -\cosh(z) \cosh(q) (c + kq_x) \nu \quad (2.4.15.9)$$

$$g_{12}g_{11} = -\frac{1}{4} (c + kq_x) \nu \quad (2.4.15.10)$$

$$g_{21}g_{22} = -\frac{1}{2} (\cosh(2q) + \cosh(2z)) (c + kq_x) \nu \quad (2.4.15.11)$$

а первое слагаемое будет имеет вид

$$G^{(1)} = -kg \partial_x g^{-1} \quad (2.4.15.12)$$

Если приравнять соотношения (2.7.1) и (2.4.15.1), то следующие замены будут зависеть от спектрального параметра в результате лишних слагаемых присутствующих в диагональных элементах в матрице (2.4.15.1). Чтобы избавиться от лишних слагаемых мы нормируем калибровочное преобразование (2.4.14.1) и (2.4.14.2) на обратный корень из детерминанта

$$G = g\sqrt{(\det g)^{-1}}, \quad G^{-1} = g^{-1}\sqrt{\det g} \quad (2.4.16)$$

Используя калибровочное преобразование (2.4.16) в (2.4.15.1) матрица (2.4.15.2) остаётся неизменной, а для матрица (2.4.15.3) приобретает дополнительную матрицу вида

$$G^{(2)} = -Ik\sqrt{(\det g)^{-1}}\partial_x\sqrt{\det g} \quad (2.4.17)$$

где I - единичная матрица. В итоге мы имеем следующую матрицу (складывая матрицу)

$$G = G^{(1)} + G^{(2)} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \quad (2.4.17.1)$$

где элементы матрицы

$$G_{11} = -\frac{k \coth(q) (\coth(z)\nu_x (c + kq_x) + \nu (cq_x - k \coth(z)q_{xx} + kq_x^2))}{2\nu (c + kq_x)} \quad (2.4.17.2)$$

$$G_{12} = \frac{k (\nu_x (c + kq_x) - k\nu q_{xx})}{4\nu (c + kq_x) \sinh(q) \sinh(z)} \quad (2.4.17.3)$$

$$G_{21} = -\frac{k (\nu (2c \sinh(2z)q_x - kq_{xx}(\cosh(2q) + \cosh(2z)) + 4k \sinh(z) \cosh(z)q_x^2))}{2\nu (c + kq_x) \sinh(q) \sinh(z)} - \frac{k (\nu_x(\cosh(2q) + \cosh(2z)) (c + kq_x))}{2\nu (c + kq_x) \sinh(q) \sinh(z)} \quad (2.4.17.4)$$

$$G_{22} = -G_{11} \quad (2.4.17.5)$$

Благодаря этой матрицы (2.4.17.1) лишние слагаемые для диагональных элементов матрицы (2.4.15.1) зануляются. В итоге мы имеем следующие замены

$$S_{12} = \frac{c}{4 \sinh(q)} \coth(q) + \frac{p}{2 \sinh(q)} - \frac{ck^2 q_{xx}}{4\nu^2 \sinh(q)} \quad (2.4.18.1)$$

$$S_{11} = -p \coth(q) - \frac{c}{2 \sinh^2(q)} - \frac{ck^2 q_{xx} \coth(q)}{2(k^2 q_x^2 - c^2)} \quad (2.4.18.2)$$

$$S_{21} = \frac{c (\cosh(2q) \coth(q) - 3 \coth(q)) - 2p \sinh(2q) \coth(q)}{2 \sinh(q)} - \frac{ck^2 q_{xx} \sinh(2q) \coth(q)}{2 \sinh(q) (k^2 q_x^2 - c^2)} \quad (2.4.18.3)$$

Скобки Пуассона-Ли будут иметь соответствующий вид

$$\{S_{11}(x), S_{12}(y)\} = S_{12}(x)\delta(x - y) \quad (2.4.19.1)$$

$$\{S_{11}(x), S_{21}(y)\} = -S_{21}(x)\delta(x-y) \quad (2.4.19.2)$$

$$\{S_{12}(x), S_{21}(y)\} = 2S_{11}(x)\delta(x-y) \quad (2.4.19.3)$$

аналогичные скобкам для простой механики (2.1.9.4)

Гамильтонианы в $SL(2, \mathbb{C})$. Вычисление гамильтонианов в $SL(2, \mathbb{C})$. Воспользуемся калибровочным преобразованием

$$f^{-1}Lf - kf^{-1}\partial_x f = L' \quad (1.4.1)$$

где f определяется следующим образом

$$f = \begin{pmatrix} \sqrt{L_{12}} & 0 \\ -\frac{L_{11}}{\sqrt{L_{12}}} + k\frac{\partial_p \sqrt{L_{12}}}{L_{12}} & \frac{1}{\sqrt{L_{12}}} \end{pmatrix} \quad (1.4.2)$$

В итоге наша матрица Лакса преобразуется в

$$L' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ T & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4.3)$$

с выражением T

$$T = L_{21}L_{12} + L_{11}^2 - k\frac{L_{11}\partial_x L_{12}}{L_{12}} + k\partial_x L_{11} - \frac{1}{2}k^2\frac{\partial_x^2 L_{12}}{L_{12}} + \frac{3}{4}k^2\frac{(\partial_x L_{12})^2}{L_{12}^2} \quad (1.4.4)$$

которое приводит к уравнению Шредингера

$$(-k^2\partial_x^2 + T)\psi = 0 \quad (1.4.5)$$

возьмём волновую функцию в виде $\psi = \exp\{-\frac{1}{k}\oint dy\chi(y)\}$, мы приходим к уравнению Риккати

$$-k\partial_x\chi + \chi^2 - T = 0 \quad (1.4.6)$$

Решение получают с помощью локальных разложений

$$\chi = \sum_{l=-1}^{\infty} z^l \chi_l \quad (1.4.7)$$

Это разложение дает плотности закона сохранения

$$H_l \sim \oint dx \chi_{l-1} \quad (1.4.8)$$

Значение χ_l можно найти из уравнения Риккати, мы также можем представить T в виде локального выражения

$$T(z) = \sum_{l=-2}^{\infty} z^l T_l \quad (1.4.9)$$

в окрестности нуля. Для $l = -2, -1, 0$ мы имеем следующие выражения из уравнения Риккати

$$\begin{cases} \chi_{-1} = \sqrt{T_{-2}} \\ \chi_0 = \frac{1}{2\chi_{-1}} (T_{-1} + k\partial_x \chi_{-1}) \\ \chi_1 = \frac{1}{2\chi_{-1}} \left(T_0 - \frac{T_{-1}^2}{4T_{-2}} \right) \end{cases} \quad (1.4.10)$$

Гамильтонианы для полевого Калоджеро-Мозера. Используя конструкцию описанную в пункте 2.5 для матрицы Лакса

$$L = \begin{pmatrix} p - \frac{kq_x}{2} \coth(z) & \frac{\nu}{2} \coth(q) - \frac{\nu}{2} \coth(z) \\ -\frac{\nu}{2} \coth(q) - \frac{\nu}{2} \coth(z) & -p + \frac{kq_x}{2} \coth(z) \end{pmatrix} \quad (2.6.1)$$

и выражения для T мы имеем

$$\begin{cases} 4T_{-2}^{CM} = k^2 q_x^2 + \nu^2 = c^2 = h' \\ 2T_{-1}^{CM} = -2kpq_x + \frac{k^2 \nu_x}{\nu} q_x - k^2 q_{xx} \\ T_0^{CM} = p^2 + \frac{k^2 q_x^2}{2 \sinh^2(q)} - \frac{\nu^2}{4} \coth^2(q) - \frac{k\nu_x}{\nu} + \frac{k^2}{4} \left(\frac{\nu_x}{\nu} \right)^2 \end{cases} \quad (2.6.2)$$

мы можем представить выражение в следующем виде

$$\frac{k^2 q_x^2}{2 \sinh^2(q)} - \frac{\nu^2}{4} \coth^2(q) = \frac{(3k^2 q_x^2 - c^2)}{4} \coth^2(q) - \frac{k^2 q_x^2}{2} \quad (2.6.2.1)$$

с учетом

$$\frac{1}{\sinh^2(q)} = \coth^2(q) - 1 \quad (2.6.2.2)$$

$$c^2 = k^2 q_x^2 + \nu^2 \quad (2.6.2.3)$$

В итоге имеем следующий квадратичный гамильтониан Калоджеро-Мозера

$$H_0^{CM} = \oint dx \sqrt{h} \chi_1 = \frac{1}{2} \oint dx \left(T_0 - \frac{1}{h'} T_{-1}^2 \right) \quad (2.6.3)$$

где подинтегральное выражение имеет вид

$$T_0^{CM} - \frac{1}{h'} (T_{-1}^{CM})^2 = p^2 \left(1 - \frac{k^2 q_x^2}{c^2} \right) + \frac{(3k^2 q_x^2 - c^2)}{4} \coth^2(q) - \frac{k^2 q_x^2}{2} - \frac{k^4 q_{xx}^2}{4\nu^2} \quad (2.6.4)$$

Уравнение движения, производимые H_0^{CM} имеют вид:

$$\dot{q} = p \left(1 - \frac{k^2 q_x^2}{c^2} \right) \quad (2.6.5.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{p} = & -\frac{k^2}{c^2} \partial_x (p^2 q_x) + \frac{(3k^2 q_x^2 - c^2) \coth(q)}{4 \sinh^2(q)} + \frac{3k^2}{4} \partial_x (q_x \coth^2(q)) - \\ & - \frac{k^2 \partial_x (q_x)}{2} + \frac{k^4}{4} \partial_x \left(\frac{q_{xxx} \nu - \nu_x q_{xx}}{\nu^3} \right) \end{aligned} \quad (2.6.5.2)$$

с соответствующей скобкой Пуассона

$$\{p(x), q(y)\} = \delta(x - y) \quad (2.6.6)$$

Если подставить $k = 0$, то (учитывая $c^2 = k^2 q_x^2 + \nu^2$), то Гамильтониан (2.6.3)-(2.6.4) перейдет в выражение (2.2.4).

Гамильтониан для системы Ландау-Лифшица. Используя конструкцию описанную в пункте 5 с матрицей Лакса

$$L^{tor} = \begin{pmatrix} S_{11}(x) \coth(z) & \frac{S_{12}(x)}{\sinh(z)} \\ \frac{S_{21}(x)}{\sinh(z)} - 4S_{12}(x) \sinh(z) & -S_{11}(x) \coth(z) \end{pmatrix} \quad (2.7.1)$$

получаем следующие соотношения

$$T_{-2} = S_{11}(x)^2 + S_{12}(x)S_{21}(x) \quad (2.7.2.1)$$

$$T_{-1} = k(S_{11}(x))_x - \frac{kS_{11}(x)(S_{12}(x))_x}{S_{12}(x)} \quad (2.7.2.2)$$

$$T_0 = -4S_{12}(x)^2 - S_{12}(x)S_{21}(x) + \frac{3k^2(S_{12}(x))_x^2}{4(S_{12}(x))^2} - \frac{k^2(S_{12}(x))_{xx}}{2S_{12}(x)} \quad (2.7.2.3)$$

где индекс x и xx - это производные по x . Теперь используя следующие определения

$$h_l(x) = \lambda \chi_{l-1}, \quad \lambda^2 = T_{-2} \quad (2.7.3)$$

где λ - собственное значение матрицы

$$S = \begin{pmatrix} S_{11}(x) & S_{12}(x) \\ S_{21}(x) & -S_{11}(x) \end{pmatrix} \quad (2.7.4)$$

имеем следующее выражение

$$h_2 = \lambda \chi_1 = \frac{1}{2} \left(T_0 - \frac{1}{4\lambda^2} T_{-1}^2 \right) \quad (2.7.5)$$

Подставляя (2.7.5) и (2.7.2) в Гамильтониан

$$H_l = \oint dx h_l(x) \quad (2.7.6)$$

получаем следующий Гамильтониан Ландау-Лифшица

$$H^{LL} = \frac{1}{2} \oint \{ -4S_{12}(x)^2 - S_{12}(x)S_{21}(x) - \alpha (2(S_{11}(x))_x^2 + 2(S_{12}(x))_x(S_{21}(x))_x) \} dx \quad (2.7.7.1)$$

