

Правительство Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
(НИУ ВШЭ)

УДК 512.81
Рег. № НИОКТР 121051100301-9
Рег. № ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ
Проректор НИУ ВШЭ,
канд. экон. наук
_____ М.М. Юдкевич
«___» _____ 2021 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ВЕРТЕКСНЫХ АЛГЕБР И ШАФФЛ-АЛГЕБР В
ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ ПРОСТРАНСТВ МОДУЛЕЙ, КОМБИНАТОРИКЕ И
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ
(заключительный)

Руководители НИР:

Зав. лаб., д-р физ.-мат. наук

_____ Б.Л. Фейгин

Науч. рук., канд. физ.-мат. наук

_____ А.Ю. Окуньков

Москва 2021

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководители НИР:

научный руководитель,	_____	А.Ю. Окуньков (разделы 2,3)
канд. физ.-мат. наук	подпись, дата	
заведующий лабораторией, д-р	_____	Б.Л. Фейгин (разделы 1,2)
физ.-мат. наук	подпись, дата	

Исполнители:

старший научный сотрудник,	_____	А.В. Зотов (раздел 2)
канд. физ.-мат. наук	подпись, дата	
старший научный сотрудник,	_____	В.В. Лосяков (раздел 2)
канд. физ.-мат. наук	подпись, дата	
старший научный сотрудник,	_____	Л.Г. Рыбников (раздел 2)
канд. физ.-мат. наук	подпись, дата	
старший научный сотрудник PhD	_____	Т. Такаси (раздел 2)
	подпись, дата	
старший научный сотрудник,	_____	А.С. Хорошкин (раздел 4)
канд. физ.-мат. наук	подпись, дата	
научный сотрудник, канд. физ.- мат. наук	_____	М.А. Берштейн (раздел 1)
	подпись, дата	
научный сотрудник, канд. матем. наук	_____	П. Гавриленко (раздел 1)
	подпись, дата	

научный сотрудник, канд. матем. наук	_____ подпись, дата	А. Ляшик (раздел 2)
научный сотрудник, канд. матем. наук	_____ подпись, дата	А.И. Ильин (раздел 2)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	Е.О. Богданова (раздел 3)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	И.С. Думанский (раздел 3)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	В.Д. Иванов (раздел 2)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	И.А. Карпов (раздел 3)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	И.А. Машанова-Голикова (раздел 2)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	Н.А. Сафонкин (раздел 1)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	А.К. Стоян (раздел 1)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	А.Д. Труфанов (раздел 1)
Нормоконтроль	_____ подпись, дата	А.Д. Вальковский

РЕФЕРАТ

Отчет 107 страниц, 1 книга, 4 рис., 266 источников.

АЛГЕБРА ВИРАСОРО, W -АЛГЕБРЫ, КОНФОРМНЫЙ БЛОК, ИНСТАНТОННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ, ВЕРТЕКСНЫЕ АЛГЕБРЫ, АФФИННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ, УРАВНЕНИЕ КНИЖНИКА-ЗАМОЛОДЧИКОВА, ФУНКЦИЯ НЕКРАСОВА, УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ, МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ, АНЗАЦ БЕТЕ, ЯНГИАНЫ, ПОДАЛГЕБРЫ БЕТЕ, КВАНТОВЫЕ ГРУППЫ, КРИСТАЛЛЫ КАШИВАРЫ, СООТВЕТСТВИЕ САТАКЕ, ИНВАРИАНТЫ ДОНАЛЬДСОНА-ТОМАСА, БАЗИСЫ ГРЕБНЕРА, ОПЕРАДЫ

Цели работы: развитие общего подхода к разнообразным вопросам, находящимся на стыке теории поля, квантовых интегрируемых систем с алгебраической геометрией, теорией представлений квантовых групп и бесконечномерных алгебр Ли и комбинаторикой.

Задачи: развитие новых направлений математики с опорой на идеи, возникающие в современной фундаментальной физике; вовлечение сотрудников и студентов НИУ ВШЭ в научную деятельность лаборатории, содействие их контактам с зарубежными исследователями.

Объекты научного исследования: интегрируемые модели квантовой механики и теории стохастических процессов; геометрическая теория представлений, вертексные алгебры, W -алгебры, конформные блоки, обобщенные янгианы, квантовые группы и тороидальные алгебры; кристаллы Кашивары и другие комбинаторные объекты.

Методы исследований: алгебраический и теоретико-представленческий анализ классических и квантовых теорий поля, статистической физики и случайных процессов, развитие методов теории представлений и вертексных алгебр в геометрии и топологии пространств модулей с приложениями к комбинаторике и математической физике.

Полученные результаты:

1) Конформная теория поля: Прямым вычислением проверена правильность нормировок в соотношениях раздутья между Уиттекеровскими конформными блоками для аффинной алгебры и для алгебры Вирасоро. Определена изомонодромная тау-функция для двухчастичной неавтономной системы Калоджеро-Мозера как определитель Фредгольма некоторых операторов Племеля. Изучены интегрируемые структуры конформных теорий типа B, C, D и установлена их связь с граничным Бете анзацем аффинного Янгиана.

2) Квантовые интегрируемые системы: Получена классификация преобразований фолдинга между решениями q -разностных уравнений Пенлеве. Развита новый подход к соответствию между стабильным и стандартным базисами в твистованных фоковских представлениях квантовой тороидальной алгебры. Показано, что гамильтонианы и пер-

вые и вторые скобки Пуассона DR- и DZ-иерархий связаны преобразованием Миуры (в приближении до рода 1). Найдены достаточные условия, при которых подалгебры Бете имеют простой спектр в ручных представлениях янгиана. Показано, что гамильтонианы, которые управляют динамикой полюсов по m -м иерархическим временам t_m и \bar{t}_m иерархии двумеризованной решетки Тоды получаются из разложения спектральной кривой для матрицы Лакса модели Руйсенарса-Шнайдера в отмеченных точках. Получено теоретико-представленческое доказательство гипергеометрической формулы для собственных функций гамильтониана Сазерленда. Развита теория полной положительности электрических групп Ли $G^{(a)}$.

3) Геометрическая теория представлений: Построена эквивалентность Сатаке для некоторых супергрупп Ли. Получены рекуррентные соотношения на несимметричные полиномы Макдональда.

4) Гомологическая алгебра: Получен ряд результатов о структуре инвариантов Дональдсона-Томаса при помощи техники базисов Гребнера для операд.

Организационные результаты: подготовка к публикации статей, содержащих результаты научной деятельности лаборатории; организация и проведение международных конференций, школ и научных семинаров, в том числе в дистанционном режиме.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	9
1 Конформная теория поля	11
1.1 Косет конструкция в конформной теории поля	11
1.1.1 Доказательство формулы для старших векторов с помощью вертексного оператора	12
1.1.2 Нормы старших векторов	13
1.1.3 Некоторые матричные элементы	14
1.2 Двухчастичная неавтономная система Калоджеро-Мозера	14
1.2.1 Разрезание на штаны и операторы Племяля	15
1.3 Интегрируемые структуры конформных теорий типа BCD	20
1.3.1 Интегрируемые структуры конформных теорий типа B, C, D	20
1.3.2 Складчинская K -матрица отражений для аффинного Янгиана	22
1.3.3 КЗ Интегралы Движения	23
1.3.4 Оффшелл Бете вектор	24
1.3.5 Странный модуль	25
1.3.6 Отражательное свойство состояния $\langle \mathcal{K} $	25
1.3.7 Диагонализация КЗ и локальных Интегралов Движения	26
1.3.8 Более общие интегрируемые системы	27
2 Квантовые интегрируемые системы	28
2.1 Преобразования фолдинга q -разностных уравнений Пенлеве	28
2.1.1 q -разностные уравнения Пенлеве	28
2.1.2 Преобразования фолдинга уравнений Пенлеве	29
2.1.3 Мотивация	30
2.1.4 Основной результат	32
2.2 Твистованный фоковский модуль	33
2.2.1 Тороидальная алгебра	33
2.2.2 Стабильные базисы и двойственность	35
2.2.3 Явная конструкция	36
2.3 Бигамильтонова структура в иерархиях DR и DZ в приближении до рода один	38
2.4 Подалгебры Бете в янгианах	43
2.4.1 Янгиан и подалгебры Бете	43

2.4.2	Представления $Y(\mathfrak{gl}_n)$	43
2.4.3	Анзац Бете, циклический вектор и простота спектра	44
2.4.4	Гипотезы о свойстве простого спектра и монодромии	45
2.5	Эллиптические решения иерархии решетки Тоды и эллиптическая модель Руйсенарса – Шнайдера	47
2.6	Собственные функции оператора Сазерленда	53
2.7	О R-матричных представлениях квантовых алгебр петель	56
2.7.1	R-матрицы для квантовых алгебр петель	58
2.7.2	Дополнительные замечания	60
2.8	Электрические алгебры Ли и электрические сети	60
2.8.1	Электрические сети и Лагранжевый Грассманиан	62
2.9	Предельные формы в моделях статистической механики	64
2.9.1	Предельные формы в модели случайных замощений	64
2.9.2	Постановка для многосвязных областей	65
2.9.3	Результаты	66
3	Геометрическая теория представлений	67
3.1	Мираболическая эквивалентность Сатаке	67
3.1.1	Напоминание о геометрической эквивалентности Сатаке	67
3.1.2	Мираболическая категория Сатаке	68
3.1.3	Мираболическая эквивалентность Сатаке	69
3.1.4	Гипотетический Ивахори-эквивариантный вариант	70
3.1.5	Эквивалентность Сатаке для некоторых супергрупп Ли	71
3.1.6	Гипотезы Гайотто	72
3.1.7	Гипотезы Бен-Цви, Сакелларидиса и Венкатеша	73
3.2	Двойная аффинная алгебра Гекке и многочлены Макдональда	74
4	Гомологическая алгебра	76
4.1	Кошулевы алгебры и инварианты Дональдсона-Томаса	76
4.1.1	Приложения базисов Гребнера для операд к гомологической алгебре	79
4.1.2	Базисы Гребнера для крашенных операд	80
4.1.3	Диоперады и базисы Гребнера	83
4.1.4	От диоперад к проперадам	84

4.1.5	Проперанда квадратичных пуассоновых структур	85
	Заключение	87

ВВЕДЕНИЕ

За отчетный период Международная лаборатория теории представлений и математической физики ВШЭ – Сколтех организовала Шестую зимнюю школу "Теория струн, интегрируемые модели и теория представлений" 11-16 января 2021, (онлайн), Третью весеннюю студенческую школу по математике и физике 30 апреля – 8 мая 2021, (онлайн) и школу и международную конференцию “Poisson Geometry and Representation Theory” (ONLINE) 22-26 ноября, в рамках которой прочитали миникурсы такие всемирно известные специалисты по пуассоновой геометрии и теории представлений как Anton Alekseev (University of Geneva, Switzerland), Alexander Goncharov (Yale University, USA), Jeremy Lane (McMaster University, Canada), Alexander Shapiro (University of Edinburgh, UK), Xiaomeng Xu (Peking University, China). По результатам исследований в 2021 году сотрудниками лаборатории было опубликовано 12 работ в журналах, индексируемых WoS/Scopus, из них 11 в журналах квартилей Q1/Q2.

В течение 2021 года сотрудники и ассоциированные члены лаборатории защитили диссертации на соискание степени кандидата и доктора математических наук НИУ ВШЭ:

- Яков Кононов, диссертация “Обобщённые инварианты Хованова узлов в прямоугольных представлениях” на соискание степени кандидата математических наук.
- Роман Гонин, диссертация “Твистованные представления тороидальных алгебр и их применения” на соискание степени кандидата математических наук.
- Леонид Рыбников, диссертация “Геометрия и комбинаторика алгебр Годена” на соискание степени доктора математических наук.

Следующие стажеры лаборатории получили приглашение и были зачислены в аспирантуры ведущих мировых университетов: Богданова Екатерина Олеговна - в Harvard, Думанский Илья Сергеевич - в MIT.

На Международный Конгресс Математиков в 2022 году приглашены в качестве докладчиков ассоциированные члены научного коллектива Лаборатории: Игорь Моисеевич Кричевер и Евгений Борисович Фейгин.

Сотрудники лаборатории продолжали вести активную педагогическую работу, ими были прочитаны курсы на факультете математики НИУ ВШЭ, в Независимом Московском Университете, на школах для студентов, аспирантов и молодых ученых, проводимых как лабораторией, так и крупными международными научными и учебными центрами. Часть курсов была прочитана впервые. Евгений Борисович Фейгин был выбран одним из лучших преподавателей НИУ ВШЭ в 2021 году по итогам студенческого голосования.

На протяжении года шел еженедельный рабочий Семинар по математической физике НИУ ВШЭ и Центра перспективных исследований Сколтеха, среди докладчиков – сотрудники Лаборатории и факультета, ассоциированные члены научного коллектива Лаборатории, ученые из российских и мировых научных центров. Также продолжали свою работу студенческие семинары “Теория представлений”, “W-algebras and related topics” и “Gaudin model and related topics”, где выступали стажеры лаборатории и студенты факультета математики.

Сотрудниками лаборатории были получены значительные результаты по основным темам, заявленным на 2021 год:

1. Конформная теория поля;
2. Квантовые интегрируемые системы;
3. Геометрическая теория представлений;
4. Гомологическая алгебра.

Результаты работ по этим темам составляют содержание настоящего отчета.

1. Конформная теория поля

1.1 Косет конструкция в конформной теории поля

Косет-конструкция $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)_1 \oplus \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_k / \widehat{\mathfrak{sl}}(2)_{k+1}$ была рассмотрена впервые Годдардом, Кентом и Оливом в контексте конформной теории поля. Они применили её для доказательства унитарности представлений алгебры Вирасоро с центральным зарядом $c < 1$, отвечающих минимальным моделям (см. [5]).

Косет-конструкцию продолжают активно исследовать, один из современных результатов является предметом обсуждения работы [2].

В известных разложениях

$$\mathcal{L}_{0,1} \otimes M_{\lambda,k} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_{P+nb,b} \otimes M_{2n+\lambda,k+1} \quad (1.1)$$

$$\mathcal{L}_{1,1} \otimes M_{\lambda,k} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \mathcal{M}_{P+nb,b} \otimes M_{2n+\lambda,k+1} \quad (1.2)$$

нами была получено явное выражение для старших векторов, при этом оказалось, что формула будет иметь простой вид именно в бозонизации, то есть удобно рассматривать модуль Вакимото вместо модуля Верма.

Теорема 1.1.1. *Если $2m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ то m -ый старший вектор для разложений (1.1), (1.2) относительно $Vir^{coset} \oplus \widehat{\mathfrak{sl}}^\Delta(2)$ задается формулой:*

$$u_m = \exp \left(- \sum_l f_l^{(1)} \gamma_{-l}^{(2)} \right) v_{\sqrt{2}m} \otimes v_{\lambda,k+1}, \quad (1.3)$$

где $v_{\lambda,k+1}$ - старший вектор в $\mathcal{F}_{\lambda,k}$, а $v_{\sqrt{2}m}$ - старший вектор в $\mathcal{F}_{\sqrt{2}m}$ при разложении интегрируемых модулей на уровне 1 в фоковские модули.

Другой результат заключается в нахождении норм этих старших векторов. Это вычисление произведено 2 способами: через вычисление матричных элементов вертексного оператора и из теоретико-представленческого смысла норм этих векторов.

Наконец, были посчитаны другие матричные элементы других вертексных операторов. В частности, нахождение одного из довольно важных вертексных операторов свелось к вычислению интеграла типа Сельберга. В краткосрочной перспективе будет этот интеграл планироваться свести к Γ -функциям и взять Уиттекеровский предел.

Таким образом мы прямым вычислением проверим правильность нормировок в соотношениях раздутья

$$\psi(\lambda, k; q, x) = \sum_n \psi(\lambda + 2n, k + 1; q, x) Z(P(\lambda) + nb, b; q) \quad (1.4)$$

где ψ - Уиттекеровский конформный блок для аффинной алгебры, а Z - для алгебры Вирасоро.

Одним из применений этих соотношений является доказательство формулы на тау-функцию Пенлеве. Со стороны калибровочных суперсимметричных теорий поля такое доказательство приведено Некрасовым с статьях [12], [13].

В процессе работы были получены аналогичные результаты для случая общих k_1, k_2 . Были получены явные формулы для старших векторов, получены их нормы и некоторые матричные элементы были сведены к интегралам типа Сельберга.

Также планируется изучение косет-конструкции в q -деформированном случае и его кристаллического предела.

1.1.1 Доказательство формулы для старших векторов с помощью вертексного оператора

Определение 1.1.1. *Определим вертексные операторы, заданные такими формулами:*

$$b^\pm(z) = \exp\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(z)\right) \quad (1.5)$$

$$x^+(z) = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2\kappa}}\varphi(z)\right) \quad (1.6)$$

$$x^-(z) = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2\kappa}}\varphi(z)\right)\gamma(z) \quad (1.7)$$

И введем обозначение

$$g(z) = \gamma(z)e^{(1)}(z), \quad g_0 = \sum \gamma_{-n}e_n. \quad (1.8)$$

Определение 1.1.2. *Определим вертексный оператор*

$$I(z) = b^-(z) \otimes x^+(z) - b^+(z) \otimes x^-(z) = e^{\frac{\varphi(z)}{\sqrt{2\kappa}}} (b^-(z) - b^+(z)\gamma(z)) \quad (1.9)$$

действующий из $(\mathcal{L}_{0,1} \oplus \mathcal{L}_{1,1}) \otimes M_{\lambda,k}$ в $(\mathcal{L}_{0,1} \oplus \mathcal{L}_{1,1}) \otimes M_{\lambda+1,k}$.

Тогда верны следующие предложения:

Предложение 1.1.1. *Вертексный оператор $I(z)$ можно записать следующим образом:*

$$I(z) = e^{\frac{\varphi(z)}{\sqrt{2\kappa}}} \exp(-g_0)b^-(z) \exp(g_0) \quad (1.10)$$

Доказательство. Заметим, что:

$$g(z)b^-(w) = \frac{b^+(w)\gamma(w)}{z-w} = \frac{[g_0, b^-(w)]}{z-w} \quad (1.11)$$

Значит $[g_0, b^-(w)] = -b^+(w)\gamma(w)$ и $[g_0, [g_0, I(w)]] = 0$. \square

Предложение 1.1.2. Для старших векторов верна формула

$$\oint_{C_0} \frac{dz}{z^{d(s,\lambda,k)}} I(z) u_{-\frac{s}{2}}(\lambda) = u_{-\frac{s+1}{2}}(\lambda + 1) \quad (1.12)$$

$$\text{где } d(s, \lambda, k) = \left(\frac{\lambda}{2\kappa} + \frac{s+2}{2}\right)$$

1.1.2 Нормы старших векторов

Теорема 1.1.2. Нормы старших векторов в косетном разложении удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\|u_{-\frac{l}{2}}(\lambda + 1)\|^2}{\|u_{-\frac{l-1}{2}}(\lambda)\|^2} = \frac{B(-\frac{1}{\kappa}; -\frac{\lambda}{\kappa} - \frac{1}{\kappa} + 1 - l)}{B(-\frac{1}{\kappa}; -\frac{\lambda}{\kappa} - \frac{1}{\kappa} + 1)} \quad (1.13)$$

Доказательство. Во-первых,

$$\frac{\|u_{-\frac{l}{2}}(\lambda + 1)\|^2}{C(\kappa, \lambda)} z^\# = \int_0^z dt \left\langle u_{-\frac{l-1}{2}}(\lambda) \left| I(z) S(t) \right| u_{-\frac{l}{2}}(\lambda + 1) \right\rangle \quad (1.14)$$

Во-вторых,

$$\begin{aligned} \int_0^z dt \left\langle e^{-g_0^\dagger} e^{-g_0} v_{-\frac{l-1}{2}} \otimes v_{\lambda,k} \left| e^{\frac{\varphi(z)}{\sqrt{2\kappa}}} b^-(z) \tilde{S}(t) e^{g_0} \right| e^{-g_0} v_{-\frac{l}{2}} \otimes v_{\lambda+1,k} \right\rangle = \\ \|u_{-\frac{l-1}{2}}(\lambda)\|^2 \int_0^z dt \left\langle v_{-\frac{l-1}{2}} \otimes v_{\lambda,k} \left| e^{\frac{\varphi(z)}{\sqrt{2\kappa}}} b^-(z) \tilde{S}(t) \right| v_{-\frac{l}{2}} \otimes v_{\lambda+1,k} \right\rangle \end{aligned} \quad (1.15)$$

Наконец, подставив определение $b^-(z)$, $\tilde{S}(t)$, заметим, что слагаемое с $\beta(t)$ не дает вклада, и получим:

$$\begin{aligned} \int_0^z dt \left\langle v_{-\frac{l-1}{2}} \otimes v_{\lambda,k} \left| e^{\frac{\varphi(z)}{\sqrt{2\kappa}}} b^-(z) \tilde{S}(t) \right| v_{-\frac{l}{2}} \otimes v_{\lambda+1,k} \right\rangle = \\ \int_0^z dt \left\langle v_{-\frac{l-1}{2}} \left| e^{-\frac{\phi(z)}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}\phi(t)} \right| v_{-\frac{l}{2}} \right\rangle \left\langle v_{\lambda,k} \left| e^{\frac{\varphi(z)}{\sqrt{2\kappa}}} e^{-\sqrt{\frac{2}{\kappa}}\varphi(t)} \right| v_{\lambda+1,k} \right\rangle = \\ z^\# \int_0^1 dt (1-t)^{-1-\frac{1}{\kappa}} t^{-l-\frac{\lambda+1}{\kappa}} = z^\# B\left(-\frac{1}{\kappa}; -\frac{\lambda}{\kappa} - \frac{1}{\kappa} + 1 - l\right) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Объединяя вышесказанное, получаем:

$$\frac{\|u_{-\frac{l}{2}}(\lambda + 1)\|^2}{\|u_{-\frac{l-1}{2}}(\lambda)\|^2} = C(\kappa, \lambda) B\left(-\frac{1}{\kappa}; -\frac{\lambda}{\kappa} - \frac{1}{\kappa} + 1 - l\right). \quad (1.17)$$

Теперь восстановим константу $C(\kappa, \lambda)$ из того, что

$$\frac{\|u_0(\lambda + 1)\|^2}{\|u_{\frac{1}{2}}(\lambda)\|^2} = 1 \quad (1.18)$$

□

1.1.3 Некоторые матричные элементы

Простейший пример вычисления матричных элементов таков:

$$\begin{aligned}
\left\langle u_{-\frac{l}{2}}(\lambda) \middle| b^+(z) \middle| u_{-\frac{m}{2}}(\lambda) \right\rangle &= \\
&= \left\langle v_{-\frac{l}{2}} \otimes v_{\lambda,k} \middle| e^{-g_0^\dagger} e^{-g_0} b^+(z) \middle| v_{-\frac{m}{2}} \otimes v_{\lambda,k} \right\rangle = \\
&= z^\# \left\langle v_{-\frac{l}{2}} \otimes v_{\lambda,k} \middle| e^{-g_0^\dagger} e^{-g_0} \middle| v_{-\frac{m-1}{2}} \otimes v_{\lambda,k} \right\rangle + \dots = \\
&= z^\# \delta_{l,m-1} \|u_{-\frac{l}{2}}(\lambda)\|^2 + \dots \quad (1.19)
\end{aligned}$$

Один из важнейших вертексных операторов вычисляется так:

$$\begin{aligned}
&\left\langle u_0(\lambda + \mu - 2n) \middle| \mathcal{O}_n^{(m)}(z) \middle| u_{-l}(\lambda) \right\rangle \\
&= \int_0^z \dots \int_0^z \prod_{i=1}^m dt_i \oint_0 \dots \oint_0 \prod_{j=1}^l dw_j \left\langle v_0 \otimes v_{\lambda+\mu-2m,k} \middle| \exp\left(\frac{\mu}{\sqrt{2\kappa}}\varphi(z)\right) \gamma^n(z) \right. \\
&\quad \left. \prod_{i=1}^m e^{-\sqrt{\frac{2}{\kappa}}\varphi(t_i)} \beta(t_i) \times \frac{(-1)^l}{l!} \prod_{j=1}^l e^{\sqrt{2}\phi(w_j)} \gamma(w_j) \middle| v_{-l} \otimes v_{\lambda,k} \right\rangle \\
&= \int_0^z \dots \int_0^z \prod_{i=1}^m dt_i \oint_0 \dots \oint_0 \prod_{j=1}^l dw_j \left\langle v_0 \middle| \prod_{j=1}^l e^{\sqrt{2}\phi(w_j)} \middle| v_{-l} \right\rangle \times \\
&\quad \left\langle \frac{\lambda + \mu - 2n}{\sqrt{2\kappa}} \middle| \exp\left(\frac{\mu}{\sqrt{2\kappa}}\varphi(z)\right) \prod_{i=1}^m e^{-\sqrt{\frac{2}{\kappa}}\varphi(t_i)} \middle| \frac{\lambda}{\sqrt{2\kappa}} \right\rangle \times \\
&\quad \left\langle vac \middle| \gamma^n(z) \prod_{i=1}^m \beta(t_i) \prod_{j=1}^l \gamma(w_j) \middle| vac \right\rangle \quad (1.20)
\end{aligned}$$

1.2 Двухчастичная неавтономная система

Калоджеро-Мозера

Мы определили изомодромную тау-функцию \mathcal{T}_{CM} для уравнения

$(2\pi i)^2 \frac{d^2 Q(\tau)}{d\tau^2} = m^2 \wp'(2Q(\tau)|\tau)$ формулой

$$H_{CM}(\tau) = \oint_A dz \frac{1}{2} \text{tr} L_{CM}^2(z, \tau) = P(\tau)^2 - m^2 \wp(2Q(\tau)|\tau) + 4\pi i m^2 \partial_\tau \log \eta(\tau)$$

как генератор соответствующего гамильтониана. Существует также другое понятие тау-функции, являющейся определителем Фредгольма (если он существует) оператора, такого, что зануление этого определителя задаёт локус, называемый *дивизором Мальгранжа* [14]. Этот локус соответствует случаю, в котром некоторая линейная задача не имеет решения [15, 16]. В этом духе, следуя конструкции из [17], мы определяем тау-функцию как определитель Фредгольма некоторых операторов Племеля. Обзор конструкции для тора с одной проколотой точкой выглядит следующим образом:

- Разложение на штаны [18] тора с одним проколом состоит из штанов с двумя идентифицированными ногами [19], границы которых становятся А-циклом тора;
- Линейная система с 3-мя фуксовыми особенностями, решение которой явно описывается гипергеометрическими функциями, ассоциируется с парой штанов;
- Граничные (гильбертовы) пространства определены на двух краях штанов;
- Два оператора Племеля, \mathcal{P}_Σ и \mathcal{P}_\oplus , определены в терминах решений линейных систем на торе и сфере с тремя проколами, соответственно. Операторы Племеля проецируют одно граничное пространство на другое, эффективно “склеивая” разрез вдоль А-цикла и получая тор с одним проколом.
- Тау-функция затем определяется в (1.49) как определитель некоторой комбинации (ограничений) операторов \mathcal{P}_Σ и \mathcal{P}_\oplus .

1.2.1 Разрезание на штаны и операторы Племеля

Введем матричную 2×2 функцию $\tilde{Y}(z)$, которая решает следующую вспомогательную линейную систему на цилиндре с тремя проколами в точках $-i\infty, 0, +i\infty$:

$$\partial_z \tilde{\mathcal{Y}}(z) = \tilde{\mathcal{Y}}(z) L_{3pt}(z), \quad L_{3pt}(z) = -2\pi i A_0 - 2\pi i \frac{A_1}{1 - e^{2\pi i z}}, \quad (1.21)$$

фундаментальное решение которой $\tilde{\mathcal{Y}}(z)$ описывается гипергеометрическими функциями, см. [17, 20]. Локальные показатели монодромии матрицы Лакса в (1.21) выбираются так, чтобы они совпадали с показателями на торе:

$$A_0 \sim a\sigma_3, \quad A_1 \sim t\sigma_3, \quad (1.22)$$

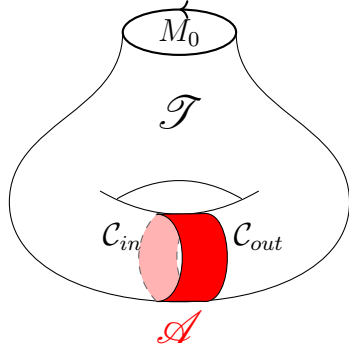
и $\tilde{\mathcal{Y}}(z)$ само выбрано таким образом, что

$$\tilde{\mathcal{Y}}(z)^{-1} \mathcal{Y}_{CM}(z)$$

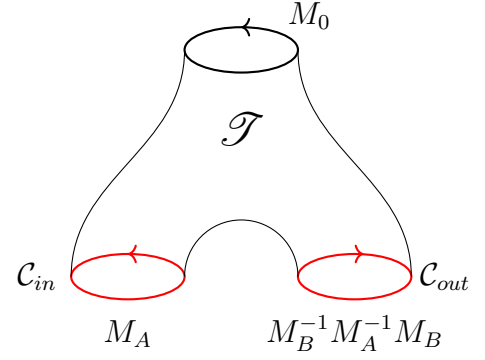
регулярно и однозначно вокруг $z = 0$ и не имеет монодромии вокруг ближайших А-циклов. Другими словами, $\tilde{\mathcal{Y}}(z)$ “аппроксимирует” аналитическое поведение $\mathcal{Y}(z)$ в фундаментальной области, имеющей те же монодромии вокруг прокола и около двух ближайших А-циклов.

Тогда штаны \mathcal{S} можно рассматривать как полученные путем разрезания тора вдоль его А-цикла, см. Рисунок 1.1, индуцирующего гомоморфизм групп монодромии $\pi_1(C_{3,0}) \rightarrow \pi_1(C_{1,1})$

$$M_A M_0 M_B^{-1} M_A^{-1} M_B = 1 = (M_A) M_0 (M_B^{-1} M_A M_B)^{-1} := M_{-i\infty}^{3pt} M_0^{3pt} M_{i\infty}^{3pt}, \quad (1.23)$$



(a) Pants decomposition of $C_{1,1}$



(b) Trinion

Рисунок 1.1

который определяет монодромии цилиндра с тремя проколами вокруг $-i\infty, 0, +i\infty$ в терминах представления монодромии тора, как на рисунке 1.1b.

Remark 1. *Линейная система (1.21) представляет собой обычную трехточечную фуксову задачу на сфере, в которой сфера отображается в цилиндр с помощью $z \rightarrow e^{-2\pi iz}$. Проколы в точках $0, 1, \infty$ становятся проколами в точках $-i\infty, 0, i\infty$ соответственно.*

Определение 1.2.1. *Из решений $\mathcal{Y}_{CM}(z)$, $\tilde{\mathcal{Y}}(z)$ линейных задач мы определяем две матричнозначные функции $Y_{CM}(z)$, $\tilde{Y}(z)$ с диагональными монодромиями вокруг граничных окружностей C_{in} и C_{out} на рисунке 1.1, следующими уравнениями:*

$$Y_{CM}(z)|_{C_{in}} := \mathcal{Y}_{CM}(z)|_{C_{in}} \in \mathcal{H}_{in}, \quad Y_{CM}(z)|_{C_{out}} := M_B^{-1}\mathcal{Y}_{CM}(z)|_{C_{out}} \in \mathcal{H}_{out}, \quad (1.24)$$

$$\tilde{Y}(z)|_{C_{in}} \equiv \tilde{Y}_{in}(z) := \tilde{\mathcal{Y}}(z)|_{C_{in}} \in \mathcal{H}_{in}, \quad \tilde{Y}(z)|_{C_{out}} \equiv \tilde{Y}_{out}(z) := M_B^{-1}\tilde{\mathcal{Y}}(z)|_{C_{out}} \in \mathcal{H}_{out}. \quad (1.25)$$

Обратим внимание, что $Y_{CM}(z)$ и $\tilde{Y}(z)$ также решают линейную задачу на торе и на сфере (1.21), соответственно. Кроме того,

$$\tilde{Y}(z)^{-1}Y_{CM}(z) = \tilde{\mathcal{Y}}(z)^{-1}\mathcal{Y}_{CM}(z), \quad (1.26)$$

потому эффективно они могут быть заменены друг на друга в формулах, где они встречаются в виде таких отношений. Отметим также, что согласно такому определению

$$Y_{CM}(z + \tau) = Y_{CM}(z)e^{2\pi iQ}, \quad z \in C_{in}. \quad (1.27)$$

Гильбертовы пространства \mathcal{H}_{in} , \mathcal{H}_{out} на границах штанов C_{in} , C_{out} соответственно (см. рисунок 1.1) имеют ортогональное разложение на пространства положительных и отрицательных мод Фурье. Гильбертово пространство \mathcal{H} , определенное как прямая сумма \mathcal{H}_{in} и \mathcal{H}_{out} затем ассоциируется со штанами \mathcal{T} :

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_{in} \oplus \mathcal{H}_{out} = (\mathcal{H}_{in,-} \oplus \mathcal{H}_{out,+}) \oplus (\mathcal{H}_{in,+} \oplus \mathcal{H}_{out,-}) := \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-, \quad (1.28)$$

где

$$\mathcal{H}_+ = \mathcal{H}_{in,-} \oplus \mathcal{H}_{out,+}, \quad \mathcal{H}_- = \mathcal{H}_{in,+} \oplus \mathcal{H}_{out,-}. \quad (1.29)$$

Тогда функции $f(z) \in \mathcal{H}$ имеют разложение

$$f(z) = \begin{pmatrix} f_{in} \\ f_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{in,-} \\ f_{out,+} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} f_{in,+} \\ f_{out,-} \end{pmatrix} \equiv f_+ \oplus f_-, \quad (1.30)$$

где

$$f_+ = \begin{pmatrix} f_{in,-} \\ f_{out,+} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_+, \quad f_- = \begin{pmatrix} f_{in,+} \\ f_{out,-} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_-, \quad (1.31)$$

а части функции \pm определяются своими разложениями Фурье:

$$\begin{aligned} f_{in,+} &= e^{2\pi i a z \sigma_3} \sum_{n=0}^{\infty} f_{in,n} e^{-2\pi i n z}, & f_{in,-} &= e^{2\pi i a z \sigma_3} \sum_{n=1}^{\infty} f_{in,-n} e^{2\pi i n z}, \\ f_{out,+} &= e^{2\pi i a z \sigma_3} \sum_{n=0}^{\infty} f_{out,n} e^{-2\pi i n z}, & f_{out,-} &= e^{2\pi i a z \sigma_3} \sum_{n=1}^{\infty} f_{out,n} e^{2\pi i n z}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

где коэффициенты $f_{in,\pm n}, f_{out,\pm n}$ - векторы-столбцы. В пространстве \mathcal{H} мы вводим два проектора Племеля в терминах решений линейных систем.

Определение 1.2.2. Оператор Племеля $\mathcal{P}_{\Sigma_{1,1}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ определяется в терминах решения линейной системы на торе как

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_{\Sigma_{1,1}} f)(z) &= \int_{\mathcal{C}_{in} \cup \mathcal{C}_{out}} \frac{dw}{2\pi i} Y_{CM}(z; \tau) \Xi_2(z, w; \tau) Y_{CM}(w; \tau)^{-1} f(w) \\ &\equiv \int_{\mathcal{C}} \frac{dw}{2\pi i} Y_{CM}(z; \tau) \Xi_2(z, w; \tau) Y_{CM}(w; \tau)^{-1} f(w), \end{aligned} \quad (1.33)$$

где

$$\Xi_2(z, w; \tau) = \begin{pmatrix} \frac{\theta_1(z-w+Q-\rho)\theta_1'(0)}{\theta_1(z-w)\theta_1(Q-\rho)} & 0 \\ 0 & -\frac{\theta_1(z-w-Q-\rho)\theta_1'(0)}{\theta_1(z-w)\theta_1(Q+\rho)} \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

Функция $\Xi_2(z, w; \tau)dw$ в (1.34) является скрученным ядром Коши со свойствами

$$\Xi_2(z + \tau, w; \tau) = e^{-2\pi i Q \sigma_3 + 2\pi i \rho} \Xi_2(z, w; \tau), \quad \Xi_2(z, w + \tau; \tau) = \Xi_2(z, w; \tau) e^{2\pi i Q \sigma_3 - 2\pi i \rho}, \quad (1.35)$$

Переменная¹ $Q \equiv Q(\tau)$ является решением неавтономной системы Калоджеро-Мозера, а ρ - это параметр, кодирующий $U(1)$ В-циклическую монодромию скрученного ядра Коши, как можно увидеть в (1.35). Он не появляется в линейной задаче, а скорее является произвольным параметром, роль которого станет ясна позже. Разложение $\Xi_2(z, w; \tau)$ для $z \sim w$

¹Здесь для краткости мы опускаем зависимость τ от Q .

ВЫГЛЯДИТ КАК

$$\begin{aligned} \Xi_2(z, w; \tau) = \frac{\mathbb{I}}{z-w} + \text{diag} \left[\frac{\theta'_1(Q-\rho)}{\theta_1(Q-\rho)}, -\frac{\theta'_1(Q+\rho)}{\theta_1(Q+\rho)} \right] + \frac{1}{2}(z-w) \text{diag} \left[\frac{\theta''_1(Q-\rho)}{\theta_1(Q-\rho)}, \frac{\theta''_1(Q+\rho)}{\theta_1(Q+\rho)} \right] \\ - \frac{\mathbb{I}}{6}(z-w) \frac{\theta'''_1}{\theta'_1} + \mathcal{O}((z-w)^2). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Определение 1.2.3. Поскольку подынтегральное выражение в (1.33) имеет особенность $w = z$, мы определяем следующее правило: каждый раз, когда w приближается к z , мы обходим особенность в направлении по часовой стрелке. Иногда также полезно использовать обозначения $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{in} \cup \mathcal{C}_{out}$, and $\underline{\mathcal{C}}, \bar{\mathcal{C}}$ для смещенных контуров, как на рисунке 1.2.

Можно проверить, что $\mathcal{P}_{\Sigma_{1,1}}^2 = \mathcal{P}_{\Sigma_{1,1}}$, и что пространство функций на кольце \mathcal{A} , которое определяется уравнением условием совпадения значений на краях (см. также рисунок 1.1a), является

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \subseteq \ker \mathcal{P}_{\Sigma_{1,1}}. \quad (1.37)$$

Определение 1.2.4. Оператор Племеля $\mathcal{P}_{\oplus} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ определяется в терминах решения трехточечной линейной системы (1.21) как

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_{\oplus} f)(z) &= \int_{\mathcal{C}_{in} \cup \mathcal{C}_{out}} dw \frac{\tilde{Y}(z) \tilde{Y}(w)^{-1}}{1 - e^{-2\pi i(z-w)}} f(w) \\ &= \int_{\mathcal{C}} dw \frac{\tilde{Y}(z) \tilde{Y}(w)^{-1}}{1 - e^{-2\pi i(z-w)}} f(w). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Для $z \sim w$,

$$\frac{1}{1 - e^{-2\pi i(z-w)}} = \frac{1}{2\pi i(z-w)} + \frac{1}{2} + \frac{2\pi i}{12}(z-w) + \mathcal{O}((z-w)^2). \quad (1.39)$$

Можно проверить, что $\mathcal{P}_{\oplus}^2 = \mathcal{P}_{\oplus}$, и

$$\ker \mathcal{P}_{\oplus} = \mathcal{H}_-. \quad (1.40)$$

Также можно проверить, что

$$\mathcal{P}_{\oplus} \mathcal{P}_{\Sigma_{1,1}} = \mathcal{P}_{\Sigma_{1,1}}, \quad \mathcal{P}_{\Sigma_{1,1}} \mathcal{P}_{\oplus} = \mathcal{P}_{\oplus}, \quad (1.41)$$

и поэтому пространство функций на штанах \mathcal{S} на рисунке 1.1a определяется как

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}} := \text{im } \mathcal{P}_{\oplus} = \text{im } \mathcal{P}_{\Sigma_{1,1}}. \quad (1.42)$$

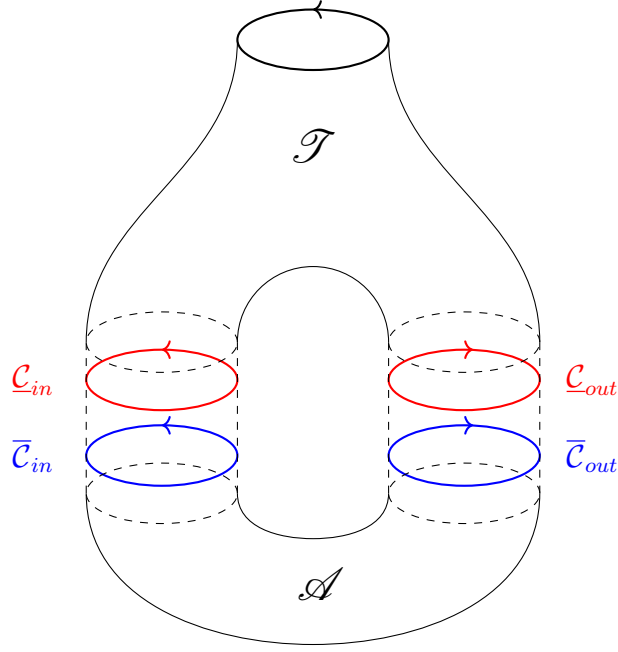


Рисунок 1.2 - Contours

Компоненты \mathcal{P}_\oplus при ортогональном разложении получаются вычислением его действия на функцию $f(z) \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}_\oplus f)(z)_{in} &= \oint_{\mathcal{C}_{in}} dw \frac{1}{1 - e^{-2\pi i(z-w)}} f_{in}(w) \\
&+ \oint_{\mathcal{C}_{in}} dw \frac{\tilde{Y}_{in}(z)\tilde{Y}_{in}(w)^{-1} - 1}{1 - e^{-2\pi i(z-w)}} f_{in}(w) \\
&+ \oint_{\mathcal{C}_{out}} dw \frac{\tilde{Y}_{in}(z)\tilde{Y}_{out}(w)^{-1}}{1 - e^{-2\pi i(z-w)}} f_{out}(w),
\end{aligned} \tag{1.43}$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}_\oplus f)(z)_{out} &= \oint_{\mathcal{C}_{out}} dw \frac{1}{1 - e^{-2\pi i(z-w)}} f_{out}(w) \\
&+ \oint_{\mathcal{C}_{out}} dw \frac{\tilde{Y}_{out}(z)\tilde{Y}_{out}(w)^{-1} - 1}{1 - e^{-2\pi i(z-w)}} f_{out}(w) \\
&+ \oint_{\mathcal{C}_{in}} dw \frac{\tilde{Y}_{out}(z)\tilde{Y}_{in}(w)^{-1}}{1 - e^{-2\pi i(z-w)}} f_{in}(w).
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Для анализа приведенных выше формул заметим, что

$$\tilde{Y}_{out}(z) \in \mathbb{C}[[e^{2\pi iz}]] \otimes e^{2\pi iaz\sigma_3} \text{End}(\mathbb{C}^2), \quad \tilde{Y}_{in}(z) \in \mathbb{C}[[e^{-2\pi iz}]] \otimes e^{2\pi iaz\sigma_3} \text{End}(\mathbb{C}^2), \tag{1.45}$$

а также

$$\int_{-\frac{1}{2}+ic}^{\frac{1}{2}+ic} dw \frac{1}{1 - e^{-2\pi i(z-w)}} f(w) = \begin{cases} f_+(z), & \text{Im } z < c \\ -f_-(z), & \text{Im } z > c. \end{cases} \tag{1.46}$$

Из-за (1.45), (1.46), действие \mathcal{P}_\oplus на $f(z)$ в (1.43), (1.44) можно переписать как

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_\oplus f)(z) &= \begin{pmatrix} (\mathcal{P}_\oplus f)_{in,-} \\ (\mathcal{P}_\oplus f)_{out,+} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} (\mathcal{P}_\oplus f)_{in,+} \\ (\mathcal{P}_\oplus f)_{out,-} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} f_{in,-} \\ f_{out,+} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{in,-} \\ f_{out,+} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.47)$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ - компоненты \mathcal{P}_\oplus по отношению к разложению $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{in} \oplus \mathcal{H}_{out}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}f)(z) &= \oint_{\mathcal{C}_{in}} dw \frac{\tilde{Y}_{in}(z)\tilde{Y}_{in}(w)^{-1} - \mathbb{I}}{1 - e^{-2\pi i(z-w)}} f_{in}(w), & z \in \mathcal{C}_{in}, \\ (\mathbf{b}f)(z) &= \oint_{\mathcal{C}_{out}} dw \frac{\tilde{Y}_{in}(z)\tilde{Y}_{out}(w)^{-1}}{1 - e^{-2\pi i(z-w)}} f_{out}(w), & z \in \mathcal{C}_{in}, \\ (\mathbf{c}f)(z) &= \oint_{\mathcal{C}_{in}} dw \frac{\tilde{Y}_{out}(z)\tilde{Y}_{in}(w)^{-1}}{1 - e^{-2\pi i(z-w)}} f_{in}(w), & z \in \mathcal{C}_{out}, \\ (\mathbf{d}f)(z) &= \oint_{\mathcal{C}_{out}} dw \frac{\tilde{Y}_{out}(z)\tilde{Y}_{out}(w)^{-1} - \mathbb{I}}{1 - e^{-2\pi i(z-w)}} f_{out}(w), & z \in \mathcal{C}_{out}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Функции $\tilde{Y}_{in}, \tilde{Y}_{out}$ - это локальные решения трехточечной задачи (1.21) around $\mp i\infty$, определенные в определении 1.2.1. Они, соответственно, корректно определяются как ряд по $e^{-2\pi iz}$, сходящийся при $|e^{-2\pi iz}| < 1$, и как ряд по $e^{2\pi iz}$.

Определение 1.2.5. *Тау-функция $\mathcal{T}^{(1,1)}$ определена в терминах операторов Племеля $\mathcal{P}_\oplus, \mathcal{P}_{\Sigma_{1,1}}$ в определениях 1.2.4 и 1.2.2 как:*

$$\mathcal{T}^{(1,1)}(\tau) := \det_{\mathcal{H}_+} \left[\mathcal{P}_{\Sigma_{1,1},+}^{-1} \mathcal{P}_{\oplus,+} \right], \quad (1.49)$$

где

$$\mathcal{P}_{\cdot,+} := \mathcal{P} \cdot |_{\mathcal{H}_+}. \quad (1.50)$$

Полезно ввести следующее обозначение:

Notation 1. $\mathcal{T}^{(g,n)}$ обозначает детерминантную тау-функцию на римановых поверхностях рода g с n фуксовыми особенностями.

1.3 Интегрируемые структуры конформных теорий типа BCD

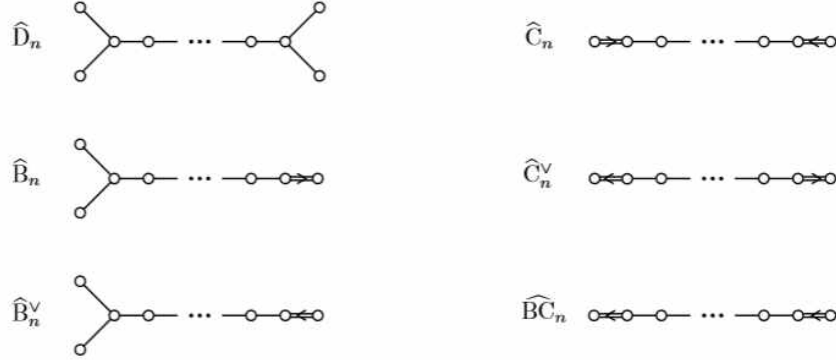
1.3.1 Интегрируемые структуры конформных теорий типа B, C, D

Данное исследование посвящено изучению интегрируемых структур конформных теорий типа B, C, D, а так же их связь с граничным Бете анзацем аффинного Янгиана.

Рассмотрим квантовую теорию поля аффинной Тоды ассоциированную с аффинной алгеброй Ли \mathfrak{g} ВСД типа. Мы напоминаем что интегралы движения могут быть найдены как коммутант аффинного набора скринингов:

$$\mathcal{S}_r = \oint e^{b(\alpha_r \cdot \varphi(z))} \frac{dz}{2\pi}, \quad (1.51)$$

где вектора α_r - это простые корни аффинной алгебры Ли ВСД типа



здесь $b = \frac{\epsilon_2}{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}}$ - константа связи. Используя стандартную параметризацию для корней, скалярные поля в экспонентах (1.51) могут быть записаны в виде

$$(\alpha_0 \cdot \varphi) = \begin{cases} -\varphi_1 \\ -2\varphi_1 \\ -\varphi_1 - \varphi_2 \end{cases} \quad (\alpha_r \cdot \varphi) = \varphi_r - \varphi_{r+1} \quad \text{for } 0 < r < n, \quad (\alpha_n \cdot \varphi) = \begin{cases} \varphi_n \\ 2\varphi_n \\ \varphi_{n-1} + \varphi_n \end{cases} \quad (1.52)$$

Так что каждую аффинную диаграмму можно интерпретировать как не аффинную диаграмму типа A_{n-1} с двумя "граничными условиями" одного из трёх типов В, С или D отвечающие короткому корню, длинному корню и корню длины $\sqrt{2}$ соответственно.

Так же как и в первой части диссертации, первые несколько интегралов движения $\mathbf{I}_s = \int_0^{2\pi} G_{s+1}(z) \frac{dz}{2\pi}$ могут быть явно вычислены из условия коммутативности со скринингами

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_z e^{b(\alpha_r \cdot \varphi(\xi))} G_{s+1}(z) d\xi = \partial X_s(z), \quad (1.53)$$

где $X_s(z)$ - некоторое локальное поле. Первая не тривиальная плонтонсть имеет вид

$$\begin{aligned}
G_4(z) = & (\partial\varphi \cdot \partial\varphi)^2 - \frac{1}{3} \left(2n - \frac{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta}{\epsilon_3} \right) \sum_{k=1}^n (\partial\varphi_k)^4 + \\
& + \frac{4\epsilon_3}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} \sum_{k=1}^n \partial\varphi_k^2 \left(\sum_{j<k} \left(j - 1 + \frac{\epsilon_3 - \epsilon_\alpha}{2\epsilon_3} \right) \partial^2\varphi_j - \sum_{j>k} \left(n - j + \frac{\epsilon_3 - \epsilon_\beta}{2\epsilon_3} \right) \partial^2\varphi_j \right) + \\
& + \left(2n + \frac{4(n-1)(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)}{3\epsilon_1\epsilon_2} + \frac{(\epsilon_1\epsilon_2 - 2\epsilon_3^2)(\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - 2\epsilon_3)}{3\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3} \right) (\partial^2\varphi \cdot \partial^2\varphi) - \\
& - \frac{4\epsilon_3^2}{\epsilon_1\epsilon_2} \sum_{i \leq j} \left(i - 1 + \frac{\epsilon_3 - \epsilon_\alpha}{2\epsilon_3} \right) \left(n - j + \frac{\epsilon_3 - \epsilon_\beta}{2\epsilon_3} \right) (2 - \delta_{ij}) \partial^2\varphi_i \partial^2\varphi_j, \quad (1.54)
\end{aligned}$$

где $\alpha, \beta = \{1, 2, 3\}$ для границ типа В,С или D соответственно.

1.3.2 Склянинская K -матрица отражений для аффинного Янгиана

Мы определяем K оперятор, с помощью которого мы сможем установить связь интегрируемых структур типа ВCD с аффинным Янгианом. Мы определим K оператор как сплетающий оператор W алгебры, по аналогии с тем как это было сделано для R -матрицы Маулика-Окунькова.

Мы определяем два $W - 4$ тока действующих в тензорном произведении двух бозонных Фоковских модулей:

$$W_2 = (\partial\varphi_1)^2 + (\partial\varphi_2)^2 + \frac{2\epsilon_3}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} \partial^2\varphi_1 + \frac{\epsilon_3 - \epsilon_\alpha}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} (\partial^2\varphi_2 + \partial^2\varphi_1) \quad (1.55)$$

и

$$\begin{aligned}
W_4 = & (\partial\varphi_1)^2 (\partial\varphi_2)^2 + \frac{2\epsilon_3}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} \partial\varphi_1 \partial\varphi_2 \partial^2\varphi_2 + \frac{\epsilon_3 - \epsilon_\alpha}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} ((\partial\varphi_1)^2 \partial^2\varphi_2 + (\partial\varphi_2)^2 \partial^2\varphi_1) - \\
& - \frac{\epsilon_3\epsilon_\alpha}{\epsilon_1\epsilon_2} (\partial^2\varphi_1)^2 + \frac{(\epsilon_3 - \epsilon_\alpha)^2}{\epsilon_1\epsilon_2} \partial^2\varphi_1 \partial^2\varphi_2 - \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_\alpha)(\epsilon_2 - \epsilon_\alpha)}{2\epsilon_1\epsilon_2} (\partial\varphi_1 \partial^3\varphi_1 + \partial\varphi_2 \partial^3\varphi_2) - \\
& - \frac{\epsilon_3(\epsilon_3 - \epsilon_\alpha)}{\epsilon_1\epsilon_2} (\partial\varphi_1 \partial^3\varphi_1 - \partial\varphi_1 \partial^3\varphi_2) + \frac{\epsilon_3}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} \left(\frac{\epsilon_\alpha(\epsilon_3 - \epsilon_\alpha)}{2\epsilon_1\epsilon_2} - \frac{\epsilon_3^2}{\epsilon_1\epsilon_2} - \frac{1}{3} \right) \partial^4\varphi_1 \quad (1.56)
\end{aligned}$$

где $\alpha = 1, 2, 3$ для В, С D W алгебр соответственно.

По опреелению R и K операторы задаются сплетающими соотношениями:

$$\mathcal{R}_{1,2} W_s = W_s \Big|_{\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2} \mathcal{R}_{1,2}, \quad \mathcal{K}_2 W_s = W_s \Big|_{\varphi_2 \rightarrow -\varphi_2} \mathcal{K}_2, \quad (1.57)$$

здесь $s = 2, 4$. Легко понять что $\mathcal{R}_{1,2}$ оператор может быть отождествлён с R -матрицей Маулика Окунькова $\mathcal{R}_{1,2} = \mathcal{R}[\partial\varphi_1 - \partial\varphi_2]$, оператор отражения \mathcal{K}_2 так же выражается

через R -матрицу от рескалированного аргумента

$$\mathcal{K}_2^1 = \mathcal{R}[\sqrt{2}\partial\varphi_2] \Big|_{\epsilon_1 \rightarrow \sqrt{2}\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow \epsilon_2/\sqrt{2}} \quad \text{для В серии} \quad (1.58)$$

$$\mathcal{K}_2^2 = \mathcal{R}[\sqrt{2}\partial\varphi_2] \Big|_{\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_1/\sqrt{2}, \epsilon_2 \rightarrow \sqrt{2}\epsilon_2} \quad \text{для С серии} \quad (1.59)$$

$$\mathcal{K}_2^3 = \text{Id} \quad \text{для D серии} \quad (1.60)$$

Отметим что простейший из \mathcal{K} операторов $\mathcal{K}_2^3 = \text{Id}$ имеет очень простой явный вид и не зависит от спектрального параметра.

Повторяя аргумент Маулика и Окунькова, мы легко убеждаемся что K -оператор удовлетворяет Склянинскому KRKR уравнению²

$$\mathcal{R}[\partial\varphi_1 - \partial\varphi_2]\mathcal{K}_1^\alpha\mathcal{R}[\partial\varphi_1 + \partial\varphi_2]\mathcal{K}_2^\alpha = \mathcal{K}_2^\alpha\mathcal{R}[\partial\varphi_1 + \partial\varphi_2]\mathcal{K}_1^\alpha\mathcal{R}[\partial\varphi_1 - \partial\varphi_2]. \quad (1.62)$$

1.3.3 КЗ Интегралы Движения

Далее мы определяем КЗ Интегралы Движения:

$$\mathcal{T}_i^+ = \mathcal{R}_{i,\bar{i}+1} \dots \mathcal{R}_{i,\bar{n}}\mathcal{K}_i^\alpha\mathcal{R}_{i,n} \dots \mathcal{R}_{i,i+1}, \quad (1.63)$$

$$\mathcal{T}_i^- = \mathcal{R}_{i,1} \dots \mathcal{R}_{i,i-1}\mathcal{K}_i^\beta\mathcal{R}_{1,\bar{i}} \dots \mathcal{R}_{i-1,\bar{i}}, \quad (1.64)$$

$$\mathcal{I}_i^{\text{KZ}} = \mathcal{T}_i^- \mathcal{T}_i^+ \quad (1.65)$$

где мы определили оператор отражения бозонной моды D_i , и индекс с чертой \bar{i} означает сопряжение оператором D_i

$$D_i f(\varphi) = f(\varphi) \Big|_{\varphi_i \rightarrow -\varphi_i} D_i, \quad (1.66)$$

$$\mathcal{R}_{i,\bar{j}} = D_j \mathcal{R}_{i,j} D_j = \mathcal{R}[\partial\varphi_i + \partial\varphi_j], \quad (1.67)$$

$$\mathcal{R}_{\bar{i},j} = D_i \mathcal{R}_{i,j} D_i = \mathcal{R}[-\partial\varphi_i - \partial\varphi_j], \quad (1.68)$$

Коммутативность КЗ операторов следует из KRKR уравнения (1.62)

$$[\mathcal{I}_i^{\text{KZ}}, \mathcal{I}_j^{\text{KZ}}] = 0. \quad (1.69)$$

Коммутативность КЗ оператора с локальными Интегралами Движения $[\mathbf{I}_s, \mathcal{I}_i^{\text{KZ}}] = 0$, легко следует из соотношений:

$$\mathcal{T}_i^+ \mathbf{I}_s = \mathbf{I}_s \Big|_{\varphi_i \rightarrow -\varphi_i} \mathcal{T}_i^+, \quad \mathcal{T}_i^- \mathbf{I}_s \Big|_{\varphi_i \rightarrow -\varphi_i} = \mathbf{I}_s \mathcal{T}_i^-, \quad (1.70)$$

²В оригинальной статье Склянина KRKR уравнение было записано в несколько другой форме:

$$\mathcal{R}_{1,2}(u_1 - u_2)\tilde{\mathcal{K}}_1(u_1)\mathcal{R}_{2,1}(u_2 + u_1)\tilde{\mathcal{K}}_2(u_2) = \tilde{\mathcal{K}}_2(u_2)\mathcal{R}_{1,2}(u_1 + u_2)\tilde{\mathcal{K}}_1(u_1)\mathcal{R}_{2,1}(u_1 - u_2). \quad (1.61)$$

Два уравнения отличаются переопределением K -оператора и сопряжением $a_n^{1,2} \rightarrow -a_n^{1,2}$, $n \neq 0$

1.3.4 Оффшелл Бете вектор

Построение оффшелл Бете вектора аналогично тому в интегрируемых структурах типа А. Мы вводим тензорное произведение $n+N$ Фоковских пространств, первые n пространств образуют квантовое пространство \mathcal{F}_u , оставшиеся N пространств образуют вспомогательное пространство \mathcal{F}_x

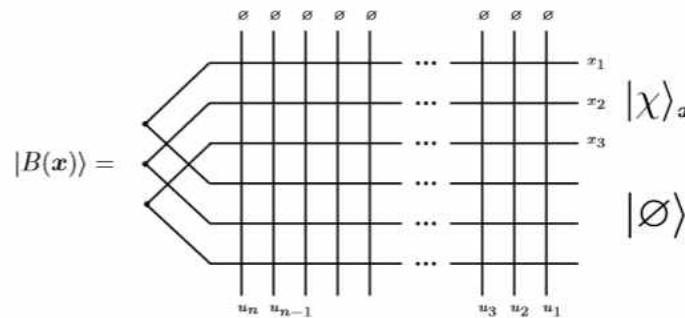
$$\underbrace{\mathcal{F}_{u_n} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{u_1}}_{\text{квантовое пространство}} \otimes \underbrace{\mathcal{F}_{x_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{x_N}}_{\text{вспомогательное пространство}} = \mathcal{F}_u \otimes \mathcal{F}_x. \quad (1.71)$$

Мы вводим два типа \mathcal{L} операторов, и $\mathcal{K}_{u|x}$ оператор.

Наконец мы определяем Бете вектор с помощью формулы:

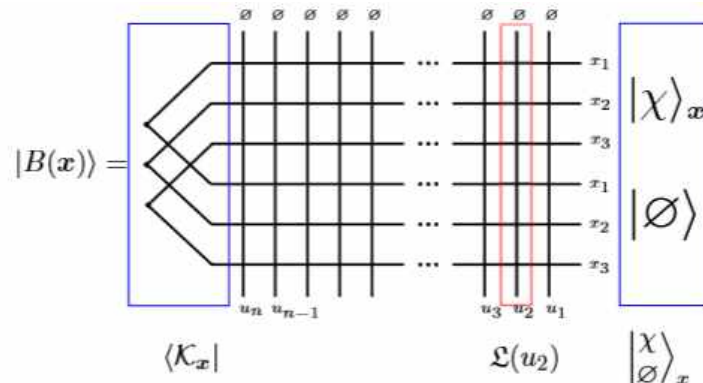
$$|B(\mathbf{x})\rangle = {}_x\langle \emptyset | \bar{\mathcal{L}}_v \mathcal{K}_x L_v | \emptyset \rangle_v |\chi\rangle_x = {}_x\langle \emptyset | \mathcal{K}_{v|x} | \emptyset \rangle_v |\chi\rangle_x, \quad (1.72)$$

Определение Бете вектора может быть проиллюстрировано формулой:



$$|B(\mathbf{x})\rangle = \quad (1.73)$$

Мы предлагаем интерпретировать Бете вектор $|B(\mathbf{x})\rangle$ в виде произведения некоторых L -операторов $\mathcal{L}(u_n) \dots \mathcal{L}(u_1)$ заключенных между бра и кет векторами $\langle \mathcal{K}_x |$ и $|\chi\rangle_x$, см рисунок ниже. Данные бра и кет вектора лежат в тензорном произведении Фоковского и дуального Фоковского пространства $\mathcal{F}_x \otimes \mathcal{F}_x^*$.



$$|B(\mathbf{x})\rangle = \quad (1.74)$$

1.3.5 Странный модуль

Мы замечаем что модифицированные операторы \mathfrak{L} удовлетворяют тем же самым RLL коммутационным соотношениям:

$$\mathcal{R}_{ij}(u-v)\mathfrak{L}_i(u)\mathfrak{L}_j(v) = \mathfrak{L}_j(v)\mathfrak{L}_i(u)\mathcal{R}_{ij}(u-v). \quad (1.74)$$

Так что мы снова можем определить операторы $\mathfrak{h} \stackrel{def}{=} \mathfrak{L}_{\emptyset, \emptyset}, \mathfrak{e} \stackrel{def}{=} \mathfrak{h}^{-1}\mathfrak{L}_{\emptyset, \square}, \mathfrak{f} \stackrel{def}{=} \mathfrak{L}_{\square, \emptyset}\mathfrak{h}^{-1}$.

Разница состоит в том что \mathfrak{L} -операторы действуют в тензорном произведении Фоковского и дуального Фоковского пространства $\mathcal{F}_x \otimes \mathcal{F}_x^*$. Данное представление для \mathfrak{L} -оператора не имеет старшего веса, не смотря на это, мы всё равно можем диагонализировать оператор $\mathfrak{h}(z)$. Собственные состояния операторов $\mathfrak{h}(u), \psi(u)$ действующих в $\mathcal{F}_x \otimes \mathcal{F}_x^*$ обозначаются двух рядным объектом $\left| \begin{smallmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\mu} \end{smallmatrix} \right\rangle$ и нумеруется набором из $2N$ диаграмм Юнга, собственные значения выражаются через содержания клеток лежащих в диаграмма Юнга:

$$\mathfrak{h}(u) \left| \begin{smallmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\mu} \end{smallmatrix} \right\rangle = \prod_{\square \in \vec{\lambda}} \frac{(u - c_{\square})}{(u - c_{\square} - \epsilon_3)} \prod_{\square \in \vec{\mu}} \frac{(u - c_{\square} - \epsilon_3)}{(u - c_{\square})} \left| \begin{smallmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\mu} \end{smallmatrix} \right\rangle, \quad (1.75)$$

где

$$c_{\square} = x_k - (i-1)\epsilon_1 - (j-1)\epsilon_2, \quad \text{если } (i, j) \in \vec{\lambda} \text{ - содержания верхней диаграммы,} \quad (1.76)$$

$$c_{\square} = -\epsilon_3 - x_k + (i-1)\epsilon_1 + (j-1)\epsilon_2, \quad \text{for } (i, j) \in \vec{\mu} \text{ - содержания нижней диаграммы.} \quad (1.77)$$

Действие токов $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ даётся явными формулами:

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}(u) \left| \begin{smallmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\mu} \end{smallmatrix} \right\rangle &= \sum_{\square \in \text{addable}(\vec{\lambda})} \frac{E \left(\begin{smallmatrix} \vec{\lambda} & \rightarrow & \vec{\lambda} + \square \\ \vec{\mu} & \rightarrow & \vec{\mu} \end{smallmatrix} \right)}{u - c_{\square}} \left| \begin{smallmatrix} \vec{\lambda} + \square \\ \vec{\mu} \end{smallmatrix} \right\rangle + \sum_{\square \in \text{removable}(\vec{\mu})} \frac{E \left(\begin{smallmatrix} \vec{\lambda} & \rightarrow & \vec{\lambda} \\ \vec{\mu} & \rightarrow & \vec{\mu} - \square \end{smallmatrix} \right)}{u - c_{\square}} \left| \begin{smallmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\mu} - \square \end{smallmatrix} \right\rangle, \\ \mathfrak{f}(u) \left| \begin{smallmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\mu} \end{smallmatrix} \right\rangle &= \sum_{\square \in \text{removable}(\vec{\lambda})} \frac{F \left(\begin{smallmatrix} \vec{\lambda} & \rightarrow & \vec{\lambda} - \square \\ \vec{\mu} & \rightarrow & \vec{\mu} \end{smallmatrix} \right)}{u - c_{\square}} \left| \begin{smallmatrix} \vec{\lambda} - \square \\ \vec{\mu} \end{smallmatrix} \right\rangle + \sum_{\square \in \text{addable}(\vec{\mu})} \frac{F \left(\begin{smallmatrix} \vec{\lambda} & \rightarrow & \vec{\lambda} \\ \vec{\mu} & \rightarrow & \vec{\mu} + \square \end{smallmatrix} \right)}{u - c_{\square}} \left| \begin{smallmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\mu} + \square \end{smallmatrix} \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Амплитуды E, F даются явными формулами. заметим что теперь операторы $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ не только добавляют или убавляют клетки, но делают и то и то одновременно.

1.3.6 Отражательное свойство состояния $\langle \mathcal{K} |$

Последний ингредиент который позволит вычислить матричные элементы Бете вектора это формула для действия оператора \mathfrak{f} на состояние $\langle \mathcal{K} |$. Мы выводим следующее отража-

тельное свойство:

$$\langle \mathcal{K} | \mathfrak{h}(u) = \langle \mathcal{K} | \mathfrak{h}(-u) \quad (1.79)$$

$$\langle \mathcal{K} | \mathfrak{f}(u) = r(u) \langle \mathcal{K} | \mathfrak{f}(-\epsilon_3 - u), \quad (1.80)$$

где

$$r(u - \epsilon_3/2) = -\frac{u + \epsilon_3/2}{u - \epsilon_3/2} \quad \text{for the D case,} \quad (1.81)$$

$$r(u - \epsilon_3/2) = -\frac{u + \epsilon_i/2}{u - \epsilon_i/2} \quad \text{for the BC case,} \quad (1.82)$$

в последней строчке $\{i, j\} = \{1, 2\}$ соответствует типу В а $\{i, j\} = \{2, 1\}$ соответствует типу С.

Данная формула позволяет вычислить спаривание между состояниями $\langle \mathcal{K} |$ и $|\vec{\lambda}, \vec{\mu}\rangle$

1.3.7 Диагонализация КЗ и локальных Интегралов Движения

Мы выводим уравнения анзаца Бете для диагонализации КЗ Интеграла Движения:

$$r^\alpha(x_i) r^\beta(x_i) A(x_i) A^{-1}(-x_i) \prod_{j \neq i} G(x_i - x_j) G^{-1}(-x_i - x_j) = 1, \quad (1.83)$$

$$G(x) = \frac{(x - \epsilon_1)(x - \epsilon_2)(x - \epsilon_3)}{(x + \epsilon_1)(x + \epsilon_2)(x + \epsilon_3)}, \quad A(x) = \prod_{k=1}^n \frac{x - u_k + \frac{\epsilon_3}{2}}{x - u_k - \frac{\epsilon_3}{2}}, \quad r^\alpha(x) = -\frac{x + \epsilon_\alpha/2}{x - \epsilon_\alpha/2}.$$

Мы так же показываем что он-шелл вектора Бете от сдвинутых x параметров $|B(\mathbf{x} - \frac{\epsilon_3}{2})\rangle$ являются собственными векторами КЗ Интегралов Движения $\mathcal{I}_i^{\text{KZ}}$:

$$\mathcal{I}_i^{\text{KZ}} |B(\mathbf{x} - \frac{\epsilon_3}{2})\rangle \stackrel{\text{BAE}(\mathbf{x})=1}{=} \prod_a \frac{(u_i + \frac{\epsilon_3}{2})^2 - x_a^2}{(u_i - \frac{\epsilon_3}{2})^2 - x_a^2} |B(\mathbf{x} - \frac{\epsilon_3}{2})\rangle. \quad (1.84)$$

Уравнения (1.83) и (1.84) вместе с явной формулой для Бете вектора (1.72) являются главными результатами четрой части диссертации.

В отличие от случая А мы не выводим явные формулы для диагонализации локальных Интегралов движения, однако мы предположили и проверили численно формулу для собственных значений первого не тривиального Интеграла Движения $\mathbf{I}_3 = \frac{1}{2\pi} \int G_4(x) dx$ плотность G_4 даётся формулой (1.54). Так на уровне N мы предполагаем следующую формулу:

$$\mathbf{I}_3^{\text{vac}} + \left(4N - 4 \sum_{k=1}^n \frac{u_k^2}{\epsilon_1 \epsilon_2} + \frac{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}{3\epsilon_1 \epsilon_2} \left(2n - \frac{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta}{\epsilon_3} \right) \right) N + \frac{4}{\epsilon_1 \epsilon_2} \left(2n - \frac{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta}{\epsilon_3} \right) \sum_{k=1}^N x_k^2. \quad (1.85)$$

1.3.8 Более общие интегрируемые системы

Можно заметить что коммутационные соотношения аффинного Янгиана симметричны относительно перестановки ϵ_α параметров. Однако в уравнениях Бете (1.83) данная симметрия ϵ_α , нарушается членом $A(x) = \prod_{k=1}^n \frac{x-u_k+\frac{\epsilon_3}{2}}{x-u_k-\frac{\epsilon_3}{2}}$. Причина этого состоит в выборе конкретного Фоковского представления, чтобы восстановить данную симметрию следует определить три типа Фоковских модулей \mathcal{F}^α (см [186]). Вся вышеописанная машинерия может быть применима без изменений, в итоге мы можем построить интегрируемую систему по набору (цветных) Фоковских пространств и двух цветных границ $\beta_L \left| \mathcal{F}_1^{\alpha_1} \otimes \mathcal{F}_2^{\alpha_2} \cdots \otimes \mathcal{F}_n^{\alpha_n} \right| \beta_R$, $\alpha_i, \beta_{L,R} = 1, 2, 3$.

2. Квантовые интегрируемые системы

2.1 Преобразования фолдинга q -разностных уравнений Пенлеве

Один из результатов — это классификация преобразований фолдинга между решениями q -разностных уравнений Пенлеве. Мы сначала объясним постановку задачи на поучительно примере.

2.1.1 q -разностные уравнения Пенлеве

q -разностные уравнения Пенлеве — это системы двух разностных уравнений на две функции которые мы обычно будем обозначать как F, G . Знаменитая классификация Сакаи [247] сопоставляет каждому уравнению Пенлеве две аффинные системы корней. Эти системы называются системой симметрии и системой поверхности. Мы будем их обозначать Φ_{sym}^a и Φ_{surf}^a соответственно. Список всех пар вместе со стрелками вырождений приведен на Рисунке 2.1.

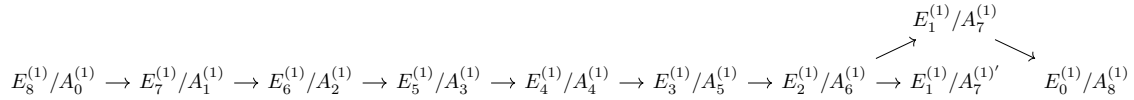


Рисунок 2.1 - Симметрия/поверхность схема для q -разностных уравнений Пенлеве

Здесь мы использовали обозначения $E_5^{(1)} = D_5^{(1)}, E_4^{(1)} = A_4^{(1)}, E_3^{(1)} = (A_2 + A_1)^{(1)}, E_2^{(1)} = (A_1 + A_1)^{(1)}, E_1^{(1)} = A_1^{(1)}$.

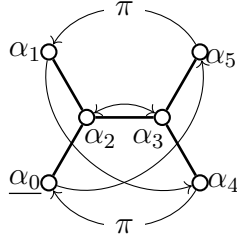
Группа симметрии уравнения Пенлеве — это расширенная аффинная группа Вейля W^{ae} системы корней Φ_{sym}^a . Трансляции в W^{ae} порождают q -разностную динамику F, G — это координаты на (некоторой карте) поверхности $\mathcal{X}_{\vec{a}}$, которая называется поверхностью начальных условий [247]. Эта поверхность зависит от параметров a_0, \dots, a_r , которые называются мультипликативными корневыми переменными; здесь $r + 1$ — это ранг системы корней Φ_{sym}^a . Группа Вейля действует на a_j по формуле

$$s_i(a_j) = a_j a_i^{-C_{ij}}, \quad \pi(a_i) = a_{\pi(i)}, \quad (2.1)$$

где s_0, \dots, s_r — это простые отражения, C — это матрица Картана системы Φ_{sym}^a и π — внешний автоморфизм.

Пример 2.1.1. Динамика q -разностного уравнения Пенлеве обычно обозначается чертой сверху и чертой снизу $\dots \mapsto \underline{X} \mapsto X \mapsto \bar{X} \mapsto \dots$. Стандартная форма q -разностного урав-

нения Пенлеве с типом симметрия/поверхность $D_5^{(1)}/A_3^{(1)}$ вместе с диаграммой Дынкина и преобразованием корневых переменных приведена ниже



$$\begin{aligned} FF &= a_1^{-1} \frac{(G - a_3^{-1})(G - a_5^{-1}a_3^{-1})}{(G - 1)(G - a_4)}, & \overline{a_{0,1,4,5}} &= a_{0,1,4,5}, \\ GG &= a_4 \frac{(F - a_2)(F - a_0a_2)}{(F - 1)(F - a_1^{-1})}, & \overline{a_2} &= qa_2, \overline{a_3} = q^{-1}a_3, \\ & & q &= a_0a_1a_2^2a_3^2a_4a_5. \end{aligned} \quad (2.2) \quad (2.3)$$

Это уравнение является q -аналогом дифференциального уравнения Пенлеве VI. Здесь a_2 (или a_3^{-1}) можно рассматривать как время, а a_0, a_1, a_4, a_5 являются четырьмя параметрами уравнения.

Группы симметрий этого уравнения есть $W_{D_5}^{ae}$, она порождена простыми отражениями s_0, \dots, s_5 и внешним автоморфизмом 4-го порядка π который переставляет s_i (см. стрелки на диаграмме Дынкина выше). Переменные a_i являются мультипликативными корневыми переменными и действие $W_{D_5}^{ae}$ на них задается формулой (2.1). Действие этой группы на координатах F, G задается в таблице

coord.	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	π
F	F	a_1F	$a_2^{-1}F$	$F \frac{G-1}{G-a_3^{-1}}$	F	F	$1/G$
G	G	G	$G \frac{F-1}{F-a_2}$	a_3G	$a_4^{-1}G$	G	F/a_2

2.1.2 Преобразования фолдинга уравнений Пенлеве

Преобразование фолдинга уравнения Пенлеве [248] — это алгебраическое преобразование между решениями уравнений Пенлеве которое пропускается через факторизацию пространство начальных условий. Другими словами существует некоторое \vec{a} , подгруппа $H \in \text{Aut}(\mathcal{X}_{\vec{a}})$ и бирациональное отображением между фактором $\mathcal{X}_{\vec{a}}/H$ и пространством начальных условий другого уравнения Пенлеве $\mathcal{Y}_{\vec{a}}$. Эта группа H должна быть подгруппой W^{ae} коммутирующей с некоторой динамикой уравнения Пенлеве, мы будем называть ее подгруппой фолдинга.