с константой $\alpha = k^2/8\lambda^2$. Этот Гамильтониан мы можем представить в следующем виде

$$H^{LL} = \frac{1}{2} \oint \{ tr(SJ(S)) - \alpha tr(S_x^2) \} dx \quad (2.7.7.2)$$

Если подставить этот Гамильтониан в (2.3.6) с учетом скобки Пуассона-Ли

$$\{S_{ij}(x), S_{kl}(y)\} = (S_{il}(x)\delta_{kj} - S_{kj}(x)\delta_{il}) \delta(x - y) \quad (2.7.8)$$

то в итоге получаем уравнение движения для ферромагнетика

$$\partial_t S = [J(S), S] - \alpha [S, S_{xx}] \quad (2.7.9)$$

А при подстановке переменных (2.4.18) в (2.7.7) получим

$$H = \frac{1}{2} \oint dx \left(p^2 \left(1 - \frac{k^2 q_x^2}{c^2} \right) + \frac{(3k^2 q_x^2 - c^2)}{4} \coth^2(q) - \frac{k^2 q_x^2}{2} - \frac{k^4 q_{xx}^2}{4\nu^2} \right) \quad (2.7.10)$$

Уравнение Ландау-Лифшица. Уравнение Захарова- Шабата

$$\partial_t U(z) + k \partial_x V(z) = [U(z), V(z)] \quad (2.8.1)$$

где x - координата на окружности. Динамические переменные - это теперь периодические поля с скобками Пуассона

$$\{S_{ij}(x), S_{kl}(y)\} = (S_{il}(x)\delta_{kj} - S_{kj}(x)\delta_{il}) \delta(x - y) \quad (2.8.2)$$

На основе последних данных матрица Лакса (2.3.1) примет вид одной из U-V пар

$$U^{LL} = L(z, S(x)) = \begin{pmatrix} S_{11} \coth(z) & \frac{S_{12}}{\sinh(z)} \\ \frac{S_{21}}{\sinh(z)} - 4S_{12} \sinh(z) & -S_{11} \coth(z) \end{pmatrix} \quad (2.8.3)$$

и

$$V^{LL} = -\frac{1}{2} (V_1^{LL} + V_2^{LL}) \quad (2.8.4)$$

где

$$V_1^{LL} = -\coth(z)L(z, S) - 2M(z, S) \quad (2.8.5)$$

а матрица M

$$M(z, S) = -\begin{pmatrix} \frac{1}{2}S_{11} & 0 \\ -4S_{12} \cosh(z) & -\frac{1}{2}S_{11} \end{pmatrix} \quad (2.8.6)$$

Мы можем представить V_2^{LL} в виде

$$V_2^{LL} = L(z, h) = \begin{pmatrix} h_{11} \coth(z) & \frac{h_{12}}{\sinh(z)} \\ \frac{h_{21}}{\sinh(z)} - 4h_{12} \sinh(z) & -h_{11} \coth(z) \end{pmatrix} \quad (2.8.7)$$

где матрица h

$$h = -\frac{k}{4\lambda^2} [S, S_x], \quad S_x = \partial_x S \quad (2.8.8)$$

Включив эти определения в (2.8.1), получим два уравнения:

$$k \partial_x V_1^{LL} = [L, V_2^{LL}], \quad (2.8.9)$$

$$\partial_t L - \frac{1}{2} k \partial_x V_2^{\text{LL}} = -\frac{1}{2} [L, V_1^{\text{LL}}] = [L, \mathcal{M}] \quad (2.8.10)$$

и

$$-k \partial_x S = [S, h] \quad (2.8.11)$$

$$\partial_t S - (k/2) \partial_x h = [J(S), S] \quad (2.8.12)$$

Благодаря соотношению $SS_x + S_x S = 0$ первое уравнение может быть решено, как указано в (2.8.8). Второе уравнение принимает вид:

$$\partial_t S = [J(S), S] - \alpha [S, S_{xx}] \quad (2.8.13)$$

с константой $\alpha = k^2/8\lambda^2$. По компонентам имеем

$$\begin{cases} \partial_t S_{11} = \alpha S_{21} \partial_x^2 S_{12} - \alpha S_{12} \partial_x^2 S_{21} + 4S_{12}^2 \\ \partial_t S_{21} = -2\alpha S_{21} \partial_x^2 S_{11} + 2\alpha S_{11} \partial_x^2 S_{21} - 8S_{12} S_{11} - S_{21} S_{11} \\ \partial_t S_{12} = -2\alpha S_{11} \partial_x^2 S_{12} + 2\alpha S_{12} \partial_x^2 S_{11} + S_{12} S_{11} \end{cases} \quad (2.8.14)$$

Отсюда следует, что уравнение (2.8.14) и (2.8.13) эквивалентно (2.8.1)

3.4.3 Эллиптический случай

Матрица Лакса Калоджеро-Мозера

$$L^{\text{KM}} = \begin{pmatrix} p & -\frac{\nu}{2} \phi(-q, z) \\ -\frac{\nu}{2} \phi(q, z) & -p \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

и матрица Лакса волчка Эйлера

$$L^{\text{rot}} = \begin{pmatrix} S_{10} \varphi_{10} & S_{01} \varphi_{01} - i S_{11} \varphi_{11} \\ S_{01} \varphi_{01} + i S_{11} \varphi_{11} & -S_{10} \varphi_{10} \end{pmatrix} \quad (3.1.2)$$

где

$$\varphi_{10} = \frac{\vartheta'(0) \theta_{10}(z)}{\vartheta(z) \theta_{10}(0)}, \quad \varphi_{11} = \frac{\vartheta'(0) \theta_{00}(z)}{\vartheta(z) \theta_{00}(0)}, \quad \varphi_{01} = \frac{\vartheta'(0) \theta_{01}(z)}{\vartheta(z) \theta_{01}(0)} \quad (3.1.3)$$

Используя калибровочное преобразование

$$L^{\text{top}} = g L^{\text{KM}} g^{-1} \quad (3.1.4)$$

получим S_{10} , S_{11} и S_{01} .

Замены переменных. Используя матрицу

$$g = \begin{pmatrix} \theta_{00}(z+q, 2\tau) & -\theta_{00}(z-q, 2\tau) \\ -\theta_{10}(z+q, 2\tau) & \theta_{10}(z-q, 2\tau) \end{pmatrix} \quad (3.1.5)$$

калибровочное преобразование (3.1.4) и следующие тождества (A.1)-(A.10) выпишем равенство (3.1.4) для матричных элементов

$$L_{11}^{rot} = \frac{1}{\det g} (L_{11}^{KM} (g_{11}g_{22} + g_{21}g_{12}) + L_{21}^{KM} g_{12}g_{22} - L_{12}^{KM} g_{11}g_{21}) \quad (3.1.5.1)$$

$$L_{12}^{rot} = \frac{1}{\det g} (-2L_{11}^{KM} (g_{12}g_{11}) + L_{12}^{KM} g_{11}^2 - L_{21}^{KM} g_{12}^2) \quad (3.1.5.2)$$

$$L_{21}^{rot} = \frac{1}{\det g} (2L_{11}^{KM} g_{21}g_{22} + L_{21}^{KM} g_{22}^2 - L_{12}^{KM} g_{21}^2) \quad (3.1.5.3)$$

С учётом следующих соотношений

$$\det g = \vartheta(z)\vartheta(q), \quad (3.1.5.4)$$

$$g_{12}g_{22} = -\frac{1}{2}\theta_{10}(-z+q)\theta_{10}(0), \quad g_{11}g_{21} = -\frac{1}{2}\theta_{10}(z+q)\theta_{10}(0)$$

$$g_{11}^2 = \frac{1}{2} (\theta_{00}(z+q)\theta_{00}(0) + \theta_{01}(z+q)\theta_{01}(0)) \quad (3.1.5.5)$$

$$g_{12}^2 = \frac{1}{2} (\theta_{00}(-z+q)\theta_{00}(0) + \theta_{01}(-z+q)\theta_{01}(0))$$

$$g_{21}^2 = \frac{1}{2} (\theta_{00}(z+q)\theta_{00}(0) - \theta_{01}(z+q)\theta_{01}(0)) \quad (3.1.5.6)$$

$$g_{22}^2 = \frac{1}{2} (\theta_{00}(-z+q)\theta_{00}(0) - \theta_{01}(-z+q)\theta_{01}(0))$$

А ещё выражения

$$g_{11}g_{22} + g_{21}g_{12} = \theta_{10}(z)\theta_{10}(q) \quad (3.1.5.7)$$

$$g_{12}g_{11} = -\frac{1}{2} (\theta_{00}(z)\theta_{00}(q) + \theta_{01}(z)\theta_{01}(q)) \quad (3.1.5.8)$$

$$g_{21}g_{22} = -\frac{1}{2} (\theta_{00}(z)\theta_{00}(q) - \theta_{01}(z)\theta_{01}(q)) \quad (3.1.5.9)$$

дальше используем те же формулы сложения для тэта-функций. В итоге получаем окончательный ответ

$$\begin{cases} S_{10} = p \frac{\theta_{10}(0)}{\vartheta'(0)} \frac{\theta_{10}(q)}{\vartheta(q)} + \frac{\nu}{2} \frac{\theta_{10}^2(0)}{\theta_{00}(0)\theta_{01}(0)} \frac{\theta_{00}(q)\theta_{01}(q)}{\vartheta^2(q)} \\ S_{11} = -p \frac{\theta_{00}(0)}{\sqrt{-1}\vartheta'(0)} \frac{\theta_{00}(q)}{\vartheta(q)} - \frac{\nu}{2} \frac{\theta_{00}^2(0)}{\sqrt{-1}\theta_{10}(0)\theta_{01}(0)} \frac{\theta_{10}(q)\theta_{01}(q)}{\vartheta^2(q)} \\ S_{01} = p \frac{\theta_{01}(0)}{\vartheta'(0)} \frac{\theta_{01}(q)}{\vartheta(q)} + \frac{\nu}{2} \frac{\theta_{01}^2(0)}{\theta_{00}(0)\theta_{10}(0)} \frac{\theta_{00}(q)\theta_{10}(q)}{\vartheta^2(q)} \end{cases} \quad (3.1.6)$$

Чтобы определиться каким скобкам Пуассона удовлетворяют замены (3.1.6) мы можем представить наши замены через эллиптические функции Якоби или воспользоваться соотношением (A.14)-(A.15) (следует также учитывать каноническую скобку Пуассона $\{p, q\} = 1$) в итоге получаем

$$\{S_\alpha, S_\beta\} = -\sqrt{-1}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}S_\gamma \quad (3.1.7)$$

где (1, 2, 3)=(01, 11, 10).

Гамильтонианы. Для начала вычислим гамильтониан Калоджеро, используя формулу производящей функции

$$\frac{1}{2}Tr(L^2) = p^2 + \frac{\nu^2}{4}\phi(-q, z)\phi(q, z) \quad (3.1.8)$$

или с учётом тождество $\phi(-q, z)\phi(q, z) = \wp(z) - \wp(q)$

$$\frac{1}{2}Tr(L^2) = p^2 - \frac{\nu^2}{4}\wp(q) + \frac{\nu^2}{4}\wp(z) \quad (3.1.9)$$

Отсюда следует следующие выражения

$$H_0 = \frac{p^2}{2} - \frac{\nu^2}{8}\wp(q) \quad (3.1.10)$$

$$H_2 = \frac{\nu^2}{4} \quad (3.1.11)$$

Теперь вычислим Гамильтониан волчка

$$\frac{1}{2}Tr(L^2) = S_{01}^2\varphi_{01}(z)^2 + S_{11}^2\varphi_{11}(z)^2 + S_{10}^2\varphi_{10}(z)^2 \quad (3.1.12)$$

Используя следующее соотношение $(\varphi_\alpha(z))^2 = \wp(z) - \wp(\omega_\alpha)$ и индексы $(01, 11, 10) = (1, 2, 3)$ в итоге получаем

$$\frac{1}{2}Tr(L^2) = (S_{01}^2 + S_{11}^2 + S_{10}^2)\wp(z) + (-S_{01}^2\wp(\omega_1) - S_{11}^2\wp(\omega_2) - S_{10}^2\wp(\omega_3)) \quad (3.1.13)$$

Теперь перед тем как проверить, что при подстановке замен (3.1.6) в Гамильтониан

$$H_0 = \frac{1}{2}(-S_{01}^2\wp(\omega_1) - S_{11}^2\wp(\omega_2) - S_{10}^2\wp(\omega_3)) \quad (3.1.14)$$

Убедимся, что при подстановке замен (3.1.6) в константу

$$H_2 = S_{01}^2 + S_{11}^2 + S_{10}^2 \quad (3.1.15)$$

мы получим константу (3.1.11). Используя следующие соотношения (A.5)-(A.12) мы получаем

$$H_2 = \frac{\nu^2\theta_{00}(0)^2\theta_{01}(0)^2\theta_{10}(0)^2(\theta_{01}(q)^4 + \theta_{10}(q)^4 - \theta_{00}(q)^4)}{\theta_{00}(0)^2\theta_{01}(0)^2\theta_{10}(0)^2\theta_{11}(q)^4} \quad (3.1.16)$$

теперь, если представить себе такое выражение (A.13)

$$\theta_{01}(q)^4 + \theta_{10}(q)^4 - \theta_{00}(q)^4 = \theta_{11}(q)^4 \quad (3.1.17)$$

то это выражение легко можно доказать при помощи соотношений (A.5)-(A.12). В итоге мы доказали эквивалентность (3.1.15) и (3.1.11).