Пример 2.1.2 (Продолжение примера 2.1.1). Рассмотрим элемент $w = s_0s_1s_4s_5$ порядка 2. Он действует по формуле

$$w: a_{0,1,4,5} \mapsto a_{0,1,4,5}^{-1}, a_2 \mapsto a_2a_0a_1, a_3 \mapsto a_3a_4a_5, \quad F \mapsto a_1F, \quad G \mapsto a_4^{-1}G. \quad (2.4)$$

Легко видеть, что w коммутирует с q -Пенлеве динамикой (2.2).

Если $a_0 = a_1 = a_4 = a_5 = -1$, то w сохраняет мультипликативные корневые переменные. Тогда уравнение (2.2) превращается в

$$F\underline{F} = -\frac{G^2 - q^{-1}a_2^2}{G^2 - 1}, \quad G\overline{G} = -\frac{F^2 - a_2^2}{F^2 - 1}, \quad (2.5)$$

где мы использовали, что в нашем случае $q = a_2^2 a_3^2$. Два уравнения в (2.5) выглядят очень похоже и это мотивирует введения корня из динамики. Мы будем обозначать это корень пунктирной верхним или нижним подчеркиванием.

$$\bar{\bar{a}}_2 = q^{1/2} a_2 = a_2^2 a_3, \quad \bar{\bar{G}} = F, \bar{\bar{F}} = \overline{G}. \quad (2.6)$$

Тогда уравнение (2.5) может быть переписано в виде

$$\bar{\bar{F}} \underline{F} = -\frac{F^2 - a_2^2}{F^2 - 1}, \quad \bar{\bar{G}} = F. \quad (2.7)$$

Введем координаты $F = F^2$, $G = FG$, которые инвариантны относительно w и дают отображение степени 2 из $\mathcal{X}_{\bar{a}}$. Тогда уравнение (2.7) приводится к

$$\bar{\bar{G}} G = -\frac{F(F - a_2^2)}{F - 1}, \quad F \underline{F} = G^2, \quad (2.8)$$

которое является уравнением q -разностным уравнением Пенлеве с типом симметрия/поверхность $A_1^{(1)}/A_7^{(1)'}$ (или беспараметрическим уравнением q -Пенлеве III) с параметрами $a_1 = a_2^2$, $a_0 = a_3^2$.

2.1.3 Мотивация

Преобразования фолдинга приводят к алгебраическим соотношениям между решениями уравнений Пенлеве. В частности Например, так получаются соотношения между специальными решениями. Неподвижные точки действия группы H на поверхности $\mathcal{X}_{\bar{a}}$ соответствуют некоторым алгебраическим решениям уравнения Пенлеве. С другой стороны на факторе $\mathcal{X}_{\bar{a}}/H$ эти точки становятся особыми, которые после разрешения особенностей, дают исключительные дивизоры. Такие дивизоры соответствуют решениям Рикатти, т.е. преобразования фолдинга связывают алгебраические решения и решения Рикатти. Это наблюдение было сделано еще в работе [248].

С другой стороны, в последние 10 лет произошел большой прогресс в теории Пенлеве, по части формул для общих решений. А именно в работах [249], [250] было предложено, что уравнения Пенлеве решаются в терминах некоторых специальных функций возникающих в математической физике. Эти функции сами по себе имеют два определения: конформные блоки двумерной конформной теории поля [251] и статистические суммы в четырехмерной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории [253]. Эквивалентность между этими двумя определениями — это известное АГТ соответствие [252]. В

последующих работах [256], [254], [257], [255] были аналогично предложены формулы для общих решений q -разностных уравнений Пенлеве с $E_r^{(1)}$, $r \leq 4$ симметрией.

Поэтому, преобразования в принципе означают нетривиальные алгебраические соотношения между статистическими суммами. Оказывается, что пример который мы обсуждали в Примере 2.1.2 действительно имеет такой смысл. Грубо говоря соответствующее соотношение это комбинация соотношения найденного в конформной теории поля [259],[258],[260] и билинейного соотношения их калибровочной теории [261],[262]. Это было замечено в работах [263], [264] и изначально нашей мотивацией было найти больше преобразований фолдинга, для того, чтобы получить новые соотношения между статистическими суммами, Для случая симметрии $E_6^{(1)}, E_7^{(1)}, E_8^{(1)}$ у нас нет формул для общих решений, поэтому фолдинги дают некоторые новые семейства решений.

Задача классификации преобразований фолдинга является довольно интересной сама по себе. На первый взгляд, задача кажется дикой, так как есть много векторов \vec{a} для которых стабилизатор $W_{\vec{a}}^{ae}$ является нетривиальным, этот стабилизатор может действовать на пространстве начальных условий $\mathcal{X}_{\vec{a}}$. Но, оказывается, что есть сильное ограничение, а именно, для данного \vec{a} подгруппа в стабилизаторе $(W_{\vec{a}}^{ae})_{\vec{a}}$ порожденная отражениями действует на поверхности $\mathcal{X}_{\vec{a}}$ тривиально (с некоторыми исключениями для маленьких Φ_{sym}^a , а именно для случаев $E_1^{(1)}, E_2^{(1)}, E_3^{(1)}$). Используя это наблюдение в работе [248], было показано, что все преобразования фолдинга *дифференциальных* уравнений Пенлеве происходят из подгруппы внешних автоморфизмов $\widehat{\Omega} \subset W^{ae}$. Более геометрично, группа $\widehat{\Omega}$ — это подгруппа в W^{ae} сохраняющая фундаментальный альков. Хорошо известно, что $\widehat{\Omega} \simeq P/Q$, где P и Q — решетки весов и корней для конечной системы корней Φ_{sym} .

Напомним, что дифференциальные уравнения Пенлеве соответствуют аддитивным случаям в классификации Сакаи [247], в противоположность q -разностным уравнениям, которые соответствуют мультипликативным случаям. В мультипликативном случае ситуация оказывается богаче, оказывается, что нетривиальные преобразования фолдинга могут возникать как произведения отражений из W^a , и даже из конечной группы Вейля W . Это аналогично известно в теории групп Ли факту, что централизатор полупростого элемента в группе присоединенного типа может быть не связным, в противоположность к случаю односвязной группы или алгебры Ли (см. например. [266]). И группа связанных компонент может быть отождествлена с подгруппой в группе Ω , где Ω это подгруппа W которая отображает фундаментальный альков в параллельный ему. Легко видеть, что группы Ω and $\widehat{\Omega}$ изоморфны.

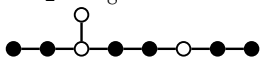
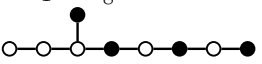

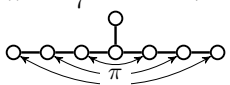
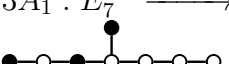


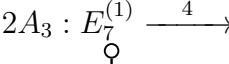

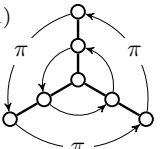
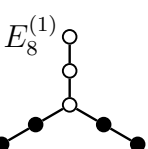
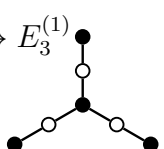
Замечательно, что любая фолдинговая подгруппа может быть вложена как

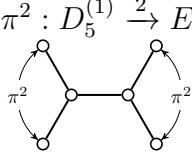
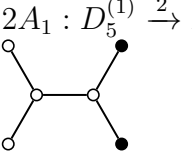
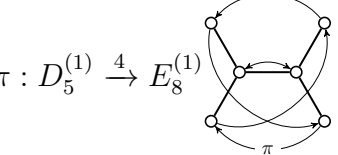
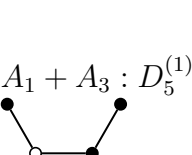
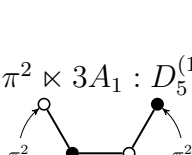
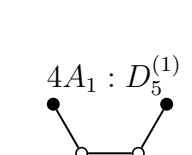
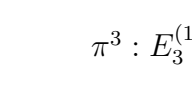
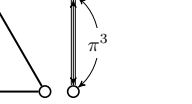
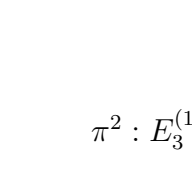
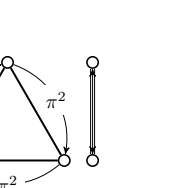

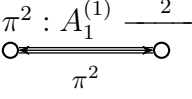
$$H \subset \widehat{\Omega} \times \prod_j \Omega_{\Phi_j}, \quad (2.9)$$

где приводимая система корней $\sqcup_j \Phi_j$ соответствуют поддиаграмме $I \subset \Delta^a$ в диаграмме Дынкина аффинной системы корней Φ^a . Только специальные поддиаграммы и специальные подгруппы в (2.9) дают (существенно различные) преобразования фолдинга. Теперь мы перейдем к точному утверждению.

2.1.4 Основной результат

Теорема 2.1.1. *а) Существует 24 неэквивалентных циклических подгрупп фолдинга.
 б) Существует 9 неэквивалентных нециклических подгрупп фолдинга.*

$E_8^{(1)}$	$3A_2 : E_8^{(1)} \xrightarrow{3} E_6^{(1)}$ 	$4A_1 : E_8^{(1)} \xrightarrow{2} E_7^{(1)}$ 	$A_1 + 2A_3 : E_8^{(1)} \xrightarrow{4} D_5^{(1)}$ 
$E_7^{(1)}$	$\pi : E_7^{(1)} \xrightarrow{2} E_8^{(1)}$ 	$3A_1 : E_7^{(1)} \xrightarrow{2} E_8^{(1)}$ 	$4A_1 : E_7^{(1)} \xrightarrow{2} D_5^{(1)}$ 
$E_6^{(1)}$	$3A_2 : E_7^{(1)} \xrightarrow{3} E_3^{(1)}$ 	$2A_3 : E_7^{(1)} \xrightarrow{4} E_7^{(1)}$ 	$\pi \times 5A_1 : E_7^{(1)} \xrightarrow{4} E_7^{(1)}$ 
$E_6^{(1)}$	$\pi : E_6^{(1)} \xrightarrow{3} E_8^{(1)}$ 	$2A_2 : E_6^{(1)} \xrightarrow{3} E_8^{(1)}$ 	$4A_1 : E_6^{(1)} \xrightarrow{2} E_3^{(1)}$ 

$D_5^{(1)}$	$\pi^2 : D_5^{(1)} \xrightarrow{2} E_7^{(1)}$ 	$2A_1 : D_5^{(1)} \xrightarrow{2} E_7^{(1)}$ 	$\pi : D_5^{(1)} \xrightarrow{4} E_8^{(1)}$ 
	$A_1 + A_3 : D_5^{(1)} \xrightarrow{4} E_8^{(1)}$ 	$\pi^2 \times 3A_1 : D_5^{(1)} \xrightarrow{4} E_8^{(1)}$ 	$4A_1 : D_5^{(1)} \xrightarrow{2} A_1^{(1)}$ 
$E_3^{(1)}$	$\pi^3 : E_3^{(1)} \xrightarrow{2} E_6^{(1)}$ 	$A_1 : E_3^{(1)} \xrightarrow{2} E_6^{(1)}$ 	
	$\pi^2 : E_3^{(1)} \xrightarrow{3} E_7^{(1)}$ 	$A_2 : E_3^{(1)} \xrightarrow{3} E_7^{(1)}$ 	
$A_1^{(1)}$	$\pi^2 : A_1^{(1)} \xrightarrow{2} D_5^{(1)}$ 	$\sigma : A_1^{(1)} \xrightarrow{2} D_5^{(1)}$ 	

2.2 Твистованный фоковский модуль

2.2.1 Торoidalная алгебра

В данной работе мы изучаем теорию представлений квантовой торoidalной алгебры \mathfrak{gl}_1 , обозначая её $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$. Эта тема активно развивается последние годы. Имеются многочисленные приложения, включающие геометрическую теорию представлений, перечислительную геометрию, топологические струны, интегрируемые системы, теорию узлов и комбинаторику. Поэтому изучение данной алгебры очень интересно.

Одно из определений $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$ это предел $N \rightarrow \infty$ сферических двойных аффинных алгебр Гекке. Мы используем аббревиатуру ДАХА для двойной аффинной алгебры Гекке для \mathfrak{gl}_N и используем обозначение \mathcal{H}_N . Эта алгебра задаётся образующими

$$T_1, \dots, T_{N-1}, Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_N^{\pm 1}, X_1^{\pm 1}, \dots, X_N^{\pm 1}, \quad (2.10)$$

и стандартными соотношениями. Алгебра \mathcal{H}_N зависит от параметров v , появляющийся в соотношениях Гекке, и дополнительного параметра q . Группа $\widetilde{SL}(2, \mathbb{Z})$ (центральное расширение $SL(2, \mathbb{Z})$ с помощью \mathbb{Z}) действует на \mathcal{H}_N автоморфизмами. Алгебра \mathcal{H}_N имеет две естественные градуировки \deg_X и \deg_Y .

Также алгебра \mathcal{H}_N имеет стандартное представление Чередника, обозначаемое \mathbf{C}_u . Как векторное пространство, \mathbf{C}_u это пространство полиномов Лорана $\mathbb{C}[Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_N^{\pm 1}]$. Образующие Y_i действуют умножением, а X_i действует некоторым q -разностными операторами. Общие собственные векторы $X_1 \dots, X_N$ в пространстве многочленов Лорана $\mathbb{C}[Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_N^{\pm 1}]$ это несимметричные многочлены Лорана [21].

Пусть $\mathbf{S}_+ \in \mathcal{H}_N$ обозначает симметризатор в алгебре Гекке, тогда сферическая ДАХА $S\mathcal{H}_N^{[+]}$ это $\mathbf{S}_+ \mathcal{H}_N \mathbf{S}_+$. Имеются однородные образующие $P_{a,b}$, $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ такие, что

$$P_{0,k} = \mathbf{S}_+ \sum Y_i^k \mathbf{S}_+, \quad k > 0, \quad \deg_X P_{a,b} = a, \quad \deg_Y P_{a,b} = b, \quad \sigma P_{a,b} = P_{\sigma(a,b)}, \quad \sigma \in SL(2, \mathbb{Z}). \quad (2.11)$$

Соотношения между $P_{a,b}$ стабилизируются в пределе $N \rightarrow \infty$. Квантовая тороидальная $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$ это центральное расширение (в некотором смысле) алгебры $S\mathcal{H}_N^{[+]}$ [40]. Алгебра $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$ порождается $P_{a,b}$ и центральными элементами $c^{\pm 1}, (c')^{\pm 1}$. Квантовая тороидальная зависит от параметров q_1 и q_2 . Для всякого N и $q_1 = q, q_2 = v^2$, имеется сюръективный гомоморфизм $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1) \rightarrow S\mathcal{H}_N^{[+]}$. Таким образом, мы получили действие $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$ на пространстве симметричных многочленов Лорана $\mathbf{S}_+ \mathbb{C}[Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_N^{\pm 1}]$. Более того, имеется предельное действие $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$ на пространстве симметрических функций Λ . Собственные вектора $P_{k,0}$ в Λ это симметрические функции Макдональда. Действие $SL(2, \mathbb{Z})$ на $S\mathcal{H}_N^{[+]}$ может быть поднято до действия $\widetilde{SL}(2, \mathbb{Z})$ на $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$.

Пространство $\Lambda = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$ это пространство многочленов от бесконечного количества переменных p_i (степенных сумм). На этом пространстве имеется алгебры алгебры Гейзенберга порождённой a_k для $k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ с соотношением $[a_k, a_l] = k\delta_{k+l, 0}$. А именно, a_{-k} действует умножением на p_k и a_k действует как $k\partial_{p_k}$ для $k > 0$. Действие $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$ на Λ может быть переписано через образующие Гейзенберга a_k , эта конструкция называется *бозонизацией*. Формулы написаны для образующих $P_{1,b}, P_{0,k}, P_{-1,b}$ для $b \in \mathbb{Z}$ и $k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$, мы называем это образующие *образующими Шевалле* (напротив, образующие $P_{a,b}$ для $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ называются *ПВВ-образующими*). Грубо говоря, формулы для бозонизации выглядят следующим образом

$$P_{0,k} = \# a_k, \quad \sum P_{1,b} z^{-b} = u^{-1} \# \exp \left(\sum \# a_{-k} z^k \right), \quad \sum P_{-1,b} z^{-b} = u \# \exp \left(\sum \# a_{-k} z^k \right), \quad (2.12)$$

Полученное представление называется *фоковским модулем*. Оно зависит от параметра u ,

мы обозначаем это представление за \mathcal{F}_u . Формула (2.12) эквивалента изначальной конструкции фоковского модуля, смотри [24].

Алгебра $U_{q_1, q_2}(\mathfrak{gl}_1)$ может быть рассмотрена как квантовая группа, у неё есть топологическое копроизведение, аналогичное копроизведению Дринфельда [23]. Используя это копроизведение, мы можем получить представления $U_{q_1, q_2}(\mathfrak{gl}_1)$ вида $\mathcal{F}_{u_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{u_n}$. В работах [25], [36] было показано, что образ (пополненной) тороидальной алгебры $U_{q_1, q_2}(\mathfrak{gl}_1)$ в операторах на этом тензорном произведении это q - W -алгебры для \mathfrak{gl}_n . Более того, алгебра $U_{q_1, q_2}(\mathfrak{gl}_1)$ может быть рассмотрена как центральное расширение предела этих W -алгебр¹, это одна из первых мотивацией для изучения алгебры $U_{q_1, q_2}(\mathfrak{gl}_1)$, смотри [34].

2.2.2 Стабильные базисы и двойственность

Алгебра $U_{q_1, q_2}(\mathfrak{gl}_1)$ играет важную роль в геометрической теории представлений. Пусть Hilb_k будет схема Гильберта k точек в \mathbb{C}^2 . Имеется естественное действие тора $T = \mathbb{C}_{q_1}^* \times \mathbb{C}_{q_2}^*$ на Hilb_k . Пусть $K_T(\text{Hilb}_k)_{\text{loc}}$ обозначается локализованную эквивариантную K -теорию схемы Гильберта Hilb_k . Имеется действие $U_{q_1, q_2}(\mathfrak{gl}_1)$ на сумме $\mathbf{K} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} K_T(\text{Hilb}_k)_{\text{loc}}$ с помощью соответствий. Полученное представление изоморфно фоковскому модулю \mathcal{F}_u [27],[41].

Неподвижные точки действия тора на Hilb_k занумерованы диаграммами Юнга λ с $|\lambda| = k$. Будем обозначать соответствующую точку за $p_\lambda \in \text{Hilb}_k$. По теореме о локализации, имеется базис $\{[p_\lambda]\}$ в \mathbf{K} . Этот базис соответствует базису Макдонольдских симметрических функций при отождествлении $\mathbf{K} \cong \mathcal{F}_u \cong \Lambda$.

Имеется ещё один замечательный базис в \mathbf{K} , а именно, K -теорные стабильные оболочки $\{s_\lambda^\omega\}$, смотри [37]. Стабильные оболочки s_λ^ω зависят от наклона $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Для фиксированного k , имеется разбиение на альковы, а именно, $s_\lambda^\omega \in K_T(\text{Hilb}_k)_{\text{loc}}$ это кусочно постоянная функция от ω со скачками в рациональных числах m/n с $n \leq k$. Таким образом, для всякого рационального числа m/n хорошо определены $s_\lambda^{m/n+\epsilon}$ и $s_\lambda^{m/n-\epsilon}$ для достаточно малого ϵ .

В статье [28], Горский и Негут выдвинули гипотезу, что для взаимно простых m, n имеется отождествление между \mathcal{F}_u и интегрируемым неприводимым представлением уровня-1 алгебры $U_v(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ такое, что $\{s_\lambda^{m/n-\epsilon}\}$ и $\{s_\lambda^{m/n+\epsilon}\}$ соответствуют стандартному и константному базису. Это гипотеза была подтверждена согласованностью действия $P_{km, kn} \in U_{q_1, q_2}(\mathfrak{gl}_1)$ на стабильном базисе [35] и действием диагонального подалгебры Гейзенберга

¹Алгебра $U_{q_1, q_2}(\mathfrak{gl}_1)$ центральное расширение предела $S\mathcal{H}_N^{[+]}$ для $N \rightarrow \infty$. Пополненная алгебра $U_{q_1, q_2}(\mathfrak{gl}_1)$ это центральное расширение предела W -алгебр для \mathfrak{gl}_n при $n \rightarrow \infty$. Эти утверждения никак не связаны. Например, неполная $U_{q_1, q_2}(\mathfrak{gl}_1)$ для $c = v^{-1}$, $c' = 1$ действует эффективно на \mathcal{F}_u . При этом образ пополнения изоморфен (пополненной) алгебры Гейзенберга, изоморфизм дан формулой (2.12).

$U_v(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ на стандартном базисе [33].

Эта гипотеза была доказана Кононовым и Смирновым [32] используя геометрические методы, в частности, трёхмерную зеркальную симметрию. Алгебраически, может быть расстроена как твистованная версия $(\mathfrak{gl}_1, \mathfrak{gl}_n)$ -дуальности в тороидальном случае. Соответствие между трёхмерной $(\mathfrak{gl}_m, \mathfrak{gl}_n)$ -дуальностью (в аффинном случае) появляется в [38].

Чтобы сформулировать наш основной результат, нам нужно переформулировать сказанное выше “в обратном порядке”. Мы начинаем не с $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$, но с интегрируемого представления уровня 1 алгебры $U_v(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$. Мы строим действие $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$ на этом пространстве, такое, что полученное представление изоморфно твистованному фоковскому модулю $\sigma \in \widetilde{SL}(2, \mathbb{Z})$, здесь $\sigma(m, n) = (0, 1)$. Действие образующих Шевалле $P_{1, b}, P_{-1, b}$ пишется через вертексные операторы для $U_v(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$, а образующие $P_{0, k}$ пропорциональны действию диагональной подалгебры Гейзенберга в $U_v(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$.

2.2.3 Явная конструкция

Интегрируемое представление уровня 1 алгебры $U_v(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ может быть построено как полубесконечная деформированная внешняя степень [39, 31]. Сначала мы рассмотрим конечную деформированную внешнюю степень, а затем возьмём предел. Пусть $\mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}]$ обозначает *evaluation*-представление $U_v(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$, тогда N -ая тензорная степень может быть записана как

$$(\mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}])^{\otimes N} \simeq (\mathbb{C}^n)^{\otimes N} [Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_N^{\pm 1}]. \quad (2.13)$$

Квантовая аффинная версия двойственности Шура-Вейля утверждает, что имеется действие аффинной алгебры Гекке H^Y с образующими T_i, Y_j на этом пространстве, более того это действие коммутирует с $U_v(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ (смотри [29], [22]). Мы построили продолжение этого действия на всю \mathcal{H}_N . Наша конструкция даёт такое действие для любой пары чисел n, n_{tw} . Если n_{tw} взаимно просто с n тога полученное представление изоморфно представлению Чередника, твистованному с помощью некоторого элемента $\sigma \in \widetilde{SL}(2, \mathbb{Z})$. Ниже мы будем предполагать взаимное простоту и будем обозначать $n' = n_{tw}$.

Пусть \mathbf{S}_- это антисимметризатор в алгебре Гекке, $S\mathcal{H}_N^{[-]} = \mathbf{S}_- \mathcal{H}_N \mathbf{S}_-$ соответствующая сферическая ДАХА. Выше мы обсудили, что алгебра $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$ сюръективно отображается на $S\mathcal{H}_N^{[+]}$. Аналогично, $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$ сюръектируется на $S\mathcal{H}_N^{[-]}$ для $q_1 = q, q_2 = v^{-2}$. Используя это, мы получаем действие

$$U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1) \rightarrow S\mathcal{H}_N^{[-]} \curvearrowright \mathbf{S}_- \left((\mathbb{C}^n)^{\otimes N} [Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_N^{\pm 1}] \right) = \Lambda_v^N(\mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}]). \quad (2.14)$$

Пространство $\mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}]$ имеет базис $e_{nj+a} = Y^j e_a$ для $a = 0, \dots, n-1$ и $j \in \mathbb{Z}$. Следовательно пространство $\Lambda_v^N(\mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}])$ имеет базис $e_{k_1} \wedge \dots \wedge e_{k_N}$ for $k_1 < \dots < k_N$. Действие $P_{1, b}, P_{-1, b}$

может быть записано через вертексные операторы $\Phi_k, \Phi_k^*, \Psi_k, \Psi_k^*$. Операторы Φ_k, Ψ_k задаются формулами $\Phi_k(w) = e_k \wedge w$, $\Psi_k(w) = w \wedge e_k$. Операторы Φ_k^*, Ψ_k^* являются двойственными. Действие образующих Шевалле дано формулами

$$P_{1,b} \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \# \Psi_{k+n'+nb} \Phi_{-k}^*, \quad P_{-1,b} \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \# \Phi_{k-n'+nb} \Psi_{-k}^*, \quad (2.15)$$

Операторы $\Phi_k, \Phi_k^*, \Psi_k, \Psi_k^*$ являются компонентами сплетающих операторов

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}] \otimes \Lambda_v^N(\mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}]) &\rightarrow \Lambda_v^{N+1}(\mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}]), & \Phi^*: \Lambda_v^N(\mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}]) &\rightarrow \mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}] \otimes \Lambda_v^{N-1}(\mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}]), \\ \Psi: \Lambda_v^N(\mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}]) \otimes \mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}] &\rightarrow \Lambda_v^{N+1}(\mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}]), & \Psi^*: \Lambda_v^N(\mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}]) &\rightarrow \Lambda_v^{N-1}(\mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}]) \otimes \mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}]. \end{aligned}$$

Вертексные операторы могут быть определены как сплетающие операторы в более общей ситуации, смотри [26, 30].

Пространство $\Lambda_v^{\infty/2}(\mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}])$ определяется как индуктивный предел

$$\mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}] \rightarrow \Lambda_v^2(\mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}]) \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda_v^N(\mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}]) \rightarrow \dots \quad (2.16)$$

Так как $U_v(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ и $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$ действуют на $\Lambda_v^N(\mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}])$, интересно изучить предел этих действий. В работах [39, 31] рассматривается такой предел для $U_v(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$, полученное представление это интегрируемое представление уровня 1 алгебры $U_v(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$.

Предел для действия алгебры $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$ берётся в несколько шагов. Рассмотрим несколько подалгебр $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$: $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)^+$, $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)^-$, $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)^\swarrow$, $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)^\downarrow$, порождённых c, c' и $P_{a,b}$ для $a \geq 0, a \leq 0, an' + bn \leq 0, b \leq 0$ соответственно.

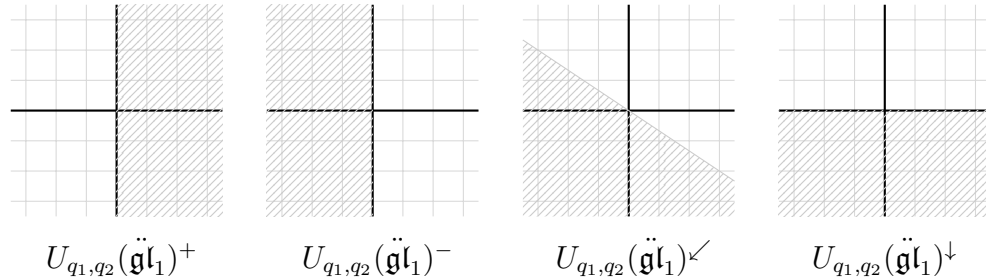


Рисунок 2.2 - Используемые подалгебры $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$

Эти подалгебры изоморфны, изоморфизмы даны $\widetilde{SL}(2, \mathbb{Z})$ -действием на $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$. Рассмотрим элемент $\sigma \in \widetilde{SL}(2, \mathbb{Z})$ такой, что $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)^\swarrow = \sigma \left(U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)^\downarrow \right)$. Этот элемент важен так как мы получем фоковский модуль, подкрученный на σ .

Действие операторов $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)^+$ сходится при $|q^{-1}v^2| < 1$. Аналогично, действие операторов $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)^-$ сходится при $|q^{-1}v^2| > 1$. Поэтому нельзя получить действие всей $U_{q_1, q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$ при помощи прямолинейного предельного аргумента. Тем не менее, действие

образующих $P_{\pm 1, b}$ дано при помощи рациональной функции от q, v , следовательно, оно может быть аналитический продолжено для общих q, v . Это даёт действие $U_{q_1, q_2}(\mathfrak{gl}_1)^\pm \curvearrowright \Lambda_v^{\infty/2}(\mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}])$ для общих q, v . Доказательство использует формулы через вертексные операторы (2.15) и как результат мы получаем аналогичные формулы в пределе, смотри формулу (2.18) ниже.

С другой стороны, мы покажем, что действие $U_{q_1, q_2}(\mathfrak{gl}_1)^\sphericalangle$ сходится для любых q, v . Также, мы покажем что полученное представление изоморфно ограничению твистованного фоковского модуля \mathcal{F}_u^σ на подалгебру $U_{q_1, q_2}(\mathfrak{gl}_1)^\sphericalangle$. Используя это мы можем склеить действия $U_{q_1, q_2}(\mathfrak{gl}_1)^+$ и $U_{q_1, q_2}(\mathfrak{gl}_1)^-$ и получить

Теорема 2.2.1. *Следующие формулы определяют действие $U_{q_1, q_2}(\mathfrak{gl}_1)$ на $\Lambda_v^{\infty/2}(\mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}])$*

$$c \mapsto v^{-n}, \quad c' \mapsto v^{-n'}, \quad P_{0, j} \mapsto \#B_j, \quad (2.17)$$

$$P_{1, b} \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \#\hat{\Psi}_{k+n'+nb} \hat{\Phi}_{-k}^*, \quad P_{-1, b} \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \#\hat{\Phi}_{k-n'+nb} \hat{\Psi}_{-k}^*, \quad (2.18)$$

для $q_1 = q, q_2 = v^{-2}$. Полученное представление изоморфно \mathcal{F}_u^σ .

Здесь B_k образующие диагональной подалгебры Гейзенберга в $U_v(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ и $\hat{\Phi}_k, \hat{\Phi}_k^*, \hat{\Psi}_k, \hat{\Psi}_k^*$ это вертексные операторы действующие на полубесконечной степени. Ряд (2.18) определяется явно записанным аналитическим продолжением.

Напомним, что наша изначальная мотивация была соответствие между стабильным и стандартным базисами. По определению [33], стандартный базис это базис полубесконечных разложимых тензоров $e_{-\lambda_1} \wedge e_{-\lambda_2+1} \wedge \dots \in \Lambda_v^{\infty/2}(\mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}])$. Имеется комбинаторное описание стабильного базиса [35, Sect. 4.1], данное тремя условиями. Мы проверили два из трёх условий. Как выше, доказательство основывается на “финитизации”, а именно, мы сначала доказываем аналогичные свойства для базисов $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_N}\}$ в пространстве (2.13). Самым интересным является условие “окна” которое мы рассмотрим позднее. Проверка этого условия даст новое доказательство гипотезы Горского-Негуца (теоремы Кононова-Смирнова).

2.3 Бигамильтонова структура в иерархиях DR и DZ в приближении до рода один

Появление интегрируемых систем уравнений в частных производных в теории пересечений на пространствах модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g, n}$ стабильных алгебраических кривых рода g с n отмеченными точками было впервые описано теоремой Виттена–Концевича [62, 58], которая утверждает, что производящий ряд интегралов по пространству $\overline{\mathcal{M}}_{g, n}$ от мономов из психклассов $\psi_i \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g, n}, \mathbb{C})$, $1 \leq i \leq n$ (первых классов Черна тавтологических линейных

расслоений),

$$\mathcal{F}^{\text{KW}}(t_0, t_1, \dots, \varepsilon) := \sum_{g, n \geq 0} \frac{\varepsilon^{2g}}{n!} \sum_{d_1, \dots, d_n \geq 0} \left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g, n}} \prod_{i=1}^n \psi_i^{d_i} \right) \prod_{i=1}^n t_{d_i},$$

задаёт решение $w = \frac{\partial^2 \mathcal{F}^{\text{KW}}}{\partial t_0^2}$ иерархии Кортевега–де Фриза

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t_1} &= w w_x + \frac{\varepsilon^2}{12} w_{xxx}, \\ \frac{\partial w}{\partial t_2} &= \frac{w^2 w_x}{2} + \varepsilon^2 \left(\frac{w w_{xxx}}{12} + \frac{w_x w_{xx}}{6} \right) + \varepsilon^4 \frac{w_5}{240}, \\ \frac{\partial w}{\partial t_3} &= \frac{w^3 w_x}{6} + \varepsilon^2 \left(\frac{w^2 w_{xxx}}{24} + \frac{w_x^3}{24} + \frac{w w_x w_{xx}}{6} \right) + \varepsilon^4 \left(\frac{w w_5}{240} + \frac{w_4 w_x}{80} + \frac{w_{xxx} w_{xx}}{48} \right) + \varepsilon^6 \frac{w_7}{6720}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

где мы отождествляем $x = t_0$ и используем обозначение $w_n := \partial_x^n w$.

Впоследствии были предложены различные версии гипотезы Виттена (две наиболее известные касаются теории Громова–Виттена комплексной проективной прямой $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ [56, 61] и r -спинорной теории [63, 57]), прежде чем было понято, что интегрируемые системы появляются в гораздо более общем контексте, где центральную роль играет понятие *когомологической теории поля*. Когомологической теорией поля называется набор линейных отображений

$$c_{g, n}: V^{\otimes n} \rightarrow H^{\text{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g, n}, \mathbb{C}), \quad g, n \geq 0,$$

где V – конечномерное комплексное векторное пространство, дополнительно наделённое симметричной невырожденной билинейной формой η и выделенным вектором e , причём отображения $c_{g, n}$ согласованы с естественными морфизмами между пространствами модулей. Когомологические теории поля были введены Концевичем и Маниным в работе [59] для того, чтобы аксиоматизировать свойства классов Громова–Виттена заданного целевого многообразия. *Коррелятор* когомологической теории поля определяется как

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \tau_{d_i}(v_i) \right\rangle_{g, n} := \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g, n}} c_{g, n}(\otimes_{i=1}^n v_i) \prod_{i=1}^n \psi_i^{d_i},$$

где $v_1, \dots, v_n \in V$ и $d_1, \dots, d_n \geq 0$. *Потенциалом* когомологической теории поля называется производящий ряд

$$\mathcal{F}(t_*^*, \varepsilon) := \sum_{g, n \geq 0} \frac{\varepsilon^{2g}}{n!} \sum_{\substack{1 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_n \leq N \\ d_1, \dots, d_n \geq 0}} \left\langle \prod_{i=1}^n \tau_{d_i}(e_{\alpha_i}) \right\rangle_{g, n} \prod_{i=1}^n t_{d_i}^{\alpha_i} \in \mathbb{C}[[t_*^*, \varepsilon]],$$

где $N := \dim V$, мы зафиксировали базис $e_1 = e, e_2, \dots, e_N \in V$, а t_d^α , $1 \leq \alpha \leq N$, $d \geq 0$, и ε – формальные переменные.

В работе [54] Дубровин и Жанг построили гамильтонову иерархию, контролирующую корреляторы произвольной когомологической теории поля в приближении до рода 1 и доказали полиномиальность гамильтонианов и скобки Пуассона. Более того, в случае однородной когомологической теории поля они наделили иерархию полиномиальной бигамильтоновой структурой (также в приближении до рода 1). В последующей статье [55], для произвольной полупростой когомологической теории поля, Дубровин и Жанг предложили конструкцию бигамильтоновой иерархии эволюционных уравнений в частных производных с одной пространственной переменной вида

$$\frac{\partial w^\alpha}{\partial t_d^\beta} = \partial_x P_{\beta,d}^\alpha, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq N, \quad d \geq 0,$$

некоторое выделенное решение которой совпадает с набором функций $\eta^{\alpha\mu} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_0^\alpha \partial t_0^\mu}$, $1 \leq \alpha \leq N$, где $(\eta^{\alpha\beta})$ – матрица, обратная к матрице билинейной формы η в базисе $e_1, \dots, e_N \in V$. Построенная иерархия называется теперь *иерархией Дубровина–Жанга* (DZ-иерархией) или *иерархией топологического типа*. Однако, полиномиальность уравнений иерархии (иначе говоря, тот факт, что $P_{\beta,d}^\alpha$ являются дифференциальными многочленами от переменных w^1, \dots, w^N), а также двух скобок Пуассона была оставлена в качестве открытой проблемы.

В статье [50] авторы обобщили конструкцию DZ-иерархии на произвольную, не обязательно полупростую, когомологическую теорию поля и доказали полиномиальность гамильтонианов и скобки Пуассона в полупростом случае (более простое доказательство было получено в работе [49]). В случае однородной когомологической теории поля иерархия наделена второй гамильтоновой структурой, полиномиальность которой в полупростом случае была недавно доказана в работе [60]. В общем, не обязательно полупростом, случае полиномиальность гамильтонианов и обеих пуассоновых скобок остаётся открытой проблемой.