Теперь перейдём к проверке гамильтониана (3.1.14), используя при этом следующее соотношение $(\varphi_\alpha(z))^2 = \wp(z) - \wp(\omega_\alpha)$, но уже с аргументом q , т. е.

$$\wp(\omega_\alpha) = \wp(q) - (\varphi_\alpha(q))^2 \quad (3.1.18)$$

Подставляя (3.1.18) и (3.1.6) в (3.1.14) и, используя те же тождества (A.11), (A.12) и (A.13), получаем гамильтониан

$$H_0 = \frac{p^2}{2} - \frac{\nu^2}{8}\wp(q) \quad (3.1.19)$$

В итоге мы доказали эквивалентность гамильтонианов.

Уравнения движения и пары Лакса.

Используя определение

$$\dot{S} = \{H, S\}, \quad (3.1.20)$$

гамильтониан (3.1.14) и скобки Пуассона (3.1.7) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{S}_{10} = \sqrt{-1}S_{01}\wp(S_{11}) - \sqrt{-1}S_{11}\wp(S_{01}) \\ \dot{S}_{11} = \sqrt{-1}S_{10}\wp(S_{01}) - \sqrt{-1}S_{01}\wp(S_{10}) \\ \dot{S}_{01} = -\sqrt{-1}S_{10}\wp(S_{11}) + \sqrt{-1}S_{11}\wp(S_{10}) \end{cases} \quad (3.1.21)$$

где $\wp(S_\alpha) = S_\alpha\wp(\omega_\alpha)$. А при степени $\wp(z)$ каждая уравнение системы равна нулю. Систему уравнений (3.1.21) мы можем представить в виде

$$\dot{S} = [J(S), S], \quad (3.1.22)$$

где

$$J(S) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \wp(S_{10}) & \wp(S_{01}) - \sqrt{-1}\wp(S_{11}) \\ \wp(S_{01}) + \sqrt{-1}\wp(S_{11}) & -\wp(S_{10}) \end{pmatrix} \quad (3.1.23)$$

С учётом матрицы (3.1.23) мы можем представить гамильтониан (3.1.14) в следующем виде

$$H_0 = \frac{1}{2}\text{Tr}(SJ(S)) \quad (3.1.24)$$

Теперь, используя уравнение Лакса

$$\dot{L}(z) = \{H, L(z)\} = [L(z), \mathcal{M}(z)] \quad (3.1.25)$$

мы получаем матрицу M

$$M(z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}f_{10}(z)S_{10} & \frac{1}{2}(if_{11}(z)S_{11} - f_{01}(z)S_{01}) \\ \frac{1}{2}(-f_{01}(z)S_{01} - if_{11}(z)S_{11}) & \frac{1}{2}f_{10}(z)S_{10} \end{pmatrix} \quad (3.1.26)$$

Если поставить матрицы (3.1.26) и (3.1.2) в уравнение Лакса (3.1.25), то это уравнение Лакса будет эквивалентно системе уравнений (3.1.22) с учётом тождества (A16). Используем следующие определение для системы Калоджеро-Мозера и гамильтониан (3.1.19) получаем

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\nu^2}{8}\wp'(q), \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \quad (3.1.27)$$

а матрица $M(z)$ будет иметь вид

$$M(z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}E_2(q) & \frac{1}{4}\nu\phi'(-q, z) \\ \frac{1}{4}\nu\phi'(q, z) & -\frac{1}{4}E_2(q) \end{pmatrix} \quad (3.1.28)$$

Если поставить матрицы (3.1.1) и (3.1.28) в уравнение Лакса (3.1.25), то это уравнение Лакса будет эквивалентна уравнению (3.1.27).

3.4.4 Взаимосвязь между 1+1 системой Калоджеро-Мозера и уравнением Ландау-Лифшица.

Матрица Лакса для 1+1 Калоджеро-Мозера

$$\tilde{L}^{CM} = \begin{pmatrix} p - \frac{kq_x}{2}E_1(z) & -\frac{\nu}{2}\phi(-q, z) \\ -\frac{\nu}{2}\phi(q, z) & -p + \frac{kq_x}{2}E_1(z) \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

и системы Ландау-Лифшиц

$$L^{LL} = \begin{pmatrix} S_{10}\varphi_{10} & S_{01}\varphi_{01} - iS_{11}\varphi_{11} \\ S_{01}\varphi_{01} + iS_{11}\varphi_{11} & -S_{10}\varphi_{10} \end{pmatrix} \quad (3.2.2)$$

Использую конструкцию описанную в пункте 3.2.1 получить Гамильтонианы. затем проверить эквивалентность уравнения Захарова-Шабата и Ландау-Лифшица. И наконец получить замены переменных S и проверить эквивалентность гамильтонианов.

Гамильтониан для полевого Калоджеро-Мозера.

Используя конструкцию описанную в пункте 2.5 для матрицы Лакса (3.2.1)

$$\tilde{L}^{CM} = \begin{pmatrix} p - \frac{kq_x}{2}E_1(z) & -\frac{\nu}{2}\phi(-q, z) \\ -\frac{\nu}{2}\phi(q, z) & -p + \frac{kq_x}{2}E_1(z) \end{pmatrix} \quad (3.2.13)$$

и выражения для T мы имеем

$$\begin{cases} 4T_{-2}^{CM} = k^2q_x^2 + \nu^2 = c^2 = h' \\ 2T_{-1}^{CM} = -2kpq_x + \frac{k^2\nu_x}{\nu}q_x - k^2q_{xx} \\ T_0^{CM} = p^2 + \frac{(2k^2q_x^2 - \nu^2)}{4}\wp(q) - \frac{k\nu\nu_x}{\nu} + \frac{k^2}{4}\left(\frac{\nu_x}{\nu}\right)^2 \end{cases} \quad (3.2.14)$$

Двумерное обобщение квадратичного гамильтониана Калоджеро-Мозера

$$H_0^{CM} = \oint dx \sqrt{h}\chi_1 = \frac{1}{2} \oint dx \left(T_0 - \frac{1}{h'} T_{-1}^2 \right) \quad (3.2.15)$$

где подинтегральное выражение имеет вид

$$T_0^{CM} - \frac{1}{h'} (T_{-1}^{CM})^2 = p^2 \left(1 - \frac{k^2 q_x^2}{c^2} \right) + \frac{(3k^2 q_x^2 - c^2)}{4} \wp(q) - \frac{k^4 q_{xx}^2}{4\nu^2} \quad (3.2.16)$$

Уравнение движения, производимые H_0^{CM} имеют вид:

$$\dot{q} = p \left(1 - \frac{k^2 q_x^2}{c^2} \right) \quad (3.2.17.1)$$

$$\dot{p} = \frac{k^2}{c^2} \partial_x (p^2 q_x) - \frac{(3k^2 q_x^2 - c^2)}{8} \wp'(q) + \frac{3k^2}{4} \partial_x (q_x \wp(q)) + \frac{k^4}{4} \partial_x \left(\frac{q_{xxx} \nu - \nu_x q_{xx}}{\nu^3} \right) \quad (3.2.17.2)$$

с соответствующей скобкой Пуассона

$$\{p(x), q(y)\} = \delta(x - y) \quad (3.2.18)$$

Если подставить $k = 0$, то (учитывая $c^2 = k^2 q_x^2 + \nu^2$) уравнения движения (3.2.17.1) и гамильтонианы перейдут в выражения (3.1.19) и (3.1.27). Гамильтониан для системы Ландау-Лифшиц.

Теперь, используя ту же конструкцию описанную в пункте 3.2.1 и матрицу Лакса (3.2.2) мы получаем следующие соотношения

$$T_{-2} = S_{01}(x)^2 + S_{11}(x)^2 + S_{10}(x)^2 \quad (3.2.19.1)$$

$$T_{-1} = -\frac{k S_{10}(x) S'_{01}(x)}{S_{01}(x) - \sqrt{-1} S_{11}(x)} + \frac{\sqrt{-1} k S_{10}(x) S'_{11}(x)}{S_{01}(x) - \sqrt{-1} S_{11}(x)} + k S'_{10}(x) \quad (3.2.19.2)$$

$$\begin{aligned} T_0 = & \frac{3k^2 S'_{01}(x)^2}{4(S_{01}(x) - \sqrt{-1} S_{11}(x))^2} - S_{01}(x)^2 \wp(\omega_1) - S_{11}(x)^2 \wp(\omega_2) - S_{10}(x)^2 \wp(\omega_3) - \\ & - \frac{3\sqrt{-1} k^2 S'_{01}(x) S'_{11}(x)}{2(S_{01}(x) - \sqrt{-1} S_{11}(x))^2} + \frac{\sqrt{-1} k^2 S''(2, x)}{2(S_{01}(x) - \sqrt{-1} S_{11}(x))} - \frac{k^2 S''(1, x)}{2(S_{01}(x) - \sqrt{-1} S_{11}(x))} - \\ & - \frac{3k^2 S'_{11}(x)^2}{4(S_{01}(x) - \sqrt{-1} S_{11}(x))^2} \end{aligned} \quad (3.2.19.3)$$

где индекс ' и '' - это производные по x . Теперь используя следующие определения

$$h_l(x) = \lambda \chi_{l-1}, \quad \lambda^2 = T_{-2} \quad (3.2.20)$$

где λ - собственное значение матрицы

$$S = \begin{pmatrix} S_{10}(x) & S_{01}(x) - \sqrt{-1} S_{11}(x) \\ S_{01}(x) + \sqrt{-1} S_{11}(x) & -S_{10}(x) \end{pmatrix} \quad (3.2.21)$$

имеем следующее выражение

$$h_2 = \lambda \chi_1 = \frac{1}{2} \left(T_0 - \frac{1}{4\lambda^2} T_{-1}^2 \right) \quad (3.2.22)$$

Подставляя (3.2.22) и (3.2.19) в гамильтониан

$$H_l = \oint dx h_l(x) \quad (3.2.23)$$

получаем следующий гамильтониан Ландау-Лифшица

$$H^{LL} = \frac{1}{2} \oint (-S_{01}(x)^2 \wp(\omega_1) - S_{11}(x)^2 \wp(\omega_2) - S_{10}(x)^2 \wp(\omega_3)) dx + \\ + \frac{1}{2} \oint \left(-\frac{k^2 S'_{01}(x)^2}{4\lambda^2} - \frac{k^2 S'_{11}(x)^2}{4\lambda^2} - \frac{k^2 S'_{10}(x)^2}{4\lambda^2} \right) dx \quad (3.2.24.1)$$

$$H^{LL} = \frac{1}{2} \oint \{tr(SJ(S)) - \alpha tr(S_x^2)\} dx \quad (3.2.24.2)$$

с константой $\alpha = k^2/8\lambda^2$.

Уравнение Ландау-Лифшица.