В работе [44] была предложена новая конструкция гамильтоновой иерархии, ассоциированной с произвольной, не обязательно полупростой, когомологической теорией поля. Эта конструкция также основана на теории пересечений на пространстве $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, но использует другие тавтологические классы, в особенности, *цикл двойных ветвлений* (DR-цикл) $\text{DR}_g(a_1, \dots, a_n) \in H^{2g}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C})$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, $\sum a_i = 0$, который определяется, как класс когомологий, двойственный по Пуанкаре к некоторой компактификации в пространстве $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ множества гладких помеченных кривых $(C; p_1, \dots, p_n)$, у которых дивизор $\sum a_i p_i$ является главным. Одним из основных свойств DR-цикла является полиномиальность интеграла

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \omega \lambda_g \text{DR}_g(a_1, \dots, a_n),$$

как функции от параметров $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, где $\omega \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C})$ – произвольный класс

когомологий, а $\lambda_g \in H^{2g}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C})$ определяется как класс Эйлера комплексного расслоения ранга g над пространством $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, чьи слои являются пространствами голоморфных 1-форм на стабильных кривых. Более того, получающийся многочлен является однородным степени $2g$. Таким образом, для любой заданной когомологической теории поля $\{c_{g,n}: V^{\otimes n} \rightarrow H^{\text{even}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C})\}$ мы можем определить дифференциальные многочлены $Q_{\beta,d}^\alpha$, $1 \leq \alpha, \beta \leq N$, $d \geq 0$, равенством

$$Q_{\beta,d}^\alpha := \eta^{\alpha\mu} \sum_{g,n \geq 0} \frac{\varepsilon^{2g}}{n!} \sum_{\substack{b_1, \dots, b_n \geq 0 \\ b_1 + \dots + b_n = 2g}} u_{b_1}^{\alpha_1} \dots u_{b_n}^{\alpha_n} \times \\ \times \text{Coef}_{a_1^{b_1} \dots a_n^{b_n}} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+2}} \text{DR}_g \left(- \sum a_i, 0, a_1, \dots, a_n \right) \lambda_g \psi_2^d c_{g,n+2}(e_\mu \otimes e_\beta \otimes \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}),$$

и тогда система уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t_d^\beta} = \partial_x Q_{\beta,d}^\alpha, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq N, \quad d \geq 0,$$

является согласованной. Эта система была названа в статье [44] *DR-иерархией*. DZ-иерархия и DR-иерархия обладают в некотором смысле противоположными свойствами. DZ-иерархия обладает решением, имеющим простой геометрический смысл, в то время как уравнения DZ-иерархии трудно явно описать, и более того их полиномиальность в общем случае не доказана. С другой стороны, DR-иерархия обладает явно описываемыми полиномиальными уравнениями, однако по-видимому не обладает выделенным решением, имеющим простую геометрическую интерпретацию.

DR-иерархия является гамильтоновой, причём гамильтонианы $\bar{g}_{\beta,d} = \int g_{\beta,d} dx$ задаются равенством

$$g_{\beta,d} := \sum_{g,n \geq 0} \frac{\varepsilon^{2g}}{n!} \sum_{\substack{b_1, \dots, b_n \geq 0 \\ b_1 + \dots + b_n = 2g}} u_{b_1}^{\alpha_1} \dots u_{b_n}^{\alpha_n} \times \\ \times \text{Coef}_{a_1^{b_1} \dots a_n^{b_n}} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \text{DR}_g \left(- \sum a_i, a_1, \dots, a_n \right) \lambda_g \psi_1^d c_{g,n+1}(e_\beta \otimes \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}),$$

а скобка Пуассона задаётся оператором $K_1 = (\eta^{\alpha\beta}) \partial_x$. Мы видим, что скобка Пуассона очень проста, более того, в противоположность скобке Пуассона DZ-иерархии, она не зависит существенным образом от когомологической теории поля, с которой мы стартовали. Две иерархии совпадают в бездисперсионном (в роде 0) пределе, и по гипотезе из статьи [44], названной *гипотезой о DR/DZ эквивалентности*, они связаны преобразованием Миуры вида

$$w^\alpha(u_*^*, \varepsilon) = u^\alpha + \sum_{g \geq 1} \varepsilon^{2g} f_g(u_*^*),$$

где f_g – дифференциальный многочлен степени $2g$. Это преобразование Миуры было полностью описано в работе [45]. Несмотря на недоказанность, гипотеза о DR/DZ эквивалентности имеет большое количество подтверждений и проверок (см., например, [51, 47, 45, 46, 48, 53]). В частности, гипотеза о DR/DZ эквивалентности доказана в приближении до рода 1 [45].

Замечание 2.3.1. *Формально говоря, условие полупростоты присутствует в формулировке теоремы 8.4 в статье [45], утверждающей, что гипотеза о DR/DZ эквивалентности верна в приближении до рода 1. Однако, это условие нигде не используется в доказательстве. Таким образом, гипотеза о DR/DZ эквивалентности верна для произвольной кохомологической теории поля в приближении до рода 1.*

В статье [52], стартуя с произвольной однородной кохомологической теории поля, авторы предложили простую формулу для скобки на пространстве локальных функционалов и выдвинули гипотезу, что она пуассонова и задаёт вторую гамильтонову структуру для DR-иерархии. Эти (гипотетически) пуассоновы скобки строятся по оператору $K_2 = (K_2^{\alpha\beta})$, который конструируется по заданной однородной кохомологической теории поля замечательно явным образом:

$$K_2^{\alpha\beta} := \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu} \left(\left(\frac{1}{2} - \mu_\beta \right) \partial_x \circ \left(\sum_{n \geq 0} \frac{\partial g_{\mu,0}}{\partial u_n^\nu} \partial_x^n \right) + \left(\frac{1}{2} - \mu_\alpha \right) \left(\sum_{n \geq 0} \frac{\partial g_{\mu,0}}{\partial u_n^\nu} \partial_x^n \right) \circ \partial_x \right. \\ \left. + A_{\mu\nu} \partial_x + \partial_x \circ \left(\sum_{n \geq 1} n \frac{\partial g_{\mu,0}}{\partial u_{n-1}^\nu} \partial_x^n \right) \circ \partial_x \right), \quad (2.19)$$

где $\mu_\alpha := q_\alpha - \frac{\delta}{2}$, $A_{\alpha\beta} := r^\nu c_{0,3}(e_\nu \otimes e_\alpha \otimes e_\beta)$, а константы $q_\alpha, r^\alpha, \delta \in \mathbb{C}$ определяются исходя из свойства однородности кохомологической теории поля:

$$\text{Deg } c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) + \pi_* c_{g,n+1}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i} \otimes r^\gamma e_\gamma) = \left(\sum_{i=1}^n q_{\alpha_i} + \delta(g-1) \right) c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}).$$

Здесь $\text{Deg}: H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C}) \rightarrow H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C})$ – оператор, действующий на пространстве $H^i(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C})$ умножением на $\frac{i}{2}$, а $\pi: \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ – отображение забывания последней отмеченной точки.

В данной статье мы доказываем гипотезу из работы [52] в приближении до рода 1. Более того, мы изучаем связь со второй пуассоновой скобкой DZ-иерархии. Тот факт, что гамильтонианы и первые скобки Пуассона DR- и DZ-иерархий связаны преобразованием Миуры, описанным в статье [45], был доказан в работе [45] в приближении до рода 1. Здесь же мы проверяем, что это преобразование Миуры также связывает вторые скобки Пуассона (в приближении до рода 1).

2.4 Подалгебры Бете в янгианах

2.4.1 Янгиан и подалгебры Бете

Янгиан $Y(\mathfrak{gl}_n)$ - это алгебра Хопфа, исторически один из первых примеров *квантовых групп*. $Y(\mathfrak{gl}_n)$ в определенном смысле является единственной алгеброй Хопфа, деформирующей обертывающую алгебру $U(\mathfrak{gl}_n[t])$, где $\mathfrak{gl}_n[t]$ - алгебра Ли \mathfrak{gl}_n -значных многочленов. Существует действие аддитивной группы \mathbb{C} автоморфизмами на $Y(\mathfrak{gl}_n)$, деформирующее действие \mathbb{C} на $U(\mathfrak{gl}_n[t])$, которое сдвигает переменную t .

Существует плоское семейство максимальных коммутативных подалгебр $B(C) \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$, называемое *подалгебрами Бете*, параметризованное обратимыми диагональными матрицами $C \in GL_n$ с попарно различными собственными значениями, устойчивые относительно \mathbb{C} -действия автоморфизмами сдвига $Y(\mathfrak{gl}_n)$. Образ $B(C)$ в тензорном произведении оценочных представлений $Y(\mathfrak{gl}_n)$ образуют полный набор гамильтонианов XXX магнитной цепочки Гейзенберга.

Семейство подалгебр Бете расширяется до большего семейства $B(X)$ коммутативных подалгебр в $Y(\mathfrak{gl}_n)$, где X принимает значения в пространстве Делиня-Мамфорда $\overline{M_{0,n+2}}$ стабильных рациональных кривых с $n+2$ отмеченными точками: подалгебра $B(C)$ соответствует невырожденной рациональной кривой с отмеченными точками $0, \infty$ и собственными значениями матрицы C , но есть также некоторые новые подалгебры, соответствующие вырожденным кривым $X \in \overline{M_{0,n+2}}$. В частности, подалгебра, соответствующая наиболее вырожденной *гусеничной* кривой, соответствует подалгебре *Кармана* $H \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$, также известной как подалгебра *Гельфанда-Цетлина*, порожденная всеми центрами меньших янгианов $Y(\mathfrak{gl}_1) \subset Y(\mathfrak{gl}_2) \subset \dots \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$, вложенных стандартным образом.

2.4.2 Представления $Y(\mathfrak{gl}_n)$

Можно строить представления янгиана из представлений \mathfrak{gl}_n , используя *гомоморфизм вычисления*

$$ev : Y(\mathfrak{gl}_n)U(\mathfrak{gl}_n)$$

который дает структуру $Y(\mathfrak{gl}_n)$ -модуля на каждом \mathfrak{gl}_n -модуле. Кроме того, из \mathbb{C} -действия на $Y(\mathfrak{gl}_n)$ для любого z

in \mathbb{C} мы имеем автоморфизм $\tau_z : Y(\mathfrak{gl}_n) \rightarrow Y(\mathfrak{gl}_n)$ (точные определения см. в разделе ??), поэтому мы можем скрутить любой из модулей вычисления на такой автоморфизм. А именно, для любого неприводимого \mathfrak{gl}_n -модуля V_λ через $V_\lambda(z)$ обозначим $Y(\mathfrak{gl}_n)$ -модуль на пространстве V_λ , заданный гомоморфизмом $\circ\tau_z$.

Эту конструкцию $Y(\mathfrak{gl}_n)$ -модулей можно обобщить, используя *централизаторную*

конструкцию янгиана, предложенную Ольшанским. А именно, рассмотрим вложение $\mathfrak{gl}_k \subset \mathfrak{gl}_{n+k}$ как подалгебру правой нижней блочной $k \times k$ -матрицы, тогда для любого $k \geq 0$ существует гомоморфизм

$$\eta_k : Y(\mathfrak{gl}_n) \rightarrow U(\mathfrak{gl}_{n+k})^{\mathfrak{gl}_k},$$

который сюръективен по модулю центра $U(\mathfrak{gl}_{n+k})$ (в частности, $\eta_0 = \text{id}$). Пусть V_λ - неприводимое представление \mathfrak{gl}_{n+k} со старшим весом λ . Рассмотрим ограничение V_λ на \mathfrak{gl}_k :

$$V_\lambda = \bigoplus_{\mu} M_{\lambda\mu} \otimes V_\mu,$$

где $M_{\lambda\mu} := (V_\mu, V_\lambda)$ - это пространство кратностей с действием $U(\mathfrak{gl}_{n+k})^{\mathfrak{gl}_k}$ и, следовательно, является неприводимым представлением $Y(\mathfrak{gl}_n)$. Представления такого вида называются *косыми представлениями* янгиана $Y(\mathfrak{gl}_n)$, потому что они зависят от *косой таблицы Юнга* $\lambda \setminus \mu$.

Пусть $M_{\lambda\mu}$ - любое косое представление $Y(\mathfrak{gl}_n)$. Обозначим через $V_{\lambda \setminus \mu}(z)$ (неприводимое) представление, в котором действие $Y(\mathfrak{gl}_n)$ задается $\eta_k \circ \tau_z$. Мы также называем эти представления *косыми представлениями* $Y(\mathfrak{gl}_n)$.

Отметим также, что янгиан - алгебра Хопфа. Это позволяет нам рассматривать тензорные произведения представлений, определенных выше. Назаров и Тарасов ввели класс *ручных* представлений, т.е. представлений вида $\bigotimes_{i=1}^k V_{\lambda_i \setminus \mu_i}(z_i)$ таких, что $z_i - z_j \notin \mathbb{Z}$ для всех $i \neq j$. Это класс неприводимых представлений $Y(\mathfrak{gl}_n)$ таких, что подалгебра Картана $H \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$ действует без кратностей. Поэтому естественно ожидать аналогичных свойств для действия подалгебр Бете на этом классе представлений $Y(\mathfrak{gl}_n)$. Собственный базис для подалгебры Картана $H \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$, известной как базис Гельфанда-Цетлина, естественно индексируется полустандартными косыми таблицами Юнга и описывается явно. Собственный базис для общей подалгебры Бете $B(X)$ в таком случае является деформацией базиса Гельфанда-Цетлина (который сам по себе гораздо менее явный).

2.4.3 Анзац Бете, циклический вектор и простота спектра

Основная проблема в интегрируемой цепочке ХХХ Гейзенберга - диагонализация подалгебр $B(C)$ в соответствующем представлении янгиана. Стандартным подходом является *алгебраический анзац Бете*, который дает явную формулу для собственных векторов, зависящих от вспомогательных параметров, удовлетворяющих некоторой системе алгебраических уравнений, называемой *уравнениями анзаца Бете*.

Вопросы, которые мы рассматриваем, тесно связаны с *полнотой* алгебраического анзаца Бете, т.е. с проблемой, образуют ли собственные векторы, полученные с помощью анзаца Бете, базис в V . Эта проблема широко изучается в течение многих лет в работах

Мухина, Тарасова, Варченко и других. В качестве первого шага к решению этой проблемы необходимо, чтобы совместные собственные значения не имели кратностей. Последнее выполняется тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия: во-первых, существует *циклический вектор* для подалгебры Бете в V (т.е. $v \in V$ такой, что $B(C)v = V$) и, во-вторых, алгебра $B(C)$ действует на V полупросто.

Пусть $X \in \overline{M_{0,n+2}}$ и рассмотрим подалгебру Бете $B(X)$. Мы называем $v \in V$ *циклическим* по отношению к $B(X)$, если $B(X) \cdot v = V$.

Гипотеза. *Подалгебра $B(X)$ имеет циклический вектор в любом ручном представлении $Y(\mathfrak{gl}_n)$ для всех $X \in \overline{M_{0,n+2}}$.*

Фактически, легко увидеть, что гипотеза верна для *общих* X, z_1, \dots, z_k . Действительно, рассмотрим пространство параметров $\overline{M_{0,n+2}} \times \mathbb{C}^n$. Условие, что $B(X)$ действует с циклическим вектором на $\bigotimes_{i=1}^k V_i(z_i)$, определяет открытое по Зарисскому подмножество в $\overline{M_{0,n+2}} \times \mathbb{C}^n$, поэтому, если у нас есть хотя бы одна точка $(X, z_1, \dots, z_n) \in \overline{M_{0,n+2}} \times \mathbb{C}^n$ такая, что $B(X)$ действует с циклическим вектором на $\bigotimes_{i=1}^k V_i(z_i)$, то мы автоматически получаем то же свойство для общих (X, z_1, \dots, z_n) . С другой стороны, согласно [?], подалгебра Гельфанда-Цетлина в $Y(\mathfrak{gl}_n)$ (которая является частным случаем $B(X)$) действует без кратностей на любом ручном представлении, поэтому имеет циклический вектор - значит, это открытое по Зарисскому подмножество непусто. Проблема с этим аргументом в том, что он не дает никакого представления, такого, что $B(X)$ действует циклически для *всех* $X \in \overline{M_{0,n+2}}$. Ильин, Машанова-Голикова и Рыбников получили следующую теорему

Теорема А. *Существует открытое плотное по Зарисскому подмножество в $I \subset \mathbb{C}^n$ такая, что $B(X)$ имеет циклический вектор в V для всех $X \in \overline{M_{0,n+2}}$ и $(z_1, \dots, z_k) \in I$.*

В частности, в общем ручном представлении в смысле [?] каждая подалгебра Бете $B(X)$ с $X \in \overline{M_{0,n+2}}$ действует с циклическим вектором. Это позволяет изучать совместный спектр $B(X)$ в данном ручном представлении как конечное покрытие $\overline{M_{0,n+2}}$ и переформулировать некоторые свойства этого спектра в терминах геометрии компактификации Делиня-Мамфорда.

2.4.4 Гипотезы о свойстве простого спектра и монодромии

Из теоремы А следует, что если подалгебра $B(C)$ действует полупросто, то она имеет простой спектр (т.е. совместные собственные значения не имеют кратностей). Обычным достаточным условием для этого является существование эрмитова скалярного произведения, такого что $B(C)^+ = B(C)$, т.е. все элементы $B(C)$ действуют нормальными операторами. Мы даем достаточные условия на представление янгиана, гарантирующие существование такого скалярного произведения при условии, что C принадлежит либо замыканию множества регулярных элементов компактного вещественного тора $T_{comp} \subset T$, либо замыканию

множества регулярных элементов расщепимого вещественного тора $T_{split} \subset T$.

Случай компактного тора восходит к Кириллову и Решетихину. Напомним, что модуль Кириллова – Решетихина – это неприводимый \mathfrak{gl}_n -модуль, соответствующий прямоугольной диаграмме Юнга (эквивалентно, это старшая неприводимая компонента симметрической степени фундаментального представления \mathfrak{gl}_n). Вторым основным результатом здесь является следующая

Теорема В. *Предположим, что все V_i являются модулями Кириллова-Решетихина. Пусть $l_i \times r_i$ – размер соответствующей диаграммы Юнга. Предположим, что $z_i = \frac{l_i}{2} - \frac{r_i}{2} + ix_i$, где $x_i \in \mathbb{R}$. Тогда для $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ из открытого по Зарисскому подмножества подалгебра $B(X)$ имеет простой спектр на $\bigotimes_{i=1}^k V_i(z_i)$ для всех $X \in \overline{M_{0,n+2}^{comp}}$.*

Теорема В позволяет рассматривать множество собственных прямых для $B(X)$ в пространстве $\bigotimes_{i=1}^k V_i(z_i)$ как *неразветвленное* накрытие пространства $\overline{M_{0,n+2}^{comp}}$. В частности, мы получаем действие монодромии фундаментальной группы $\pi_1(\overline{M_{0,n+2}^{comp}})$ (которую естественно назвать (чистой) *аффинной группой кактусов*) на спектре подалгебр Бете. Более того, можно определить структуру кристалла Кириллова-Решетихина на этом спектре, следуя стратегии Халачевой-Камнищера-Рыбникова-Викса. Мы ожидаем, что действие аффинной группы кактусов на этом множестве задается частичными инволюциями Шутценбергера на кристалле Кириллова-Решетихина.

Замыкание множества регулярных точек расщепляемого вещественного тора T_{split} в $\overline{M_{0,n+2}}$ является вещественной формой $\overline{M_{0,n+2}^{split}}$. Наш третий основной результат:

Теорема С. *Пусть $V_i, i = 1, \dots, k$ – набор косых представлений $Y(\mathfrak{gl}_n)$. Тогда для $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ из открытого по Зарисскому подмножества $B(X)$ имеет простой спектр на $\bigotimes_{i=1}^k V_i(x_i)$ для все $X \in \overline{M_{0,n+2}^{split}}$.*

Как и в случае компактной вещественной формы, это дает действие обычной группы кактусов $\pi_1(\overline{M_{0,n+2}^{split}})$ на спектре алгебры Бете. Специализируя параметр алгебры Бете на *гусеницу* точку $\overline{M_{0,n+2}^{split}}$, мы получаем действие группы кактусов на базисе Гельфанда-Цетлина в тензорное произведение косых представлений. Последний индексируется наборами полустандартных косых таблиц Юнга, и мы предполагаем, что действие кактусовой группы задается инволюциями Бендера-Кнута, аналогично конструкции Чмутова, Глика и Пилявского.

2.5 Эллиптические решения иерархии решетки Тоды и эллиптическая модель Руйсенарса – Шнайдера

Рассматриваются решения иерархии двумеризованной решетки Тоды, которые являются эллиптическими функциями “нулевого” времени $t_0 = x$. Известно, что их полюса как функции от t_1 двигаются как частицы эллиптической модели Руйсенарса-Шнайдера. Целью статьи является распространение этого соответствия на уровень иерархий. Показано, что гамильтонианы, которые управляют динамикой полюсов по m -м иерархическим временам t_m и \bar{t}_m иерархии двумеризованной решетки Тоды получаются из разложения спектральной кривой для матрицы Лакса модели Руйсенарса-Шнайдера в отмеченных точках.

Иерархия двумеризованной решетки Тоды (2DTL) [64] представляет собой бесконечное множество совместных нелинейных дифференциально-разностных уравнений, содержащих бесконечное количество временных переменных $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3, \dots\}$ (“положительных” времен), $\bar{\mathbf{t}} = \{\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3, \dots\}$ (“отрицательных” времен), по которым уравнения являются дифференциальными, и “нулевого” время $t_0 = x$, по которому уравнения являются разностными. Среди всех решений этих уравнений специальный интерес представляют решения, которые имеют конечное число полюсов по переменной x в фундаментальной области комплексной плоскости. В частности, можно рассмотреть решения, которые являются эллиптическими (двойкопериодическими в комплексной плоскости) функциями от x с полюсами, зависящими от времен.

Исследование динамики полюсов сингулярных решений нелинейных интегрируемых уравнений было начато в основополагающей статье [65], где были изучены эллиптические и рациональные решения уравнений Кортевега-де Вриза и Буссинеска. Было показано, что полюса двигаются как частицы интегрируемой многочастичной системы Калоджеро-Мозера [66, 67, 68, 69] с некоторыми ограничениями в фазовом пространстве. Как было доказано в работах [70, 71], эта связь становится наиболее естественной для уравнения Кадомцева-Петвиашвили (КП), для полюсов решений которого никаких ограничений динамики Калоджеро-Мозера в фазовом пространстве нет. Метод, предложенный Кричевым [72] для эллиптических решений уравнения КП, заключается в подстановке решения не в само уравнение КП, а во вспомогательную линейную задачу для него (это предполагает подходящий полюсной анзац для волновой функции). Этот метод позволяет получить уравнения движения вместе с представлением Лакса для них.

Позднее Шиотой было показано [73], что соответствие между рациональными решениями уравнения КП и системой Калоджеро-Мозера с рациональным потенциалом может

быть расширено на уровень иерархий. Было установлено, что эволюция полюсов по отношению к высшим временам t_k иерархии КП управляется высшими гамильтонианами $H_k = \text{tr } L^k$ интегрируемой системы Калоджеро-Мозера, где L – ее матрица Лакса. Не так давно это соответствие было обобщено на тригонометрические и эллиптические решения иерархии КП (см. [74, 75] о тригонометрических решениях и [76] об эллиптических решениях).

Динамика полюсов эллиптических решений уравнений 2DTL и модифицированного уравнения КП (мКП) была изучена в работе [77], см. также [78]. Было доказано, что полюса двигаются как частицы интегрируемой многочастичной системы Руйсенарса-Шнайдера [79, 80], которую можно понимать как релятивистское обобщение системы Калоджеро-Мозера. Распространение на уровень иерархий для рациональных решений уравнения мКП было сделано в [81] (см. также [82]): аналогично предыдущему случаю, эволюция полюсов по отношению к высшим временам t_k иерархии мКП управляется высшими гамильтонианами $\text{tr } L^k$ системы Руйсенарса-Шнайдера. Недавно этот результат был обобщен на тригонометрические решения [83]. Однако, соответствующий результат для более общих эллиптических решений не был известен в литературе.

Мы изучаем соответствие между иерархией 2DTL и иерархией Руйсенарса-Шнайде-ра для эллиптических решений первой. Наш метод заключается в решении вспомогательных линейных задач для волновой функции и ей сопряженной с использованием подходящего полюсного анзаца. Тау-функция иерархии 2DTL для эллиптических решений имеет вид

$$\tau(x, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \exp\left(-\sum_{k \geq 1} k t_k \bar{t}_k\right) \prod_{i=1}^N \sigma(x - x_i(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})), \quad (2.20)$$

где $\sigma(x)$ – σ -функция Вейерштрасса с квазипериодами 2ω , $2\omega'$ такими, что $\text{Im}(\omega'/\omega) > 0$ (определение дано ниже в разделе ??). Нули x_i тау-функции – это полюса решений. Предполагается, что они все различны.

Мы показываем, что динамика полюсов по временам \mathbf{t} , $\bar{\mathbf{t}}$ является гамильтоновой и идентифицируем соответствующие гамильтонианы, которые оказываются высшими гамильтонианами эллиптической системы Руйсенарса-Шнайде-ра. Производящей функцией этих гамильтонианов является $\lambda(z)$, где спектральные параметры λ, z связаны уравнением спектральной кривой

$$\det_{N \times N} \left(z e^{\eta \zeta(\lambda)} I - L(\lambda) \right) = 0, \quad (2.21)$$

в котором $\zeta(\lambda)$ – ζ -функция Вейерштрасса, I – единичная матрица, и $L(\lambda)$ – матрица Лакса. Точка спектральной кривой – это $P = (z, \lambda)$, где z, λ связаны уравнением (2.21). На спектральной кривой имеются две отмеченные точки: $P_\infty = (\infty, 0)$ и $P_0 = (0, N\eta)$. Гамильтонианы, соответствующие положительным временным потокам \mathbf{t} – это коэффициенты

разложения функции $\lambda(z)$ по отрицательным степеням z вблизи точки P_∞ , а гамильтонианы, соответствующие отрицательным временным потокам $\bar{\mathbf{t}}$ – коэффициенты разложения функции $\lambda(z)$ по положительным степеням z вблизи точки P_0 . Это наш основной результат.

N -частичная эллиптическая система Руйсенарса-Шнайдера – полностью интегрируемая модель. Ее можно рассматривать как релятивистское обобщение системы Калоджеро-Мозера. Динамические переменные – это координаты x_i и импульсы p_i с каноническими скобками Пуассона $\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$. Интегралы движения в инволюции имеют вид

$$I_k = \sum_{I \subset \{1, \dots, N\}, |I|=k} \exp\left(\sum_{i \in I} p_i\right) \prod_{i \in I, j \notin I} \frac{\sigma(x_i - x_j + \eta)}{\sigma(x_i - x_j)}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.22)$$

где η – параметр (обратная скорость света). В частности,

$$I_1 = \sum_i e^{p_i} \prod_{j \neq i} \frac{\sigma(x_i - x_j + \eta)}{\sigma(x_i - x_j)}, \quad I_N = \exp\left(\sum_{i=1}^N p_i\right). \quad (2.23)$$

В сравнении с работой [80] наши формулы отличаются каноническим преобразованием

$$e^{p_i} \rightarrow e^{p_i} \prod_{j \neq i} \left(\frac{\sigma(x_i - x_j + \eta)}{\sigma(x_i - x_j - \eta)} \right)^{1/2}, \quad x_i \rightarrow x_i,$$

которое позволяет избежать квадратных корней, имеющихсся в [80]. Гамильтониан модели – это $H_1 = I_1$.

Скорости частиц даются формулой

$$\dot{x}_i = \frac{\mathbf{p}H_1}{\mathbf{p}p_i} = e^{p_i} \prod_{j \neq i} \frac{\sigma(x_i - x_j + \eta)}{\sigma(x_i - x_j)}. \quad (2.24)$$

Гамильтоновы уравнения $\dot{p}_i = -\mathbf{p}H_1/\mathbf{p}x_i$ эквивалентны следующим уравнениям движения:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= - \sum_{k \neq i} \dot{x}_i \dot{x}_k \left(\zeta(x_i - x_k + \eta) + \zeta(x_i - x_k - \eta) - 2\zeta(x_i - x_k) \right) \\ &= \sum_{k \neq i} \dot{x}_i \dot{x}_k \frac{\wp'(x_i - x_k)}{\wp(\eta) - \wp(x_i - x_k)}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $\zeta(x)$ и $\wp(x)$ – ζ - и \wp -функции.

Можно также ввести интегралы движения I_{-k} следующим образом:

$$I_{-k} = I_N^{-1} I_{N-k} = \sum_{I \subset \{1, \dots, N\}, |I|=k} \exp\left(-\sum_{i \in I} p_i\right) \prod_{i \in I, j \notin I} \frac{\sigma(x_i - x_j - \eta)}{\sigma(x_i - x_j)}. \quad (2.26)$$

В частности,

$$I_{-1} = \sum_i e^{-p_i} \prod_{j \neq i} \frac{\sigma(x_i - x_j - \eta)}{\sigma(x_i - x_j)}. \quad (2.27)$$

Естественно положить $I_0 = 1$. Легко проверяется, что уравнения движения по отношению к времени \bar{t}_1 , соответствующие гамильтониану $\bar{H}_1 = I_{-1}$ совпадают с (2.25).

Анзац для тау-функции эллиптических (двойкопериодических в комплексной плоскости) решений иерархии 2DTL дается формулой (2.20). В (2.20)

$$\sigma(x) = \sigma(x|\omega, \omega') = x \prod_{s \neq 0} \left(1 - \frac{x}{s}\right) e^{\frac{x}{s} + \frac{x^2}{2s^2}}, \quad s = 2\omega m + 2\omega' m' \quad \text{с целыми } m, m'$$

означает σ -функцию Вейерштрасса с квазипериодами $2\omega, 2\omega'$ такими, что $\text{Im}(\omega'/\omega) > 0$. Она связана с ζ - и \wp -функциями Вейерштрасса формулами $\zeta(x) = \sigma'(x)/\sigma(x)$, $\wp(x) = -\zeta'(x) = -\mathbf{p}_x^2 \log \sigma(x)$. Свойства монодромии функции $\sigma(x)$ таковы:

$$\sigma(x + 2\omega) = -e^{2\zeta(\omega)(x+\omega)} \sigma(x), \quad \sigma(x + 2\omega') = -e^{2\zeta(\omega')(x+\omega')} \sigma(x), \quad (2.28)$$

где константы $\zeta(\omega), \zeta(\omega')$ связаны соотношением $\zeta(\omega)\omega' - \zeta(\omega')\omega = \pi i/2$.

Для эллиптических решений

$$v(x) = \sum_i \dot{x}_i \left(\zeta(x - x_i) - \zeta(x - x_i + \eta) \right) \quad (2.29)$$

является эллиптической функцией, так что можно искать *двойкоблеховские* решения линейной задачи (??). Двойкоблеховская функция имеет свойства монодромии $\psi(x + 2\omega) = B\psi(x)$, $\psi(x + 2\omega') = B'\psi(x)$ с некоторыми блеховскими множителями B, B' . Любая нетривиальная двойкоблеховская функция (т.е. не являющаяся экспоненциальной функцией) обязана иметь полюса по x в фундаментальной области. Блеховские множители волновой функции (??) таковы:

$$B = z^{2\omega/\eta} \exp\left(-2\zeta(\omega) \sum_i (e^{-D(z)} - 1)x_i\right), \quad B' = z^{2\omega'/\eta} \exp\left(-2\zeta(\omega') \sum_i (e^{-D(z)} - 1)x_i\right), \quad (2.30)$$

где мы ввели дифференциальный оператор

$$D(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{z^{-k}}{k} \mathbf{p}_{t_k}. \quad (2.31)$$

Из уравнения (??) следует, что блеховские множители функций ψ^\dagger равны $1/B, 1/B'$. В самом деле, правая часть (??) – эллиптическая x , следовательно, левая часть тоже должна быть эллиптической функцией.

Введем элементарную двойкоблеховскую функцию $\Phi(x, \lambda)$, определенную формулой

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{\sigma(x + \lambda)}{\sigma(\lambda)\sigma(x)} e^{-\zeta(\lambda)x} \quad (2.32)$$

($\zeta(\lambda)$ – ζ -функция Вейерштрасса). Свойства монодромии функции Φ таковы:

$$\Phi(x + 2\omega, \lambda) = e^{2(\zeta(\omega)\lambda - \zeta(\lambda)\omega)} \Phi(x, \lambda),$$

$$\Phi(x + 2\omega', \lambda) = e^{2(\zeta(\omega')\lambda - \zeta(\lambda)\omega')} \Phi(x, \lambda),$$

так что она действительно является двоякоблочовской функцией. Функция Φ имеет простой полюс при $x = 0$ с вычетом 1:

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{1}{x} + \alpha_1 x + \dots, \quad x \rightarrow 0,$$

где $\alpha_1 = -\frac{1}{2} \wp(\lambda)$. В тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям, мы будем опускать второй аргумент у Φ , записывая просто $\Phi(x) = \Phi(x, \lambda)$. Нам также будет нужна производная по x : $\Phi'(x, \lambda) = \mathbf{p}_x \Phi(x, \lambda)$.

Далее нам потребуются следующие тождества для функции Φ :

$$\Phi(x, -\lambda) = -\Phi(-x, \lambda), \quad (2.33)$$

$$\Phi'(x) = \Phi(x)(\zeta(x + \lambda) - \zeta(\lambda) - \zeta(x)), \quad (2.34)$$

$$\Phi(x)\Phi(y) = \Phi(x + y)(\zeta(x) + \zeta(y) + \zeta(\lambda) - \zeta(x + y + \lambda)). \quad (2.35)$$

Из уравнений следует, что волновые функции ψ , ψ^\dagger имеют простые полюса в точках x_i . Можно разложить волновые функции по полюсам, используя элементарные двоякоблочовские функции, следующим образом:

$$\psi = k^{x/\eta} e^{\xi(\mathbf{t}, z)} \sum_i c_i \Phi(x - x_i, \lambda) \quad (2.36)$$

$$\psi^\dagger = k^{-x/\eta} e^{-\xi(\mathbf{t}, z)} \sum_i c_i^* \Phi(x - x_i, -\lambda) \quad (2.37)$$

(это аналогично разложению рациональной функции в линейную комбинацию простых полюсных членов). Здесь c_i , c_i^* – коэффициенты разложения, не зависящие от x , а k – дополнительный спектральный параметр. Отметим, что из нормировки функций (??), (??) следует, что c_i и c_i^* ведут себя как $O(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$. Легко видеть, что (2.36) – двоякоблочовская функция с блоховскими множителями

$$B = e^{\frac{2\omega}{\eta}(\log k - \eta\zeta(\lambda)) + 2\zeta(\omega)\lambda}, \quad B' = e^{\frac{2\omega'}{\eta}(\log k - \eta\zeta(\lambda)) + 2\zeta(\omega')\lambda} \quad (2.38)$$

и (2.37) имеет блоховские множители B^{-1} and B'^{-1} . Эти блоховские множители должны совпадать с (2.30).

Следовательно, сравнивая (2.30) и (2.38), получим

$$\begin{aligned}\frac{2\omega}{\eta} \left(\log(k/z) - \eta\zeta(\lambda) \right) + 2\zeta(\omega) \left(\lambda + (e^{-D(z)} - 1) \sum_i x_i \right) &= 2\pi i n, \\ \frac{2\omega'}{\eta} \left(\log(k/z) - \eta\zeta(\lambda) \right) + 2\zeta(\omega') \left(\lambda + (e^{-D(z)} - 1) \sum_i x_i \right) &= 2\pi i n'\end{aligned}$$

с некоторыми целыми n, n' . Рассматривая эти уравнения как линейную систему, найдем решение

$$\begin{aligned}\log(k/z) - \eta\zeta(\lambda) &= 2n'\eta\zeta(\omega) - 2n\eta\zeta(\omega'), \\ \lambda + (e^{-D(z)} - 1) \sum_i x_i &= 2n\omega' - 2n'\omega.\end{aligned}$$

Сдвинув λ на подходящий вектор решетки, натянутой на $2\omega, 2\omega'$, получим нули в правых частях этих равенств, так что связь между спектральными параметрами k, z, λ может быть представлена в виде

$$\begin{cases} k = z e^{\eta\zeta(\lambda)}, \\ \lambda = (1 - e^{-D(z)}) \sum_i x_i. \end{cases} \quad (2.39)$$

Эти два уравнения на три спектральных параметра k, z, λ задают спектральную кривую. Другое описание той же спектральной кривой как спектральной кривой системы Руйсенарса-Шнайдера (она определяется характеристическим полиномом для матрицы Лакса $L(\lambda)$ системы Руйсенарса-Шнайдера) получено ниже. Она возникает в виде уравнения $R(k, \lambda) = 0$, где $R(k, \lambda)$ – полином от k , коэффициенты которого являются эллиптическими функциями от λ (см. ниже раздел ??). Эти коэффициенты – интегралы движения в инволюции. Спектральная кривая предстает в виде $R(k, \lambda) = 0$, если исключить z из уравнений (2.39). Эквивалентным образом, можно представить спектральную кривую как соотношение, связывающее z и λ :

$$R(ze^{\eta\zeta(\lambda)}, \lambda) = 0. \quad (2.40)$$

Второе уравнение в (2.39) можно записать как разложение по степеням z :

$$\lambda = \lambda(z) = - \sum_{m \geq 1} z^{-m} \hat{h}_m \mathcal{X}, \quad \mathcal{X} := \sum_i x_i. \quad (2.41)$$

Здесь \hat{h}_k – дифференциальные операторы вида

$$\hat{h}_m = -\frac{1}{m} \mathbf{p}_{t_m} + \text{члены старшего порядка по } \mathbf{p}_{t_1}, \mathbf{p}_{t_2}, \dots, \mathbf{p}_{t_{m-1}}. \quad (2.42)$$

Несколько первых таковы:

$$\hat{h}_1 = -\mathbf{p}_{t_1}, \quad \hat{h}_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{p}_{t_1}^2 - \mathbf{p}_{t_2}), \quad \hat{h}_3 = \frac{1}{6} (-\mathbf{p}_{t_1}^3 + 3\mathbf{p}_{t_1}\mathbf{p}_{t_2} - 2\mathbf{p}_{t_3}).$$

Как отмечалось выше, коэффициенты разложения (2.41) – интегралы движения, т.е. $\mathbf{p}_{t_j} \hat{h}_m \mathcal{X} = 0$ для всех j, m . Тогда из явного вида операторов \hat{h}_m следует, что $\mathbf{p}_{t_j} \mathbf{p}_{t_1} \mathcal{X} = 0$. Индукция затем показывает, что $\mathbf{p}_{t_j} \mathbf{p}_{t_m} \mathcal{X} = 0$ для всех j, m . Это означает, что $-\hat{h}_m \mathcal{X} = \frac{1}{m} \mathbf{p}_{t_m} \mathcal{X}$, и тем самым \mathcal{X} – линейная функция времен:

$$\mathcal{X} = \sum_i x_i = \mathcal{X}_0 + \sum_{m \geq 1} V_m t_m \quad (2.43)$$

с некоторыми константами V_m (которые представляют собой скорости “центра масс” точек x_i по отношению к временам t_m , умноженные на N). Следовательно, второе уравнение в (2.39) может быть записано как

$$\lambda = D(z) \sum_i x_i = \sum_{j \geq 1} \frac{z^{-j}}{j} V_j. \quad (2.44)$$

Оказывается, $H_m = \frac{1}{m} V_m$ являются гамильтонианами для динамики полюсов по t_m , причем H_1 – стандартный гамильтониан Руйсенарса-Шнайдера.