Уравнение Захарова- Шабата

$$\partial_t U(z) + k \partial_x V(z) = [U(z), V(z)] \quad (3.2.25)$$

где x - координата на окружности. Динамические переменные - это теперь периодические поля с скобками Пуассона

$$\{S_\alpha(x), S_\beta(y)\} = -\sqrt{-1} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma(x) \delta(x-y) \quad (3.2.26)$$

На основе последних данных матрица Лакса (3.2.2) примет вид одной из U-V пар

$$U^{LL} = L(z, S(x)) = \begin{pmatrix} S_{10}\varphi_{10} & S_{01}\varphi_{01} - iS_{11}\varphi_{11} \\ S_{01}\varphi_{01} + iS_{11}\varphi_{11} & -S_{10}\varphi_{10} \end{pmatrix} \quad (3.2.27)$$

и

$$V^{LL} = -\frac{1}{2} (V_1^{LL} + V_2^{LL}) \quad (3.2.28)$$

$$V_1^{LL} = -E_1(z)L(z, S) - 2M(z, S) \quad (3.2.29)$$

где матрица M

$$M(z, S) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}f_{10}(z)S_{10} & \frac{1}{2}(if_{11}(z)S_{11} - f_{01}(z)S_{01}) \\ \frac{1}{2}(-f_{01}(z)S_{01} - if_{11}(z)S_{11}) & \frac{1}{2}f_{10}(z)S_{10} \end{pmatrix} \quad (3.2.30)$$

Мы можем представить V_2^{LL} в виде

$$V_2^{LL} = L(z, h) = \begin{pmatrix} h_{10}\varphi_{10} & h_{01}\varphi_{01} - \sqrt{-1}h_{11}\varphi_{11} \\ h_{01}\varphi_{01} + \sqrt{-1}h_{11}\varphi_{11} & -h_{10}\varphi_{10} \end{pmatrix} \quad (3.2.31)$$

где матрица h

$$h = -\frac{k}{4\lambda^2} [S, S_x], \quad S_x = \partial_x S \quad (3.2.32)$$

Включив эти определения в (3.2.25), мы получим два уравнения:

$$k\partial_x V_1^{\text{LL}} = [L, V_2^{\text{LL}}], \quad (3.2.33)$$

$$\partial_t L - \frac{1}{2}k\partial_x V_2^{\text{LL}} = -\frac{1}{2}[L, V_1^{\text{LL}}] = [L, \mathcal{M}] \quad (3.2.34)$$

и

$$-k\partial_x S = [S, h] \quad (3.2.35)$$

$$\partial_t S - (k/2)\partial_x h = [J(S), S] \quad (3.2.36)$$

Благодаря соотношению $SS_x + S_x S = 0$ первое уравнение может быть решено, как указано в (3.2.32). Второе уравнение принимает вид:

$$\partial_t S = [J(S), S] - \alpha [S, S_{xx}] \quad (3.2.37)$$

с константой $\alpha = k^2/8\lambda^2$. По компонентам имеем

$$\begin{cases} \dot{S}_{10} = \sqrt{-1}S_{01}\wp(S_{11}) - \sqrt{-1}S_{11}\wp(S_{01}) + \frac{ik^2 S_{11}(x)S_{01}''(x)}{4\lambda^2} - \frac{ik^2 S_{01}(x)S_{11}''(x)}{4\lambda^2} \\ \dot{S}_{11} = \sqrt{-1}S_{10}\wp(S_{01}) - \sqrt{-1}S_{01}\wp(S_{10}) + \frac{ik^2 S_{01}(x)S_{10}''(x)}{4\lambda^2} - \frac{ik^2 S_{10}(x)S_{01}''(x)}{4\lambda^2} \\ \dot{S}_{01} = -\sqrt{-1}S_{10}\wp(S_{11}) + \sqrt{-1}S_{11}\wp(S_{10}) + \frac{ik^2 S_{10}(x)S_{11}''(x)}{4\lambda^2} - \frac{ik^2 S_{11}(x)S_{10}''(x)}{4\lambda^2} \end{cases} \quad (3.2.38)$$

Отсюда следует, что уравнение (3.2.37) эквивалентно (3.2.25).

subsectionПоиски замен переменных между системами Ландау-Лифшица и полевого Калоджеро-Мозера. Матрица Лакса 1+1 Калоджеро-Мозера (для $SL(2, \mathbb{C})$)

$$\tilde{L}^{CM} = \begin{pmatrix} p - \frac{kq_x}{2}E_1(z) & -\frac{\nu}{2}\phi(-q, z) \\ -\frac{\nu}{2}\phi(q, z) & -p + \frac{kq_x}{2}E_1(z) \end{pmatrix} \quad (3.3.1)$$

с вычетом

$$B = \text{Res}\tilde{L}_4^{CM} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}kq_x & -\frac{\nu}{2} \\ -\frac{\nu}{2} & \frac{1}{2}kq_x \end{pmatrix} \quad (3.3.2.1)$$

Изначально матрица D выбиралась из таких соображений

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.3.2.2)$$

чтобы матрица перехода g обладала таким свойством, что от $g(z=0)$ имеет собственный вектор $(1, 1)$, собственный вектор вычета вида

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\nu}{2} \\ -\frac{\nu}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.3)$$

должен зануляется в ядре. Для случая $1+1$, т. е. для матрицы Лакса (3.3.1) нужно выбрать такую матрицу

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \quad (3.3.4)$$

чтобы полученная при этом g зануляла собственный вектор (3.3.2.1). В качестве упражнения вы можете определить собственный вектор вычета (3.3.2.1) и матрицу D самостоятельно. А матрица g при этом будет равна (3.3.14.1).

Теперь вычислим собственный вектор $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$, который при $k = 0$ переходит в $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Сперва вычислим собственное значение из детерминанта

$$\det(B - \lambda I) = 0 \quad (3.3.5)$$

Дальше из собственных значений

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2} \quad (3.3.6.1)$$

$$\lambda_2 = \frac{c}{2} \quad (3.3.6.2)$$

и уравнение

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}kq_x - \lambda & -\frac{\nu}{2} \\ -\frac{\nu}{2} & \frac{1}{2}kq_x - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.3.7)$$

получаем собственные векторы для случая (3.3.6.1)

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{kq_x}{2} - \frac{c}{2} \\ -\frac{\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (3.3.8.1)$$

А для случая (3.3.6.2)

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{2} - \frac{kq_x}{2} \\ -\frac{\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (3.3.8.2)$$

где $c = \sqrt{h'} = \sqrt{\nu^2 + k^2 q_x^2}$. Если ввести условие $k = 0$, то только вектор (3.3.8.1) переходит в $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Теперь имея в наличии собственный вектор (3.3.8.1) и оператор

$$\Xi = \begin{pmatrix} \theta_{00}(z + q, 2\tau) & \theta_{00}(z - q, 2\tau) \\ -\theta_{10}(z + q, 2\tau) & -\theta_{10}(z - q, 2\tau) \end{pmatrix} \quad (3.3.9)$$

мы сможем определить элементы диагональной матрицы

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \quad (3.3.10)$$

А для этого необходимо, чтобы матрица калибровочного преобразования

$$g = \Xi(z, q)D^{-1}(q) \quad (3.3.11)$$

зануляла вектор (3.3.8.1), т. е.

$$g \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.3.12)$$

В итоге наша матрица (3.3.10) имеет вид

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\nu}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(c + kq) \end{pmatrix} \quad (3.3.13.1)$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{2}{\nu} & 0 \\ 0 & \frac{2}{-kq_x - c} \end{pmatrix} \quad (3.3.13.2)$$

В итоге калибровочное преобразование (3.3.11) примет вид

$$g = \begin{pmatrix} \theta_{00}(z + q, 2\tau)\nu & -\theta_{00}(q - z, 2\tau)(c + kq_x) \\ -\theta_{10}(z + q, 2\tau)\nu & \theta_{10}(q - z, 2\tau)(c + kq_x) \end{pmatrix} \quad (3.3.14.1)$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\theta_{10}(q-z, 2\tau)}{\vartheta(z, \tau)\vartheta(q, \tau)\nu} & -\frac{\theta_{00}(q-z, 2\tau)}{\vartheta(z, \tau)\vartheta(q, \tau)\nu} \\ -\frac{\theta_{10}(z+q, 2\tau)}{\vartheta(z, \tau)\vartheta(q, \tau)(c+kq_x)} & -\frac{\theta_{00}(z+q, 2\tau)}{\vartheta(z, \tau)\vartheta(q, \tau)(c+kq_x)} \end{pmatrix} \quad (3.3.14.2)$$

Теперь подставляя (3.3.14) и (3.3.1) в

$$L^{LL} = -kg\partial_x g^{-1} + g\tilde{L}^{CM}g^{-1} \quad (3.3.15.1)$$

Здесь второе слагаемое обозначим как

$$\tilde{L}^{(CM), (2)} = g\tilde{L}^{CM}g^{-1} = \begin{pmatrix} L_{11}^{CM} & L_{12}^{CM} \\ L_{21}^{CM} & L_{22}^{CM} \end{pmatrix} \quad (3.3.15.2)$$

где (используя тождество (A.1)-(A.4))

$$L_{11}^{CM} = \frac{1}{\det g} \left(\tilde{L}_{11}^{CM} (g_{11}g_{22} + g_{21}g_{12}) + \tilde{L}_{21}^{CM} g_{12}g_{22} - \tilde{L}_{12}^{CM} g_{11}g_{21} \right) \quad (3.3.15.3)$$

$$L_{12}^{CM} = \frac{1}{\det g} \left(-2\tilde{L}_{11}^{CM} (g_{12}g_{11}) + \tilde{L}_{12}^{CM} g_{11}^2 - \tilde{L}_{21}^{CM} g_{12}^2 \right) \quad (3.3.15.4)$$

$$L_{21}^{CM} = \frac{1}{\det g} \left(2\tilde{L}_{11}^{CM} g_{21}g_{22} + \tilde{L}_{21}^{CM} g_{22}^2 - \tilde{L}_{12}^{CM} g_{21}^2 \right) \quad (3.3.15.5)$$

С учётом следующих соотношений

$$\begin{aligned} \det g &= \vartheta(z)\vartheta(q)(c + kq_x)\nu, \\ g_{12}g_{22} &= -\frac{1}{2}\theta_{10}(-z + q)\theta_{10}(0)(c + kq_x)^2, \quad g_{11}g_{21} = -\frac{1}{2}\theta_{10}(z + q)\theta_{10}(0)\nu^2 \end{aligned} \quad (3.3.15.6)$$

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= \frac{1}{2} (\theta_{00}(z+q)\theta_{00}(0) + \theta_{01}(z+q)\theta_{01}(0)) \nu^2 \\ g_{12}^2 &= \frac{1}{2} (\theta_{00}(-z+q)\theta_{00}(0) + \theta_{01}(-z+q)\theta_{01}(0)) (c + kq_x)^2 \end{aligned} \quad (3.3.15.7)$$

$$\begin{aligned} g_{21}^2 &= \frac{1}{2} (\theta_{00}(z+q)\theta_{00}(0) - \theta_{01}(z+q)\theta_{01}(0)) \nu^2 \\ g_{22}^2 &= \frac{1}{2} (\theta_{00}(-z+q)\theta_{00}(0) - \theta_{01}(-z+q)\theta_{01}(0)) (c + kq_x)^2 \end{aligned} \quad (3.3.15.8)$$

А ещё выражения

$$g_{11}g_{22} + g_{21}g_{12} = \theta_{10}(z)\theta_{10}(q)(c + kq_x)\nu \quad (3.3.15.9)$$

$$g_{12}g_{11} = -\frac{1}{2} (\theta_{00}(z)\theta_{00}(q) + \theta_{01}(z)\theta_{01}(q)) (c + kq_x)\nu \quad (3.3.15.10)$$

$$g_{21}g_{22} = -\frac{1}{2} (\theta_{00}(z)\theta_{00}(q) - \theta_{01}(z)\theta_{01}(q)) (c + kq_x)\nu \quad (3.3.15.11)$$

При упрощение нам понадобятся тождество (A1-A10), (A14) и (A15). А первая слагаемая будет при нормировках $g \rightarrow g\sqrt{(\det g)^{-1}}$, $g^{-1} \rightarrow g^{-1}\sqrt{\det g}$ раскладывается на две слагаемые, одна из которых имеет вид

$$G^{(1)} = -kg\partial_x g^{-1} \quad (3.3.15.12)$$

а другая слагаемая будет иметь следующий вид

$$G^{(2)} = -Ik\sqrt{(\det g)^{-1}}\partial_x\sqrt{\det g} \quad (3.3.15.13)$$

где I - единичная матрица. Складывая обе слагаемые мы получаем

$$G = G^{(1)} + G^{(2)} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \quad (3.3.15.14)$$

где элементы матрицы

$$G_{11} = \frac{kq_x\theta'_{10}(z, \tau)\theta_{10}(q, \tau)}{2\vartheta(z, \tau)\vartheta(q, \tau)} - \frac{ck^2q_{xx}\theta_{10}(z, \tau)\theta_{10}(q, \tau)}{2\nu^2\vartheta(z, \tau)\vartheta(q, \tau)} \quad (3.3.15.15)$$

$$\begin{aligned} G_{12} &= -\frac{ck^2q_{xx}\theta_{00}(z, \tau)\theta_{00}(q, \tau)}{2\nu^2\vartheta(z, \tau)\vartheta(q, \tau)} - \frac{ck^2q_{xx}\theta_{01}(z, \tau)\theta_{01}(q, \tau)}{2\nu^2\vartheta(z, \tau)\vartheta(q, \tau)} + \\ &+ \frac{kq_x\theta'_{00}(z, \tau)\theta_{00}(q, \tau)}{2\vartheta(z, \tau)\vartheta(q, \tau)} + \frac{kq_x\theta'_{01}(z, \tau)\theta_{01}(q, \tau)}{2\vartheta(z, \tau)\vartheta(q, \tau)} \end{aligned} \quad (3.3.15.16)$$

$$\begin{aligned} G_{21} &= \frac{ck^2q_{xx}\theta_{00}(z, \tau)\theta_{00}(q, \tau)}{2\nu^2\vartheta(z, \tau)\vartheta(q, \tau)} - \frac{ck^2q_{xx}\theta_{01}(z, \tau)\theta_{01}(q, \tau)}{2\nu^2\vartheta(z, \tau)\vartheta(q, \tau)} + \\ &+ \frac{kq_x\theta'_{01}(z, \tau)\theta_{01}(q, \tau)}{2\vartheta(z, \tau)\vartheta(q, \tau)} - \frac{kq_x\theta'_{00}(z, \tau)\theta_{00}(q, \tau)}{2\vartheta(z, \tau)\vartheta(q, \tau)} \end{aligned} \quad (3.3.15.17)$$

$$G_{22} = -G_{11} \quad (3.3.15.18)$$

Здесь для упрощение используются те же тождество (A), а также производные (A1)-(A4).

В итоге получаем следующие замены переменных

$$S_{10} = -\frac{ck^2\theta_{10}(0, \tau)q_{xx}\theta_{10}(q, \tau)}{2\nu^2\vartheta'(0)\vartheta(q, \tau)} + \frac{c\theta_{10}(0, \tau)^2\theta_{00}(q, \tau)\theta_{01}(q, \tau)}{2\theta_{00}(0, \tau)\theta_{01}(0, \tau)\vartheta(q, \tau)^2} + \frac{p\theta_{10}(0, \tau)\theta_{10}(q, \tau)}{\vartheta'(0)\vartheta(q, \tau)} \quad (3.3.16.1)$$

$$S_{01} = -\frac{ck^2\theta_{01}(0, \tau)q_{xx}\theta_{01}(q, \tau)}{2\nu^2\vartheta'(0)\vartheta(q, \tau)} + \frac{c\theta_{01}(0, \tau)^2\theta_{00}(q, \tau)\theta_{10}(q, \tau)}{2\theta_{00}(0, \tau)\theta_{10}(0, \tau)\vartheta(q, \tau)^2} + \frac{p\theta_{01}(0, \tau)\theta_{01}(q, \tau)}{\vartheta'(0)\vartheta(q, \tau)} \quad (3.3.16.2)$$

$$S_{21} = -\frac{ick^2\theta_{00}(0, \tau)q_{xx}\theta_{00}(q, \tau)}{2\nu^2\vartheta'(0)\vartheta(q, \tau)} + \frac{ic\theta_{00}(0, \tau)^2\theta_{01}(q, \tau)\theta_{10}(q, \tau)}{2\theta_{01}(0, \tau)\theta_{10}(0, \tau)\vartheta(q, \tau)^2} + \frac{ip\theta_{00}(0, \tau)\theta_{00}(q, \tau)}{\vartheta'(0)\vartheta(q, \tau)} \quad (3.3.16.2)$$

Если воспользоваться (A.14), (A.15) и (3.1.3), то из замен (3.3.16) можно вынести общий множитель и тогда замены будут иметь следующий вид

$$S_\alpha(p, q) = (p - (c/2)\partial_q - (ck^2/2)(q_{xx}/\nu^2))\varphi_\alpha(q) \quad (*)$$

Теперь при подстановке $c = \sqrt{\hbar'} = \sqrt{\nu^2 + k^2q_x^2}$ (фиксирующая сопряженную орбиту в отмеченной точке), и $k = 0$, полученные нами замены (3.3.16) придут к заменам (3.1.6) из пункта 3.1. А скобки Пуассона-Ли будут иметь соответствующие виды

$$\{S_{11}(x), S_{01}(y)\} = \sqrt{-1}S_{10}(x)\delta(x - y) \quad (3.3.17.1)$$

$$\{S_{10}(x), S_{01}(y)\} = -\sqrt{-1}S_{11}(x)\delta(x - y) \quad (3.3.17.2)$$

$$\{S_{10}(x), S_{11}(y)\} = \sqrt{-1}S_{01}(x)\delta(x - y) \quad (3.3.17.3)$$

аналогичные скобкам для простой механики (3.1.7). (Скобки Пуассона (3.3.17) можно проверить также как и скобки (3.1.7)).

Добавление

Формулы с удвоенным модулярным параметром

$$2\vartheta(x, 2\tau)\theta_{01}(y, 2\tau) = \vartheta\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\theta_{10}\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right) + \theta_{10}\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\vartheta\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right) \quad (A.1)$$

$$2\theta_{00}(x, 2\tau)\theta_{10}(y, 2\tau) = \vartheta\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\vartheta\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right) + \theta_{10}\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\theta_{10}\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right) \quad (A.2)$$

$$2\theta_{00}(x, 2\tau)\theta_{00}(y, 2\tau) = \theta_{00}\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\theta_{00}\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right) + \theta_{01}\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\theta_{01}\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right) \quad (A.3)$$

$$\begin{aligned}
2\theta_{10}(x, 2\tau)\theta_{10}(y, 2\tau) &= \theta_{00}\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\theta_{00}\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right) - \\
&\quad - \theta_{01}\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\theta_{01}\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right)
\end{aligned} \tag{A.4}$$

формулы сложения для тета-функций

$$\begin{aligned}
\vartheta(x+u)\theta_{00}(x-u)\theta_{01}(0)\theta_{10}(0) &= \theta_{00}(x)\vartheta(x)\theta_{01}(u)\theta_{10}(u) + \\
&\quad + \theta_{10}(x)\theta_{01}(x)\theta_{00}(u)\vartheta(u)
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta(x-u)\theta_{00}(x+u)\theta_{01}(0)\theta_{10}(0) &= \theta_{00}(x)\vartheta(x)\theta_{01}(u)\theta_{10}(u) - \\
&\quad - \theta_{10}(x)\theta_{01}(x)\theta_{00}(u)\vartheta(u)
\end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
v(x+u)\theta_{01}(x-u)\theta_{00}(0)\theta_{10}(0) &= \theta_{00}(x)\theta_{10}(x)\theta_{01}(u)\vartheta(u) + \\
&\quad + \theta_{01}(x)\vartheta(x)\theta_{00}(u)\theta_{10}(u)
\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
v(x-u)\theta_{01}(x+u)\theta_{00}(0)\theta_{10}(0) &= -\theta_{00}(x)\theta_{10}(x)\theta_{01}(u)\vartheta(u) + \\
&\quad + \theta_{01}(x)\vartheta(x)\theta_{00}(u)\theta_{10}(u)
\end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}
v(x+u)\theta_{10}(x-u)\theta_{00}(0)\theta_{01}(0) &= \theta_{00}(x)\theta_{01}(x)\theta_{10}(u)\vartheta(u) + \\
&\quad + \theta_{10}(x)\vartheta(x)\theta_{00}(u)\theta_{01}(u)
\end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta(x-u)\theta_{10}(x+u)\theta_{00}(0)\theta_{01}(0) &= -\theta_{00}(x)\theta_{01}(x)\theta_{10}(u)\vartheta(u) + \\
&\quad + \theta_{10}(x)\vartheta(x)\theta_{00}(u)\theta_{01}(u)
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Соотношения между квадратами тета-функций

$$\begin{aligned}
\vartheta(z)^2\theta_{01}(0)^2 &= \theta_{00}(z)^2\theta_{10}(0)^2 - \theta_{10}(z)^2\theta_{00}(0)^2 \\
\theta_{10}(z)^2\theta_{01}(0)^2 &= \theta_{01}(z)^2\theta_{10}(0)^2 - \vartheta(z)^2\theta_{00}(0)^2 \\
\theta_{00}(z)^2\theta_{01}(0)^2 &= \theta_{01}(z)^2\theta_{00}(0)^2 - \vartheta(z)^2\theta_{10}(0)^2 \\
\theta_{01}(z)^2\theta_{01}(0)^2 &= \theta_{00}(z)^2\theta_{00}(0)^2 - \theta_{10}(z)^2\theta_{10}(0)^2
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Тождество Римана

$$\theta_{00}(0)^4 = \theta_{10}(0)^4 + \theta_{01}(0)^4 \tag{A.12}$$

Ещё одна формула сложения тета-функций

$$\theta_{01}(x)^4 + \theta_{10}(x)^4 - \theta_{00}(x)^4 = \theta_{11}(x)^4 \tag{A.13}$$

квазипериодические функции

$$F_\gamma(z) = \varphi_\alpha(z)\varphi_\beta(z) = \varphi_\gamma(z)E_1(z) - f_\gamma(z) = -\partial_z\varphi_\gamma(z) \tag{A.14}$$

$$\partial_z\varphi_\gamma(z) = \varphi_\gamma(z) \left(\frac{\theta'_\gamma(z)}{\theta_\gamma(z)} - \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)} \right) \tag{A.15}$$

и тождество

$$\varphi_\beta(z)f_\gamma(z) - \varphi_\gamma(z)f_\beta(z) = \varphi_{\beta+\gamma}(z) (\wp(\omega_\beta) - \wp(\omega_\gamma)) \tag{A.16}$$

3.5 Многообразие Шуберта в грассманиане Бейлинсона-Дринфельда и глобальные модули Демазюра

Вычислено пространство сечений степени детерминантного расслоения на сферических подмногообразиях Шуберта в аффинном грассманиане Бейлинсона-Дринфельда. Ответ дан в терминах глобальных модулей Демазюра над алгеброй Ли токов.

А именно, доказано, что:

$$H^0(\overline{Gr}_{\mathbb{A}^k}^{\lambda_1^\vee, \dots, \lambda_k^\vee}, \mathcal{L}^{\otimes \ell})^\vee \simeq \mathbb{D}(\ell; \lambda_1^\vee, \dots, \lambda_k^\vee) \otimes_{\mathcal{A}(\lambda_1^\vee, \dots, \lambda_k^\vee)} \mathbb{C}[\mathbb{A}^k].$$

Здесь $\overline{Gr}_{\mathbb{A}^k}^{\lambda_1^\vee, \dots, \lambda_k^\vee}$ обозначает многообразие Шуберта, соответствующее набору из k доминантных ковесов $\lambda_1^\vee, \dots, \lambda_k^\vee$ в грассманиане Бейлинсона-Дринфельда над глобальной гливой \mathbb{A}^1 , \mathcal{L} обозначает детерминантное линейное расслоение на нем, $\mathbb{D}(\ell; \lambda_1^\vee, \dots, \lambda_k^\vee)$ обозначает глобальный модуль Демазюра, а $\mathcal{A}(\lambda_1^\vee, \dots, \lambda_k^\vee)$ обозначает его алгебру старших весов.

3.6 Представления супер-янгианов

Привлеченным внешним специалистом В.А.Стукопиным установлена эквивалентность категорий представлений суперянгиана специальной линейной супералгебры Ли и квантовой петлевой супералгебры. А именно, усилен и уточнен результат об изоморфизме между пополнениями суперянгиана специальной линейной супералгебры и квантовой петлевой супералгеброй специальной линейной супералгебры, следуя подходу S. Gautam и V. Toledano-Laredo (см. [19]), исследуется вопрос о связи между некоторыми аналогами категории \mathcal{O} представлений этих супералгебр: представлений янгиана $Y(A(m, n))$ специальной линейной супералгебры Ли $A(m, n)$ и квантовой петлевой супералгеброй $U_q(LA(m, n))$. Следует отметить, что теория представлений, например, простых супералгебр Ли и даже базисных супералгебр Ли, наиболее близких к простым алгебрам Ли, является существенно более сложной по сравнению с теорией представлений простых алгебр Ли.