Основной результат нашей работы – установление точного соответствия между эллиптическими решениями двумеризованной иерархии решетки Тоды и иерархией гамильтоновых уравнений интегрируемой эллиптической модели Руйсенарса-Шнайдера с высшими гамильтонианами. Нули тау-функции двигаются как частицы модели Руйсенарса-Шнайдера. Мы показали, что m -й поток t_m иерархии 2DTL соответствует потоку в модели Руйсенарса-Шнайдера с гамильтонианом H_m , который находится как m -й коэффициент разложения спектральной кривой $\lambda(z)$ по отрицательным степеням z при $z \rightarrow \infty$. Более того, m -й поток \bar{t}_m иерархии 2DTL соответствует потоку в модели Руйсенарса-Шнайдера с гамильтонианом \bar{H}_m , который находится как m -й коэффициент разложения спектральной кривой $\lambda(z)$ по положительным степеням z при $z \rightarrow 0$.

Для рациональных и тригонометрических вырождений эллиптических решений воспроизводятся результаты предыдущих работ [81, 82, 83], полученные там другими методами: m -й поток t_m иерархии 2DTL соответствует потоку с гамильтонианом H_m , пропорциональным $\text{tr } L^m$, где L – матрица Лакса, а поток \bar{t}_m соответствует гамильтонову потоку с гамильтонианом \bar{H}_m , пропорциональным $\text{tr } L^{-m}$.

2.6 Собственные функции оператора Сазерленда

В 2004 году А.Герасимов, С.Харчев и Д.Лебедев применили технику базиса Гельфанда - Цетлина для вывода интегрального представления для $GL(n, R)$ функций Уиттекера, эквивалентно, для волновых функций открытой цепочки Тоды. Известное действие генераторов алгебры Ли на таблицах Гельфанда - Цетлина было использовано для построения

некоторого бесконечномерного представления алгебры Ли $gl(n, R)$ в функциональном пространстве мероморфных функций. В этом представлении были найдены векторы Уиттекера и невырожденное спаривание, так что спаривание двух дуальных векторов Уиттекера дает представление Меллина-Барнса для функций Уиттекера. Упомянутые векторы Уиттекера даются произведениями гамма-функций Эйлера, и спаривание представляет собой интегрирование по мнимой плоскости в $C^{n(n-1)/2}$ с мерой Склянина. В этом же представлении был найден сферический вектор относительно ортогональной группы, что дало возможность найти интегральное представление Меллина-Барнса для собственной функции оператора Сазерленда

$$H_2 = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i < j} \frac{g(g-1)}{\text{sh}^2(x_i - x_j)},$$

при специальном значении константы связи $g = 1/2$. С другой стороны, в своих исследованиях обобщенных гипергеометрических функций, связанных с системами корней, Г. Хекман и Э. Опдам исследовали свойства волновых функций гамильтониана Сазерленда для общей константы связи g . Г. Хекман доказал существование функции $\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(g)}(x_1, \dots, x_n)$ такой, что волновая функция

$$\Phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(g)}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i < j} \text{sh}^{-g} |x_i - x_j| \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(g)}(x_1, \dots, x_n)$$

(теперь называемая гипергеометрической функцией Хекмана-Опдама) является вещественно-аналитической и инвариантной относительно перестановок координат x_k . Эти результаты были получены при изучении рекуррентных соотношений на коэффициенты разложений Тейлора решений соответствующего дифференциального уравнения.

Положим

$$\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(g)}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j < k} \text{sh}^g |x_j - x_k| \times \int_{iR^{\frac{n(n-1)}{2}}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\prod_{j=1}^i \prod_{k=1}^{i+1} \Gamma\left(\frac{\gamma_{i,j} - \gamma_{i+1,k} + g}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_{i+1,k} - \gamma_{i,j} + g}{2}\right)}{\prod_{1 \leq r \neq s \leq i} \Gamma\left(\frac{\gamma_{i,r} - \gamma_{i,s}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_{i,r} - \gamma_{i,s} + 2g}{2}\right)} e^{\sum_{i,j=1}^n (\gamma_{i,j} - \gamma_{i-1,j}) x_i} \prod_{\substack{i=1 \\ j \leq i}}^{n-1} d\gamma_{i,j}$$

где $\lambda_i = \gamma_{n,i}$, $\lambda_i \in iR$, $g > 0$, и $\gamma_{i,j} = 0$ if $i < j$.

Теорема. Функция $\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(g)}(x_1, \dots, x_n)$ является собственной функцией гамильтониана Сазерленда

$$H_2 \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(g)}(x_1, \dots, x_n) = -\lambda^2 \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(g)}(x_1, \dots, x_n).$$

где $\lambda^2 = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2$.

Благодаря абсолютной сходимости интеграла, обобщенная гипергеометрическая функция $\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(g)}(x_1, \dots, x_n)$ является комплексно аналитической функцией переменных (x_1, \dots, x_n) в малой полосе вокруг действительной плоскости.

Наше доказательство теоремы по существу простое, но использует неожиданные аргументы из теории представлений. Обычно техника матричных элементов в теории групп работает для специальных значений параметров, связанных с действительными комплексными кватернионными симметричными пространствами. Однако мы используем оператор Лапласа в представлении Гельфанда - Цетлина алгебры Ли $gl(n, R)$, как гамильтониан в пространстве рациональных функций, и выводим, используя его свойства, дифференциальное уравнение второго порядка на предъявленный интеграл для произвольной положительной константы связи. Константа связи g появляется как параметр $\hbar/2$ в представлении, построенном Герасимовым, Харчевым и Лебедевым. Отметим также, что мы используем формулы Гельфанда - Цетлина в полном объеме для всех генераторов алгебры Ли $gl(n, R)$.

С другой стороны, известно, что спектральные задачи для интегрируемых систем с операторами Секигучи-Макдональда в качестве гамильтонианов допускают биспектральные расширения. О. Чалых поставил биспектральную задачу для гиперболической системы Сазерленда с целочисленной константой связи и нашел ее решение в виде функции Бейкера - Ахиезера. Позже М. Ноуми, Дж. Шираиши поставили биспектральную задачу для q -разностных операторов Руйсенаарса - Макдональда. Они доказали существование решение этой задачи в виде базовых гипергеометрических рядов в области $|x_1| \gg |x_2| \gg \dots \gg |x_n|$ и изученные аналитические задачи этого решения. Были также обнаружены определенные свойства инвариантности биспектрального решения при замене $t \leftrightarrow qt^{-1}$ параметров Макдональда.

Положим

$$\mathcal{H}_r^{(g)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (-1)^{r(n-1)} \sum_{I_r} \prod_{i \in I_r, j \notin I_r} \frac{\lambda_i - \lambda_j + 2 - 2g}{\lambda_i - \lambda_j} \cdot \prod_{i \in I_r} T_{\lambda_i},$$

где сумма берется по всем подмножествам I_r множества $\{1, \dots, n\}$ мощности r ; и $T_{\lambda_k} f(\lambda_k) = f(\lambda_k + 2)$. эти коммутирующие операторы известны как разностные операторы Руйсенаарса-Макдональда, описывающие рациональное релятивистское обобщение Руйсенаарса модели Калоджеро-Сазерленда.

Теорема. Функция $\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(g)}(x_1, \dots, x_n)$ решает спектральную задачу для разностных операторов Руйсенаарса - Макдональда с произвольной константой связи $g > 1$, а именно:

$$\mathcal{H}_r^{(g)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(g)}(x_1, \dots, x_n) = e_r(e^{2x_1}, \dots, e^{2x_n}) \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(g)}(x_1, \dots, x_n).$$

Здесь $e_r(y_1, \dots, y_n)$, $r = 1, \dots, n$ - r -я элементарная симметричная функция,

$$e_r(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i_1 < \dots < i_r} y_{i_1} \cdots y_{i_r}.$$

Волновая функция $\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(g)}(x_1, \dots, x_n)$, первоначально определенная для мнимых значений параметров λ_i , является аналитической в полосе вокруг действительной плоскости $R^n \subset C^n$, а затем аналитически продолжается до других значений параметров. λ_i . С другой стороны, сдвиги в разностных операторах выполняются в действительном направлении, что означает, что разностное уравнение понимается в смысле аналитического продолжения или как интегральное уравнение с ядрами типа Коши.

В случае двух переменных волновая функция имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda_1, \lambda_2}^{(g)}(x_1, x_2) &= \int_{iR} \exp \left\{ (\lambda_1 + \lambda_2 - \gamma)x_2 + \gamma x \right\} \\ &\times \Gamma\left(\frac{\gamma - \lambda_1 + g}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda_1 - \gamma + g}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma - \lambda_2 + g}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda_2 - \gamma + g}{2}\right) d\gamma, \end{aligned}$$

и выражается через функцию Лежандра

$$\Phi_{\lambda_1, \lambda_2}^{(g)}(x_1, x_2) = \exp \left\{ \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(x_1 + x_2) \right\} \phi_{\lambda_1 - \lambda_2}^{(g)}(x_1 - x_2) =$$

где

$$\phi_{\lambda}^{(g)}(x) = 4i\pi^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{1}{2}-g} \Gamma(g) \Gamma(g - \frac{\lambda}{2}) \Gamma(g + \frac{\lambda}{2}) \cdot \sinh^{\frac{1}{2}-g} x P_{\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-g}(\cosh x).$$

Можно показать, используя свойства преобразования Меллина, что эта же функция допускает и координатное интегральное представление

$$\Phi_{\lambda_1, \lambda_2}^{(g)}(x_1, x_2) = 2\pi i 4^{g+1} \Gamma^2(g) e^{\lambda_1(x_1+x_2)} \int_R d\tau \frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)\tau}}{\text{ch}^g(\tau-x_1) \text{ch}^g(\tau-x_2)}.$$

2.7 О R-матричных представлениях квантовых алгебр петель

Мы изучали R -матричную реализацию квантовых деформаций петлевых алгебр $\tilde{\mathfrak{g}}$, соответствующих неисключительным аффинным алгебрам Ли типа $\hat{\mathfrak{g}} = A_{N-1}^{(1)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, A_{N-1}^{(2)}$. Для каждой $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ мы исследовали коммутационные соотношения между гауссовыми координатами фундаментальных L -операторов, используя вложение меньшей алгебры в большую. Дана новая реализация этих алгебр в терминах токов. Представлены соотношения между всеми недиагональными координатами Гаусса и некоторыми проекциями из упорядоченных произведений токов. Эти соотношения важны в приложениях к квантовым интегрируемым моделям.

Классификация решений квантового уравнения Янга-Бакстера для случая неисключительных квантовых аффинных алгебр Ли была найдена в пионерской работе [87].

Пусть \mathfrak{g} одна из алгебр Ли \mathfrak{sl}_N , \mathfrak{o}_{2n+1} , \mathfrak{sp}_{2n} или \mathfrak{o}_{2n} соответствующим классическим сериям алгебр Ли A_{N-1} , B_n , C_n и D_n соответственно. Пусть $\widehat{\mathfrak{g}}$ является одной из неисключительных аффинных алгебр Ли $A_{N-1}^{(1)}$, $B_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$ и $A_{N-1}^{(2)}$. С помощью $\widetilde{\mathfrak{g}}$ мы обозначаем алгебру петель, которая является аффинной алгеброй $\widehat{\mathfrak{g}}$ с нулевым центральным зарядом. Чтобы сохранить обозначения, мы будем использовать те же обозначения для алгебр петель $\widetilde{\mathfrak{g}}$, что и для соответственных аффинных алгебр $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Пусть $q \in \mathbb{C}$ - произвольное комплексное число, не равное нулю или корню из единицы. В этой статье мы рассмотрим квантовую деформацию $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$ [88] универсальной обертывающей алгебры $U(\widetilde{\mathfrak{g}})$. Можно думать о $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$ как соответствующей квантовой аффинной алгебре $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ с нулевым центральным зарядом.

Алгебра $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$ имеет несколько описаний. Ее можно сформулировать в терминах конечного числа генераторов Шевалле или счетного множества генераторов Картана-Вейля. Последние генераторы могут быть собраны в конечное число генерирующих рядов, и коммутационные отношения между всем набором генераторов Картана-Вейля могут быть реализованы как конечное число формальных отношений между этими генерирующими рядами.

Для приложений к квантовым интегрируемым моделям второе описание $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$ подходит лучше, поскольку производящие ряды генераторов Картана-Вейля могут быть отождествлены с гауссовыми координатами фундаментальных L-операторов, которые удовлетворяют тем же соотношениям коммутации типа RLL, что и квантовые монодромии интегрируемых систем. Это открывает возможность построения векторов Бете для этих интегрируемых моделей в терминах генераторов Картана-Вейля алгебры $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$ [89].

Реализация алгебры $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$ в терминах генераторов Картана-Вейля, в свою очередь, имеет два описания. Одно из них задается квадратичными соотношениями коммутации типа RLL для фундаментальных L-операторов, определяемых решением квантового уравнения Янга-Бакстера [87]. Эта конструкция была впервые предложена в статье [90]. С другой стороны, алгебра $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$ может быть реализован в терминах так называемых *токов* [91]. Для этого случая $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$ изоморфизм между этими двумя описаниями был найден в [92]. Недавние работы [93, 94] доказывают аналогичные изоморфизмы для алгебр $U_q(B_n^{(1)})$, $U_q(C_n^{(1)})$ и $U_q(D_n^{(1)})$. В нашем исследовании мы расширили эти результаты на случай $U_q(A_{N-1}^{(2)})$. Важным наблюдением является тот факт, что R-матрица, связанная с алгебрами $U_q(B_n^{(1)})$, $U_q(C_n^{(1)})$, $U_q(D_n^{(1)})$, $U_q(A_{N-1}^{(2)})$ имеет одинаковую структуру для всех этих алгебр. Все различия сосредоточены в одном параметре ξ .

In [87] one more solution to the quantum Yang-Baxter equation was found. It corresponds

to the affine algebra $D_n^{(2)}$. This solution has more complicated structure than R-matrices for above mentioned algebras. We will describe the corresponding quantum loop algebra $U_q(D_n^{(2)})$ in our future publications.

В [87] было найдено еще одно решение квантового уравнения Янга-Бакстера. Оно соответствует аффинной алгебре $D_n^{(2)}$. Это решение имеет более сложную структуру, чем R-матрицы для вышеупомянутых алгебр. Мы опишем соответствующую алгебру квантовых циклов $U_q(D_n^{(2)})$ в наших будущих публикациях.

2.7.1 R-матрицы для квантовых алгебр петель

Пусть N - размерность фундаментального векторного представления алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ в \mathbb{C}^N . Пусть \mathbf{e}_{ij} - $N \times N$ матричная единица $(\mathbf{e}_{ij})_{k,l} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ для $1 \leq i, j, k, l \leq N$ и

$$i' = N + 1 - i, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Чтобы описать квантову R-матрицу, связанную с алгеброй $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ [87, 93, 94] мы используем параметр ξ и размерность N фундаментального векторного представления алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ приведенные в таблице

$\tilde{\mathfrak{g}}$	$A_{N-1}^{(1)}$	$B_n^{(1)}$	$C_n^{(1)}$	$D_n^{(1)}$	$A_{2n}^{(2)}$	$A_{2n-1}^{(2)}$	(2.45)
N	N	$2n + 1$	$2n$	$2n$	$2n + 1$	$2n$	
ξ	q^{-N}	q^{1-2n}	q^{-2-2n}	q^{2-2n}	$-q^{-1-2n}$	$-q^{-2n}$	

Определим также знаковую функцию

$$\text{sign}(\ell) = \begin{cases} +1, & \ell \geq 0 \\ -1, & \ell < 0 \end{cases}$$

и множество целых чисел ε_i , $i = 1, \dots, N$

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \text{sign}(n - i), & \text{for } \tilde{\mathfrak{g}} = C_n^{(1)}, \\ 1, & \text{for all other cases.} \end{cases}$$

Для $\tilde{\mathfrak{g}} = A_{N-1}^{(1)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$ и $A_{N-1}^{(2)}$ нам нужно отображение \bar{i} для $i = 1, \dots, N$

$$\bar{i} = \begin{cases} \left(\frac{N}{2} - \frac{1}{2}, \frac{N}{2} - \frac{3}{2}, \dots, -\frac{N}{2} + \frac{3}{2}, -\frac{N}{2} + \frac{1}{2} \right), & \text{for } \tilde{\mathfrak{g}} = A_{N-1}^{(1)}, \\ \left(n - \frac{1}{2}, \dots, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots, -n + \frac{1}{2} \right), & \text{for } \tilde{\mathfrak{g}} = B_n^{(1)}, A_{2n}^{(2)}, \\ (n, n - 1, \dots, 1, -1, \dots, -n), & \text{for } \tilde{\mathfrak{g}} = C_n^{(1)}, \\ (n - 1, \dots, 1, 0, 0, -1, \dots, -n + 1), & \text{for } \tilde{\mathfrak{g}} = D_n^{(1)}, A_{2n-1}^{(2)}. \end{cases} \quad (2.46)$$

Отметим, что для любой $\tilde{\mathfrak{g}}$ мы имеем

$$\bar{i} + \bar{i}' = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.47)$$

Мы вводим функции

$$f(u, v) = \frac{qu - q^{-1}v}{u - v}, \quad g(u, v) = \frac{(q - q^{-1})u}{u - v}, \quad \tilde{g}(u, v) = \frac{(q - q^{-1})v}{u - v}$$

произвольных комплексных чисел u и v , которые мы называем спектральными параметрами.

Определим матрицы $\mathbb{P}(u, v)$ и $\mathbb{Q}(u, v)$, действующие в тензорном произведении $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N$

$$\mathbb{P}(u, v) = \sum_{1 \leq i, j \leq N} \mathfrak{p}_{ij}(u, v) \mathbf{e}_{ij} \otimes \mathbf{e}_{ji}, \quad (2.48)$$

$$\mathbb{Q}(u, v) = \sum_{1 \leq i, j \leq N} \mathfrak{q}_{ij}(u, v) \mathbf{e}_{i'j'} \otimes \mathbf{e}_{ij}, \quad (2.49)$$

где рациональные функции $\mathfrak{p}_{ij}(u, v)$ и $\mathfrak{q}_{ij}(u, v)$ определены следующим образом

$$\mathfrak{p}_{ij}(u, v) = \begin{cases} f(u, v) - 1, & i = j, \\ g(u, v), & i < j, \\ \tilde{g}(u, v), & i > j, \end{cases}$$

$$\mathfrak{q}_{ij}(u, v) = \varepsilon_i \varepsilon_j q^{\bar{i} - \bar{j}} \begin{cases} f(v\xi, u) - 1, & i = j, \quad i \neq i', \\ f(v\xi, u) - 1 - \alpha_q, & i = j, \quad i = i', \\ g(v\xi, u), & i < j, \\ \tilde{g}(v\xi, u), & i > j, \end{cases} \quad (2.50)$$

и

$$\alpha_q = (q^{1/2} - q^{-1/2})^2.$$

Можно проверить, что функции (2.50) обладают свойством

$$q_{ij}(u, v) = q_{j'i'}(u, v). \quad (2.51)$$

Пусть

$$\mathbb{I} = \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_{ii}$$

единичная матрица в \mathbb{C}^N .

Квантовая тригонометрическая R-матрица, действующая в тензорном произведении двух фундаментальных векторных представлений $\tilde{\mathfrak{g}}$ [87] для алгебры $\tilde{\mathfrak{g}} = A_{N-1}^{(1)}$

$$\mathbb{R}(u, v) = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{P}(u, v) \quad (2.52)$$

и для алгебр $\tilde{\mathfrak{g}} = B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$ и $A_{N-1}^{(2)}$

$$\mathbb{R}(u, v) = \mathbb{R}(u, v) + \mathbb{Q}(u, v) = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{P}(u, v) + \mathbb{Q}(u, v). \quad (2.53)$$

2.7.2 Дополнительные замечания

Мы исследуем квантовые алгебры петель для всех классических серий (кроме $U_q(D_n^{(2)})$), связанных с квантовыми R-матрицами, найденными в [87]. Результаты, полученные в данной работе, могут быть использованы для исследования пространства состояний квантово интегрируемых моделей с различными симметриями высших рангов. Это исследование может быть выполнено в рамках подхода к интегрируемым моделям, предложенного и разработанного в [89, 95, 96]. В этом методе состояния интегрируемых моделей выражаются через генераторы тока квантовых петлевых алгебр. Для исследования различных физических величин в таких моделях, таких как скалярные произведения состояний и форм-факторы локальных операторов, нет необходимости иметь явную форму состояний в терминах генераторов тока. Обычно достаточно получить действие элементов матрицы монодромии на эти состояния. Этот подход назывался *метод нулевых мод* и уже использовался в [97, 98, 99] для исследования пространства состояний в квантово интегрируемых моделях, связанных с янгианным рациональными \mathfrak{g} -инвариантными R-матрицами. Используя результаты настоящей работы, мы планируем развить этот метод для интегрируемых моделей, связанных с $U_q(\mathfrak{g})$ -инвариантных R-матриц.

2.8 Электрические алгебры Ли и электрические сети

Целью данного проекта является развитие теории полной положительности электрических групп Ли $G^{(a)}$ введенных в работе [124]. Наш основной инструмент - это вложение G^a в G , где G - комплексная полупростая (или группа Каца-Мууди) того же типа, что и $G^{(a)}$. Таким образом, $G^{(a)}$, $a \in \mathbb{C}$, становится семейством подгрупп в G таких, что $G^{(0)} = U$ - максимальная унитарная подгруппа, поэтому наша теория полной положительности является деформацией того, что для U разработано в [103]. Точно так же мы воспользуемся факторизацией элементов G^a на элементарные множители вида

$$x_i(t) = \begin{pmatrix} 1 + at & t \\ -a^2t & 1 - at \end{pmatrix}$$

который унипотентен при $a = 0$ и принадлежит i -я копия $SL_2(\mathbb{C})$ в G . Как это ни парадоксально для полной положительности лучшие значения параметра a являются чисто воображаемыми из-за замечательного соотношения

$$x_i(t_1)x_{i+1}(t_2)x_i(t_3) = x_{i+1}(t'_1)x_i(t'_2)x_{i+1}(t'_3)$$

куда

$$t'_1 = \frac{t_2 t_3}{t_1 + t_3 - a^2 t_1 t_2 t_3}, t'_2 = t_1 + t_3 - a^2 t_1 t_2 t_3, t'_3 = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_3 - a^2 t_1 t_2 t_3}$$

обнаружен в [109] в G^3 и использован при изучении электрических сетей в [120]. А именно, если $t_i \in \mathbb{R}_{>0}$, $i = 1, 2, 3$ и $a \in \mathbb{R}\sqrt{-1}$, то $t'_i \in \mathbb{R}_{>0}$, $i = 1, 2, 3$.

Для такого a мы определяем полностью неотрицательное множество $G_{\geq 0}^a$ как подмоноид G^a , порожденный всеми $x_i(t)$ для $i \in I$ и $t \in \mathbb{R}_{>0}$.

Теорема 2.8.1. *Этот моноид связан в G^a тогда и только тогда, когда $a \in \mathbb{R}\sqrt{-1}$. В этом случае $G_{\geq 0}^a$ - это многообразие с углами, внутренность которого диффеоморфна открытому шару.*

Обозначим через $G_{>0}^a$ внутренность $G_{\geq 0}^a$.

Следующий результат уточняет приведенную выше теорему. Для любой последовательности $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m)$ определим отображение $x_{\mathbf{i}} : \mathbb{C}^m \rightarrow G^a$ по формуле

$$x_{\mathbf{i}}(t_1, \dots, t_m) = x_{i_1}(t_1) \dots x_{i_m}(t_m)$$

Теорема 2.8.2. *Пусть \mathbf{i} - сокращенное слово для w_0 , тогда*

(a) *Ограничение $x_{\mathbf{i}}$ на $(\mathbb{C}^\times)^m$ является открытым вложением комплексных алгебраических многообразий $(\mathbb{C}^\times)^m \hookrightarrow G^a$ для любого $a \in \mathbb{C}$.*

(b) *$G_{>0}^a = x_{\mathbf{i}}(\mathbb{R}_{>0}^m)$ для любого $a \in \mathbb{R}_{>0}\sqrt{-1}$.*

Пусть $A = (a_{ij})$ - (обобщенная) матрица Каргана $I \times I$ и пусть $g_A = \langle e_i, f_i, i \in I \rangle$ - соответствующая алгебра Ли Каца-Мути. Для любого массива $\mathbf{a} = (a_i, i \in I) \in \mathbb{C}^I$ пусть $g^{(\mathbf{a})}$ - подалгебра Ли в g , порожденная

$$u_i := e_i + a_i h_i - a_i^2 f_i$$

где мы сократили $h := [e_i, f_i]$, $i \in I$

Теорема 2.8.3. *$g^{(\mathbf{a})}$ имеет следующее представление*

$$(ad u_i)^{1-a_{ij}}(u_j) = -2\delta_{a_{ij}, -1} a_{ji} a_i a_j u_i$$

для всех различных $i, j \in I$ (в частности, $g^{(\mathbf{a})}$ \mathbb{Z}_2 -градуирован).

Приведем набросок доказательства. Действительно, пусть $i \neq j$. потом

$$\begin{aligned} [u_i, u_j] &= [e_i + a_i h_i - a_i^2 f_i, e_j + a_j h_j - a_j^2 f_j] = e_{ij} + a_i^2 a_j^2 f_{ij} \\ &\quad - a_j a_{ji} e_i + a_i a_{ij} e_j + a_j^2 a_i a_{ij} f_j - a_i^2 a_j a_{ji} f_i \end{aligned}$$

где мы сократили $e_{ij} = [e_i, e_j]$, $f_{ij} = [f_i, f_j]$. потом

$$[u_i, [u_i, u_j]] = [e_i + a_i h_i - a_i^2 f_i, [u_i, u_j]]$$

У нас есть

$$\begin{aligned} [e_i, [u_i, u_j]] &= e_{ij} + a_i^2 a_j^2 a_{ij} f_j + a_i a_{ij} e_j - a_i^2 a_j a_{ji} h_i \\ [h_i, [u_i, u_j]] &= (a_{ij} + 2)e_{ij} - a_i^2 a_j^2 (a_{ij} + 2) f_{ij} - 2a_j a_{ji} e_i + a_i a_{ij}^2 e_j - a_j^2 a_i a_{ij}^2 f_j - 2a_i^2 a_j a_{ji} f_i \\ [f_i, [u_i, u_j]] &= -a_{ij} e_j + a_i^2 a_j^2 f_{ij} + a_j a_{ji} h_i + a_j^2 a_i a_{ij} f_{ij} \end{aligned}$$

потому что $[e_i, f_{ij}] = a_{ij} f_j$, $[f_i, e_{ij}] = -a_{ij} e_j$, где мы сократили $e_{ij} = [e_i, e_j]$, $f_{ij} = [f_i, f_j]$.

Следовательно,

$$[u_i, [u_i, u_j]] = e_{ij} - a_i^4 a_j^2 f_{ij} + a_i (a_{ij} + a_{ji} + 2) (e_{ij} - a_i^2 a_j^2 f_{ij}) - 2a_i a_j a_{ji} u_i + a_i^2 (a_{ij} + a_{ji}^2) e_j$$

Ясно, что $[u_i, [u_i, u_j]] = -2a_i a_j a_{ji} u_i$, если $a_{ij} = a_{ji} = -1$.

Ясно, что если $\mathbf{a} = 0$, то $\mathfrak{g}^{(\mathbf{a})}$ является нильпотентной частью \mathfrak{g}_A .

Если мы рассматриваем все a_i как формальные параметры, то и $g^{(\mathbf{a})}$, и $U(g^{(\mathbf{a})})$ равны $\mathbb{Z}_{\geq 0}^I$ так как $\deg u_i = \deg a_i$, $i \in I$.

Гипотеза: $g^{(\mathbf{a})}$ - плоская деформация \mathfrak{n}_A .

2.8.1 Электрические сети и Лагранжевый Грассманиан

Связь между теорией электрических сетей и теорией Ли была обнаружена в поэтапной работе [124]. Позже в [125] вложение X пространства электрических сетей E_n на плоский круговой граф с n граничными точками в неотрицательную часть грассманиана $\text{Gr}(n-1, 2n)$ построен по методике, разработанной в работе А. Постникова. Кроме того, его образ $X(E_n)$ был явно идентифицирован в комбинаторных терминах, и было изучено его замыкание.

Особое значение для нас будут иметь операции присоединения ребра и шипа к графу сети. Изменение E_n при этих операциях было описано в [125] как действие некоторой группы, которую мы будем называть группой Лама $\mathcal{E}l_n$, на пространстве размерности $2n$ и, следовательно, на $\text{Gr}(n-1, 2n)$. Эта группа тесно связана с электрической группой, введенной в [124].

Другое описание E_n было получено в [120] с использованием техники теории интегрируемых моделей. Это описание обеспечивало другое вложение E_n в тот же грассманиан.

В этой статье мы построим новую параметризацию $X(E_n)$, используя идеи из работы Лам [125] и Постникова [128]. Сначала мы покажем, что $X(E_n)$ естественным образом входит в меньшее многообразие. $\text{Gr}(n-1, V) \subset \text{Gr}(n-1, 2n)$, где $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ - некоторое подпространство размерности $2n-2$. Роль этого уменьшения размерности окружающего пространства критически важна для нас, потому что далее мы покажем, что $X(E_n)$ находится в лагранжевом грассманиане $\text{LG}(n-1, V) \subset \text{Gr}(n-1, V)$. Поскольку размерность $\text{LG}(n-1, V)$ равна размерности E_n , то это является естественным объемлющим пространством для изучения электрических сетей.

Как известно из геометрической теории представлений, $\text{LG}(n-1)$ можно отождествить с $\text{Gr}(n-1, 2n-2) \cap \mathbb{P}L$, где $L \subset \bigwedge^{n-1} \mathbb{R}^{2n-2}$ - пространство фундаментального представления группы $Sp(2n-2)$, которое соответствует последней вершине Дынкина диаграмма. Его размерность равна числу Каталана C_n . В этих терминах мы будем интерпретировать описание $X(E_n)$ как сечение грассманиана $\text{Gr}(n-1, 2n)$ проективизацией подпространства H размерности, равной числу Каталана C_n , полученное в [125]. Оказывается что V инвариантно относительно действия группы $\mathcal{E}l_n$, которая пропускается через действие симплектической группы $Sp(2n-2)$. Кроме того, H является подпространством $\bigwedge^{n-1} V$ и также инвариантно относительно действия $Sp(2n-2)$. Следовательно, его проективизация становится пространством для плюкеровского вложения $\text{LG}(n-1)$ как орбиты вектора старшего веса в фундаментальном представлении группы $Sp(2n-2)$, которое соответствует последней вершине диаграммы Дынкина. Это, в частности, означает, что найденные в [125] линейные соотношения, вырезающие $X(E_n)$ из $\text{Gr}(n-1, 2n)$, определяют пространство указанного выше фундаментального представления $Sp(2n-2)$, соединяющее, таким образом, комбинаторику, обнаруженную в [125], и теорию представлений симплектической группы.

Описание $X(E_n)$, данное в [120], также можно естественным образом отождествить с подмножеством $\text{LG}(n-1)$. Наконец, мы показываем, что описания $X(E_n)$ в [120] и [125] связаны изоморфизмом объемлющего пространства \mathbb{R}^{2n-2} .

Как было указано в [119], существует поразительное сходство параметризации образа пространства E_n в $\text{Gr}(n-1, 2n)$ и параметризации пространства модели Изинга на плоском круговом графе, вложенные в ортогональный грассманиан $\text{OG}(n, 2n)$, построенные в [119]. Наши результаты могут улучшить понимание этого сходства.

2.9 Пределные формы в моделях статистической механики

2.9.1 Пределные формы в модели случайных замощений

Темой проведённых исследований является изучение явления предельной формы в моделях статистической механики. Оно представляет собой наиболее вероятное состояние в большой системе, такое, что близкие состояния распределены по Гауссову закону, а далёкие экспоненциально подавлены. В модели случайных замощений домино односвязной области Ω на квадратной решётке существование предельной формы было доказано в конце 90-х Г.Коном, Р.Кеньёном и Д.Проппом [130].

Замощением D конечной области $\Gamma \subset \mathbb{Z}^2$ называется покрытие Γ прямоугольниками 2×1 , или 1×2) так, что каждая точка покрыта единожды. На множество замощений Γ можно ввести равномерную вероятностную меру \mathbb{P}_Γ и ставить вопросы касательно типичных свойств случайных замощений.

Оказывается, что в односвязных областях есть удобная параметризация замощений D в терминах дискретных функций – функций высоты H_D . Последние определяются локально следующими правилами:

Пусть D замощение области Γ , $p_0 \in \Gamma$ - фиксированная вершина.

- $H_D(p_0) = 0$ для всех D
- если ребро $v := (p_1, p_2)$ имеет чёрный квадрат слева, то $H_D(p_2) = H_D(p_1) + 1$, если v не пересекает домино, и $H_D(p_2) = H_D(p_1) - 3$ в противном случае.
- если ребро $v := (p_1, p_2)$ имеет белый квадрат слева, то $H_D(p_2) = H_D(p_1) - 1$, если v не пересекает домино, и $H_D(p_2) = H_D(p_1) + 3$ в противном случае.

Это определение естественным образом определяет граничные условия для функций высоты на границе $\partial\Gamma := \{p \in \Gamma \mid p \sim \mathbb{Z}^2 \setminus \Gamma\}$, где \sim означает смежность вершин. Будем называть $B_D := \text{Restr } H_D \partial\Gamma$ граничной функцией высоты. Нетрудно видеть, что для односвязной области, B_D не зависит от замощения D .

В работе [130] было показано, что в случае последовательности дискретных замощаемых областей $\{\Gamma_n\}$, которые аппроксимируют в смысле расстояния по Хаусдорфу односвязный компакт Ω , имеется следующая версия закона больших чисел для замощений $\{\Gamma_n\}$:

Пусть последовательность граничных функций высоты B_n сходится к некой непрерывной Липшицевой функции на $\partial\Omega$, $B_n \rightarrow \chi$ при $n \rightarrow \infty$ после нормировки на $\frac{1}{n}$. Будем

называть такие граничные условия B_n и χ согласованными. Также введём обозначение для отнормированной функции высоты $h_n := \frac{H}{N}$. Ещё потребуется обозначения для числа замощений области Γ_n с отнормированной граничной функцией высоты B_n , $Z(\Gamma_n, B_n)$.

Тогда существует такая Липшицева функция \mathfrak{h}^* , что

$$N^{-2} \log Z(\Gamma_b) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega} \sigma(\partial_x \mathfrak{h}^*, \partial_y \mathfrak{h}^*) dx dy, \quad (2.54)$$

Более того, для всякого $c > 0$

$$\mathbb{P}_{\Gamma_n}(|h_n - \mathfrak{h}^*| > c) \leq \exp(-C_1 n c), \quad (2.55)$$

где $C_1 \in \mathbb{R}$ не зависит от c . При это \mathfrak{h}^* минимизирует функционал поверхностного натяжения \mathcal{F} с граничным условием χ . Здесь $\mathcal{F}(h) = \iint_{\Omega} \sigma(\partial_x h, \partial_y h) dx dy$, а функция σ определяется следующим образом,

$$\sigma(s, t) = -1/\pi (L(\pi p_a) + L(\pi p_b) + L(\pi p_c) + L(\pi p_d)) \quad (2.56)$$

где $L(z) = \int_0^z \log |2 \sin t| dt$, а p_a, p_b, p_c, p_d ищутся по s, t следующей системой,

$$\begin{aligned} 2(p_a - p_b) &= t, \\ 2(p_d - p_c) &= s, \\ p_a + p_b + p_c + p_d &= 1 \\ \sin(\pi p_a) \sin(\pi p_b) &= \sin(\pi p_c) \sin(\pi p_d). \end{aligned} \quad (2.57)$$

2.9.2 Постановка для многосвязных областей

В случае же многосвязной области проблемы возникают с функциями высоты, которые, как правило, имеют монодромии, а следовательно перестают быть корректно определённым объектом. Данные монодромии в этом случае фиксированны областью, и все функции высоты имеют одни и те же данные монодромии. Следствием наличия монодромии является неограниченность значений функции высоты, что сильно использовалось авторами в [130].

Вторая проблема связана с тем, что граничные условия для функции высоты могут зависеть от замощения, а именно граничные функции высоты могут отличаться на аддитивные константы на разных компонентах связности границы. Другими словами, пусть $\partial\Gamma_1, \partial\Gamma_2$ две разные компоненты связности $\partial\Gamma$, тогда могут найтись две функции высоты H^1, H^2 , такие что $\text{Restr } H^1 \partial\Gamma_1 - \text{Restr } H^2 \partial\Gamma_1 = 4k$ для $k > 0$, хотя на $\partial\Gamma_2$ $\text{Restr } H^1 \partial\Gamma_2 = \text{Restr } H^2 \partial\Gamma_2$. Выбрав по точке на каждой компоненте связности границы, $p_i \in \cup_{i=0}^g \partial\Gamma_i$, можно ввести разницу высот замощения домино D как разность $R_i := H_D(p_0) - H_D(p_i)$. Например, в случае области на рис.2.3, существуют два замощения с $R_1 = -1$ и с $R_1 = 3$.

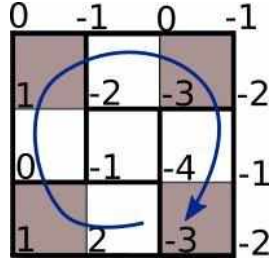


Рисунок 2.3 - Функция высоты с монодромией 4

2.9.3 Результаты

В ходе исследования было дано определение функции высоты на универсальном накрытие области Ω , $\mathcal{C}(\Omega)$. Для нормировки разницы высот было рассмотрено два ансамбля, когда фиксируется каждая разность высот и когда рассматривается произвольная разность высот. Второй случай описывает все замощения домино данной области.

Была сформулирована и доказана теорема, аналогичная результату [130], для обоих ансамблей.

Теорема 2.9.1. *Логарифм числа замощений домино области Γ_N после деления на площадь области Ω имеет следующую асимптотику при $n \rightarrow \infty$,*

$$N^{-2} \log Z(\Gamma_N, B_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sigma(\partial_x \mathfrak{h}^*, \partial_y \mathfrak{h}^*) dx dy. \quad (2.58)$$

Более того, существует такая константа $\ell(\Omega) > 0$ что для всякого $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}_n(\|H_n - \mathfrak{h}^*\|_{\infty} > \delta) \leq 12|\Omega|N^2 \exp\left(-\frac{n\delta^2}{128\ell}\right). \quad (2.59)$$

Кроме того, разность высот R_n сходится к типичному значению r^* $\frac{1}{n}R_n \xrightarrow{\mathbb{P}_n} r^*$ при $n \rightarrow \infty$.

Для замощений с фиксированной разницей высот выполняется аналогичная теорема. Пусть отнормированная разность высот стабилизируется при $n \rightarrow \infty$, $R_n \rightarrow r \in \mathbb{R}^g$ и $\delta > 0$, тогда,

Теорема 2.9.2. *Существует Липшицева функция \mathfrak{h}_r^* на $\mathcal{C}(\Omega)$, такая что в пределе $N \rightarrow \infty$*

$$n^{-2} \log Z(\Gamma_n, B_n, R_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega} \sigma(\partial_x \mathfrak{h}_r^*, \partial_y \mathfrak{h}_r^*) dx dy. \quad (2.60)$$

Более того, найдётся $\ell(\Omega) > 0$, так что

$$\mathbb{P}_n^R(\|H_n - \mathfrak{h}_r^*\|_{\infty} > \delta) \leq 12|\Omega|n^2 \exp\left(-\frac{n\delta^2}{128\ell}\right). \quad (2.61)$$

3. Геометрическая теория представлений

3.1 Мираболическая эквивалентность Сатаке

3.1.1 Напоминание о геометрической эквивалентности Сатаке

Положим $\mathbf{F} = \mathbb{C}((t)) \supset \mathbb{C}[t] = \mathbf{O}$. Мы фиксируем целое число $N \geq 1$, берём $\mathbf{G}_{\mathbf{F}} = \mathrm{GL}(N, \mathbf{F})$, соотв. $\mathbf{G}_{\mathbf{O}} = \mathrm{GL}(N, \mathbf{O})$, и обозначаем $\mathrm{Gr} = \mathbf{G}_{\mathbf{F}}/\mathbf{G}_{\mathbf{O}}$ аффинный Грассманниан группы GL_N . Это инд-схема, снабжённая естественным действием группы $\mathbf{G}_{\mathbf{O}} \rtimes \mathbb{C}^\times$, где \mathbb{C}^\times действует вращением петли. Пусть $D_{\mathbf{G}_{\mathbf{O}}}(\mathrm{Gr})$, соотв. $D_{\mathbf{G}_{\mathbf{O}} \rtimes \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr})$, обозначает $\mathbf{G}_{\mathbf{O}}$ -эквивариантную, соотв. $\mathbf{G}_{\mathbf{O}} \rtimes \mathbb{C}^\times$ -эквивариантную, конструктивную производную категорию Грассманниана Gr .¹ Это моноидальная категория с операцией свёртки (которая совпадает со слиянием).

Пусть \mathfrak{gl}_N обозначает комплексное векторное пространство $N \times N$ -матриц, и пусть GL_N действует на \mathfrak{gl}_N сопряжениями. Будем обозначать $\mathrm{Sym}^\bullet(\mathfrak{gl}_N[-2])$ симметрическую алгебру \mathfrak{gl}_N , рассматриваемую как dg-алгебра, образующие \mathfrak{gl}_N которой живут в степени 2, а дифференциал нулевой. Пусть $D_{\mathrm{perf}}^{\mathrm{GL}_N}(\mathrm{Sym}^\bullet(\mathfrak{gl}_N[-2]))$ обозначает триангулированную категорию совершенных GL_N -эквивариантных dg-модулей над $\mathrm{Sym}^\bullet(\mathfrak{gl}_N[-2])$, локализованную по квазиизоморфизмам. Тензорное произведение dg-модулей снабжает эту категорию моноидальной структурой. Один из вариантов *производной эквивалентности Сатаке*, доказанный Безрукавниковым-Финкельбергом, утверждает наличие эквивалентности $D_{\mathrm{perf}}^{\mathrm{GL}_N}(\mathrm{Sym}^\bullet(\mathfrak{gl}_N[-2])) \xrightarrow{\sim} D_{\mathbf{G}_{\mathbf{O}}}(\mathrm{Gr})$ триангулированных моноидальных категорий.

Нам будет удобно переформулировать этот результат следующим образом. Пусть $T^*\mathrm{GL}_N[2]$ обозначает сдвинутое кокасательное расслоение GL_N , рассматриваемое как dg-схема с нулевым дифференциалом. Действие GL_N на себе левыми и правыми сдвигами индуцирует $\mathrm{GL}_N \times \mathrm{GL}_N$ -действие на $T^*\mathrm{GL}_N[2]$. Пусть $D_{\mathrm{perf}}^{\mathrm{GL}_N \times \mathrm{GL}_N}(T^*\mathrm{GL}_N[2])$ обозначает триангулированную категорию $\mathrm{GL}_N \times \mathrm{GL}_N$ -эквивариантных совершенных комплексов $\mathcal{O}_{T^*\mathrm{GL}_N[2]}$ -модулей на $T^*\mathrm{GL}_N[2]$. Слой $T^*\mathrm{GL}_N[2]$ над $1 \in \mathrm{GL}_N$ можно отождествить с $(\mathfrak{gl}_N[-2])^* = \mathfrak{gl}_N^*[2]$. Ограничение на этот слой индуцирует моноидальную эквивалентность $D_{\mathrm{perf}}^{\mathrm{GL}_N \times \mathrm{GL}_N}(T^*\mathrm{GL}_N[2]) \xrightarrow{\sim} D_{\mathrm{perf}}^{\mathrm{GL}_N}(\mathrm{Sym}^\bullet(\mathfrak{gl}_N[-2]))$, где категория справа отождествляется с триангулированной категорией GL_N -эквивариантных совершенных комплексов на $(\mathfrak{gl}_N[-2])^*$. Таким образом, производную эквивалентность Сатаке можно интерпретировать как эквивалентность $D_{\mathrm{perf}}^{\mathrm{GL}_N \times \mathrm{GL}_N}(T^*\mathrm{GL}_N[2]) \xrightarrow{\sim} D_{\mathbf{G}_{\mathbf{O}}}(\mathrm{Gr})$.

У этой эквивалентности есть и квантовый аналог, где категория $D_{\mathrm{perf}}^{\mathrm{GL}_N \times \mathrm{GL}_N}(T^*\mathrm{GL}_N[2])$ заменяется подобающей на асимптотические сдвинутые слабо эквивариантные D -модули

¹В этом отчёте мы рассматриваем пучки с комплексными коэффициентами.

на GL_N , а категория $D_{\mathbf{G}_O}(\mathrm{Gr})$ заменяется на $D_{\mathbf{G}_O \times \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr})$.

3.1.2 Мираболическая категория Сатаке

Нас интересует мираболический аналог вышеописанной ситуации. Фиксируем N -мерное векторное пространство V и положим $\mathbf{V} = V \otimes \mathbf{F}$, соотв. $\mathbf{V}_0 = V \otimes \mathbf{O}$, и $\overset{\circ}{\mathbf{V}} = \mathbf{V} \setminus \{0\}$. Отождествим $\mathbf{G} = GL_N$ с $GL(V)$, так что $\mathbf{G}_{\mathbf{F}}$ действует на \mathbf{V} , а \mathbf{G}_O является стабилизатором \mathbf{V}_0 . *Мираболический аффинный Грассманиан* определяется как $\mathrm{Gr} \times \mathbf{V}$. Группа \mathbf{G}_O действует на $\mathrm{Gr} \times \mathbf{V}$ диагонально. Орбиты \mathbf{G}_O в $\mathrm{Gr} \times \overset{\circ}{\mathbf{V}}$, в отличие от случая \mathbf{G}_O -орбит в Gr , не конечномерны. Эвристически, эти орбиты полубесконечномерны в том смысле, что ‘замыкание’ такой орбиты проецируется на (конечномерное) многообразие Шуберта в Gr и на решётку в \mathbf{V} .

Ввиду этого обстоятельства, определение правильного аналога эквивариантной производной категории Сатаке требует известной аккуратности. Согласно нашему определению, объект этой категории сосредоточен на произведении конечномерного многообразия Шуберта в Gr и решётки в тэйтовском векторном пространстве \mathbf{V} ; более того, этот объект поднят с конечномерного фактора этой решётки. Согласно выбору одного из трёх вариантов подъёма (!-,*-, or !*-), мы получаем три варианта $D_{! \mathbf{G}_O}(\mathrm{Gr} \times \mathbf{V})$, $D_{* \mathbf{G}_O}(\mathrm{Gr} \times \mathbf{V})$, $D_{! * \mathbf{G}_O}(\mathrm{Gr} \times \mathbf{V})$ \mathbf{G}_O -эквивариантной производной категории на $\mathrm{Gr} \times \mathbf{V}$. Эти категории связано друг с другом подходящими ренормализационными эквивалентностями.

Мы снабжаем эти категории моноидальными структурами, заданными различными вариантами операций свёртки. Свёртка вдоль Грассманиана (первого сомножителя $\mathrm{Gr} \times \mathbf{V}$) определяется, как и для обычной категории Сатаке. Свёртка вдоль второго сомножителя зависит от выбора категории. А именно, операция $\overset{!}{\otimes}$ на $D_{! \mathbf{G}_O}(\mathrm{Gr} \times \mathbf{V})$ использует !-тензорное произведение конструктивных пучков на \mathbf{V} . Операция свёртки $*$ на $D_{* \mathbf{G}_O}(\mathrm{Gr} \times \mathbf{V})$ *-прямой образ вдоль $+: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ (отображение сложения). Эти два варианта свёртки связаны преобразованием Фурье вдоль \mathbf{V} . Наконец, мы определяем моноидальную структуру \star на $D_{! * \mathbf{G}_O}(\mathrm{Gr} \times \mathbf{V})$ через слияние на мираболическом аналоге Грассманиана Бейлинсона-Дринфельда.

Все вышеперечисленные категории имеют естественные аналоги, использующие действие \mathbb{C}^\times на Gr вращением петли. Получаются $\mathbb{C}[\hbar]$ -линейные категории, где $\mathbb{C}[\hbar] = H_{\mathbb{C}^\times}^\bullet(\mathrm{pt})$. Таким образом, имеется категория $D_{! \mathbf{G}_O \times \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr} \times \mathbf{V})$, соотв. $D_{* \mathbf{G}_O \times \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr} \times \mathbf{V})$, снабжённая аналогично определённой моноидальной структурой $\overset{!}{\otimes}$, соотв. $*$. Операция слияния \star на $D_{! * \mathbf{G}_O}(\mathrm{Gr} \times \mathbf{V})$ не имеет $\mathbf{G}_O \times \mathbb{C}^\times$ -эквивариантного аналога.

3.1.3 Мираболическая эквивалентность Сатаке

Категория на ‘правой стороне’ мираболической эквивалентности Сатаке является подобающей триангулированной категорией “эквивариантных асимптотических сдвинутых D -модулей” на векторном пространстве \mathfrak{gl}_N $N \times N$ -матриц. Более формально, мы рассматриваем $\mathbb{C}[\hbar]$ -алгебру \mathfrak{D}^\bullet , градуированный вариант алгебры дифференциальных операторов на \mathfrak{gl}_N (где $\deg \hbar = 2$). Действие GL_N на \mathfrak{gl}_N левым и правым умножением индуцирует $\mathrm{GL}_N \times \mathrm{GL}_N$ -действие на \mathfrak{D}^\bullet . Интересующая нас категория определяется как производная категория слабо $\mathrm{GL}_N \times \mathrm{GL}_N$ -эквивариантных совершенных dg -модулей над \mathfrak{D}^\bullet , где \mathfrak{D}^\bullet рассматривается как dg -алгебра с нулевым дифференциалом. Аналогично конструктивной стороне, мы в действительности рассматриваем три различных варианта $D_{\mathrm{perf}}^{\mathrm{GL}_N \times \mathrm{GL}_N}(\mathfrak{D}_{1,1}^\bullet)$, соотв. $D_{\mathrm{perf}}^{\mathrm{GL}_N \times \mathrm{GL}_N}(\mathfrak{D}_{0,2}^\bullet)$ и $D_{\mathrm{perf}}^{\mathrm{GL}_N \times \mathrm{GL}_N}(\mathfrak{D}_{2,0}^\bullet)$, этой категории, отвечающим трём различным выборам градуировки на нашей алгебре. Алгебра асимптотических дифференциальных операторов специализируется при $\hbar = 0$ в алгебру $\mathbb{C}[T^*\mathfrak{gl}_N]$. Мы обозначаем специализацию $\mathfrak{D}_{i,2-i}^\bullet$ при $\hbar = 0$ символом $\mathfrak{S}_{i,2-i}^\bullet$. Соответственно, вышеприведённые $\mathbb{C}[\hbar]$ -линейные категории специализируются при $\hbar = 0$ в различные варианты производной категории $\mathrm{GL}_N \times \mathrm{GL}_N$ -эквивариантных когерентных пучков на сдвинутом кокасательном расслоении $T^*\mathfrak{gl}_N$.

Далее, мы снабжаем эти категории моноидальными структурами. Моноидальная структура $*$ на $D_{\mathrm{perf}}^{\mathrm{GL}_N \times \mathrm{GL}_N}(\mathfrak{D}_{2,0}^\bullet)$ определяется как свёртка D -модулей, связанная с отображением $\mathfrak{gl}_N \times \mathfrak{gl}_N \rightarrow \mathfrak{gl}_N$ матричного умножения. Моноидальная структура $*$ на $D_{\mathrm{perf}}^{\mathrm{GL}_N \times \mathrm{GL}_N}(\mathfrak{D}_{0,2}^\bullet)$ определяется как $F^{-1} \circ (*^A) \circ (F \times F)$, где F обозначает преобразование Фурье на D -модулях. Все эти моноидальные структуры имеют квазиклассические пределы при $\hbar = 0$, определённые как свёртки когерентных пучков, определённые при помощи подобающих лагранжевых соответствий. Наконец, тензорное произведение когерентных пучков, т.е. функтор $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \mapsto \mathcal{M} \otimes_{\mathfrak{S}_{1,1}^\bullet} \mathcal{M}'$, тоже задаёт моноидальную структуру на $D_{\mathrm{perf}}^{\mathrm{GL}_N \times \mathrm{GL}_N}(\mathfrak{S}_{1,1}^\bullet)$. Эта моноидальная структура не имеет аналога для D -модулей, т.е. для $\hbar \neq 0$.

Один из главных наших результатов состоит в наличии следующих эквивалентностей триангулированных моноидальных категорий, называемых мираболическими эквивалентностями Сатаке:

$$\begin{aligned} (D_{\mathrm{perf}}^{\mathrm{GL}_N \times \mathrm{GL}_N}(\mathfrak{D}_{2,0}^\bullet), *) &\xrightarrow[\cong]{\Phi_{\hbar}^{2,0}} (D_{! \mathbf{G}_O \times \mathbb{C} \times (\mathrm{Gr} \times \mathbf{V})}(\mathfrak{D}_{2,0}^\bullet), *); \\ (D_{\mathrm{perf}}^{\mathrm{GL}_N \times \mathrm{GL}_N}(\mathfrak{D}_{0,2}^\bullet), *) &\xrightarrow[\cong]{\Phi_{\hbar}^{0,2}} (D_{* \mathbf{G}_O \times \mathbb{C} \times (\mathrm{Gr} \times \mathbf{V})}(\mathfrak{D}_{0,2}^\bullet), *); \\ (D_{\mathrm{perf}}^{\mathrm{GL}_N \times \mathrm{GL}_N}(\mathfrak{S}_{1,1}^\bullet), \otimes_{\mathfrak{S}_{1,1}^\bullet}) &\xrightarrow[\cong]{\Phi_{\hbar}^{1,1}} (D_{! * \mathbf{G}_O}(\mathrm{Gr} \times \mathbf{V}), *). \end{aligned}$$

Далее, триангулированная категория $D_{! * \mathbf{G}_O}(\mathrm{Gr} \times \mathbf{V})$ эквивалентна ограниченной производной категории абелевой категории $\mathrm{Perv}_{\mathbf{G}_O}(\mathrm{Gr} \times \mathbf{V})$ \mathbf{G}_O -эквивариантных извращённых

пучков на $\mathrm{Gr} \times \mathbf{V}$, сердцевине извращённой t -структуры на $D_{!*}\mathbf{G}_\mathbf{O}(\mathrm{Gr} \times \mathbf{V})$.

Аналог последнего утверждения в случае классической категории Сатаке неверен: триангулированная категория $D_{!*}\mathbf{G}_\mathbf{O}(\mathrm{Gr})$ не эквивалентна производной категории $\mathrm{Perv}_{\mathbf{G}_\mathbf{O}}(\mathrm{Gr})$ (полупростой абелевой категории).

Можно думать о группе GL_N как Зариски-открытом подмножестве векторного пространства \mathfrak{gl}_N всех $N \times N$ -матриц. Тогда открытому вложению $\mathrm{GL}_N \hookrightarrow \mathfrak{gl}_N$ отвечает функтор ограничения на D -модулях. Оказывается, что аналог этого функтора для производных эквивариантных категорий — это некий вариант ограничения на ‘нулевое сечение’ $\mathrm{Gr} \times \{0\} \hookrightarrow \mathrm{Gr} \times \mathbf{V}$. Иначе говоря, есть естественный функтор $D_{\mathbf{G}_\mathbf{O}}(\mathrm{Gr} \times \mathbf{V}) \rightarrow D_{\mathbf{G}_\mathbf{O}}(\mathrm{Gr})$. Мы доказываем, что этот функтор реализует производную категорию Сатаке $D_{\mathbf{G}_\mathbf{O}}(\mathrm{Gr})$ как локализацию мираболической производной категории Сатаке $D_{\mathbf{G}_\mathbf{O}}(\mathrm{Gr} \times \mathbf{V})$. Более того, мираболическая эквивалентность Сатаке совместима с классической эквивалентностью Сатаке в том смысле, что следующая диаграмма функторов коммутует:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{asymptotic equivariant} & \xrightarrow[\cong]{\text{mirabolic derived Satake}} & D_{\mathbf{G}_\mathbf{O} \times \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr} \times \mathbf{V}) \\
 D\text{-modules on } \mathfrak{gl}_N & & \downarrow \text{localization} \\
 \downarrow \text{restriction} & & \\
 \text{asymptotic equivariant} & \xrightarrow[\cong]{\text{derived Satake}} & D_{\mathbf{G}_\mathbf{O} \times \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}). \\
 D\text{-modules on } \mathrm{GL}_N & &
 \end{array}$$

3.1.4 Гипотетический Ивахори-эквивариантный вариант

Пусть $\mathbf{I} \subset \mathbf{G}_\mathbf{O}$ обозначает подгруппу Ивахори, а $\mathbf{Fl} := \mathbf{G}_\mathbf{F}/\mathbf{I}$ — аффинное многообразие флагов. Безрукавников доказал эквивалентность $D_{\mathbf{I}}(\mathbf{Fl})$, \mathbf{I} -эквивариантной конструктивной производной категории \mathbf{Fl} , и производной категории GL_N -эквивариантных когерентных пучков на подобающем dg -варианте многообразия Стейнберга. Мы ожидаем, что у эквивалентности Безрукавникова есть мираболический аналог.

Чтобы сформулировать его, фиксируем пару V_1, V_2 N -мерных векторных пространств, и пусть $\mathcal{F}l_i$, $i = 1, 2$ обозначает пространство полных флагов в V_i . Далее, рассмотрим dg -схему с нулевым дифференциалом

$$H_{\mathrm{mir}} := \mathrm{Hom}(V_1, V_2)[1] \times \mathrm{Hom}(V_2, V_1)[1] \times \mathcal{F}l_1 \times \mathcal{F}l_2.^2$$

Будем обозначать A , соотв. B , элемент $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)[1]$, соотв. $\mathrm{Hom}(V_2, V_1)[1]$, а $F_i = (F_i^{(1)} \subset F_i^{(2)} \subset \dots \subset F_i^{(N)} = V_i)$ элемент $\mathcal{F}l_i$.

²Мы рассматриваем $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ и $\mathrm{Hom}(V_2, V_1)$ как *нечётные* векторные пространства, так что функции на $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)[1] \times \mathrm{Hom}(V_2, V_1)[1]$ (без учёта градуировки) образуют действительно симметрическую (бесконечномерную) алгебру, а не внешнюю.

Определим *мираболическую схему Стейнберга* как dg-подсхему St_{mir} dg-схемы \mathbf{H}_{mir} , высеченную уравнениями, говорящими, что флаг F_2 инвариантен относительно композиции AB , а флаг F_1 инвариантен относительно композиции BA . Таким образом, мираболическая схема Стейнберга — это сдвинутое многообразие четвёрок:

$$\text{St}_{\text{mir}} = \{(A, B, F_1, F_2) \in \mathbf{H}_{\text{mir}} \mid AB(F_2^{(j)}) \subseteq F_2^{(j)} \ \& \ BA(F_1^{(j)}) \subseteq F_1^{(j)}, \ \forall j \in [1, N]\}.$$

Пусть $D_{\mathbf{I}}(\mathbf{F1} \times \mathbf{V})$ обозначает \mathbf{I} -эквивариантную конструктивную производную категорию пространства $\mathbf{F1} \times \mathbf{V}$. Мы предлагаем следующую гипотезу: есть эквивалентность триангулированных категорий

$$D^{\text{GL}(V_1) \times \text{GL}(V_2)} \text{Coh}(\text{St}_{\text{mir}}) \cong D_{\mathbf{I}}(\mathbf{F1} \times \mathbf{V}).$$

Эта гипотеза объяснила бы, в частности, возникновение многочленов Костки-Шоджи в двух разных задачах. С одной стороны, Гинзбург, Травкин и Финкельберг доказали, что эти многочлены являются многочленами Пуанкаре слоёв $\mathbf{G}_{\mathbf{O}}$ -эквивариантных пучков Горески-Макферсона на мираболическом аффинном Грассманниане. С другой стороны, Ионов и Финкельберг доказали, что эти же многочлены являются многочленами Пуанкаре градуированных пространств кратностей естественных $\text{GL}_N \times \text{GL}_N$ -модулей глобальных сечений линейных расслоений на диаграмме свёртки циклического \tilde{A}_1 -колчана.

3.1.5 Эквивалентность Сатаке для некоторых супергрупп Ли

Рассмотрим супералгебру Ли $\mathfrak{gl}(M|N)$ эндоморфизмов векторного суперпространства $\mathbb{C}^{M|N}$, и соответствующую супергруппу Ли $\text{GL}(M|N) = \text{Aut}(\mathbb{C}^{M|N})$. Рассмотрим также вырожденный вариант $\underline{\mathfrak{gl}}(M|N)$, где суперкоммутатор чётных элементов (с чётными же или же с нечётными) такой же, как в $\mathfrak{gl}(M|N)$, а суперкоммутатор любых нечётных элементов полагается равным нулю. Другими словами, чётная часть $\underline{\mathfrak{gl}}(M|N)_{\bar{0}} = \mathfrak{gl}_M \oplus \mathfrak{gl}_N$ естественно действует на нечётной $\underline{\mathfrak{gl}}(M|N)_{\bar{1}} = \text{Hom}(\mathbb{C}^M, \mathbb{C}^N) \oplus \text{Hom}(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^M)$, но суперкоммутатор $\underline{\mathfrak{gl}}(M|N)_{\bar{1}} \times \underline{\mathfrak{gl}}(M|N)_{\bar{1}} \rightarrow \underline{\mathfrak{gl}}(M|N)_{\bar{0}}$ обнуляется.

Категория конечномерных представлений соответствующей супергруппы $\underline{\text{GL}}(M|N)$ (в векторных суперпространствах) обозначается $\text{Rep}(\underline{\text{GL}}(M|N))$, а её ограниченная производная категория обозначается $SD(\underline{\text{GL}}(M|N))$.

Имеется Кошулева эквивалентность $\varkappa: SD(\underline{\text{GL}}(N|N)) \xrightarrow{\sim} SD_{\text{perf}}^{\text{GL}_N \times \text{GL}_N}(\mathfrak{S}_{1,1}^{\bullet})$ (эквивариантные совершенные dg-супермодули над dg-супералгеброй $\mathfrak{S}_{1,1}^{\bullet}$). Она переводит обычное тензорное произведение $\underline{\text{GL}}(N|N)$ -модулей в тензорное произведение $\otimes_{\mathfrak{S}_{1,1}^{\bullet}}$ на $SD_{\text{perf}}^{\text{GL}_N \times \text{GL}_N}(\mathfrak{S}_{1,1}^{\bullet})$. Компонируя Кошулеву эквивалентность \varkappa с мираболической эквивалентностью Сатаке $\Phi^{1,1}: SD_{\text{perf}}^{\text{GL}_N \times \text{GL}_N}(\mathfrak{S}_{1,1}^{\bullet}) \xrightarrow{\sim} SD_{!*\mathbf{G}_{\mathbf{O}}}(\text{Gr} \times \mathbf{V})$ (конструктивные пучки супервекторных пространств), мы получаем супер эквивалентность Сатаке

$SD(\underline{\mathrm{GL}}(N|N)) \xrightarrow{\sim} SD_{!*_{\mathbf{G}_O}}(\mathrm{Gr} \times \mathbf{V})$, которая переводит обычное тензорное произведение $\underline{\mathrm{GL}}(N|N)$ -модулей в слияние на $SD_{!*_{\mathbf{G}_O}}(\mathrm{Gr} \times \mathbf{V})$. Более того, эта производная эквивалентность точна относительно тавтологической t -структуры на $SD(\underline{\mathrm{GL}}(N|N))$ с сердцевиной $\mathrm{Rep}(\underline{\mathrm{GL}}(N|N))$ и извращённой t -структуры на $SD_{!*_{\mathbf{G}_O}}(\mathrm{Gr} \times \mathbf{V})$ with the heart $SPerv_{\mathbf{G}_O}(\mathrm{Gr} \times \mathbf{V})$.

Аналогично, мы строим эквивалентности

$$SD(\underline{\mathrm{GL}}(N-1|N)) \xrightarrow[\overline{\mathfrak{F}}]{\simeq} SD_{\mathrm{perf}}^{\mathrm{GL}_{N-1} \times \mathrm{GL}_N}(\overline{\mathfrak{S}}_{1,1}^\bullet) \xrightarrow[\overline{\mathfrak{F}}]{\simeq} SD_{\mathrm{GL}(N-1, \mathbf{O})}(\mathrm{Gr}_{\mathrm{GL}_N}),$$

где $\overline{\mathfrak{S}}_{1,1}^\bullet = \mathrm{Sym}^\bullet(\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{N-1}, \mathbb{C}^N)[-1] \oplus \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^{N-1})[-1])$.³ Композиция опять t -точна относительно тавтологической t -структуры на $SD(\underline{\mathrm{GL}}(N-1|N))$ with the heart $\mathrm{Rep}(\underline{\mathrm{GL}}(N-1|N))$ и извращённой t -структуры на $SD_{\mathrm{GL}(N-1, \mathbf{O})}(\mathrm{Gr}_{\mathrm{GL}_N})$ с сердцевиной

$SPerv_{\mathrm{GL}(N-1, \mathbf{O})}(\mathrm{Gr}_{\mathrm{GL}_N})$. Более того, композиция переводит обычное тензорное произведение $\underline{\mathrm{GL}}(N-1|N)$ -модулей в слияние на $SPerv_{\mathrm{GL}(N-1, \mathbf{O})}(\mathrm{Gr}_{\mathrm{GL}_N})$. Аналогично ситуации §3.1.3, функтор $\overline{\mathfrak{F}}$ может быть поднят до эквивалентности

$\overline{\mathfrak{F}}_{\hbar}: SD_{\mathrm{perf}}^{\mathrm{GL}_{N-1} \times \mathrm{GL}_N}(\overline{\mathfrak{D}}^\bullet) \xrightarrow{\sim} SD_{\mathrm{GL}(N-1, \mathbf{O}) \times \mathbb{C}^\times}(\mathrm{Gr}_{\mathrm{GL}_N})$, где $\overline{\mathfrak{D}}^\bullet$ обозначает градуированную алгебру Вейля сдвинутых дифференциальных операторов на $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{N-1}, \mathbb{C}^N)$ (с $\deg \hbar = 2$ и всеми остальными образующими в степени 1).

3.1.6 Гипотезы Гайотто

Встаёт законный вопрос, существует ли геометрическая реализация категорий представлений *невыврожденных* супергрупп $\mathrm{GL}(N|N)$, $\mathrm{GL}(N-1|N)$. Оказывается, есть такая (гипотетическая) реализация для категорий интегрируемых представлений *квантованных* алгебр $U_q(\mathfrak{gl}(N|N))$, $U_q(\mathfrak{gl}(N-1|N))$. Во-первых, аналогично классической эквивалентности Каждана-Люстига, ожидается, что $U_q(\mathfrak{gl}(M|N))\text{-mod} \cong \mathrm{KL}_c(\widehat{\mathfrak{gl}}(M|N))$, где $q = \exp(\pi\sqrt{-1}/c)$, а $\mathrm{KL}_c(\widehat{\mathfrak{gl}}(M|N))$ обозначает производную категорию $\mathrm{GL}(M, \mathbf{O}) \times \mathrm{GL}(N, \mathbf{O})$ -эквивариантных $\widehat{\mathfrak{gl}}(M|N)$ -модулей на уровне, отвечающем инвариантной билинейной форме $(X, Y) = c \cdot \mathrm{sTr}(XY) - \frac{1}{2} \mathrm{Killing}_{\mathfrak{gl}(M|N)}(X, Y)$ on $\mathfrak{gl}(M|N)$. Во-вторых, ожидается, что категория $\mathrm{KL}_c(\widehat{\mathfrak{gl}}(N-1|N))$ эквивалентна q -монодромической $\mathrm{GL}(N-1, \mathbf{O})$ -эквивариантной производной конструктивной категории пучков на дополнении \mathcal{L}^\bullet к нулевому сечению детерминантного линейного расслоения на $\mathrm{Gr}_{\mathrm{GL}_N}$, и эта эквивалентность переводит стандартную t -структуру на $\mathrm{KL}_c(\widehat{\mathfrak{gl}}(N-1|N))$ в извращённую t -структуру.

Далее, ожидается, что категория $\mathrm{KL}_c(\widehat{\mathfrak{gl}}(N|N))$ эквивалентна q -монодромической $\mathrm{GL}(N, \mathbf{O})$ -эквивариантной производной конструктивной категории пучков на $\mathcal{L}^\bullet \times \mathbf{V}$, и

³Мы рассматриваем $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{N-1}, \mathbb{C}^N)$ и $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^{N-1})$ как *нечётные* векторные пространства, так что $\mathrm{Sym}^\bullet(\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{N-1}, \mathbb{C}^N)[-1] \oplus \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^{N-1})[-1])$ (без учёта градуировки) является действительно симметрической (бесконечномерной) алгеброй, а не внешней.

эта эквивалентность переводит стандартную t -структуру на $\mathrm{KL}_c(\widehat{\mathfrak{gl}}(N|N))$ в извращённую t -структуру. Для $M < N - 1$ ожидается, что категория $\mathrm{KL}_c(\widehat{\mathfrak{gl}}(M|N))$ эквивалентна q -монодромической $\mathrm{GL}(M, \mathbf{O})$ -эквивариантной производной конструктивной категории пучков на \mathcal{L}^\bullet с подобающими условиями Уиттэкера. В частности, экстремальный случай $M = 0$ этой гипотезы следует из Фундаментальной Локальной Эквивалентности Гайцгорилурии геометрической программы Ленглендса.

Для других классических (т.е. ортосимплектических) супералгебр Ли есть аналогичные гипотезы, восходящие к Гайотто-Виттену.

3.1.7 Гипотезы Бен-Цви, Сакелларидиса и Венкатеша

Бен-Цви, Сакелларидис и Венкатеш разрабатывают фундаментальный проект вокруг гипотез, связывающих периоды автоморфных форм со специальными значениями автоморфных L -функций. Их гипотезы предсказывают (среди многого другого), что для редуктивной группы G и её однородного сферического многообразия $X = G/H$, определена подгруппа $G_X^\vee \subset G^\vee$, её градуированное представление $V_X^\vee = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_{X,i}^\vee[i]$, и эквивалентность $D\mathrm{Coh}(V_X^\vee/G_X^\vee) = D\mathrm{Coh}((\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_{X,i}^\vee[i])/G_X^\vee) \simeq D_{G(\mathbf{O})}(X(\mathbf{F}))$. Частичный список примеров можно найти в знаменитой статье Сакелларидиса. Например, представления V_X^\vee (построенные в терминах диаграммы Луны пространства X) перечислены в 4-м столбце таблицы в конце статьи.

Оказывается, эквивалентности, обсуждавшиеся в §3.1.5, укладываются в общую схему, очерченную в предыдущем абзаце. Так, пример 13 из таблицы Сакелларидиса отвечает эквивалентности $\overline{\Phi}: D_{\mathrm{perf}}^{\mathrm{GL}_{N-1} \times \mathrm{GL}_N}(\overline{\mathfrak{S}}_{1,1}^\bullet) \xrightarrow{\sim} D_{\mathrm{GL}(N-1, \mathbf{O})}(\mathrm{Gr}_{\mathrm{GL}_N})$ из §3.1.5. Чтобы объяснить это, положим $G := \mathrm{GL}_{N-1} \times \mathrm{GL}_N$, а $H := \mathrm{GL}_{N-1}$. Мы рассматриваем H как блочно-диагональную подгруппу G и полагаем $X = G/H$.

Тогда грубо говоря, имеем

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{GL}(N-1, \mathbf{O})}(\mathrm{Gr}_{\mathrm{GL}_N}) &\simeq D(\mathrm{GL}(N-1, \mathbf{O}) \backslash \mathrm{GL}(N, \mathbf{F}) / \mathrm{GL}(N, \mathbf{O})) \\ &\simeq D(G(\mathbf{O}) \backslash G(\mathbf{F}) / H(\mathbf{F})) \simeq D(G(\mathbf{O}) \backslash X(\mathbf{F})) \simeq D_{G(\mathbf{O})}(X(\mathbf{F})). \end{aligned}$$

С другой стороны, рассмотрим градуированный G^\vee -модуль $V_X^\vee := \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{N-1}, \mathbb{C}^N)[1] \oplus \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^{N-1})[1]$ (аналогично сноске в §3.1.5, мы рассматриваем V_X^\vee как *нечётное* векторное пространство в когомологической степени -1). Заметим также, что $G^\vee \simeq G = \mathrm{GL}_{N-1} \times \mathrm{GL}_N$. Поэтому эквивалентность $\overline{\Phi}$ из §3.1.5 принимает вид $D\mathrm{Coh}(V_X^\vee/G^\vee) \simeq D_{G(\mathbf{O})}(X(\mathbf{F}))$.

Аналогично, пример 14 из таблицы Сакелларидиса отвечает гипотезе Гайотто из §3.1.6 для ортосимплектической супералгебры Ли.

3.2 Двойная аффинная алгебра Гекке и многочлены Макдональда

Многочленами Макдональда $P_\lambda(X; q, t)$ называется специальное ортогональное семейство симметрических многочленов из $(q, t)[x_1, \dots, x_n]$, нумеруемых корнями простой алгебры Ли, для которого выполнено "треугольное условие": $P_\lambda = m^\lambda + \sum_{\mu < \lambda} c_{\lambda, \mu}(q, t)m^\mu$, где m^λ - мономиальные симметрические многочлены от x . Скалярное произведение, относительно которого многочлены Макдональда ортогональны, определяется как $\langle f, g \rangle_{q, t} = [\Delta_{q, t} f \bar{g}]_0$, где $\bar{x}^\lambda = x^{-\lambda}$, $\bar{q} = q$, $\bar{t} = t$, $\Delta_{q, t}$ - специфическая рациональная функция из (q, t) и $[f]_0$ - постоянный член f .

Многочлены Макдональда введены Макдональдом в книге [132] в качестве обобщения многочленов Шура, также являющихся ортогональным семейством, отвечающим "треугольному условию". Многочлены Шура ортонормированы для скалярного произведения $\langle f, g \rangle = \int_{n/n} \Delta_1(x) f(t) g(\bar{t}) dt$, где $\Delta_1(x) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2$, $x_k = e^{2\pi i t k}$. Существуют разные обобщения многочленов Шура: многочлены Джека получаются из них заменой квадрата в Δ_1 на степень, равную свободной переменной, многочлены Якоби - при переходе от старших весов \mathfrak{gl}_n к старшим весам произвольной полупростой алгебры Ли, а совмещая эти обобщения с переходом к q -аналогу Δ мы приходим к многочленам Макдональда. При этом все многочлены, упомянутые ранее, получаются из многочленов Макдональда некоторой подстановкой. Однако, в отличие от многочленов Шура, являющихся характерами неприводимых представлений n , многочлены Макдональда не имеют столь явной интерпретации, в том числе в силу того, что некоторые коэффициенты в "треугольном условии" оказываются отрицательными. Алгебраическая реализация многочленов Макдональда была построена И.Чередником путем представления несимметрических многочленов Макдональда E_μ , нумеруемых весами, в виде элементов двойной аффинной алгебры Гекке. Симметрические многочлены Макдональда получаются из несимметрических суммированием по всем образам старшего веса λ при действии группы Вейля. Комбинаторный подход к вычислению E_μ был предложен в статье [133]. Несимметрические многочлены Макдональда выражаются через суммы по путям в альковках аффинной решетки корней.