3.7 Модели обмена

Привлеченным внешним специалистом С.М.Апенко исследовано поведение относительной энтропии (расстояния Кульбака-Лейблера до равновесия) для нелинейной эволюции типа моделей обмена в системах агентов с парными взаимодействиями. Найдены условия, при которых относительная энтропия может быть функцией Ляпунова для данных процессов. Для нелинейных задач обмена выделен класс моделей, для которых относительная энтро-

пия всегда монотонно убывает со временем и доказана соответствующая теорема. Рассмотрен также целый ряд совсем других моделей и показано, что даже для них относительная энтропия все же может быть хорошей функцией Ляпунова, так как после возрастания на первом шаге эволюции она затем начинает монотонно убывать еще достаточно далеко от равновесия.

3.8 Комбинаторика графов и калибровочные преобразования

Конструкция, сопоставляющая связному планарному трехвалетному двуцветному графу с совершенной ориентацией и положительными весами на ребрах рациональную M -кривую с дивизором, отвечающим условию Дубровина-Натансона, существенно зависит от выбора калибровочного направления и конкретного вложения графа в плоскость. Важный вопрос состоит в том, зависит ли построенный дивизор от конкретного вложения графа в плоскость, или несмотря на неинвариантность промежуточных шагов окончательный ответ получается инвариантным. Привлеченным внешним специалистом П.Гриневичем доказана следующая теорема: Элементарные преобразования, такие как повороты калибровочных направлений и сдвиги вершин на плоскости, не меняющие топологию планарного графа порождают базисные калибровочные преобразования весов на ребрах и ненормированной волновой функции, следовательно дивизор нормированной волновой функции остается инвариантным. В то же время, если граф не минимальный, то одна точка тотально неотрицательного грассманиана может отвечать целому многообразию дивизоров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение кратко суммируем полученные результаты по проекту.

- Мы связываем конформные блоки $c = 2$ с теорией Пенлеве, используя соотношения разрушения Накаджимы – Йошиоки на статистических суммах Некрасова. В качестве приложения мы доказываем формулу тау-функции уравнения q -Пенлеве $A_7^{(1)}$.
- Мы построили общее решение класса фуксовых систем ранга N , а также связанных с ним изомонодромных тау-функций в терминах полувырожденных конформных блоков WN -алгебры с центральным зарядом $c = N - 1$. Простейший пример представляет собой тау-функция системы Фудзи – Судзуки – Цуда, выраженная как преобразование Фурье 4-точечного конформного блока по промежуточному весу.
- Описаны киральные дифференциальные операторы через квантование голоморфной σ -модели.
- Найдена явная формула для произвольного решения соотношений открытой топологической рекурсии в роде 1, которая аналогична формуле Дайкграафа–Виттена для замкнутого потенциала Громова–Виттена в роде 1.
- Предложена конструкция, которая связывает вершинные (или киральные) алгебры с гладкими 4-многообразиями таким образом, что операции над алгебрами отражают операции склейки на 4-многообразиях и, более того, эквивалентные конструкции 4-многообразий приводят к эквивалентности (двойственности) соответствующих алгебр.
- Мы предлагаем явную формулу для соответствия потомков GW / PT в стационарном случае для неособых связных проективных трехмерных многообразий.
- Опереды алгебр Пуассона и Герстенхабера порождаются одним бинарным элементом, если мы рассматриваем их как опереды Хопфа (то есть как опереды в категории коммутативных коалгебр). Мы подробно обсуждаем опереды Хопфа, порожденные одним кососимметричным элементом произвольной арности. Мы объясняем, почему двойственное пространство к пространству n -арных операций в этих операдах является квадратичной алгеброй и алгеброй Кошуля. Мы даем подробное описание образующих, отношений и мономиальных базисов в этих алгебрах.
- Мы вводим нечетную суперсимметричную версию эллиптической функции Кронекера. Он удовлетворяет тождеству Фэя первого рода и суперсимметричной версии

уравнения теплопроводности. В качестве приложения мы строим нечетные суперсимметричные расширения эллиптических R-матриц, которые удовлетворяют классическим и ассоциативным уравнениям Янга – Бакстера.

- Зафиксируем полупростую алгебру Ли \mathfrak{g} . Алгебры Годена - это коммутативные алгебры, действующие на пространствах кратностей тензорного произведения для \mathfrak{g} -представлений. Эти алгебры зависят от параметра, который является точкой в пространстве модулей Делиня-Мамфорда стабильных кривых рода 0 с отмеченными точками. Для вещественных значений параметра алгебра Годена действует с простым спектром в пространстве кратностей тензорного произведения и дает нам базис из собственных векторов. В работе [23] мы изучили монодромию этих собственных векторов при изменении параметра в пределах вещественной части пространства Делиня-Мамфорда; это дает действие фундаментальной группы этого пространства модулей, которая называется группой кактусов.

Доказана гипотеза Этингофа, согласно которой монодромия собственных векторов алгебр Годена согласуется с действием группы кактусов на тензорные произведения \mathfrak{g} -кристаллов. Фактически, мы доказываем, что кограничная категория нормальных \mathfrak{g} -кристаллов может быть восстановлена с помощью накрытий пространств модулей.

Наш основной инструмент - это построение кристаллической структуры на множестве собственных векторов для сдвига алгебр аргументов, еще одного семейства коммутативных алгебр, которые действуют на любое неприводимое \mathfrak{g} -представление. Также доказано, что монодромия таких собственных векторов задается внутренним действием группы кактусов на \mathfrak{g} -кристаллах.

- Мы устанавливаем замечательную связь между квантовыми моделями Годена с границей и классическими интегрируемыми системами многих тел типа Калоджеро-Мозера, ассоциированными с системами корней классических алгебр Ли (B, C и D). Показано, что при отождествлении спектров гамильтонианов Годена со скоростями частиц классической модели все интегралы движения последней принимают нулевые значения. Это обобщение квантово-классической двойственности, наблюдавшейся ранее для моделей Годена с периодическими граничными условиями и моделей Калоджеро-Мозера, связанных с системой корней типа A.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. L. F. Alday, D. Gaiotto and Y. Tachikawa, Liouville correlation functions from four-dimensional gauge theories, *Lett. Math. Phys.* 91 (2010) 167–197; [arXiv:0906.3219]
2. K. Atalikov, A. Zotov, Field theory generalizations of two-body Calogero-Moser models in the form of Landau-Lifshitz equations, arXiv:2010.14297 [hep-th].
3. M. Bershtein, P. Gavrylenko, A. Marshakov, Cluster integrable systems, q -Painleve equations and their quantization, *JHEP* 1802, (2018), 077; [arXiv:1711.02063].
4. M. Bershtein, P. Gavrylenko, A. Marshakov, Cluster Toda chains and Nekrasov functions, *TMF*, 198:2 (2019), 179–214; *Theoret. and Math. Phys.*, 198:2 (2019), 157–188; [arXiv:1804.10145].
5. M. Bershtein, A. Shchechkin, Bilinear equations on Painlevé tau functions from CFT, *Comm. Math. Phys.* 339 (3), (2015), 1021–1061; [arXiv:1406.3008].
6. M. Bershtein, A. Shchechkin, q -deformed Painlevé tau function and q -deformed conformal blocks, *J. Phys. A.* 50 (8) (2017) 085202; [arXiv:1608.02566].
7. M. Bershtein, A. Shchechkin, Bäcklund transformation of Painlevé III(D_8) τ function, *J. Phys. A.* 50 (11) (2017) 115205; [arXiv:1608.02568].
8. M. Bershtein, A. Shchechkin, Painlevé equations from Nakajima-Yoshioka blowup relations, *Lett. Math. Phys.* 109 (11), (2019), 2359-2402; [arXiv:1811.04050].
9. G. Bonelli, K. Maruyoshi, and A. Tanzini, Instantons on ALE spaces and Super Liouville Conformal Field Theories, *JHEP* 1108 (2011) 056; [arXiv:1106.2505].
10. R. Brussee, Blow-up formulas for (-2)-spheres; [arXiv:dg-ga/9412004].
11. U. Bruzzo, M. Pedrini, F. Sala and R. Szabo, Framed sheaves on root stacks and supersymmetric gauge theories on ALE spaces, *Adv. Math.* 288 (2016), 1175–1308;
12. Oscar Brauer Gomez, Alexandr Buryak, Open topological recursion relations in genus 1 and integrable systems, arXiv:2008.06922.
13. Boris Feigin and Sergey Gukov, VOA[M4], *Journal of Mathematical Physics* 61, 012302 (2020)
14. G. Felder, M. Müller-Lennert, Analyticity of Nekrasov Partition Functions, *Comm. Math. Phys.* 364 (2), (2018), 683–718; [arXiv:1709.05232].
15. R. Fintushel and R. J. Stern, The Blowup Formula for Donaldson Invariants, *The Annals of Mathematics* 143 3, 529–546; [arXiv:alg-geom/9405002].
16. O. Gamayun, N. Iorgov, O. Lisovyy, Conformal field theory of Painlevé VI, *JHEP* 1210, (2012), 38; [arXiv:1207.0787].
17. O. Gamayun, N. Iorgov, O. Lisovyy, How instanton combinatorics solves Painlevé VI,V and III's, *J. Phys. A: Math. Theor.* 46 (2013) 335203; [arXiv:1302.1832].
18. P. Gavrylenko, Isomonodromic τ -functions and W_N conformal blocks, *JHEP* 0915, (2015), 167; [arXiv:1505.00259].

19. S. Gautam, V. Toledano-Laredo, “Yangians, quantum loop algebras and abelian difference equations”, *Journal of the American Mathematical Society*, 29 (2016), 775–824.
20. S. Gautam, V. Toledano-Laredo, “Meromorphic tensor equivalence for Yangians and quantum loop algebras”, *Publications Mathématiques de l’IHES*, 125 (2017), 267–337.
21. L. Göttsche, H. Nakajima, K. Yoshioka, K-theoretic Donaldson invariants via instanton counting, *Pure Appl. Math. Quart.* 5 (2009) 1029–1111; [[arXiv:math/0611945](#)].
22. Gorbounov V., Gwilliam O., Williams B. Chiral differential operators via quantization of the holomorphic σ -model. *Asterisque*. 2020. No. 419
23. Halacheva I., Kamnitzer J., Rybnikov L., Weekes A. Crystals and monodromy of Bethe vectors // *Duke Mathematical Journal*. 2020. Vol. 169. No. 12. P. 2337-2419.
24. N.Iorgov, O.Lisovyy, J.Teschner, Isomonodromic τ functions from Liouville conformal blocks, *Commun. Math.Phys.* 336(2), (2015), 671-694; [[arXiv:1401.6104](#)]
25. A. Iqbal and A. K. Kashani-Poor, Instanton counting and Chern-Simons theory, *Adv. Theor. Math. Phys.* 7 3 (2003), 457–497; [[arXiv:hep-th/0212279](#)].
26. A. Its, O. Lisovyy, Yu. Tykhyy, Connection problem for the sine-Gordon/Painlevé III tau function and irregular conformal blocks, *IMRN* (2014); [[arXiv:1403.1235](#)].
27. M. Jimbo, H. Nagoya and H. Sakai, CFT approach to the q -Painlevé VI equation, *J. Int. Syst.* 2 (2017) 1; [[arXiv:1706.01940](#)].
28. Y. Matsuhira, H. Nagoya, Combinatorial expressions for the tau functions of q -Painlevé V and III equations; [[arXiv:arXiv:1811.03285](#)].
29. H. Nakajima and K. Yoshioka, Lectures on Instanton Counting, In: *Algebraic Structures and Moduli Spaces*, CRM Proc. & Lect. Notes 38, AMS, 2004, 31–101; [[arXiv:math/0311058](#)].
30. H. Nakajima and K. Yoshioka, Instanton counting on blowup. II. K-theoretic partition function, *Transform. Groups* 10 3–4, (2005), 489–519; [[arXiv:math/0505553](#)].
31. H. Nakajima and K. Yoshioka, Perverse coherent sheaves on blow-up. III. Blow-up formula from wall-crossing, *Kyoto J. Math.* 51 2 (2011), 263; [[arXiv:0911.1773](#)].
32. Alexander V. Gnedin. The representation of composition structures. *Ann. Probab.*, 25(3):1437–1450, 1997.
33. Alexander Gnedin and Grigori Olshanski. Coherent permutations with descent statistic and the boundary problem for the graph of zigzag diagrams. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 51968, 39, 2006.
34. S. V. Kerov. Combinatorial examples in the theory of AF-algebras. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 172(Differential’naya Geom. Gruppy Li i Mekh. Vol. 10):55–67, 169–170, 1989.
35. S. V. Kerov. Asymptotic representation theory of the symmetric group and its applications in analysis, volume 219 of *Translations of Mathematical Monographs*. American

Mathematical Society, Providence, RI, 2003. Translated from the Russian manuscript by N. V. Tsilevich, With a foreword by A. Vershik and comments by G. Olshanski.

36. J. F. C. Kingman. The representation of partition structures. *J. London Math. Soc.* (2), 18(2):374–380, 1978.

37. M. V. Karev and P. P. Nikitin. The boundary of the refined Kingman graph. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 468(Teoriya Predstavleniĭ, Dinamicheskie Sistemy, Kombinatornye Metody. XXIX):58–74, 2018.

38. S. V. Kerov and A. M. Vershik. The K -functor (Grothendieck group) of the infinite symmetric group. volume 123, pages 126–151. 1983. *Differential geometry, Lie groups and mechanics*, V.

39. S. V. Kerov and A. M. Vershik. Locally semisimple algebras. combinatorial theory and the K_0 - functor. *Journal of Soviet Mathematics*, 38(2):1701–1733, jul 1987.

40. S. Kerov and A. Vershik. The Grothendieck group of the infinite symmetric group and symmetric functions with the elements of the K_0 -functor theory of AF-algebras. *Representation of Lie groups and related topics* (A.M. Vershik and D.P. Zhelobenko, eds.), *Adv. Stud. Contemp. Math*, 7:36–114, 1990.

41. Kurt Luoto, Stefan Mykytiuk, and Stephanie van Willigenburg. An introduction to quasisymmetric Schur functions. *SpringerBriefs in Mathematics*. Springer, New York, 2013. Hopf algebras, quasisymmetric functions, and Young composition tableaux.

42. O. Gamayun, N. Iorgov and O. Lisovyy, Conformal field theory of Painlevé VI, *JHEP* **10** (2012) 038 [1207.0787].

43. A. Litvinov, S. Lukyanov, N. Nekrasov and A. Zamolodchikov, Classical Conformal Blocks and Painleve VI, *JHEP* **07** (2014) 144 [1309.4700].

44. N. Nekrasov, “Some applications of defects in supersymmetric gauge theory.” <https://www.youtube.com/watch?v=QD-0rgaYQCw>, 2019.

45. S. Jeong and N. Nekrasov, *Opers, surface defects, and Yang-Yang functional*, 1806.08270.

46. A. Grassi and J. Gu, BPS relations from spectral problems and blowup equations, *Lett. Math. Phys.* **109** (2019) 1271 [1609.05914].

47. H. Nakajima and K. Yoshioka, Instanton counting on blowup. 1., *Invent. Math.* **162** (2005) 313 [math/0306198].

48. M. Bershtein, B. Feigin and A. Litvinov, Coupling of two conformal field theories and Nakajima-Yoshioka blow-up equations, *Lett. Math. Phys.* **106** (2016) 29 [1310.7281].

49. G. Moore, Geometry of the string equations, *Comm. Math. Phys.* **133** (1990) 261.

50. S. L. Lukyanov, Critical values of the Yang-Yang functional in the quantum sine-Gordon model, *Nucl. Phys. B* **853** (2011) 475 [1105.2836].

51. A. Its, O. Lisovyy and Y. Tykhyy, Connection problem for the sine-Gordon/Painlevé

III tau function and irregular conformal blocks, *International Mathematics Research Notices* 2015 (2014) 8903 [1403.1235].

52. O. Lisovyy, “Painlevé functions, accessory parameters and conformal blocks.” <https://sms.cam.ac.uk/media/3088980>, October, 2019.

53. O. Lisovyy, “Quasi-classical blow-up equations, accessory parameters and tau functions.” to appear, and private communications.

54. A. Braverman and P. Etingof, Instanton counting via affine Lie algebras II: From Whittaker vectors to the Seiberg-Witten prepotential, [math/0409441](https://arxiv.org/abs/math/0409441).

55. N. A. Nekrasov and S. L. Shatashvili, Quantization of Integrable Systems and Four Dimensional Gauge Theories, in 16th International Congress on Mathematical Physics, pp. 265–289, 8, 2009, DOI [0908.4052].

56. A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov and A. Morozov, Integrability and Seiberg-Witten exact solution, *Phys. Lett. B* 355 (1995) 466 [[hep-th/9505035](https://arxiv.org/abs/hep-th/9505035)].

57. V. Y. Novokshenov, Movable poles of the solutions of painlevé equation of the third kind and their relation with mathieu functions, *Functional Analysis and Its Applications* 20 (1986) 113.

58. A. Grassi, J. Gu and M. Mariño, Non-perturbative approaches to the quantum Seiberg-Witten curve, 1908.07065.

59. O. Gamayun, N. Iorgov and O. Lisovyy, How instanton combinatorics solves Painlevé VI, V and IIIs, *J. Phys. A* 46 (2013) 335203 [1302.1832].

60. P. Gavrylenko and O. Lisovyy, Pure $SU(2)$ gauge theory partition function and generalized Bessel kernel, *Proc. Symp. Pure Math.* 18 (2018) 181 [1705.01869].

61. M. Bershtein and A. Shchepochkin, Bilinear equations on Painlevé τ functions from CFT, *Commun. Math. Phys.* 339 (2015) 1021 [1406.3008].

62. I. Coman, P. Longhi and J. Teschner, From quantum curves to topological string partition functions II, 2004.04585.

63. A. B. Zamolodchikov, Painleve III and 2-d polymers, *Nucl. Phys. B* 432 (1994) 427 [[hep-th/9409108](https://arxiv.org/abs/hep-th/9409108)].

64. G. Bonelli, A. Grassi and A. Tanzini, Seiberg–Witten theory as a Fermi gas, *Lett. Math. Phys.* 107 (2017) 1 [1603.01174].

65. M. Bershtein, P. Gavrylenko and A. Marshakov, Cluster integrable systems, q -Painlevé equations and their quantization, *JHEP* 02 (2018) 077 [1711.02063].

66. K. Hasegawa, Quantizing the bäcklund transformations of painlevé equations and the quantum discrete painlevé vi equation, [math/0703036](https://arxiv.org/abs/math/0703036).

67. G. Kuroki, Quantum groups and quantization of weyl group symmetries of painlevé systems, 0808.2604.

68. H. Nagoya and Y. Yamada, Symmetries of quantum lax equations for the painlevé equations, 1206.5963.
69. M. Bershtein and A. Shchepochkin, q-deformed Painlevé τ function and q-deformed conformal blocks, J. Phys. A **50** (2017) 085202 [1608.02566].
70. A. Shchepochkin, Blowup relations on $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ from Nakajima-Yoshioka blowup relations, 2006.08582.
71. M. Bershtein and A. Shchepochkin, Painlevé equations from Nakajima–Yoshioka blowup relations, Lett. Math. Phys. **109** (2019) 2359 [1811.04050].
72. N. Iorgov, O. Lisovyy and J. Teschner, Isomonodromic tau-functions from Liouville conformal blocks, Commun. Math. Phys. **336** (2015) 671 [1401.6104].
73. A. Shchepochkin, unpublished, .
74. A. Grassi, Y. Hatsuda and M. Marino, Quantization conditions and functional equations in ABJ(M) theories, J. Phys. A **49** (2016) 115401 [1410.7658].
75. W. Rosenheinrich, “Tables of some indefinite integrals of bessel functions of integer order.” <http://web.eah-jena.de/~rsh/Forschung/Stoer/besint.pdf>, 08, 2019.
76. V. Bazhanov, S. Sergeyev, *Zamolodchikov’s tetrahedron equation and hidden structure of quantum groups*, Journal of Physics A **39** (2006) 13; [arXiv:hep-th/0509181].
77. S.M. Sergeev, *Quantum 2 + 1 evolution model*, Journal of Physics A: Mathematical and General, **32** (30) [arXiv:solv-int/9811003].
78. P. Gavrylenko, M. Semenyakin, Y. Zenkevich, *Solution of tetrahedron equation and cluster algebras*, [arXiv:2010.15871].
79. A.B. Zamolodchikov, *Tetrahedra equations and integrable systems in three-dimensional space*, JETP, Vol. 52, No 2, p. 325
80. A.B. Zamolodchikov, *Tetrahedron equations and the relativistic S-matrix of straight-strings in 2+1-Dimensions.*, Commun. Math. Phys. **79**, 489–505 (1981)
81. A. Neguț. The q -AGT-W relations via shuffle algebras. Comm. Math. Phys., **358**(1):101–170, 2018. [arXiv:1608.08613].
82. B. Feigin, A. Hoshino, J. Shibahara, J. Shiraishi, and S. Yanagida. Kernel function and quantum algebra. RIMS Kokyuroku, 1689:133–152, 2010. [arXiv:1002.2485].
83. B. Feigin and E. Frenkel. Quantum \mathcal{W} -algebras and elliptic algebras. Comm. Math. Phys., **178**(3):653–678, 1996. [arXiv:9508009].
84. J. Shiraishi. Free field constructions for the elliptic algebra $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{sl}_2)$ and Baxter’s eight-vertex model. Internat. J. Modern Phys. A, **19**(May, suppl.):363–380, 2004. [arXiv:0302097].
85. J. Shiraishi, H. Kubo, H. Awata, and S. Odake. A quantum deformation of the Virasoro algebra and the Macdonald symmetric functions. Lett. Math. Phys., **38**(1):33–51, 1996. [arXiv:9507034].

86. Al. Zamolodchikov. Conformal scalar field on the hyperelliptic curve and critical Ashkin-Teller multipoint correlation functions. *Nuclear Phys. B*, 285(3):481–503, 1987.
87. H. Nakajima, Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras, *Duke Math. J.* 76 365–416 (1994).
88. A. Gadde, S. Gukov and P. Putrov, Fivebranes and 4-manifolds, Hirzebruch memorial volume, arXiv:1306.4320.
89. M. Dedushenko, S. Gukov and P. Putrov, Vertex algebras and 4-manifold invariants, Hitchin 70th birthday volume, arXiv:1705.01645.
90. C. Vafa and E. Witten, A Strong coupling test of S duality, *Nucl. Phys. B* 431, 3 (1994), hep-th/9408074.
91. R. Dijkgraaf and G. W. Moore, Balanced topological field theories, *Commun. Math. Phys.* 185, 411 (1997), hep-th/9608169.
92. A. Haydys, Fukaya-Seidel category and gauge theory, *J. Symp. Geom.* 13, 151 (2015), arXiv:1010.2353.
93. E. Witten, Fivebranes and Knots, arXiv:1101.3216.
94. A. Floer, An instanton-invariant for 3-manifolds, *Commun. Math. Phys.* 118 (1988) 215-240.
95. C. H. Taubes, Growth of the Higgs field for solutions to the Kapustin-Witten equations on R^4 , arXiv:1701.03072.
96. S. He, A Gluing Theorem for the Kapustin-Witten Equations with a Nahm Pole, arXiv:1707.06182.
97. N. C. Leung and R. Takahashi, Energy bound for Kapustin-Witten solutions on $S^3 \times \mathbb{R}^+$, arXiv:1801.04412.
98. Y. Tanaka, A perturbation and generic smoothness of the Vafa-Witten moduli spaces on closed symplectic four-manifolds, *Glasg. Math. J.* 61 (2019) 471–486.
99. S. Gukov, P. Putrov and C. Vafa, Fivebranes and 3-manifold homology, *JHEP* 1707, 071 (2017), arXiv:1602.05302.
100. E. Witten, Topological Quantum Field Theory, *Commun. Math. Phys.* 117, 353 (1988).
101. M. Bershadsky, C. Vafa and V. Sadov, D-branes and topological field theories, *Nucl. Phys. B* 463, 420 (1996), hep-th/9511222.
102. E. Silverstein and E. Witten, Criteria for conformal invariance of (0,2) models, *Nucl. Phys. B* 444, 161 (1995) hep-th/9503212.
103. S. H. Katz and E. Sharpe, Notes on certain (0,2) correlation functions, *Commun. Math. Phys.* 262, 611 (2006) hep-th/0406226.
104. M. Dedushenko, Chiral algebras in Landau-Ginzburg models, *JHEP* 1803, 079

(2018) arXiv:1511.04372.