В данной работе мы используем основной результат [133] для того, чтобы вывести рекуррентную формулу для несимметрических многочленов Макдональда, специализации которой для $t = 0$ и $t = \infty$ уже были доказаны в [131].

Пусть W - аффинная группа Вейля алгебры Ли, \tilde{H} - соответствующая ей двойная аффинная алгебра Гекке с порождающими $X^\mu, Y^{\lambda^\vee}, T_i$.

Теорема 3.2.1. [133, Теорема 2.2] Пусть $v, w \in W$, $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_l}$ - приведенное слово w и

$\mathcal{B}(v,)$ - множество альковных путей в аффинной решетке корней. Для пути $p \in \mathcal{B}(v,)$ определим $f_+(p)$ и $f_-(p)$ как множество шагов p , не меняющих периодическую ориентацию в положительных и отрицательных областях соответственно. Тогда в \tilde{H} выполняется следующее соотношение:

$$X^v \tau_w = \sum_{p \in \mathcal{B}(v,)} X^{\text{end}(p)} \left(\prod_{k \in f_+(p)} \frac{t^{-1/2}(1-t)}{1 - Y^{-\beta_k^\vee}} \right) \left(\prod_{k \in f_-(p)} \frac{t^{-1/2}(1-t)Y^{-\beta_k^\vee}}{1 - Y^{-\beta_k^\vee}} \right),$$

где β_k^\vee индексирует гиперплоскость, пересекаемую k ым шагом p .

Полиномиальным представлением \tilde{H} называется $\pi : \tilde{H} \rightarrow [X] = [q^k X^\mu \mathbf{1}]$, такое что

$$\begin{aligned} \forall g \in \Omega \quad \pi(g) \mathbf{1} &= \mathbf{1}; \\ \pi(X^\mu) \mathbf{1} &= X^\mu \mathbf{1}; \\ \pi(T_i) \mathbf{1} &= t^{\frac{1}{2}} \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Несимметричными многочленами Макдональда называются многочлены $E_\mu = \pi(\tau_{X^\mu m}) \mathbf{1}$ in X^μ , где $X^\mu m$ - элемент наименьшей длины в $X^\mu W_0$. Определим для элемента $\sigma \in W$ вес $wt(\sigma)$ из решетки весов и конечное направление $\varphi(\sigma)$ из группы Вейля, такие что $X^\sigma = X^{wt(\sigma)} T_{\varphi(\sigma)}$. Применяя полиномиальное представление к Теореме 2.1, получаем следующее следствие.

$$E_\eta = \sum_{p \in (\mathbf{1}, X^\eta m)} X^{wt(\text{end}(p))} t^{\ell(\text{end}(p))/2} \left(\prod_{k \in f_+(p)} \frac{t^{-1/2}(1-t)}{1 - q^{-\beta_k^\vee, \rho_c}} \right) \left(\prod_{k \in f_-(p)} \frac{t^{-1/2}(1-t)q^{-\beta_k^\vee, \rho_c}}{1 - q^{-\beta_k^\vee, \rho_c}} \right) \mathbf{1},$$

где $X^\eta m = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_\ell}$ - приведённое слово. Из Следствия 2.1 индуктивно выводится формула, являющаяся результатом данной работы:

Теорема 3.2.2. *Многочлены $E_\sigma^\eta = \pi(X^{wt(\sigma)} \tau_\eta) \mathbf{1}$, где $\sigma, \eta \in W, \ell(s_\eta) > \ell(\eta)$ удовлетворяют следующим рекурсивным соотношениям:*

$$\begin{aligned} E_\sigma^{s_\eta} &= \frac{t^{-1/2}(1-t)}{1 - q^{-\beta^\vee, \rho_c}} E_{\eta + E_{s_\eta}}, & \text{если } \ell(\sigma) > \ell(\sigma s); \\ E_\sigma^{s_\eta} &= \frac{t^{-1/2}(1-t)q^{-\beta^\vee, \rho_c}}{1 - q^{-\beta^\vee, \rho_c}} E_{\eta + E_{s_\eta}}, & \text{если } \ell(\sigma) < \ell(\sigma s). \end{aligned}$$

где $\beta^\vee = \eta^{-1\vee}$.

4. Гомологическая алгебра

4.1 Кошулевы алгебры и инварианты Дональдсона-Томаса

Нами получен ряд результатов о структуре инвариантов Дональдсона-Томаса [135]. Ключевую роль в нашем описании играет специальное семейство квадратичных алгебр и свойство кошулевости.

Мотивные инварианты Дональдсона-Томаса симметричных колчанов, далее сокращенно называемые ДТ-инвариантами, были введены в статье [141] как естественные аналоги инвариантов Дональдсона-Томаса, считающие классы пучков. Первоначально они были определены чисто формально через факторизации произведения Эйлера мотивных порождающих рядов стеков представлений колчана. Таким образом, для исследования их свойств желательны более структурные интерпретации. Первая такая интерпретация была дана уже в работе [141] путем определения когомологической алгебры Холла колчана. Эта алгебра была введена в статье [141], а в работе [137] было доказано, что она изоморфна свободной суперкоммутативной алгебре, порожденной некоторым подпространством, ряд Пуанкаре которого кодирует все ДТ-инварианты, тем самым доказывая их целостность и положительность. Впоследствии были получены геометрические интерпретации ДТ-инвариантов в терминах пространств модулей представлений колчанов (см. [142], [138]). В частном случае одновершинных колчанов комбинаторная формула для инвариантов ДТ была получена в работе [143]. Гораздо позже ([136]) когомологическая алгебра Холла была отождествлена с канонической коалгеброй на универсальной обертывающей вертексной алгебре Ли; поскольку последняя является косвободной, это, в частности, дало альтернативное доказательство основного результата [137].

Мотивный производящий ряд $A_Q(x, q)$ симметричного колчана Q можно выразить через мотивные ДТ-инварианты $DT_{\mathbf{d}}(q)$, где \mathbf{d} – набор неотрицательных целых чисел, по одному на каждую вершину Q . Грубо говоря, $A_Q(x, q)$ равняется плетистической экспоненте производящей функции $DT_{\mathbf{d}}(q)$, деленной на $(1 - q)$. Обычно плетистическая экспонента рассматривается как формула, которая связывает ряд Пуанкаре векторного пространства с рядом Пуанкаре пространства симметричных тензоров. Для наших целей будет важна небольшая модификация этого результата: плетистическая экспонента связывает ряд Пуанкаре супералгебры Ли и ее универсальной обертывающей алгебры.

Поясним роль супералгебр Ли в нашей конструкции. Начнем с определения ассоциативной суперкоммутативной алгебры \mathcal{A}_Q . Эта алгебра определяется с помощью явных квадратичных соотношений на образующие $a_{i,k}$, где i – вершина Q , а k неотрицательное

целое число. Мы сопоставляем определенные степени образующим $a_{i,k}$ и показываем, что ряд Пуанкаре для \mathcal{A}_Q связан с мотивной производящей функцией $A_Q(x, q)$ простой заменой переменных. В простейшем нетривиальном случае колчана Q с одной вершиной и двумя петлями алгебра \mathcal{A}_Q является коммутативной алгеброй с четными образующими a_k , $k \geq 0$, и соотношениями

$$\sum_{k_1+k_2=k} a_{k_1} a_{k_2} = 0, \quad k \geq 0.$$

Согласно теории двойственности Кошуля для ассоциативных алгебр, существует квадратичная алгебра $\mathcal{A}_Q^!$, связанная с \mathcal{A}_Q . Если алгебра \mathcal{A}_Q является кошулевой, то ее ряд Пуанкаре равен мультипликативному обратному ряду Пуанкаре линейного двойственного пространства к $\mathcal{A}_Q^!$. Следовательно, для кошулевой алгебры \mathcal{A}_Q ряд Пуанкаре двойственной алгебры может быть использован для изучения мотивной производящей функции $A_Q(x, q)$.

Будучи двойственной по Кошулю к *суперкоммутативной* ассоциативной алгебре, алгебра $\mathcal{A}_Q^!$ изоморфна универсальной обертывающей алгебре некоторой супералгебры Ли \mathfrak{g}_Q . Например, для колчана с одной вершиной и двумя петлями получается супералгебра Ли с нечетными образующими b_k , $k \geq 0$ и соотношениями $[b_k, b_l] = [b_{k-1}, b_{l+1}]$. Поскольку $A_Q(x, q)$ равна полетистической экспоненте производящей функции инвариантов ДТ, деленной на $(1 - q)$, остается найти подпространство \mathfrak{g}_Q чей ряд Пуанкаре, умноженный на $(1 - q)^{-1}$, дает ряд Пуанкаре для \mathfrak{g}_Q . Следующая теорема идентифицирует это подпространство как подалгебру Ли в \mathfrak{g}_Q . Для формулировки мы используем обозначение Diff_1 для первой алгебры Вейля над \mathbb{Q} со стандартными образующими t и ∂_t .

Двойственная по Кошулю алгебра Ли \mathfrak{g}_Q имеет структуру Diff_1 модуля, и действие $\mathbb{Q}[t] \subset \text{Diff}_1$ на \mathfrak{g}_Q является сводным, с пространством образующих $\text{Ker}(\partial_t)$. Если алгебра \mathcal{A}_Q кошулева, то для каждого $\mathbf{d} \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^{Q_0}$ имеем

$$\text{DT}_{\mathbf{d}}(q) = q^{\frac{1}{2}|\mathbf{d}|-1} \sum_{n \geq 0} \dim(\text{Ker}(\partial_t)_{\mathbf{d},n}) q^{\frac{1}{2}n}.$$

Мы предполагаем, что алгебры \mathcal{A}_Q всегда кошулевы. Однако на данный момент мы не можем доказать это в полной общности. Нам удалось классифицировать все колчаны Q , для которых алгебра \mathcal{A}_Q имеет квадратичный базис соотношений Грёбнера для естественного упорядочения переменных $a_{i,k}$, который определяет приоритет значения k при сравнении образующих. Мы также описываем все колчаны Q , для которых определяющие соотношения нашей алгебры образуют регулярную последовательность, что исчерпывает два наиболее общих критерия кошульности. Таким образом, в этих случаях мотивные ДТ-инварианты могут быть вычислены с помощью алгебра \mathfrak{g}_Q . Кроме того, мы доказываем, что для любого симметричного колчана Q характеры алгебры \mathcal{A}_Q и двойственной по Кошулю алгебры мультипликативно обратны.

Выберем базис X в пространстве образующих V нашей квадратичной алгебры. Упорядочение одночленов (т.е. слов в алфавите X) в тензорной алгебре $T(V)$ называется допустимым, если это полный порядок и если произведение является возрастающей функцией своего аргументы: замена одного из мономов в произведении на больший увеличивает результат. При допустимом порядке мономов в тензорной алгебре говорят, что подмножество G идеала $I \subset T(V)$ является (некоммутативным) базисом Грёбнера, если старший моном каждого элемента I делится на старший моном элемента из G . Основная причина искать базисы Грёбнера продиктована соображениями линейной алгебры: базис Грёбнера для идеала дает обширную информацию о базисе Грёбнера фактора по модулю I . Точнее, моном называется нормальным относительно G , если он не делится ни на один из старших одночленов элементов G . Нормальные одночлены относительно любого набора образующих идеала I всегда образуют порождающее множество фактора по модулю I . Однако порождающее множество G идеала I является базисом Грёбнера в I тогда и только тогда, когда смежные классы одночленов, которые нормальны относительно G , образуют базис фактора по модулю I . Среди различных вариантов выбора базиса Грёбнера есть так называемый редуцированный базис Грёбнера, для которого ни один главный член не является делителем другого, а все члены являются нормальными; для каждого допустимого порядка существует единственный редуцированный базис Грёбнера. Имеет место следующее утверждение: алгебра \mathcal{A} с базисом Грёбнера, состоящим из элементов веса 2, является кошулевой.

Из базовой линейной алгебры следует, что если \mathcal{A} имеет базис Грёбнера, состоящий из элементов веса 2 (при некотором допустимом порядке мономов), то двойственная алгебра Кошуля $\mathcal{A}^!$ также имеет квадратичный базис Грёбнера для упорядочения, полученного обратным упорядочением мономов в элементах дуального базиса.

Следующий критерий применим только к коммутативным алгебрам. Напомним, что если R - коммутативное кольцо, а M - R -модуль, то элемент f четной гомологической степени называется M регулярным, если f инъективен на M . У этого определения есть нечетный аналог: элемент f нечетной гомологической степени называется M -регулярным, если ядро f на M совпадает с образом f на M (т.е. тоже тривиально в очевидном смысле). Последовательность элементов f_1, \dots, f_k из R называется M -регулярной, если f_i регулярна на $M/(f_1, \dots, f_{i-1})M$ для всех $i = 1, \dots, k$. Для $M = R$ мы будем использовать просто слово регулярный. Имеет место следующее утверждение: коммутативная алгебра A , которая является фактором некоторой алгебры полиномов R по идеалу (f_1, \dots, f_m) с квадратичными отношениями f_1, \dots, f_m , образующими регулярную последовательность, является Кошулевой.

Наших результаты тесно связаны с вертекс-операторным подходом к инвариантам

ДТ, предложенным в работе [136], который, в свою очередь, может быть связан с более геометрическим подходом [139, 140]. Можно интерпретировать алгебры \mathcal{A}_Q как коммутативные вертексные алгебры и показать, что их двойственные по Кошулю алгебры Ли являются в точности вертексными алгебрами Ли, изученными в работе [136]; таким образом, есть еще один уровень двойственности Кошуля, который может представлять интерес. Интересно отметить, что как алгебры \mathcal{A}_Q , рассматриваемые как коммутативные вершинные алгебры, так и их двойственные по Кошулю вертексные алгебры Ли, в определенном смысле свободны (для некоторых функций локальности на множествах образующих), и поэтому двойственность Кошуля между этими вертексными алгебрами, похоже на классическое бозон-фермионное соответствие. Также стоит отметить, что если Q получается из простого графа G удвоением (добавлением стрелки $i \rightarrow j$ всякий раз, когда i и j соединены ребром), алгебру \mathcal{A}_Q можно интерпретировать как координатную алгебру пространства арок многообразия, определяемого квадратичными одночленами, соответствующими ребрам G . Эти алгебры изучаются в ряде недавних статей; при этом основным инструментом изучения являются решетчатые вертекс операторные алгебры. Было бы очень интересно исследовать алгебру \mathcal{A}_Q для других колчанов в контексте изучения взаимосвязей между пространствами арок и вертексными алгебрами [134].

4.1.1 Приложения базисов Гребнера для операд к гомологической алгебре

Мы продолжаем работу над различными сложными алгебраическими структурами, которые были придуманы топологами для работы с бесконечным пространством петель [231], однако нашли и массу применений в других областях математики. Операды, проперады и пропы оказались очень удобным языком для работы с топологическими инвариантами, а также вопросами теории деформаций и связанной с ней гомологической алгеброй и математической физикой.

Известно, что наиболее удобным методом работы с числительными данными в алгебрах являются базисы Гребнера. В давней совместной работе [225] был разработан подход позволяющий перенести определения базисов Гребнера с алгебр на операды. Данный подход априоре не позволяет получить информацию о действии симметрических групп, однако даже это знание часто может быть получено при небольших дополнительных условиях. Главное преимущество базисов Гребнера состоит в том, что они поддаются программированию: в работе [223] предложено описание одного из программных продуктов, написанных специально для работы с Шаффл-операдами.

Понятие *операды* было предложено топологами для изучения пространств петель ([231]), в мире алгебры российской школой независимо было предложено аналогичное по-

нятие *многообразия алгебр* ([236]). Возьмём алгебру определенного типа, посмотрим на то, какие операции на ней есть, а после забудем саму алгебру; оставшиеся операции с зафиксированными на них правилами композиции называются *операдой*. В случае, когда исходных алгебр несколько и среди операций рассматриваются и те, которые связывают алгебры друг с другом, полученная алгебраическая структура называется крашенной операдой, где цвета отвечают за то, с элементом какой из алгебр приходится работать. На данный момент известно очень мало примеров, когда удастся получить численные характеристики крашенных операд. В частности, в сборнике алгебраических операд [246] равно, как и в целой книжке, посвященной крашенным операдам [245], практически отсутствуют ссылки на явные вычисления. Одной из причин является отсутствие подходящего языка и методов работы с крашенными операдами.

4.1.2 Базисы Гребнера для крашенных операд

Мы обобщаем теорию базисов Гребнера на случай крашенных операд. Данный метод позволяет продвигаться в вычислениях существенно дальше, чем любые другие известные подходы. Более того, с его помощью можно получать явное описание базисов и размерностей однородных компонент крашенной операды в тех случаях, когда удастся найти конечный базис Гребнера. Мы иллюстрируем нашу теорию, предъявив квадратичные базисы Гребнера для таких известных квадратичных операд, как операда когомологий Швейцарского сыра (Swiss-Cheese operad [237]) и операда алгебр Ли-Ринехарта. Для этих и других примеров мы приводим полное описание базисов и размерностей однородных компонент соответствующей операды и, более того, приводимые нами базисы настолько удачны, что позволяют дать описание действия симметрических групп на однородных компонентах. Для операды Ли-Ринехарта это первое известное такое описание, несмотря на то, что сама операда была определена Ринехартом ещё в 1963 году для нужд дифференциальной геометрии и не потеряла своей актуальности и по сей день.

Как и для случая обычных операд ([225]) понятие базисов Гребнера невозможно, если рассматривать действие всех групп симметрий, естественно действующих на пространствах операций фиксированной арности. В связи с этим нам приходится сначала забыть действие симметрической группы и ввести понятие крашенной шаффл-операды. Сделать это можно, только аккуратно пересмотрев известные определения крашенной операды. Выясняется, что количество образующих и соотношений в крашенной шаффл-операде существенно больше, чем в обычной, поскольку вместе с каждой операцией нужно также рассматривать и все, полученные из неё действием группы перенумераций всех листьев. Это обстоятельство сильно сказывается на объемах вычислений в конкретных примерах и объясняет сложность известных вычислений с крашенными операдами. Мы ограничи-

ваемся примерами с квадратичными базисами Гребнера, поскольку не квадратичные нам кажутся необозримыми на данный момент.

Каждый вход и выход операции в крашенной операде покрашен в подходящий цвет и операдные композиции операций должна быть согласована с покраской. Для того, чтобы выбрать базис в пространстве операций свободной (крашенной) операды, который поддается алгоритмическому описанию необходимо сделать 3 вещи:

- во-первых, упорядочить все входы всех возможных цветов;
- во-вторых, положить соответствующий граф на плоскость так, чтобы в каждой вершине локальный порядок минимумов нумеров в соответствующих поддеревьях располагался по часовой стрелке;
- в-третьих, рассматривать только те операдные композиции мономов, которые согласованы с построенной планарной структурой графов.

Следует отметить, что при планарной реализации вместе с каждой образующей операды необходимо также рассматривать и все графы, полученные из неё посредством действия полной симметрической группы на листьях. Мы утверждаем, что имеется множество различных порядков на мономах в свободной крашенной шаффл-операде, которые согласованы с частичными композициями, не нарушающими планарную структуру. Простейший используемый порядок называется лексикографический по путям: С каждым листом связан единственный путь соединяющий его с корнем и мы можем написать слово из образующих операды, встречающихся на этом пути. Коль скоро образующие операды упорядочены, для любых двух мономиальных операций арности n мы можем сравнить в лексикографически-степенном порядке построенные наборы из n слов, что и задает порядок на мономах в свободной Шаффл-операде. Однако для большинства используемых нами вычислений квадратичных базисов Гребнера более удачным оказывается сравнение слов при помощи порядка на квантовых многочленах, предложенного в [235].

Существенное отличие крашенной операды от обычной заметно уже при вычислении производящих функций размерностей крашенной операды. Для крашенной операды на d красках мы ассоциируем набор из d формальных степенных рядов:

$$F_{\mathcal{P}}^i(t_1, \dots, t_d) := \sum_{m_1, \dots, m_d \geq 0} \frac{\dim \mathcal{P}(m_1 + \dots + m_d, \chi, c_i)}{m_1! \dots m_d!} t_1^{m_1} \dots t_d^{m_d},$$

где $\chi : \{1, \dots, \sum m_i\} \rightarrow \{1, \dots, d\}$, такое что $|\chi^{-1}(c_j)| = m_j$ для $j = 1, \dots, d$.

Мы иллюстрируем нашу теорию на примере построения квадратичных базисов Гребнера для следующего списка операд:

- Операда, кодирующая коммутативную алгебру и идеал в ней,
- операда аффинных однородных пространств, предложенная в [240],
- операда гомологий топологической операды Швейцарского сыра ([237]),
- операда алгебр Ли-Ринехарта.

Наличие квадратичного базиса Гребнера является наиболее эффективным способом доказательства кошулевости. Тем самым, полученные нами результаты показывают, что все вышеперечисленные операды кошулевы и, как известно по опыту некрашенных операд [227, 241], соответствующие гомотопические категории алгебр имеют более простое описание. Кошулевость операды Ли-Ринехарта является новым и важным результатом для описания алгебр над ней, которые до сих пор остаются достаточно загадочными, как можно видеть из работы [239].

Важнейшим новым результатом является продвижения в описании операды Ли-Ринехарта. Следуя основополагающей статье [242] мы говорим, что алгебра Ли-Ринехарта это пара (S, L) , состоящая из коммутативной алгебры S и алгебры Ли L , такой, что с одной стороны L действует на S посредством дифференцирований, с другой L является S -модулем и с третьей, выполнены следующие соотношения для всех $s, t \in S$, $\alpha, \beta \in L$:

$$(s\alpha)(t) = s \cdot (\alpha(t)), \quad [\alpha, s\beta] = s[\alpha, \beta] + \alpha(s)\beta.$$

С каждым алгебраическим или гладким многообразием X можно связать алгебру Ли-Ринехарта состоящую из коммутативной алгебры функций на X и алгебры Ли векторных полей на X .

Теорема 4.1.1. *Крашенная операда Ли-Ринехарта имеет квадратичный базис Гребнера для подходящего порядка на шаффл-операде.*

Производящие функции размерностей операды Ли-Ринехарта имеют вид

$$\overrightarrow{F}_{\text{LieR}}(t_1, t_2) = \left(e^{\frac{t_1}{1-t_2}} - 1; -\log(1-t_2) \cdot e^{\frac{t_1}{1-t_2}} \right)$$

Теперь мы продвинулись существенно дальше и показали, как свести диоперады к крашенным операдам и, тем самым, перенести теорию Шаффл-операд и базисов Гребнера на случай диоперад. Как и раньше мы иллюстрируем нашу теорию примерами, без которых наличие теории невозможно: мы строим квадратичные базисы Гребнера у операд биалгебр Ли и квадратичных пуассоновых структур.

Более того, удивительным образом нам удастся предъявить необходимое условие на квадратичный базис Гребнера, гарантирующий кошулевость проперадной оболочки соответствующей диоперады. Это первый известный пример, когда базисы Гребнера позволяют

доказать кошулевость таких алгебраических структур, как пропереды. Все известные области применения базисов Гребнера обходились алгебраическими объектами, в которых мономы индексировались деревьями. Мономы же в свободной пропереди индексируются графами произвольного рода, что составляет дополнительные трудности в виде группы автоморфизмов Графов, работу с которой до этого момента не удавалось избежать.

Мы также доказываем, что деформационный комплекс закрученной пропереды квадратичных пуассоновых структур гомотопически эквивалентен классическому граф-комплексу Концевича. В частности, алгебра Ли автоморфизмов квадратичных структур квазиизоморфна знаменитой алгебре Ли Гротендика-Тейхмюллера. Это удивительный результат позволяющий существенно глубже понять теорию квантований Концевича и позволяющей продвинуться на следующий уровень примеров. То есть было известно, что линейные пуассоновы структуры отвечают структуре алгебры Ли и не могут быть продеформированы под действием группы Гротендика-Тейхмюллера. Соответственно, мы показали, что действие группы Гротендика-Тейхмюллера на квадратичных пуассоновых структурах точное и они являются достаточно богатым объектом, на котором можно изучить построенное действие.

4.1.3 Диопереды и базисы Гребнера

Напомним, что пропереды отвечают за алгебраические структуры, которые используют операции, которые полилинейны по своим аргументам и по своим результатам. Это очень сложный алгебраический объект, примерами которого служат алгебры Биалгебры Ли, алгебры Хопфа, фробениусовы алгебры и многие другие. До сих пор не было известно никакой общей теории, позволяющей получать какие-либо численные данные для проперед, а тем более для закрученных проперед. В частности, известно лишь три различных примера кошулевых проперед ([232], [226], [230]) и ни одного примера закрученной кошулевой пропереды. Диоперада состоит из тех операций пропереды, которые соответствуют графам нулевого рода, то есть являются деревьями. Мы замечаем, что если у пропередной операции зафиксировать один из входов/выходов и назвать его глобальным выходом, а все остальные входы/выходы назвать глобальными входами, то относительно полученной глобальной структуры мы получим алгебраический объект крайне напоминающий крашенную операду. Это позволяет нам сформулировать первый важный результат.

Мы определяем понятие шаффл-диоперад, забывающий функтор из категории диоперад в категорию шаффл-диоперад и понятие базисов Гребнера для (шаффл)-диоперад. По аналогии с крашенными шаффл-операдами нам приходится с каждой образующей диопереды с m -входами и n -выходами предъявить в соответствующей шаффл-диопераде $\binom{m+n}{n}$ образующих. И то же самое происходит с соотношениями. Тем самым даже простейшие

диоперады имеют крайне громоздкий базис Гребнера. Но это не умаляет достоинства этого понятия, несмотря на то, что руками проводить вычисления становится крайне затруднительно, поскольку такая алгебраическая конструкция может быть запрограммирована на компьютере. Мы смогли подготовить программу, которая позволяет искать квадратичные базисы Гребнера.

Квадратичные базисы Гребнера были найдены у следующих операд:

- диоперада биалгебр Ли;
- диоперада инфинитезимальных ассоциативных биалгебр;
- диоперада квадратичных пуассоновых структур;
- диоперада двойных скобок Пуассона.

На первый взгляд может показаться, что все исчислительные данные про вышеуказанные диоперады могут быть получены и без помощи базисов Гребнера и не понятно, зачем пользоваться столь сложным понятием, для всех простейших проперад.

Однако в следующей секции мы покажем, как существование хорошего квадратичного базиса Гребнера позволяет получить не только исчислительные данные о диопераде, но и гомологические утверждения. В частности, квадратичные базисы Гребнера – это самый простой и быстрый способ доказывать кошулевость, однако кошулевость диоперады является лишь необходимым условием кошулевости соответствующей проперадной оболочки.

4.1.4 От диоперад к проперадам

Основным алгебраическим объектом нашего изучения являются проперады и их закрученные версии, поскольку именно их представления естественно возникают в различных задачах математической физики, теории представлений, теории деформаций и других областях математики. Диоперады являются лишь промежуточным удобным для работы промежуточным звеном. Каждая диоперада, заданная образующими и соотношениями, имеет естественную проперадную оболочку. Более того у множества известных нам квадратичных проперад соотношения не используют графы ненулевого рода и потому эти проперады могут быть реализованы, как проперадные оболочки квадратичных диоперад.

К сожалению, понятие базисов Гребнера не может быть перенесено на столь сложную алгебраическую структуру, как проперада, потому что группы автоморфизмов произвольных графов могут быть крайне сложными и не порождаться локальными автоморфизмами в вершинах. Тем ни менее, для всех вышперечисленных диоперад мы нашли

квадратичные базисы Грёбнера, удовлетворяющие следующему удивительному условию: внутреннее ребро имеет ту же ориентацию, что и корневое ребро.

Такое условие позволяет показать, что фильтрация бар-комплекса по количеству источников вырождается в первом члене. Это удивительный факт, который может быть использован для проперад. А именно, мы показываем, что проперадная оболочка диопералы, обладающей квадратичным базисом Грёбнера с вышеописанным свойством, также является кошулевой. Это первый известный нам конструктивный критерий кошулевости пропералы, который можно проверить на компьютере.

Важным новым результатом является утверждение о том, что проперала квадратичных пуассоновых структур кошулева. Никакие предыдущие подходы не работали для данной пропералы.

4.1.5 Проперала квадратичных пуассоновых структур

В своей знаменитой работе [229] Максимом Концевичем было показано, что имеется биекция между множеством скобок Пуассона и квантованиями функций на плоском пространстве. Как было замечено сначала Дринфельдом и Концевичем, а в последствии доказано Вильвахером [233], группа Ли Гротендика-Тейхмюллера, равно как и её инфинитэзимальная версия (алгебра Ли Гротендика-Тейхмюллера grt) действуют автоморфизмами квантований. Известно, что теоретически данное действие имеет свободные орбиты, однако, на линейных скобках Пуассона действие тривиально, поскольку они квантуются единственным образом до универсальной обертывающей. Следующий по сложности пример – квадратичные скобки Пуассона. Это крайне богатый пример и известно масса интересных квадратичных скобок Пуассона, возникающих в разных областях математики.

Мы предъявили удобный квадратичный базис Грёбнера, который позволяет доказать, что проперала квадратичных пуассоновых структур является кошулевой пропералой. Поэтому рассматриваемая проперала имеет обозримую резольвенту, которая может быть использована для изучения теории деформаций. Данная резольвента может быть использована для построения деформационного комплекса, считающего алгебру Ли производных деформаций данной пропералы.

Ещё один важнейший результат, который нам удалось доказать – свести теорию деформаций к другим уже давно изучаемым теориям. Мы доказали, что построенный нами деформационный комплекс пропералы квадратичных пуассоновых структур изоморфен нечетному граф-комплексу Концевича GC_1 . Наоборот, деформационный комплекс закрученной пропералы квадратичных пуассоновых структур изоморфен четному граф-комплексу Концевича GC_2 . Следует отметить, что кошулевость закрученной пропералы квадратичных пуассоновых структур до сих пор неизвестна, как неизвестна кошулевость

ни одной закрученной пропереды.

Данная теорема доказывает, что деформации и автоморфизмы квадратичных пуассоновых структур столь же богаты, как и деформации всех пуассоновых структур.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение кратко суммируем полученные результаты по проекту.

- Прямым вычислением проверена правильность нормировок в соотношениях раздутья между Уиттекеровскими конформными блоками для аффинной алгебры и для алгебры Вирасоро.
- Определена изомонодромная тау-функция для двухчастичной неавтономной системы Калоджеро-Мозера как определитель Фредгольма некоторых операторов Племеля.
- Изучены интегрируемые структуры конформных теорий типа В, С, D и установлена их связь с граничным Бете анзацем аффинного Янгиана.
- Получена классификация преобразований фолдинга между решениями q -разностных уравнений Пенлеве.
- Развита новая связь между стабильным и стандартным бизисами в твистованных фоковских представлениях квантовой тороидальной алгебры.
- Показано, что гамильтонианы и первые и вторые скобки Пуассона DR- и DZ-иерархий связаны преобразованием Миуры (в приближении до рода 1).
- Найдены достаточные условия, при которых подалгебры Бете имеют простой спектр в ручных представлениях янгиана.
- Показано, что гамильтонианы, которые управляют динамикой полюсов по m -м иерархическим временам t_m и \bar{t}_m иерархии двумеризованной решетки Тоды получаются из разложения спектральной кривой для матрицы Лакса модели Руйсенарса-Шнайдера в отмеченных точках.
- Получено теоретико-представленческое доказательство гипергеометрической формулы для собственных функций гамильтониана Сазерленда.
- Развита теория полной положительности электрических групп Ли $G^{(a)}$.
- Построена эквивалентность Сатаке для некоторых супергрупп Ли.
- Получены рекуррентные соотношения на несимметричные полиномы Макдональда.
- Получен ряд результатов о структуре инвариантов Дональдсона-Томаса при помощи техники базисов Гребнера для операд.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ф. Г. Маликов, Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс, “Особые векторы в модулях Верма над алгебрами Каца–Мууди”, *Функц. анализ и его прил.*, 20:2 (1986), 25–37; *Funct. Anal. Appl.*, 20:2 (1986), 103–113
2. Tomoyuki Arakawa, Thomas Creutzig, Andrew R. Linshaw, *W-algebras as coset vertex algebras* (2018)
3. Кас V. G., Kazhdan D. A., Structure of representations with highest weight of infinite dimensional Lie algebras.— *Adv. Math.*, 1979, v. 34, p. 97–108
4. Berstein M.A., Feigin B. L., Litvinov A.V., Coupling of Two Conformal Field Theories and Nakajima–Yoshioka Blow-Up Equations
5. P. Goddard, A. Kent, D. Olive, Unitary Representations of the Virasoro and Super-Virasoro Algebras
6. Кац В.Г., Райна А., Рожковская Н. А., Бомбейские лекции о представлениях со старшим весом бесконечномерных алгебр Ли
7. E. Frenkel, Lectures on Wakimoto modules, opers and the center at the critical level
8. B. Feigin and E. Frenkel, Representations of affine Кас–Moody algebras, bosonization and resolutions, *Lett. Math. Phys.* 19 (1990) 307–317
9. M. Yu. Lashkevich, Coset Construction of Minimal Models
10. Кас V.G., Infinite dimensional Lie algebras.— Birkhauser, 1983.
11. P. Etingof, I Frenkel, A Kirillov, Lectures on representation theory and Knizhnik Zamolodchikov equations
12. Nikita Nekrasov, Blowups in BPS/CFT correspondence and Painlevé VI
13. Saebyeok Jeong, Nikita Nekrasov, Riemann-Hilbert correspondence and blown up surface defects
14. B. Malgrange, *Sur les déformations isomonodromiques. I. Singularités régulières*, pp. 1–26. No. 17 in Cours de l’institut Fourier. Institut des Mathématiques Pures - Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1982.
15. M. Bertola, *The Dependence on the Monodromy Data of the Isomonodromic Tau Function*, *Communications in Mathematical Physics* **294** (2010) 539 [0902.4716].

16. M. Bertola, *CORRIGENDUM: The dependence on the monodromy data of the isomonodromic tau function*, *ArXiv e-prints* (2016) [1601.04790].
17. P. Gavrylenko and O. Lisovyy, *Fredholm Determinant and Nekrasov Sum Representations of Isomonodromic Tau Functions*, *Commun. Math. Phys.* **363** (2018) 1 [1608.00958].
18. A. Hatcher, *Pants Decompositions of Surfaces*, *arXiv Mathematics e-prints* (1999) math/9906084 [math/9906084].
19. W. M. Goldman, *Trace Coordinates on Fricke spaces of some simple hyperbolic surfaces*, *arXiv e-prints* (2009) arXiv:0901.1404 [0901.1404].
20. G. Bonelli, F. Del Monte, P. Gavrylenko and A. Tanzini, $\mathcal{N} = 2^*$ gauge theory, free fermions on the torus and Painlevé VI, *Commun. Math. Phys.* **377** (2020) 1381 [1901.10497].
21. Ivan Cherednik. Double affine Hecke algebras, volume 319 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
22. Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley. A guide to quantum groups. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
23. Jintai Ding and Kenji Iohara. Generalization of Drinfeld quantum affine algebras. *Lett. Math. Phys.*, 41(2):181–193, 1997.
24. B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi, and S. Yanagida. A commutative algebra on degenerate $\mathbb{C}P^1$ and Macdonald polynomials. *J. Math. Phys.*, 50(9):095215, 42, 2009.
25. B. Feigin, A. Hoshino, J. Shibahara, J. Shiraishi, and S. Yanagida. Kernel function and quantum algebra. *RIMS Kokyuroku*, 1689:133–152, 2010.
26. I. B. Frenkel and N. Yu. Reshetikhin. Quantum affine algebras and holonomic difference equations. *Comm. Math. Phys.*, 146(1):1–60, 1992.
27. B. L. Feigin and A. I. Tsymbaliuk. Equivariant K-theory of Hilbert schemes via shuffle algebra. *Kyoto J. Math.*, 51(4):831–854, 2011.
28. E. Gorsky and A. Neguț. Infinitesimal change of stable basis. *Selecta Math. (N.S.)*, 23(3):1909–1930, 2017.

29. Victor Ginzburg, Nicolai Reshetikhin, and Éric Vasserot. Quantum groups and flag varieties. In *Mathematical aspects of conformal and topological field theories and quantum groups* (South Hadley, MA, 1992), volume 175 of *Contemp. Math.*, pages 101–130. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
30. Michio Jimbo and Tetsuji Miwa. *Algebraic analysis of solvable lattice models*, volume 85 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
31. M. Kashiwara, T. Miwa, and E. Stern. Decomposition of q -deformed Fock spaces. *Selecta Math. (N.S.)*, 1(4):787–805, 1995.
32. Yakov Kononov and Andrey Smirnov. Pursuing quantum difference equations II: 3D-mirror symmetry, 2020. Preprint
33. Bernard Leclerc and Jean-Yves Thibon. Littlewood-Richardson coefficients and Kazhdan-Lusztig polynomials. In *Combinatorial methods in representation theory* (Kyoto, 1998), volume 28 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 155–220. Kinokuniya, Tokyo, 2000.
34. K. Miki. $A(q, \gamma)$ analog of the $W_{1+\infty}$ algebra. *J. Math. Phys.*, 48(12):123520, 35, 2007.
35. Andrei Negut. The $\frac{m}{n}$ Pieri rule. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (1):219–257, 2016.
36. A. Neguț. The q -AGT-W relations via shuffle algebras. *Comm. Math. Phys.*, 358(1):101–170, 2018.
37. Andrei Okounkov. Lectures on K-theoretic computations in enumerative geometry. In *Geometry of moduli spaces and representation theory*, volume 24 of *IAS/Park City Math. Ser.*, pages 251–380. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017.
38. Richárd Rimányi, Andrey Smirnov, Alexander Varchenko, and Zijun Zhou. 3d mirror symmetry and elliptic stable envelopes, 2019. Preprint
39. Eugene Stern. Semi-infinite wedges and vertex operators. *Internat. Math. Res. Notices*, (4):201–219, 1995.
40. O. Schiffmann and E. Vasserot. The elliptic Hall algebra, Cherednik Hecke algebras and Macdonald polynomials. *Compos. Math.*, 147(1):188–234, 2011.