105. A. Johansen, Twisting of $N = 1$ SUSY gauge theories and heterotic topological theories, *Int. J. Mod. Phys. A* 10, 4325 (1995) hep-th/9403017.

106. A. Johansen, Realization of $W(1+\infty)$ and Virasoro algebras in supersymmetric theories on four manifolds, *Mod. Phys. Lett. A* 9, 2611 (1994) hep-th/9406156.

107. A. Johansen, Infinite conformal algebras in supersymmetric theories on four manifolds, *Nucl. Phys. B* 436, 291 (1995) hep-th/9407109.

108. N. Nekrasov, On the BPS/CFT correspondence, Lecture at the University of Amsterdam string theory group seminar (Feb. 3, 2004); 2d CFT-type equations from 4d gauge theory, Lecture at the IAS conference “Langlands Program and Physics” (March 8-10, 2004).

109. N. Nekrasov, BPS/CFT correspondence: non-perturbative Dyson-Schwinger equations and qq-characters, *JHEP* 1603, 181 (2016), arXiv:1512.05388.

110. A. A. Belavin, M. A. Bershtein, B. L. Feigin, A. V. Litvinov and G. M. Tarnopolsky, Instanton moduli spaces and bases in coset conformal field theory, *Commun. Math. Phys.* 319, 269 (2013), arXiv:1111.2803.

111. G. Bonelli, K. Maruyoshi, A. Tanzini and F. Yagi, $N=2$ gauge theories on toric singularities, blow-up formulae and W -algebras, *JHEP* 1301, 014 (2013), arXiv:1208.0790.

112. M. Bershtein, B. Feigin and A. Litvinov, Coupling of two conformal field theories and Nakajima-Yoshioka blow-up equations, *Lett. Math. Phys.* 106, no. 1, 29 (2016), arXiv:1310.7281.

113. U. Bruzzo, M. Pedrini, F. Sala and R. J. Szabo, Framed sheaves on root stacks and supersymmetric gauge theories on ALE spaces, *Adv. Math.* 288, 1175 (2016), arXiv:1312.5554.

114. M. Bershtein, G. Bonelli, M. Ronzani and A. Tanzini, Gauge theories on compact toric surfaces, conformal field theories and equivariant Donaldson invariants, *J. Geom. Phys.* 118, 40 (2017), arXiv:1606.07148.

115. Leonid Rybnikov, A proof of the Gaudin Bethe Ansatz conjecture. ArXiv:1608.04625

116. E. Witten, Elliptic Genera and Quantum Field Theory, *Commun. Math. Phys.* 109, 525 (1987).

117. P. Putrov, J. Song and W. Yan, (0,4) dualities, *JHEP* 1603, 185 (2016), arXiv:1505.07110.

118. work in progress

119. Y. Tanaka and R. P. Thomas, Vafa-Witten invariants for projective surfaces I: stable case, arXiv:1702.08487.

120. L. Göttsche and M. Kool, Virtual refinements of the Vafa-Witten formula, arXiv:1703.07196.

121. M. Alim, B. Haghighat, M. Hecht, A. Klemm, M. Rauch and T. Wotschke, Wall-crossing holomorphic anomaly and mock modularity of multiple M5-branes, *Commun. Math.*

- Phys. 339, no. 3, 773 (2015), arXiv:1012.1608.
122. M. C. N. Cheng, S. Chun, F. Ferrari, S. Gukov and S. M. Harrison, 3d Modularity, JHEP 1910, 010 (2019) arXiv:1809.10148.
123. J. A. Bryan and R. Wentworth, The multi-monopole equations for Kähler surfaces, Turkish J. Math. 20 (1996) 119–128.
124. A. Haydys and T. Walpuski, A compactness theorem for the Seiberg-Witten equation with multiple spinors in dimension three, Geom. Funct. Anal. 25 (2015) 1799–1821.
125. A. Haydys, Topology of the blow-up set for the Seiberg-Witten equation with multiple spinors, arXiv:1607.01763.
126. B. L. Feigin, Extensions of vertex algebras. Constructions and applications, Usp. Mat. Nauk 72, no. 4, 131 (2017).
127. L. F. Alday, D. Gaiotto and Y. Tachikawa, Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories, Lett. Math. Phys. 91, 167 (2010), arXiv:0906.3219.
128. N. A. Nekrasov, Seiberg-Witten prepotential from instanton counting, Adv. Theor. Math. Phys. 7, no. 5, 831 (2003), hep-th/0206161.
129. D. Maulik, A. Okounkov, Quantum Groups and Quantum Cohomology, arXiv:1211.1287.
130. O. Schiffmann, E. Vasserot, Cherednik algebras, W algebras and the equivariant cohomology of the moduli space of instantons on A^2 , arXiv:1202.2756; On cohomological Hall algebras of quivers : Yangians, arXiv:1705.07491.
131. R. Gompf and A. Stipsicz, 4-manifolds and Kirby calculus, Graduate Studies in Mathematics, vol. 20, American Mathematical Society, Providence RI (1999).
132. G.I. Olshanski, Extension of the algebra $U(g)$ for infinite-dimensional classical Lie algebras g , and the Yangians $Y(gl(m))$, Soviet Math. Dokl. 36, no. 3 (1988), 569-573; G.I. Olshanski, Representations of infinite-dimensional classical groups, limits of enveloping algebras, and Yangians, in “Topics in Representation Theory” (A. A. Kirillov, Ed.), Advances in Soviet Math. 2, AMS, Providence RI, 1991, 1-66.
133. B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa and E. Mukhin, Branching rules for quantum toroidal gl_n , Adv. Math. 300, 229 (2016), arXiv:1309.2147.
134. B. Feigin, E. Frenkel, Quantization of the Drinfeld-Sokolov reduction, Phys. Lett. B246 (1990), no. 1-2, 75-81.
135. M. Bershtein, B. Feigin, G. Merzon, Plane partitions with a "pit": generating functions and representation theory, Sel. Math. New Ser. 24 (2018) 21–62, arXiv:1512.08779.
136. A. Litvinov and L. Spodyneiko, On W algebras commuting with a set of screenings, JHEP 1611, 138 (2016) arXiv:1609.06271.
137. D. Gaiotto and M. Rapcak, Vertex Algebras at the Corner, arXiv:1703.00982.

138. T. Prochazka and M. Rapcak, Webs of W-algebras, arXiv:1711.06888.
139. T. Creutzig and D. Gaiotto, Vertex Algebras for S-duality, arXiv:1708.00875.
140. E. Frenkel and D. Gaiotto, Quantum Langlands dualities of boundary conditions, D-modules, and conformal blocks, arXiv:1805.00203.
141. M. R. Gaberdiel and R. Gopakumar, Minimal Model Holography, J. Phys. A 46, 214002 (2013) arXiv:1207.6697.
142. A. Gadde, S. Gukov and P. Putrov, (0, 2) trialities, JHEP 1403, 076 (2014), arXiv:1310.0818.
143. S. Gukov, D. Pei, P. Putrov Trialities of minimally supersymmetric 2d gauge theories, arXiv:1910.13455.
144. A. Bawane, G. Bonelli, M. Ronzani and A. Tanzini, $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric gauge theories on $S^2 \times S^2$ and Liouville Gravity, JHEP 1507, 054 (2015), arXiv:1411.2762.
145. V. Ginzburg, M. Kapranov, and E. Vasserot, Langlands reciprocity for algebraic surfaces, Math. Res. Lett. 2 1995, 147-160.
146. B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin Representations of quantum toroidal gl_n , arXiv:1204.5378.
147. B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa and E. Mukhin, Finite Type Modules and Bethe Ansatz for Quantum Toroidal \mathfrak{gl}_1 , Commun. Math. Phys. 356, no. 1, 285 (2017), arXiv:1603.02765.
148. A. A. Belavin, M. A. Bershtein and G. M. Tarnopolsky, Bases in coset conformal field theory from AGT correspondence and Macdonald polynomials at the roots of unity, JHEP 1303, 019 (2013), arXiv:1211.2788.
149. B. Feigin, M. Jimbo, E. Mukhin An evaluation homomorphism for quantum toroidal $gl(n)$ algebras, arXiv:1709.01592.
150. H. Awata, H. Kanno, A. Mironov, A. Morozov, K. Suetake and Y. Zenkevich, (q, t) -KZ equations for quantum toroidal algebra and Nekrasov partition functions on ALE spaces, JHEP 1803, 192 (2018), arXiv:1712.08016.
151. A. Gadde, S. Gukov and P. Putrov, Walls, Lines, and Spectral Dualities in 3d Gauge Theories, JHEP 1405, 047 (2014), arXiv:1302.0015.
152. A. Gadde, S. Gukov and P. Putrov, Exact Solutions of 2d Supersymmetric Gauge Theories, arXiv:1404.5314.
153. E. Sharpe, A few recent developments in 2d (2,2) and (0,2) theories, Proc. Symp. Pure Math. 93, 67 (2015), arXiv:1501.01628.
154. D. Gay and R. Kirby, Trisecting 4-manifolds, Geom. Topol. 20 (2016) 3097–3132.
155. S. Gukov, Trisecting non-Lagrangian theories, JHEP 1711, 178 (2017), arXiv:1707.01515.
156. D. Gaiotto, N=2 dualities, JHEP 1208, 034 (2012), arXiv:0904.2715.

157. D. Gaiotto, G. W. Moore and A. Neitzke, Wall-crossing, Hitchin Systems, and the WKB Approximation, arXiv:0907.3987.
158. S. Gukov, D. Pei, P. Putrov and C. Vafa, BPS spectra and 3-manifold invariants, arXiv:1701.06567.
159. N. Nekrasov and E. Witten, The Omega Deformation, Branes, Integrability, and Liouville Theory, JHEP 1009, 092 (2010), arXiv:1002.0888.
160. D. Gaiotto and E. Witten, S-Duality of Boundary Conditions In N=4 Super Yang-Mills Theory, Adv. Theor. Math. Phys. 13, no. 3, 721 (2009), arXiv:0807.3720.
161. A. Kapustin and E. Witten, Electric-Magnetic Duality And The Geometric Langlands Program, Commun. Num. Theor. Phys. 1, 1 (2007), hep-th/0604151.
162. S. Gukov and E. Witten, Gauge Theory, Ramification, And The Geometric Langlands Program, hep-th/0612073.
163. P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, Conformal Field Theory, Graduate Texts in Contemporary Physics, New York, Springer-Verlag (1997).
164. D. Ruberman, The minimal genus of an embedded surface of non-negative square in a rational surface, Turkish J. Math 20 (1996) 129-135.
165. T. Lawson, The minimal genus problem, Expo. Math., 15 (1997), 385-431.
166. J. Meier, A. Zupan, Bridge trisections of knotted surfaces in 4-manifolds, arXiv:1710.01745.
167. M. Dedushenko, unpublished notes (2015).
168. M. Dedushenko and S. Gukov, A 2d (0,2) appetizer, arXiv:1712.07659.
169. C. Beem, M. Lemos, P. Liendo, W. Peelaers, L. Rastelli and B. C. van Rees, Infinite Chiral Symmetry in Four Dimensions, Commun. Math. Phys. 336, no. 3, 1359 (2015), arXiv:1312.5344.
170. L. Fredrickson, D. Pei, W. Yan and K. Ye, Argyres-Douglas Theories, Chiral Algebras and Wild Hitchin Characters, JHEP 1801, 150 (2018), arXiv:1701.08782.
171. T. Tanisaki, Associated Varieties of Highest Weight Modules, 1985.
172. D. Vogan, Associated varieties and unipotent representatins, Harmonic Analysis on Reductive Groups (W. Barker and P. Sally, eds.), Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1991, pp. 315-388.
173. T. Arakawa, A remark on the c_2 -cofiniteness condition on vertex algebras, arXiv:1004.1492.
174. T. Arakawa, Associated varieties and Higgs branches (a survey), arXiv:1712.01945.