41. Olivier Schiffmann and Eric Vasserot. The elliptic Hall algebra and the K-theory of the Hilbert scheme of \mathbb{A}^2 . *Duke Math. J.*, 162(2):279–366, 2013.
42. T. Arakawa, *A remark on the c_2 -cofiniteness condition on vertex algebras*, arXiv:1004.1492.
43. T. Arakawa, *Associated varieties and Higgs branches (a survey)*, arXiv:1712.01945.
44. A. Buryak. *Double ramification cycles and integrable hierarchies*. *Communications in Mathematical Physics* 336 (2015), no. 3, 1085–1107.
45. A. Buryak, B. Dubrovin, J. Guéré, P. Rossi. *Tau-structure for the double ramification hierarchies*. *Communications in Mathematical Physics* 363 (2018), no. 1, 191–260.
46. A. Buryak, B. Dubrovin, J. Guéré, P. Rossi. *Integrable systems of double ramification type*. *International Mathematics Research Notices* 2020 (2020), no. 24, 10381–10446.
47. A. Buryak, J. Guere. *Towards a description of the double ramification hierarchy for Witten’s r -spin class*. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 106 (2016), no. 5, 837–865.
48. A. Buryak, J. Guéré, P. Rossi. *DR/DZ equivalence conjecture and tautological relations*. *Geometry & Topology* 23 (2019), no. 7, 3537–3600.
49. A. Buryak, H. Posthuma, S. Shadrin. *On deformations of quasi-Miura transformations and the Dubrovin–Zhang bracket*. *Journal of Geometry and Physics* 62 (2012), no. 7, 1639–1651.
50. A. Buryak, H. Posthuma, S. Shadrin. *A polynomial bracket for the Dubrovin–Zhang hierarchies*. *Journal of Differential Geometry* 92 (2012), no. 1, 153–185.
51. A. Buryak, P. Rossi. *Recursion relations for double ramification hierarchies*. *Communications in Mathematical Physics* 342 (2016), no. 2, 533–568.
52. A. Buryak, P. Rossi, S. Shadrin. *Towards a bihamiltonian structure for the double ramification hierarchy*. *Letters in Mathematical Physics* 111 (2021), article number 13.
53. A. du Crest de Villeneuve, P. Rossi. *Quantum D_4 Drinfeld–Sokolov hierarchy and quantum singularity theory*. *Journal of Geometry and Physics* 141 (2019), 29–44.
54. B. Dubrovin, Y. Zhang. *Bihamiltonian hierarchies in 2D topological field theory at one-loop approximation*. *Communications in Mathematical Physics* 198 (1998), no. 2, 311–361.

55. B. Dubrovin, Y. Zhang. *Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov–Witten invariants*. arXiv:math/0108160.
56. B. Dubrovin, Y. Zhang, *Virasoro symmetries of the extended Toda hierarchy*, Communications in Mathematical Physics 250 (2004), no. 1, 161–193.
57. C. Faber, S. Shadrin, D. Zvonkine. *Tautological relations and the r -spin Witten conjecture*. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (4) 43 (2010), no. 4, 621–658.
58. M. Kontsevich. *Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function*. Communications in Mathematical Physics 147 (1992), 1–23.
59. M. Kontsevich, Yu. Manin. *Gromov–Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry*. Communications in Mathematical Physics 164 (1994), no. 3, 525–562.
60. S.-Q. Liu, Z. Wang, Y. Zhang. *Linearization of Virasoro symmetries associated with semisimple Frobenius manifolds*. arXiv:2109.01846.
61. A. Okounkov, R. Pandharipande. *The equivariant Gromov–Witten theory of \mathbb{P}^1* . Annals of Mathematics 163 (2006), no. 2, 561–605.
62. E. Witten. *Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space*. Surveys in Differential Geometry 1 (1991), 243–310.
63. E. Witten. *Algebraic geometry associated with matrix models of two-dimensional gravity*. Topological methods in modern mathematics (Stony Brook, NY, 1991), 235–269, Publish or Perish, Houston, TX, 1993.
64. K. Ueno and K. Takasaki, *Toda lattice hierarchy*, Adv. Studies in Pure Math. 4 (1984) 1–95.
65. H. Airault, H.P. McKean, and J. Moser, *Rational and elliptic solutions of the Korteweg–De Vries equation and a related many-body problem*, Commun. Pure Appl. Math., 30 (1977) 95–148.
66. F. Calogero, *Solution of the one-dimensional N -body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials*, J. Math. Phys. 12 (1971) 419–436.
67. F. Calogero, *Exactly solvable one-dimensional many-body systems*, Lett. Nuovo Cimento 13 (1975) 411–415.

68. J. Moser, *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*, Adv. Math. **16** (1975) 197–220.
69. M.A. Olshanetsky and A.M. Perelomov, *Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. **71** (1981) 313–400.
70. И.М. Кричевер, *Рациональные решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили и интегрируемые системы N частиц на прямой*, Функц. Анал. и его Прил. **12:1** (1978) 59–61.
71. D.V. Chudnovsky, G.V. Chudnovsky, *Pole expansions of non-linear partial differential equations*, Nuovo Cimento **40B** (1977) 339–350.
72. И.М. Кричевер, *Эллиптические решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили и интегрируемые системы частиц*, Функц. Анал. и его Прил. **14:4** (1980) 45–54.
73. T. Shiota, *Calogero-Moser hierarchy and KP hierarchy*, J. Math. Phys. **35** (1994) 5844–5849.
74. L. Haine, *KP trigonometric solitons and an adelic flag manifold*, SIGMA **3** (2007) 015.
75. A. Zabrodin, *KP hierarchy and trigonometric Calogero-Moser hierarchy*, Journal of Mathematical Physics **61** (2020) 043502, arXiv:1906.09846.
76. V. Prokofev and A. Zabrodin, *Elliptic solutions to the KP hierarchy and elliptic Calogero-Moser model*, arXiv:2102.03784.
77. И.М. Кричевер, А.В. Забродин, *Спиновое обобщение модели Руйсенарса-Шнайдера, неабелева двумеризованная цепочка Тоды и представления алгебры Складина*, Успехи Мат. Наук, **50** (1995) 3–56.
78. A. Zabrodin, *Elliptic solutions to integrable nonlinear equations and many-body systems*, Journal of Geometry and Physics **146** (2019) 103506, arXiv:1905.11383.
79. S. N. M. Ruijsenaars and H. Schneider, *A new class of integrable systems and its relation to solitons*, Ann. Phys. **170** (1986) 370–405.
80. S.N.M. Ruijsenaars, *Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities*, Commun. Math. Phys. **110** (1987) 191–213.
81. P. Iliev, *Rational Ruijsenaars-Schneider hierarchy and bispectral difference operators*, Physica D **229** (2007), no. 2, 184–190, arXiv:math-ph/0609011.

82. A. Zabrodin, *The master T -operator for inhomogeneous XXX spin chain and mKP hierarchy*, SIGMA **10** (2014), 006.
83. V. Prokofev and A. Zabrodin, *Toda lattice hierarchy and trigonometric Ruijsenaars-Schneider hierarchy*, Journal of Physics A: Math. Theor., **52** (2019) 495202, arXiv:1907.06621.
84. А.В. Забродин, Матричная иерархия Кадомцева-Петвиашвили, Теор. и Мат. Физ. **199** (2019) 343–356.
85. E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, *Transformation groups for soliton equations: Nonlinear integrable systems – classical theory and quantum theory* (Kyoto, 1981). Singapore: World Scientific, 1983, 39–119.
86. M. Jimbo and T. Miwa, *Solitons and infinite dimensional Lie algebras*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto **19** (1983) 943–1001.
87. M. Jimbo, *Quantum R -matrix for the generalized Toda system*, Comm. Math. Phys. **102** (1986), 537–547, DOI: 10.1007/BF01221646
88. V. G. Drinfeld. *Quantum groups*, J. Soviet Math., **41:2** (1988) 898–915, DOI: 10.1007/BF01247086
89. B. Enriquez, S. Khoroshkin, S. Pakuliak, *Weight functions and Drinfeld currents*, Comm. Math. Phys. **276** (2007) 691–725, DOI: 10.1007/s00220-007-0351-y
90. N.Yu. Reshetikhin, M.A. Semenov-Tian-Shansky. *Central extension of quantum groups*. Lett. Math. Phys. **19** (1990) 133–142, DOI: 10.1007/BF01045884
91. V. G. Drinfeld. *A new realization of Yangians and of quantum affine algebras*, Soviet Math. Dokl. **36:2** (1988) 212–216.
92. J. Ding, I. Frenkel. *Isomorphism of two realizations of quantum affine algebra $U_q(\mathfrak{gl}(n))$* , Comm. Math. Phys. **156** (1993), 277–300, DOI: 10.1007/BF02098484
93. N. Jing, M. Liu, A. Molev. *Isomorphism between the R -matrix and Drinfeld presentations of quantum affine algebra: type C*, J. Math. Phys. **61** (2020), 031701, no. 3, 41 pp, DOI: 10.1063/1.5133854
94. N. Jing, M. Liu, A. Molev. *Isomorphism between the R -matrix and Drinfeld presentations of quantum affine algebra: types B and D*, SIGMA **16** (2020), 043, 49 pp, DOI: 10.3842/SIGMA.2020.043

95. S. Khoroshkin, S. Pakuliak, *A computation of an universal weight function for the quantum affine algebra $U_q(\mathfrak{gl}(N))$* , J. of Mathematics of Kyoto University, **48** n.2 (2008) 277–321, DOI: 10.1215/kjm/1250271413
96. S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov. *Bethe vectors of quantum integrable models based on $U_q(\mathfrak{gl}_N)$* . J. Phys. A: Math. Theor. **47**, 105202 (2014), DOI: 10.1088/1751-8113/47/10/105202
97. A. Hutsalyuk, A. Liashyk, S. Z. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov. *Actions of the monodromy matrix elements onto $\mathfrak{gl}(m|n)$ -invariant Bethe vectors*. J. Stat. Mech. (2020) 093104, DOI: 10.1088/1742-5468/abacb2
98. A. Liashyk, S. Z. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov. *Bethe vectors for orthogonal integrable models*. Theor. and Math. Phys. **201**(2) (2019) 1545–1564, DOI: 10.1134/S0040577919110023
99. A. Liashyk, S. Z. Pakuliak. *Algebraic Bethe ansatz for \mathfrak{o}_{2n+1} -invariant integrable models*. Theor. and Math. Phys. **206**(1) (2021) 19–39, DOI: 10.4213/tmf9968
100. A.M. Gainutdinov, N. Read, and H. Saleur, *Associative Algebraic Approach to Logarithmic CFT in the Bulk: The Continuum Limit of the $gl(1|1)$ Periodic Spin Chain, Howe Duality and the Interchiral Algebra*, CMP 341 v1, 2012
101. A. Berenstein, A. Zelevinsky, *Quantum cluster algebras, Advances in Mathematics*, vol. 195, **2** (2005), pp. 405–455.
102. Berenstein, A., Zelevinsky, A. *Total positivity in Schubert varieties*. Comment. Math. Helv. **72**, 128–166 (1997). <https://doi.org/10.1007/PL00000363>
103. Arkady Berenstein Sergey Fomin Andrei Zelevinsky, *Parametrizations of Canonical Bases and Totally Positive Matrices*, Advances in mathematics **122**, 49-149 (1996).
104. <https://pages.uoregon.edu/arkadiy/doublecanbases.pdf>
105. Yves Colin de Verdière, *Spectres de graphes*, Cours Spécialisés 4 (Soc. Math.de France)
106. T. Lam and P. Pylyavskyy, *Electrical networks and Lie theory*, Algebra Number Theory, Volume 9, Number 6 (2015), 1401-1418.
107. R.Kenyon and D. Wilson, *The spaces of circular planar electrical networks*, SIAM J. Discrete Math. 2014 DOI:10.1137/140997798/

108. Kashaev, R.M., Korepanov, I.G. and Sergeev, S.M. *Theor Math Phys* (1998) 117: 1402. <https://doi.org/10.1007/BF02557179>
109. S. Sergeev, Solutions of the Functional Tetrahedron Equation Connected with the Local Yang-Baxter Equation for the Ferro-Electric Condition, *Letters in Mathematical Physics* 45(2), (1998), pp 113-119.
110. Boris Shapiro, Michael Shapiro, Alek Vainshtein, Andrei Zelevinsky, Simply laced Coxeter groups and groups generated by symplectic transvections, *Michigan Math. J.* 48(1): 531-551 (2000). DOI: 10.1307/mmj/1030132732
111. Yi Su, Electrical Lie Algebra of Classical Types, *Electrical Lie Algebra of Classical Types*.
112. S. Sundaram, On the Combinatorics of Representations of $Sp(2n, \mathbb{C})$, *Thesis*, Massachusetts Institute of Technology, April 1986.
113. Uglov, D.B., Ivanov, I.T. $sl(N)$ Onsager's algebra and integrability. *J Stat Phys* 82, 87-113 (1996). <https://doi.org/10.1007/BF02189226>
114. J. Carrillo-Pacheco, F. Jarquin-Zarate, M. Velasco-Fuentes, F. Zaldivar, An explicit description in terms of Plucker coordinates of the Lagrangian-Grassmannian. arXiv:1601.07501
115. C. De Concini, Symplectic standard tableaux, *Ad. Math.* **34**, 1-27 (1979)
116. E. B. Curtis, D. Ingerman, J. A. Morrow, Circular planar graphs and resistor networks. *Linear algebra and its applications*. Vol.283. No. 1-3. p.115-150 (1998)
117. E. B. Curtis, D. Ingerman, J. A. Morrow, Inverse problems for electrical networks. *World Scientific*. Vol.13 (2000)
118. W. Fulton, J. Harris, Representation Theory: A First Course Graduate Texts in Mathematics, Vol.129 of Graduate texts in mathematics: Readings in mathematics, ISSN 0072-5285, Springer New York (1991)
119. P. Galashin, P. Pilyavskyy, Ising model and the positive orthogonal Grassmannian, *Duke Math. J.* 169(10): 1877-1942 (2020)
120. V. Gorbounov, D. Talalaev, Electrical varieties as vertex integrable statistical models, *J. Phys. A: Math. Theor.* V.53, 454001 (2020)

121. R. Kenyon, The Laplacian on planar graphs and graphs on surfaces. Current developments in mathematics, p.1-55. Int. Press, Somerville, MA (2012)
122. R. Karpman, Total positivity for the Lagrangian Grassmannian, Advances in Applied Mathematics, V.98 (2018)
123. R. Kenyon and D. Wilson: Boundary partitions in trees and dimers, Trans. Amer. Math. Soc. V.363, no. 3, P.1325–1364 (2011)
124. T. Lam and P. Pilyavskyy, Electrical networks and Lie theory, Algebra Number Theory 9(6), P.1401-1418 (2015)
125. T. Lam, Electroid varieties and a compactification of the space of electrical networks, Advances in Mathematics, V.338, P.549-600 (2018)
126. T. Lam, Totally nonnegative Grassmannian and Grassmann polytopes, CDM, V.2014, P.51-152 (2015)
127. R. J. Marsh and K. Rietsch. Parametrizations of flag varieties. Representation Theory, 8:212–242 (electronic), 2004. arXiv:math/0307017.
128. A. Postnikov, Total positivity, Grassmannians, and networks, arXiv:math/0609764.
129. K. Talaska: A formula for Plucker coordinates associated with a planar network, Int. Math. Res. Not. Art. ID rnn 081, 19 pp (2008)
130. H. Cohn, R. Kenyon, J. Propp, «A variational principle for domino tilings», Journal of American Mathematical Society, 14 (2001), no. 2, 297-346, arXiv:math/0008220
131. Feigin E., Kato S., Makedonskyi I., *Representation theoretic realization of non-symmetric Macdonald polynomials at infinity*, Journal fuer die reine und angewandte Mathematik. 2020. Vol. 764. P. 181-216
132. I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford University Press, London, 1988. MR1354144
133. A.Ram, M.Yip, *A combinatorial formula for Macdonald polynomials*, Adv. Math. 226 (2011), no. 1, 309–331.
134. T. Arakawa, A. Moreau, *Arc spaces and vertex algebras*, 2021, <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/moreau>.

135. V. Dotsenko, E. Feigin, M. Reineke, *Koszul algebras and Donaldson-Thomas invariants*, arXiv:2111.07588.
136. V. Dotsenko, S. Mozgovoy, *DT invariants from vertex algebras*, arXiv:2108.10338, 2021
137. A. Efimov, Cohomological Hall algebra of a symmetric quiver, *Compos.Math.*, 148(4):1133–1146, 2012.
138. H. Franzen, M. Reineke, *Semistable Chow-Hall algebras of quivers and quantized Donaldson-Thomas invariants*, *Algebra Number Theory*, 12(5):1001–1025, 2018.
139. D. Joyce, *Ringel-Hall style vertex algebra and Lie algebra structures on the homology of moduli spaces*, 2018. <https://people.maths.ox.ac.uk/joyce/hall.pdf>.
140. D. Joyce, *Enumerative invariants and wall-crossing formulae in abelian categories*, arXiv:2111.04694,
141. M. Kontsevich, Y. Soibelman, *Cohomological Hall algebra, exponential Hodge structures and motivic Donaldson-Thomas invariants*, *Commun. Num. Theor. Phys.*, 5:231–352, 2011.
142. S. Meinhardt, M. Reineke, *Donaldson-Thomas invariants versus intersection cohomology of quiver moduli*, *J. Reine Angew.Math.*, 754:143–178, 2019.
143. M. Reineke, *Degenerate cohomological Hall algebra and quantized Donaldson-Thomas invariants for m -loop quivers*, *Doc.Math.*, 17:1–22, 2012.
144. A. Floer, *An instanton-invariant for 3-manifolds*, *Commun. Math. Phys.* **118** (1988) 215–240.
145. C. H. Taubes, *Growth of the Higgs field for solutions to the Kapustin-Witten equations on R^4* , arXiv:1701.03072.
146. S. He, *A Gluing Theorem for the Kapustin-Witten Equations with a Nahm Pole*, arXiv:1707.06182.
147. N. C. Leung and R. Takahashi, *Energy bound for Kapustin-Witten solutions on $S^3 \times \mathbb{R}^+$* , arXiv:1801.04412.
148. Y. Tanaka, *A perturbation and generic smoothness of the Vafa-Witten moduli spaces on closed symplectic four-manifolds*, *Glasg. Math. J.* **61** (2019) 471–486.

149. S. Gukov, P. Putrov and C. Vafa, *Fivebranes and 3-manifold homology*, JHEP **1707**, 071 (2017), arXiv:1602.05302.
150. E. Witten, *Topological Quantum Field Theory*, Commun. Math. Phys. **117**, 353 (1988).
151. M. Bershadsky, C. Vafa and V. Sadov, *D-branes and topological field theories*, Nucl. Phys. B **463**, 420 (1996), hep-th/9511222.
152. E. Silverstein and E. Witten, *Criteria for conformal invariance of (0,2) models*, Nucl. Phys. B **444**, 161 (1995) hep-th/9503212.
153. S. H. Katz and E. Sharpe, *Notes on certain (0,2) correlation functions*, Commun. Math. Phys. **262**, 611 (2006) hep-th/0406226.
154. M. Dedushenko, *Chiral algebras in Landau-Ginzburg models*, JHEP **1803**, 079 (2018) arXiv:1511.04372.
155. A. Johansen, *Twisting of $N = 1$ SUSY gauge theories and heterotic topological theories*, Int. J. Mod. Phys. A **10**, 4325 (1995) hep-th/9403017.
156. A. Johansen, *Realization of $W(1+\text{infinity})$ and Virasoro algebras in supersymmetric theories on four manifolds*, Mod. Phys. Lett. A **9**, 2611 (1994) hep-th/9406156.
157. A. Johansen, *Infinite conformal algebras in supersymmetric theories on four manifolds*, Nucl. Phys. B **436**, 291 (1995) hep-th/9407109.
158. N. Nekrasov, *On the BPS/CFT correspondence*, Lecture at the University of Amsterdam string theory group seminar (Feb. 3, 2004); *2d CFT-type equations from 4d gauge theory*, Lecture at the IAS conference “Langlands Program and Physics” (March 8-10, 2004).
159. N. Nekrasov, *BPS/CFT correspondence: non-perturbative Dyson-Schwinger equations and qq-characters*, JHEP **1603**, 181 (2016), arXiv:1512.05388.
160. A. A. Belavin, M. A. Bershtein, B. L. Feigin, A. V. Litvinov and G. M. Tarnopolsky, *Instanton moduli spaces and bases in coset conformal field theory*, Commun. Math. Phys. **319**, 269 (2013), arXiv:1111.2803.
161. G. Bonelli, K. Maruyoshi, A. Tanzini and F. Yagi, *$N=2$ gauge theories on toric singularities, blow-up formulae and W -algebras*, JHEP **1301**, 014 (2013), arXiv:1208.0790.

162. M. Bershtein, B. Feigin and A. Litvinov, *Coupling of two conformal field theories and Nakajima-Yoshioka blow-up equations*, Lett. Math. Phys. **106**, no. 1, 29 (2016), arXiv:1310.7281.
163. U. Bruzzo, M. Pedrini, F. Sala and R. J. Szabo, *Framed sheaves on root stacks and supersymmetric gauge theories on ALE spaces*, Adv. Math. **288**, 1175 (2016), arXiv:1312.5554.
164. M. Bershtein, G. Bonelli, M. Ronzani and A. Tanzini, *Gauge theories on compact toric surfaces, conformal field theories and equivariant Donaldson invariants*, J. Geom. Phys. **118**, 40 (2017), arXiv:1606.07148.
165. Leonid Rybnikov, *A proof of the Gaudin Bethe Ansatz conjecture*. ArXiv:1608.04625
166. E. Witten, *Elliptic Genera and Quantum Field Theory*, Commun. Math. Phys. **109**, 525 (1987).
167. P. Putrov, J. Song and W. Yan, *(0,4) dualities*, JHEP **1603**, 185 (2016), arXiv:1505.07110.
168. work in progress
169. Y. Tanaka and R. P. Thomas, *Vafa-Witten invariants for projective surfaces I: stable case*, arXiv:1702.08487.
170. L. Göttsche and M. Kool, *Virtual refinements of the Vafa-Witten formula*, arXiv:1703.07196.
171. M. Alim, B. Haghighat, M. Hecht, A. Klemm, M. Rauch and T. Wotschke, *Wall-crossing holomorphic anomaly and mock modularity of multiple M5-branes*, Commun. Math. Phys. **339**, no. 3, 773 (2015), arXiv:1012.1608.
172. M. C. N. Cheng, S. Chun, F. Ferrari, S. Gukov and S. M. Harrison, *3d Modularity*, JHEP **1910**, 010 (2019) arXiv:1809.10148.
173. J. A. Bryan and R. Wentworth, *The multi-monopole equations for Kähler surfaces*, Turkish J. Math. **20** (1996) 119–128.
174. A. Haydys and T. Walpuski, *A compactness theorem for the Seiberg-Witten equation with multiple spinors in dimension three*, Geom. Funct. Anal. **25** (2015) 1799–1821.
175. A. Haydys, *Topology of the blow-up set for the Seiberg-Witten equation with multiple spinors*, arXiv:1607.01763.

176. B. L. Feigin, *Extensions of vertex algebras. Constructions and applications*, Usp. Mat. Nauk **72**, no. 4, 131 (2017).
177. L. F. Alday, D. Gaiotto and Y. Tachikawa, *Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories*, Lett. Math. Phys. **91**, 167 (2010), arXiv:0906.3219.
178. N. A. Nekrasov, *Seiberg-Witten prepotential from instanton counting*, Adv. Theor. Math. Phys. **7**, no. 5, 831 (2003), hep-th/0206161.
179. D. Maulik, A. Okounkov, *Quantum Groups and Quantum Cohomology*, arXiv:1211.1287.
180. O. Schiffmann, E. Vasserot, *Cherednik algebras, W algebras and the equivariant cohomology of the moduli space of instantons on A^2* , arXiv:1202.2756; *On cohomological Hall algebras of quivers : Yangians*, arXiv:1705.07491.
181. R. Gompf and A. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics, vol. **20**, American Mathematical Society, Providence RI (1999).
182. G.I. Olshanski, *Extension of the algebra $U(\mathfrak{g})$ for infinite-dimensional classical Lie algebras \mathfrak{g} , and the Yangians $Y(\mathfrak{gl}(m))$* , Soviet Math. Dokl. **36**, no. 3 (1988), 569-573; G.I. Olshanski, *Representations of infinite-dimensional classical groups, limits of enveloping algebras, and Yangians*, in "Topics in Representation Theory" (A. A. Kirillov, Ed.), Advances in Soviet Math. 2, AMS, Providence RI, 1991, 1-66.
183. B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa and E. Mukhin, *Branching rules for quantum toroidal \mathfrak{gl}_n* , Adv. Math. **300**, 229 (2016), arXiv:1309.2147.
184. B. Feigin, E. Frenkel, *Quantization of the Drinfeld-Sokolov reduction*, Phys. Lett. **B246** (1990), no. 1-2, 75-81.
185. M. Bershtein, B. Feigin, G. Merzon, *Plane partitions with a "pit": generating functions and representation theory*, Sel. Math. New Ser. **24** (2018) 21-62, arXiv:1512.08779.
186. A. Litvinov and L. Spodyneiko, *On W algebras commuting with a set of screenings*, JHEP **1611**, 138 (2016) arXiv:1609.06271.
187. D. Gaiotto and M. Rapcak, *Vertex Algebras at the Corner*, arXiv:1703.00982.
188. T. Prochazka and M. Rapcak, *Webs of W-algebras*, arXiv:1711.06888.
189. T. Creutzig and D. Gaiotto, *Vertex Algebras for S-duality*, arXiv:1708.00875.

190. E. Frenkel and D. Gaiotto, *Quantum Langlands dualities of boundary conditions, D-modules, and conformal blocks*, arXiv:1805.00203.
191. M. R. Gaberdiel and R. Gopakumar, *Minimal Model Holography*, J. Phys. A **46**, 214002 (2013) arXiv:1207.6697.
192. A. Gadde, S. Gukov and P. Putrov, *(0, 2) trialities*, JHEP **1403**, 076 (2014), arXiv:1310.0818.
193. S. Gukov, D. Pei, P. Putrov *Trialities of minimally supersymmetric 2d gauge theories*, arXiv:1910.13455.
194. A. Bawane, G. Bonelli, M. Ronzani and A. Tanzini, *$\mathcal{N} = 2$ supersymmetric gauge theories on $S^2 \times S^2$ and Liouville Gravity*, JHEP **1507**, 054 (2015), arXiv:1411.2762.
195. V. Ginzburg, M. Kapranov, and E. Vasserot, *Langlands reciprocity for algebraic surfaces*, Math. Res. Lett. **2** 1995, 147-160.
196. B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin *Representations of quantum toroidal gl_n* , arXiv:1204.5378.
197. B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa and E. Mukhin, *Finite Type Modules and Bethe Ansatz for Quantum Toroidal gl_1* , Commun. Math. Phys. **356**, no. 1, 285 (2017), arXiv:1603.02765.
198. A. A. Belavin, M. A. Bershtein and G. M. Tarnopolsky, *Bases in coset conformal field theory from AGT correspondence and Macdonald polynomials at the roots of unity*, JHEP **1303**, 019 (2013), arXiv:1211.2788.
199. B. Feigin, M. Jimbo, E. Mukhin *An evaluation homomorphism for quantum toroidal $gl(n)$ algebras*, arXiv:1709.01592.
200. H. Awata, H. Kanno, A. Mironov, A. Morozov, K. Suetake and Y. Zenkevich, *(q, t) -KZ equations for quantum toroidal algebra and Nekrasov partition functions on ALE spaces*, JHEP **1803**, 192 (2018), arXiv:1712.08016.
201. A. Gadde, S. Gukov and P. Putrov, *Walls, Lines, and Spectral Dualities in 3d Gauge Theories*, JHEP **1405**, 047 (2014), arXiv:1302.0015.
202. A. Gadde, S. Gukov and P. Putrov, *Exact Solutions of 2d Supersymmetric Gauge Theories*, arXiv:1404.5314.

203. E. Sharpe, *A few recent developments in 2d (2,2) and (0,2) theories*, Proc. Symp. Pure Math. **93**, 67 (2015), arXiv:1501.01628.
204. D. Gay and R. Kirby, *Trisecting 4-manifolds*, Geom. Topol. **20** (2016) 3097–3132.
205. S. Gukov, *Trisecting non-Lagrangian theories*, JHEP **1711**, 178 (2017), arXiv:1707.01515.
206. D. Gaiotto, *$N=2$ dualities*, JHEP **1208**, 034 (2012), arXiv:0904.2715.
207. D. Gaiotto, G. W. Moore and A. Neitzke, *Wall-crossing, Hitchin Systems, and the WKB Approximation*, arXiv:0907.3987.
208. S. Gukov, D. Pei, P. Putrov and C. Vafa, *BPS spectra and 3-manifold invariants*, arXiv:1701.06567.
209. N. Nekrasov and E. Witten, *The Omega Deformation, Branes, Integrability, and Liouville Theory*, JHEP **1009**, 092 (2010), arXiv:1002.0888.
210. D. Gaiotto and E. Witten, *S -Duality of Boundary Conditions In $N=4$ Super Yang-Mills Theory*, Adv. Theor. Math. Phys. **13**, no. 3, 721 (2009), arXiv:0807.3720.
211. A. Kapustin and E. Witten, *Electric-Magnetic Duality And The Geometric Langlands Program*, Commun. Num. Theor. Phys. **1**, 1 (2007), hep-th/0604151.
212. S. Gukov and E. Witten, *Gauge Theory, Ramification, And The Geometric Langlands Program*, hep-th/0612073.
213. P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, *Conformal Field Theory*, Graduate Texts in Contemporary Physics, New York, Springer-Verlag (1997).
214. D. Ruberman, *The minimal genus of an embedded surface of non-negative square in a rational surface*, Turkish J. Math **20** (1996) 129-135.
215. T. Lawson, *The minimal genus problem*, Expo. Math., **15** (1997), 385-431.
216. J. Meier, A. Zupan, *Bridge trisections of knotted surfaces in 4-manifolds*, arXiv:1710.01745.
217. M. Dedushenko, unpublished notes (2015).
218. M. Dedushenko and S. Gukov, *A 2d (0,2) appetizer*, arXiv:1712.07659.

219. C. Beem, M. Lemos, P. Liendo, W. Peelaers, L. Rastelli and B. C. van Rees, *Infinite Chiral Symmetry in Four Dimensions*, Commun. Math. Phys. **336**, no. 3, 1359 (2015), arXiv:1312.5344.
220. L. Fredrickson, D. Pei, W. Yan and K. Ye, *Argyres-Douglas Theories, Chiral Algebras and Wild Hitchin Characters*, JHEP **1801**, 150 (2018), arXiv:1701.08782.
221. T. Tanisaki, *Associated Varieties of Highest Weight Modules*, 1985.
222. D. Vogan, *Associated varieties and unipotent representatins*, Harmonic Analysis on Reductive Groups (W. Barker and P. Sally, eds.), Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1991, pp. 315-388.
223. Bremner M. R., Dotsenko V. *Algebraic operads: an algorithmic companion*. – CRC Press, 2016.
224. Buchberger, Bruno. "*Bruno Buchberger's PhD thesis 1965: An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal*". Journal of symbolic computation 41.3-4 (2006): 475-511.
225. V. Dotsenko, A. Khoroshkin, Gröbner bases for operads. Duke Math. J. Volume 153, Number 2 (2010), 363–396
226. R. Campos, S. Merkulov, T. Willwacher The Frobenius properad is Koszul. // Duke Mathematical Journal – 2016. – V. 165, N 15, – P. 2921-2989.
227. V. Ginzburg, M. Kapranov, Koszul duality for operads, *Duke Math. J.*, 76 (1994), no. 1, 203–272.
228. V. Kharitonov, A. Khoroshkin *Gröbner bases for coloured operads*. // accepted by Annali di Matematica Pura ed Applicata arXiv:math/2008.05295.
229. Kontsevich M., *Deformation quantization of Poisson manifolds*. // Letters in Mathematical Physics – 2003. – V. 66 N 3 – P. 157-216.
230. Leray J. *Protooperads ii: Koszul duality* // arXiv:math/1901.05654
231. May J.P., *The geometry of iterated loop spaces*. // Lecture Notes in Mathematics – 1973. – V. 271. – P. 96.
232. M. Markl, A. Voronov *PROPPed-up graph cohomology* // Algebra, Arithmetic, and Geometry. Birkhäuser Boston – 2009. – P. 249-281.

233. Willwacher T., *M. Kontsevich's graph complex and the Grothendieck–Teichmüller Lie algebra* // *Inventiones mathematicae*. — 2015. — V. 200, N 3., — P. 671-760.
234. Bruno Buchberger, *An algorithm for finding a basis for the residue class ring of a zero-dimensional polynomial ideal*, Ph.D. thesis, University of Innsbruck, 1965 (German), *Journal of Symbolic Computation*, **41** (2006), 471–511.
235. Vladimir Dotsenko, *Word operads and admissible orderings*, Preprint [arXiv:1907.03992](https://arxiv.org/abs/1907.03992) [math.CT].
236. V. Drensky. *Free algebras and PI-algebras*. Graduate course in algebra. Singapore, 2000. 271 pp.
237. Eduardo Hoefel, Muriel Livernet, *Open-Closed Homotopy Algebras and Strong Homotopy Leibniz Pairs Through Koszul Operad Theory*, *Lett Math Phys* (2012) **101**:195–222
238. Vladislav Kharitonov, *Colored Operads Quadraticity*,
 GitHub repository: https://github.com/ttlalok/Colored_Operads_Quadraticity DOI 10.5281/zenodo.4061833
239. Francisco Kordon, Thierry Lambre, *Lie-Rinehart and Hochschild cohomology for algebras of differential operators*, Preprint [arXiv:2006.01218v1](https://arxiv.org/abs/2006.01218v1) [math.KT].
240. Sergei Merkulov, *Operad of Formal Homogeneous Spaces and Bernoulli Numbers*, *Algebra & Number Theory* 2.4 (2008): 407–433.
241. D. Quillen, "Rational homotopy theory." *Annals of Mathematics* (1969): 205-295.
242. George Rinehart, *Differential forms on general commutative algebras*, *Transactions of the American Mathematical Society* 108.2 (1963): 195-222.
243. Anatoly I. Shirshov, *Some algorithmic problems for Lie algebras*, *Sibirsk. Mat. Z.*, **3** (1962), 292–296 (Russian), *SIGSAM Bulletin*, **33** (1999), no. 2, 3–6.
244. Pepijn van der Laan, *Coloured Koszul duality and strongly homotopy operads*, Preprint [arXiv:math/0312147v2](https://arxiv.org/abs/math/0312147v2) [math.QA].
245. Donald Yau, *Colored Operads*, American Mathematical Society, 2016.
246. Zinbiel, G. W. *Encyclopedia of types of algebras 2010*. Operads and universal algebra, 9, 217-297.

247. Hidetaka Sakai. Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations. *Comm. Math. Phys.*, 220(1):165–229, 2001.
248. Teruhisa Tsuda, Kazuo Okamoto, and Hidetaka Sakai. Folding transformations of the Painlevé equations. *Math. Ann.*, 331(4):713–738, 2005.
249. O. Gamayun, N. Iorgov, and O. Lisovyy. Conformal field theory of Painlevé vi. *Journal of High Energy Physics*, 2012(10), Oct 2012. [arXiv:1207.0787].
250. O Gamayun, N Iorgov, and O Lisovyy. How instanton combinatorics solves Painlevé vi, v and iiis. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(33):335203, Jul 2013. [arXiv:1302.1832].
251. A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nuclear Phys. B*, 241(2):333–380, 1984.
252. Luis F. Alday, Davide Gaiotto, and Yuji Tachikawa. Liouville correlation functions from four-dimensional gauge theories. *Lett. Math. Phys.*, 91(2):167–197, 2010. [arXiv:0906.3219].
253. Nikita A. Nekrasov. Seiberg-Witten prepotential from instanton counting. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 7(5):831–864, 2003. [arXiv:hep-th/0206161].
254. M. Jimbo, H. Nagoya, and H. Sakai. Cft approach to the q-Painlevé vi equation. *J. Integrab. Syst.*, 2(1):1, 2017. [arXiv:1706.01940].
255. Yuya Matsuhira and Hajime Nagoya. Combinatorial expressions for the Tau functions of q-Painlevé v and iii equations. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, Sep 2019. [arXiv:1811.03285].
256. M A Bershtein and A I Shchekkin. Q-deformed Painlevé tau function and q-deformed conformal blocks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 50(8):085202, Jan 2017. [arXiv:1608.02566].
257. Giulio Bonelli, Alba Grassi, and Alessandro Tanzini. Quantum curves and q-deformed Painlevé equations. *Lett. Math. Phys.*, 109(9):1961–2001, 2019. [arXiv:1710.11603].
258. Vladimir A. Fateev, Alexey V. Litvinov, André Neveu, and Enrico Onofri. A differential equation for a four-point correlation function in Liouville field theory and elliptic four-point conformal blocks. *J. Phys. A*, 42(30):304011, 29, 2009. [arXiv:0902.1331].

259. Rubik Poghosian. Recursion relations in CFT and $N = 2$ SYM theory. *J. High Energy Phys.*, (12):038, 14, 2009. [arXiv:0909.3412].
260. Leszek Hadasz, Zbigniew Jaskólski, and Paulina Suchanek. Recursive representation of the torus 1-point conformal block. *J. High Energy Phys.*, (1):063, 13, 2010. [arXiv:0911.2353].
261. Hiraku Nakajima and Kōta Yoshioka. Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory. *Invent. Math.*, 162(2):313–355, 2005. [arXiv:math/0306198].
262. Hiraku Nakajima and Kōta Yoshioka. Instanton counting on blowup. II. K -theoretic partition function. *Transform. Groups*, 10(3-4):489–519, 2005. [arXiv:math/0505553].
263. M. Bershtein and A. Shchekkin. Painlevé equations from Nakajima-Yoshioka blowup relations. *Lett. Math. Phys.*, 109(11):2359–2402, 2019. [arXiv:1811.04050].
264. Anton Shchekkin. *Painlevé equations and representation theory*. PhD thesis, HSE University, 2020.
265. James E. Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups*, volume 29 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
266. James E. Humphreys. *Conjugacy classes in semisimple algebraic groups*, volume 43 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.